

ТОЭ – часть 1
практическое занятие 14

**Линейные цепи с
негармоническими
периодическими
напряжениями и токами**

Негармонические периодические напряжения и токи как функции времени $f(t)$ с периодом T могут быть представлены в виде тригонометрического **ряда Фурье**, состоящего из суммы **постоянной составляющей ($k=0$)** и гармоник с кратными ($k=1,2,3\dots$) частотами ($k\omega$).

Далее линейную цепь можно рассчитывать методом **наложения**, т.е. определять **постоянную составляющую и каждую гармонику** напряжений и токов по **отдельности**.

Задача 1

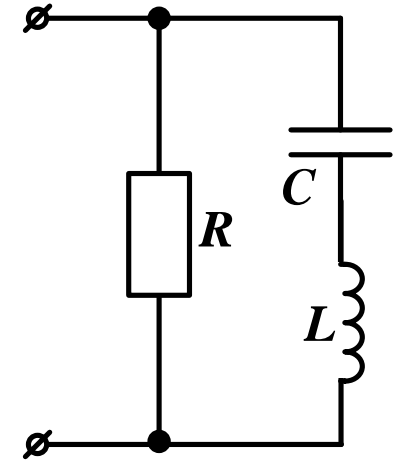
Дано:

$$\underline{Z}^{(0)} = 100 \text{ (Ом)};$$

$$\underline{Z}^{(1)} = 0 \text{ (Ом)};$$

$$X_L^{(2)} = 100 \text{ (Ом)}.$$

Найти: $X_C^{(3)} = ?$



Входное сопротивление $\underline{Z}^{(k)} = ?$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \quad X_L^{(k)} = k\omega L = kX_L^{(1)}; \quad X_C^{(k)} = 1/k\omega C = X_C^{(1)}/k;$$

$$\underline{Z}^{(k)} = \frac{R \left[jX_L^{(k)} - jX_C^{(k)} \right]}{R + jX_L^{(k)} - jX_C^{(k)}}; \quad \underline{Z}^{(0)} = \frac{R \left[0 - j\infty \right]}{R + 0 - j\infty} = R = 100 \text{ (Ом)}$$

$$\underline{Z}^{(1)} = \frac{R \left[jX_L^{(1)} - jX_C^{(1)} \right]}{R + jX_L^{(1)} - jX_C^{(1)}} = \mathbf{0} \text{ (Ом)},$$

$$\text{тогда } X_L^{(1)} = X_C^{(1)} = \frac{X_L^{(2)}}{2} = \mathbf{50} \text{ (Ом)}.$$

В результате

$$X_C^{(3)} = \frac{X_C^{(1)}}{3} \approx \mathbf{16,67} \text{ (Ом)}$$

Задача 2

Дано:

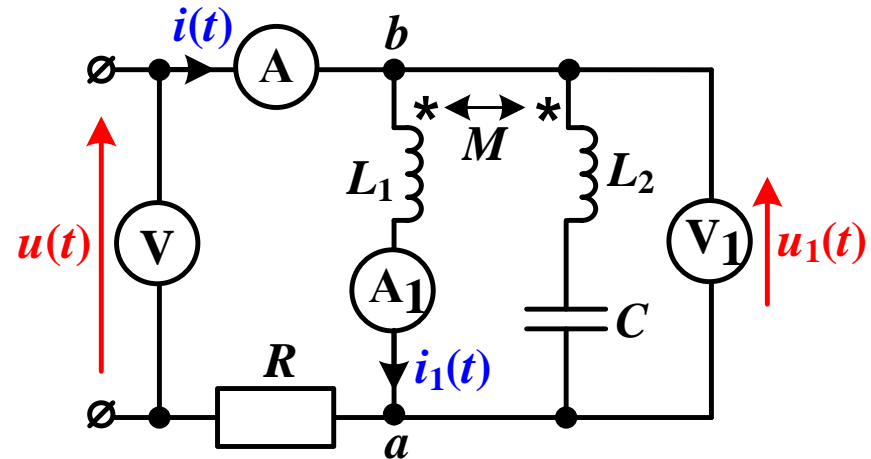
$$u(t) = 40 + 80\sin(\omega t) + 50\sin(2\omega t), \text{ (В)}$$

$$X_{L1}^{(1)} = 400 \text{ (Ом)};$$

$$X_{L2}^{(1)} = 200 \text{ (Ом)};$$

$$X_M^{(1)} = 100 \text{ (Ом)};$$

$$X_C^{(1)} = 400 \text{ (Ом)}; R = 100 \text{ (Ом)}.$$



Найти показания приборов
электромагнитной и
магнитоэлектрической систем.

1. Сопротивления для k -гармоники:

$$k=0,1,2,\dots; \quad X_{L1}^{(k)} = k\omega L_1 = kX_{L1}^{(1)}; \quad X_{L2}^{(k)} = k\omega L_2 = kX_{L2}^{(1)};$$

$$X_M^{(k)} = k\omega M = kX_M^{(1)}; \quad X_C^{(k)} = 1/k\omega C = X_C^{(1)}/k.$$

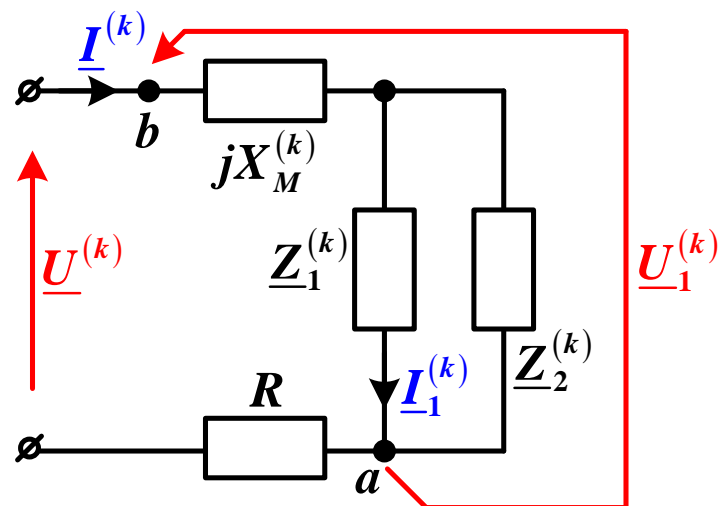
2. Развязка для k -гармоники:

$$\underline{Z}_1^{(k)} = jX_{L1}^{(k)} - jX_M^{(k)};$$

$$\underline{Z}_2^{(k)} = jX_{L2}^{(k)} - jX_M^{(k)} - jX_C^{(k)};$$

$$\underline{U}^{(0)} = 40 \text{ (В)}; \underline{U}^{(1)} = \frac{80}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} \text{ (В)};$$

$$\underline{U}^{(2)} = \frac{50}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} \text{ (В)}.$$



Входное сопротивление

$$\underline{Z}_{bx}^{(k)} = R + jX_M^{(k)} + \frac{\underline{Z}_1^{(k)} \underline{Z}_2^{(k)}}{\underline{Z}_1^{(k)} + \underline{Z}_2^{(k)}};$$

Правило разброса

$$\underline{I}_1^{(k)} = \underline{I}^{(k)} \frac{\underline{Z}_2^{(k)}}{\underline{Z}_1^{(k)} + \underline{Z}_2^{(k)}};$$

Закон Ома

$$\underline{I}^{(k)} = \frac{\underline{U}^{(k)}}{\underline{Z}_{bx}^{(k)}};$$

2-ой закон Кирхгофа

$$\underline{U}_1^{(k)} = jX_M^{(k)} \underline{I}^{(k)} + \underline{Z}_1^{(k)} \underline{I}_1^{(k)}.$$

3. Постоянная составляющая ($k=0$):

$$\underline{U}^{(0)}=40 \text{ (В)}; \underline{Z}_1^{(0)}=0; \underline{Z}_2^{(0)}=\infty; \underline{Z}_{bx}^{(0)}=R=100 \text{ (ОМ)};$$
$$\underline{I}^{(0)}=\underline{I}_1^{(0)}=I^{(0)}=0,4 \text{ (А)}; \underline{U}_1^{(0)}=0.$$

4. Первая гармоника ($k=1$):

$$\underline{U}^{(1)}=56,57e^{j0^\circ} \text{ (В)}; \underline{Z}_1^{(1)}=j300 \text{ (ОМ)}; \underline{Z}_2^{(1)}=-j300 \text{ (ОМ)};$$
$$\underline{Z}_{bx}^{(1)}=\infty \text{ (ОМ)}; \underline{I}^{(1)}=0; \underline{U}_1^{(1)}=\underline{U}^{(1)}=56,57e^{j0^\circ} \text{ (В)};$$
$$\underline{I}_1^{(1)}=\underline{U}_1^{(1)}/\underline{Z}_1^{(1)}=0,189e^{-j90^\circ} \text{ (А)}.$$

Резонанс токов на 1-й гармонике.

5. Вторая гармоника ($k=2$):

$$\underline{U}^{(2)}=35,36e^{j0^\circ} \text{ (В)}; \underline{Z}_1^{(2)}=j600 \text{ (ОМ)}; \underline{Z}_2^{(2)}=0;$$
$$\underline{Z}_{bx}^{(2)}=223,61e^{j63,4^\circ} \text{ (ОМ)}; \underline{I}^{(2)}=0,158e^{-j63,4^\circ} \text{ (А)}; \underline{I}_1^{(2)}=0;$$
$$\underline{U}_1^{(2)}=31,6e^{j26,6^\circ} \text{ (В)}.$$

6. Показания приборов электромагнитной системы: действующие значения

$$I_A = \sqrt{I^{(0)2} + I^{(1)2} + I^{(2)2}} = \sqrt{0,4^2 + 0^2 + 0,158^2} = 0,43(\text{A});$$

$$I_{A1} = \sqrt{I_1^{(0)2} + I_1^{(1)2} + I_1^{(2)2}} = \sqrt{0,4^2 + 0,189^2 + 0^2} = 0,44(\text{A});$$

$$U_V = \sqrt{U^{(0)2} + U^{(1)2} + U^{(2)2}} = \sqrt{40^2 + 56,57^2 + 35,36^2} = 77,78(\text{В});$$

$$U_{V1} = \sqrt{U_1^{(0)2} + U_1^{(1)2} + U_1^{(2)2}} = \sqrt{0^2 + 56,57^2 + 31,6^2} = 64,8(\text{В}).$$

7. Показания приборов магнитоэлектрической системы: постоянные составляющие

$$I_A = I^{(0)} = 0,4(\text{A}); I_{A1} = I_1^{(0)} = 0,4(\text{A});$$

$$U_V = U^{(0)} = 40(\text{В}); U_{V1} = U_1^{(0)} = 0(\text{В}).$$

Задача 3

Дано:

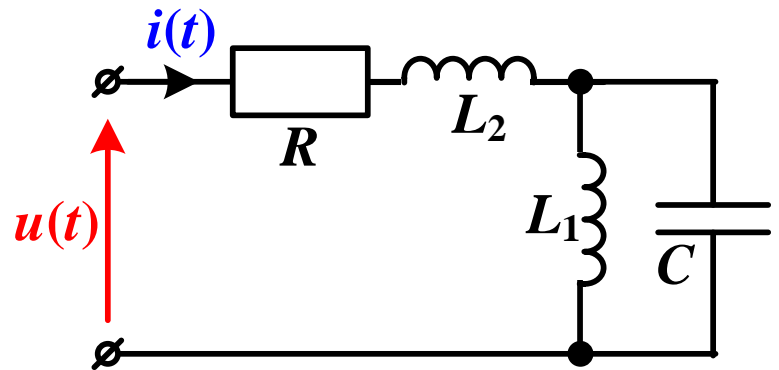
$$u(t) = 100 + 282\sin(\omega t + 90^\circ) + 141\sin(2\omega t) + 71\sin(3\omega t - 90^\circ), \text{ (В)}$$

$$X_{L1}^{(1)} = 80 \text{ (ОМ)};$$

$$X_{L2}^{(1)} = 10 \text{ (ОМ)};$$

$$X_C^{(1)} = 80 \text{ (ОМ)};$$

$$R = 100 \text{ (ОМ)}.$$



Найти мощности: $P=?$ $Q=?$ $S=?$

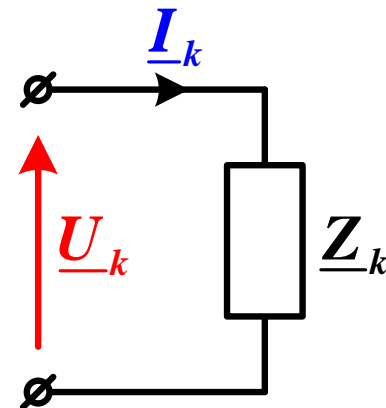
1. Сопротивления для k -гармоники:

$$k=0,1,2,3..; X_{L1}^{(k)} = k\omega L_1 = kX_{L1}^{(1)}; X_{L2}^{(k)} = k\omega L_2 = kX_{L2}^{(1)};$$

$$X_C^{(k)} = 1/k\omega C = X_C^{(1)}/k.$$

2. Комплексная схема для k -гармоники:

$$\underline{Z}_k = R + jkX_{L2}^{(1)} + \frac{jkX_{L1}^{(1)} \left[-j X_C^{(1)} / k \right]}{jkX_{L1}^{(1)} - j X_C^{(1)} / k} =$$
$$= 100 + j10k + \frac{6400}{j80k - j80/k}, (\text{Ом})$$



Закон Ома

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{U}_k}{\underline{Z}_k}$$

Гармоники входного напряжения:

$$\underline{U}_0 = U_0 = 100 (\text{В}); \underline{U}_1 = \frac{282}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} (\text{В});$$

$$\underline{U}_2 = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} (\text{В}); \underline{U}_3 = \frac{71}{\sqrt{2}} e^{-j90^\circ} (\text{В}).$$

3. Постоянная составляющая ($k=0$):

$$U_0=100 \text{ (В)}; \underline{Z}_0=100 \text{ (Ом)}; I_0=1 \text{ (А)};$$

активная мощность $P_0=U_0I_0=100 \text{ (Вт)}$.

4. Первая гармоника ($k=1$):

$$\underline{U}_1=200e^{j90^\circ} \text{ (В)}; \underline{Z}_1=Z_1e^{j\varphi^1} = \infty; \underline{I}_1=0;$$

активная мощность $P_1=|\underline{U}_1| \cdot |\underline{I}_1| \cos(\varphi^1)=0 \text{ (Вт)}$;

реактивная мощность $Q_1=|\underline{U}_1| \cdot |\underline{I}_1| \sin(\varphi^1)=0 \text{ (вар)}$.

Резонанс токов на 1-й гармонике.

5. Вторая гармоника ($k=2$):

$$\underline{U}_2=100e^{j0^\circ} \text{ (В)}; \underline{Z}_2=Z_2e^{j\varphi^2} =105,4e^{-j18,4^\circ} \text{ (Ом)};$$

$$\underline{I}_2=0,945 e^{j18,4^\circ} \text{ (А)};$$

активная мощность $P_2=|\underline{U}_2| \cdot |\underline{I}_2| \cos(\varphi^2)=90 \text{ (Вт)}$;

реактивная мощность $Q_2=|\underline{U}_2| \cdot |\underline{I}_2| \sin(\varphi^2)= -30 \text{ (вар)}$.

6. Третья гармоника ($k=3$):

$\underline{U}_3=50e^{-j90^\circ}$ (В); $\underline{Z}_3=Z_3e^{j\varphi^3}=100e^{j0^\circ}$ (Ом); $\underline{I}_3=0,5e^{-j90^\circ}$ (А);
активная мощность $P_3=|\underline{U}_3|\cdot|\underline{I}_3|\cos(\varphi^3)=25$ (Вт);
реактивная мощность $Q_3=|\underline{U}_3|\cdot|\underline{I}_3|\sin(\varphi^3)=0$ (вар).

Резонанс напряжений на 3-й гармонике.

7. Мощности с учетом всех гармоник ($k=0,1,2,3$):

а) активная мощность

$$P=P_0+P_1+P_2+P_3=215 \text{ (Вт)}$$

б) реактивная мощность

$$Q=Q_1+Q_2+Q_3= -30 \text{ (вар)}$$

в) полная мощность

$$U=\sqrt{U_0^2+|\underline{U}_1|^2+|\underline{U}_2|^2+|\underline{U}_3|^2}=250 \text{ (В)}; I=\sqrt{I_0^2+|\underline{I}_1|^2+|\underline{I}_2|^2+|\underline{I}_3|^2}=1,47 \text{ (А)};$$

$$S=U\cdot I=367,5 \text{ (ВА)}$$

$$\cos\varphi=P/S=0,585$$