

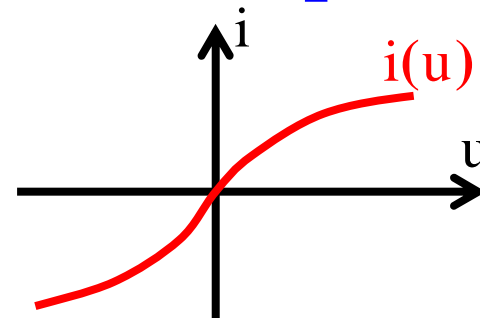
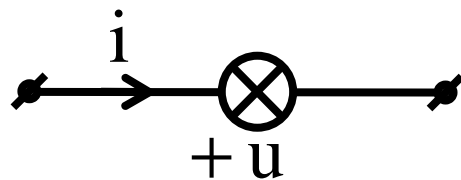
5 лекция

Нелинейные резистивные элементы (НРЭ)

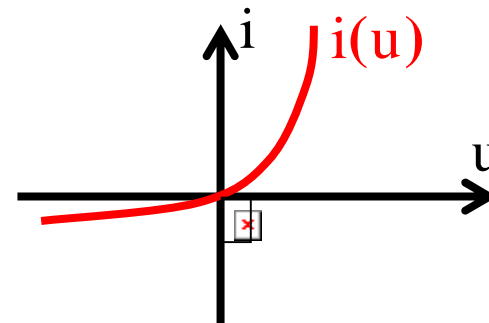
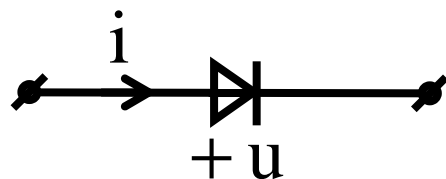
НРЭ имеют **нелинейную** вольтамперную характеристику **ВАХ** $i(u)$, не запасают электромагнитную энергию и необратимо преобразуют её в **тепло** и **другие** виды **энергии**, например, в **энергию светового излучения**.

К нелинейным резистивным элементам относятся, например:

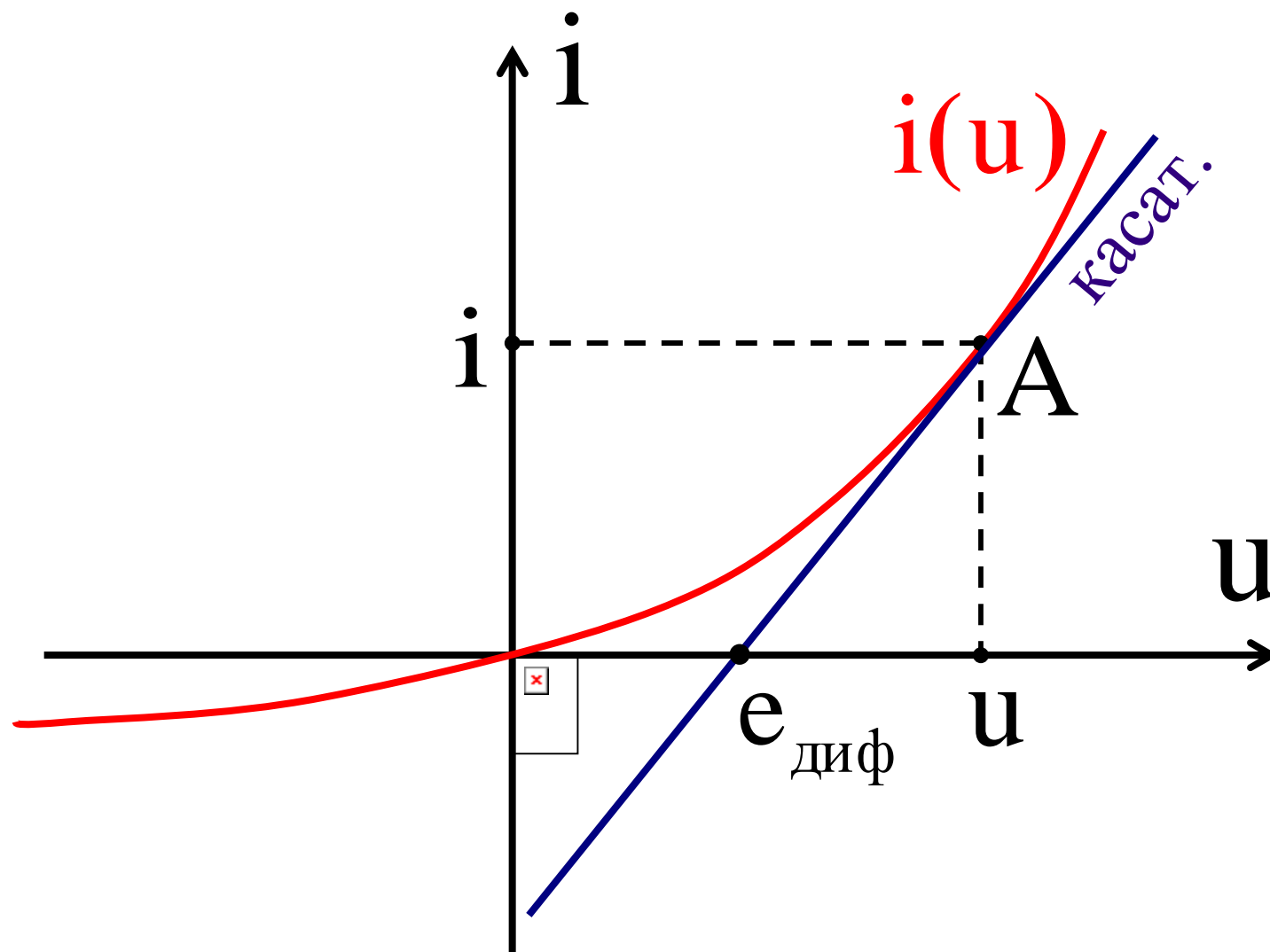
1. Лампа накаливания с симметричной ВАХ



2. Полупроводниковый диод с несимметричной ВАХ



Линеаризация ВАХ $i(u)$ в рабочей точке A :



Статическое сопротивление:

$$R_{\text{ст}}(u) = \frac{u}{i(u)}, \quad \text{Ом}$$

Дифференциальное сопротивление:

$$\begin{aligned} R_{\text{диф}}(u) &= \frac{du}{di} = \frac{u - e_{\text{диф}}(u)}{i(u)} = \\ &= R_{\text{ст}}(u) - \frac{e_{\text{диф}}(u)}{i(u)}, \quad \text{Ом} \end{aligned}$$

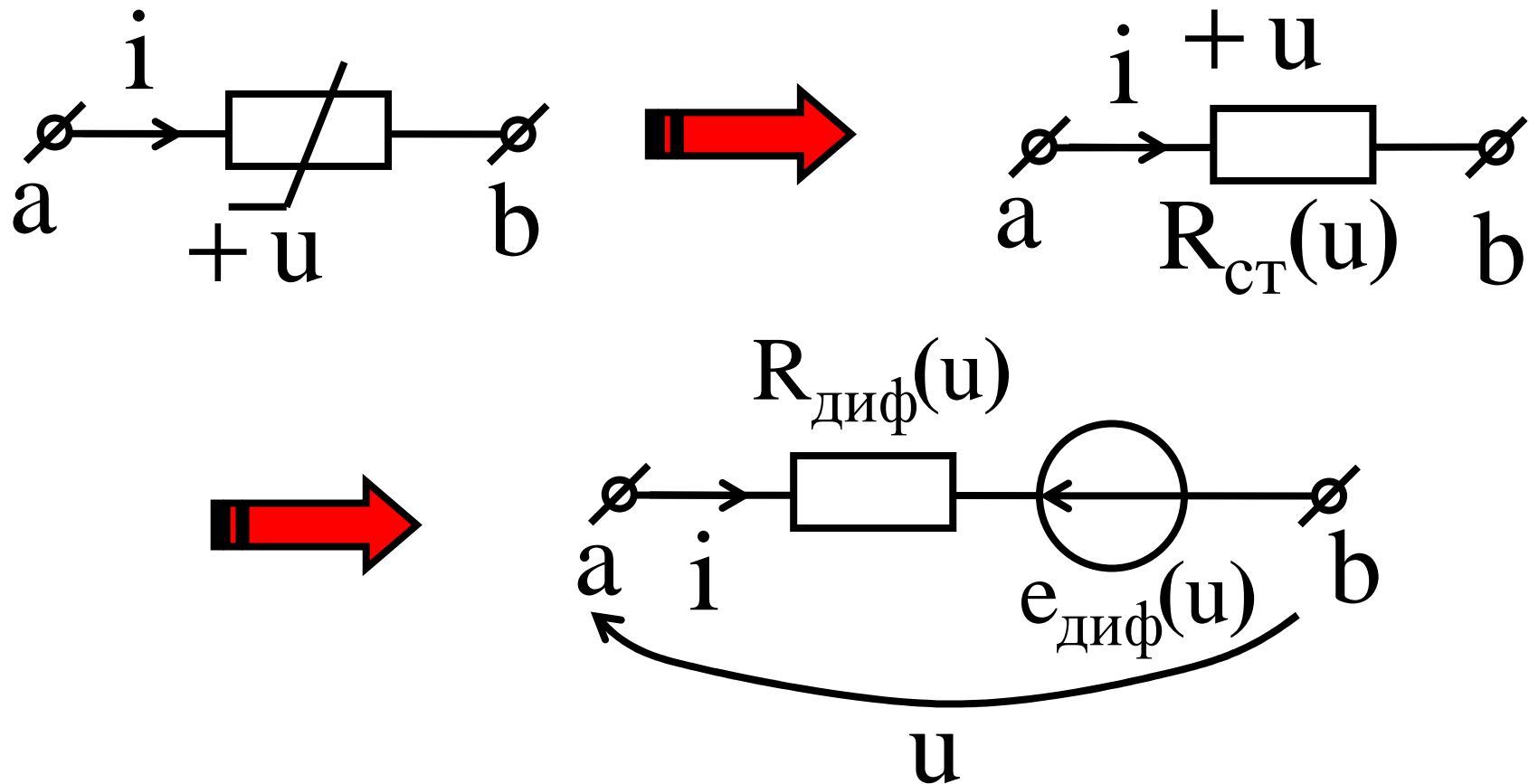
Ток НРЭ:

$$i(u) = \frac{u}{R_{\text{ст}}(u)} = \frac{u - e_{\text{диф}}(u)}{R_{\text{диф}}(u)}, \text{ А}$$

Потребляемая **мощность** НРЭ:

$$P(u) = u \cdot i(u) = \frac{u^2}{R_{\text{ст}}(u)} = \\ = \frac{u^2 - u \cdot e_{\text{диф}}(u)}{R_{\text{диф}}(u)}, \text{ Вт}$$

В общем случае **НРЭ**
обозначаются:



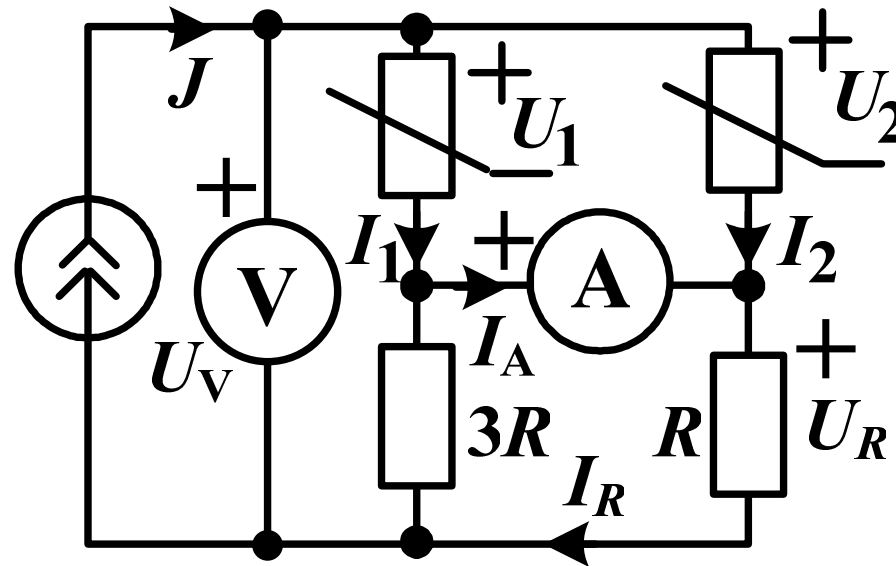
Расчет нелинейных резистивных цепей

Расчет ведется **графоаналитическими** методами на основе законов **Кирхгофа** с использованием **ВАХ** НРЭ $i(u)$.

При этом расчет нелинейных резистивных цепей при переменных напряжениях и токах осуществляется для **мгновенных значений** и каждого момента времени по отдельности.

1. Применение законов Кирхгофа для схем с одинаковыми НРЭ:

Пример



Дано: $J=2$ (А), $R=100$ (Ом).

Одинаковые НРЭ имеют ВАХ при $I_{1,2}>0$:

$$U_{1,2} = 200I_{1,2}^2 \text{ (В)}.$$

Определить I_A (А) и U_V (В).

Решение:

$$I_{1,2} = 0,5J = 1 \text{ (A);}$$

$$U_{1,2} = 200I_{1,2}^2 = 200 \text{ (B);}$$

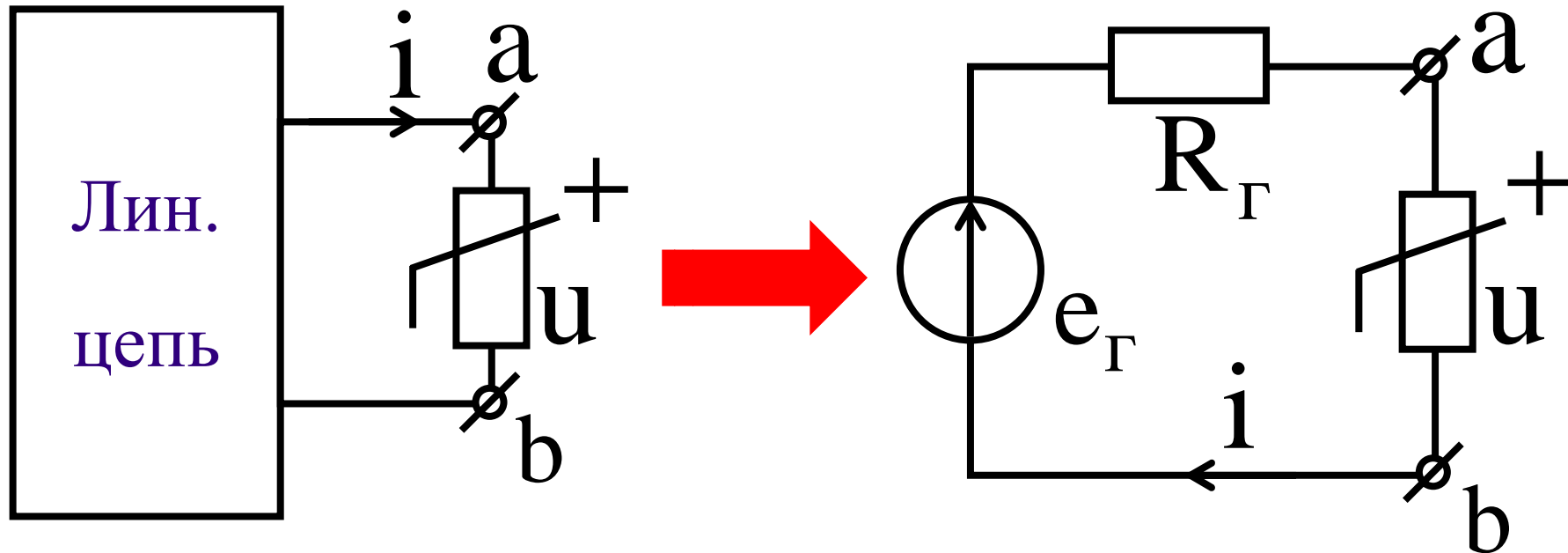
$$I_R = 3RJ / (3R + R) = 1,5 \text{ (A);}$$

$$U_R = RI_R = 150 \text{ (B);}$$

$$I_A = I_R - I_2 = 0,5 \text{ (A);}$$

$$U_V = U_2 + U_R = 350 \text{ (B).}$$

2. Метод эквивалентного генератора – применяется для цепей с **одним** НРЭ:

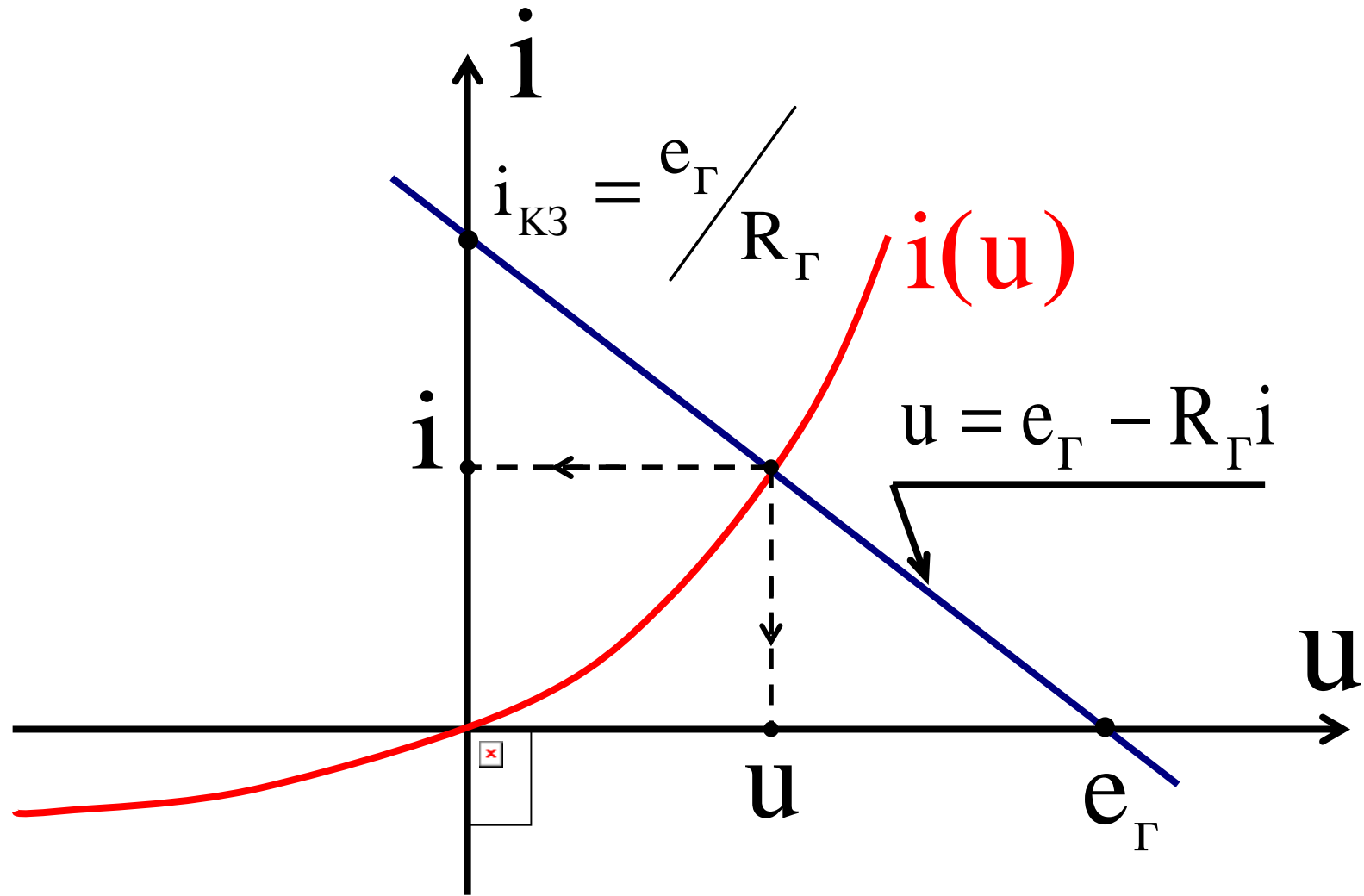


$e_{\Gamma} = u_{\text{ХХ}}$ – напряжение холостого хода при $i=0$;

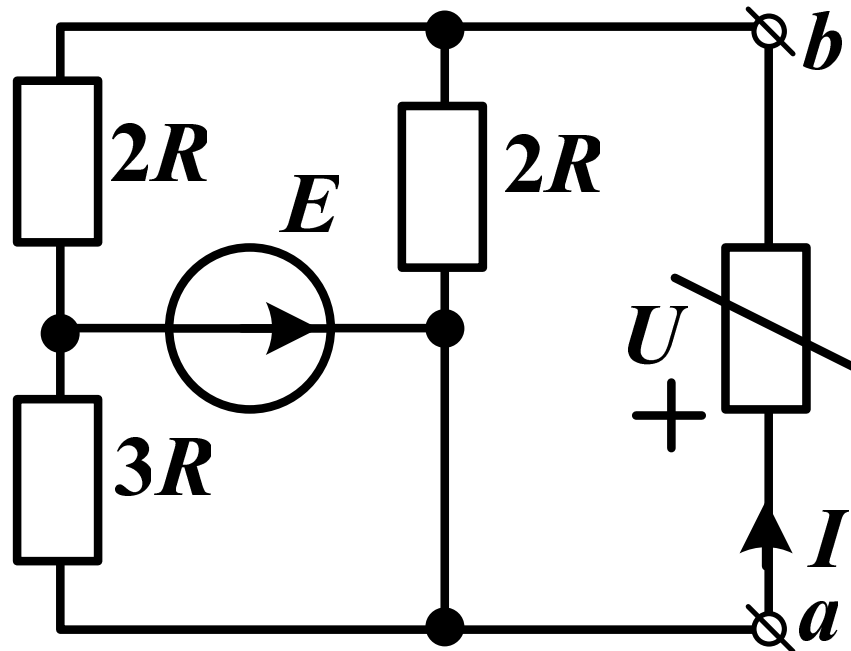
$i_{\text{кз}}$ – ток короткого замыкания при $u=0$;

$R_{\Gamma} = u_{\text{ХХ}} / i_{\text{кз}}$ – эквивалентное сопротивление линейной цепи относительно зажимов **ab**.

Графическое решение: $u=?$, $i=?$



Пример:

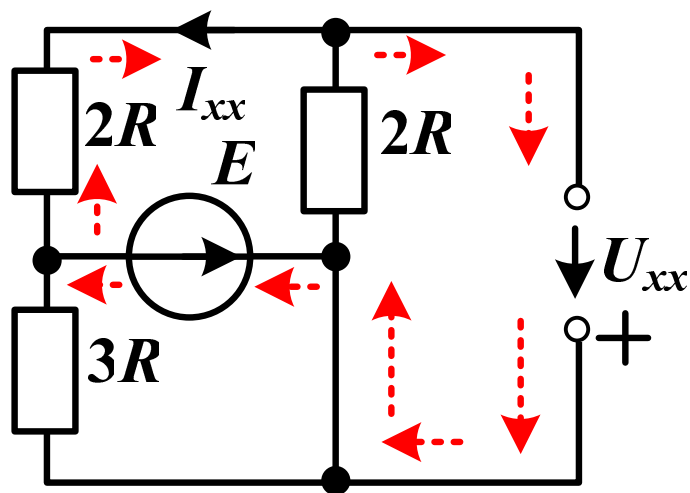


Дано: $E=400$ (В), $R=100$ (Ом).

НРЭ имеет ВАХ при $I>0$: $U=100I^2$ (В).

Определить ток I (А).

а) параметры эквивалентного генератора



$$R_{\Gamma} = 2R \cdot 2R / (2R + 2R) = 100 \text{ (Ом)}$$

по закону Ома:

$$I_{xx} = E / 4R = 1 \text{ (А)}$$

По 2-му закону Кирхгофа:

$$U_{xx} - E = -2RI_{xx} \quad \rightarrow$$

$$E_{\Gamma} = U_{xx} = E - 2RI_{xx} = 200 \text{ (В)}$$

б) аналитическое решение

По 2-му закону

Кирхгофа:

$$E_{\Gamma} = R_{\Gamma}I + U = R_{\Gamma}I + U = \\ = 100I + 100I^2 = 200 \text{ (В)}$$

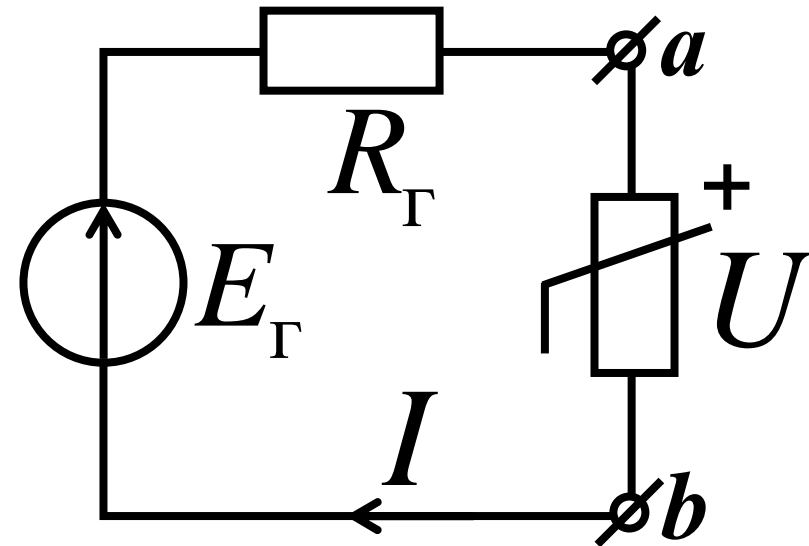
или $2 = I + I^2$,

тогда $I = 1; -2$ (А).

Принимаем $I = 1$ (А),

т.к. ВАХ НРЭ задана

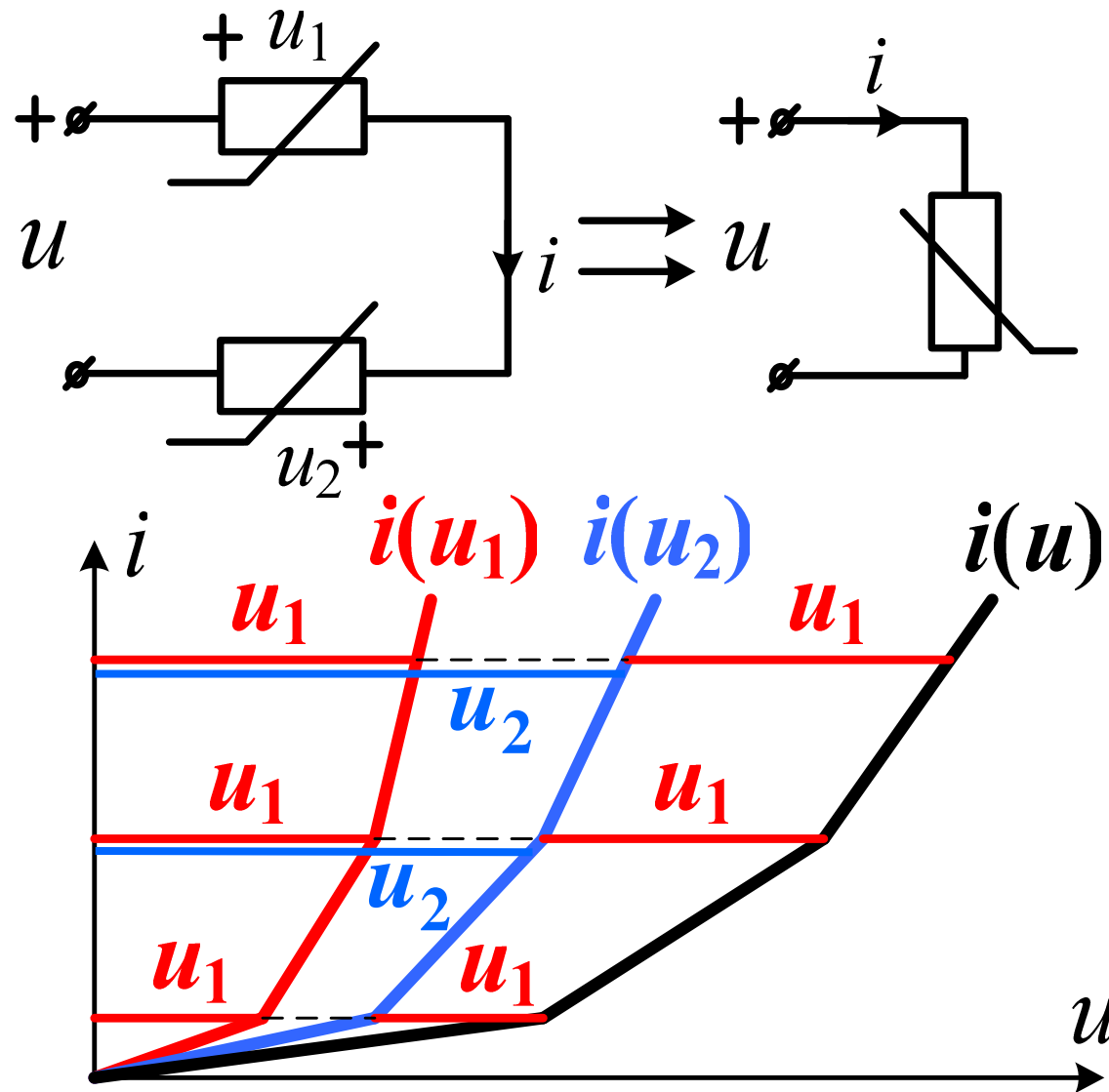
при $I > 0$ и $E_{\Gamma} > 0$.



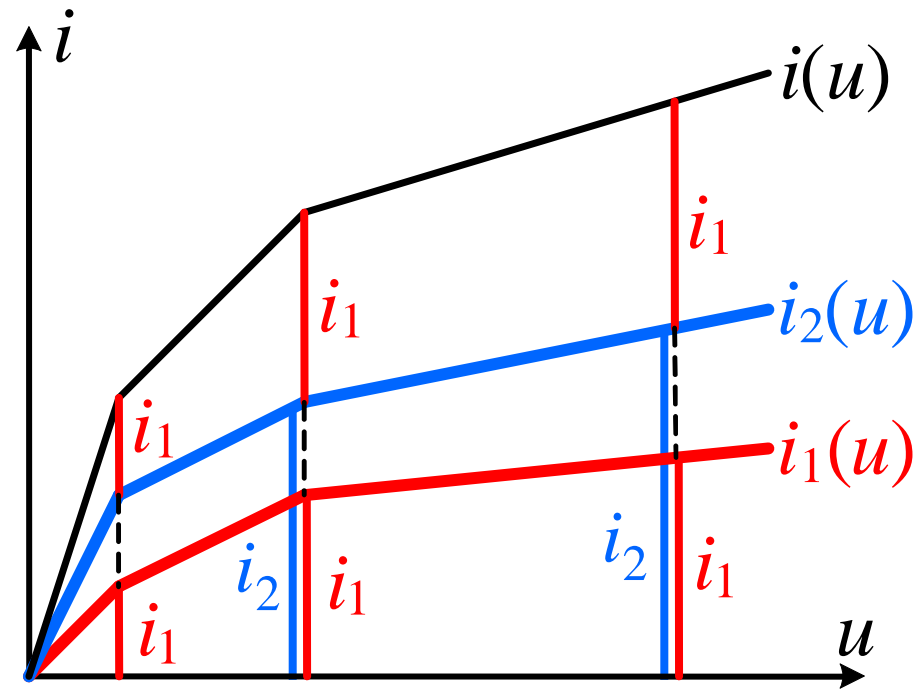
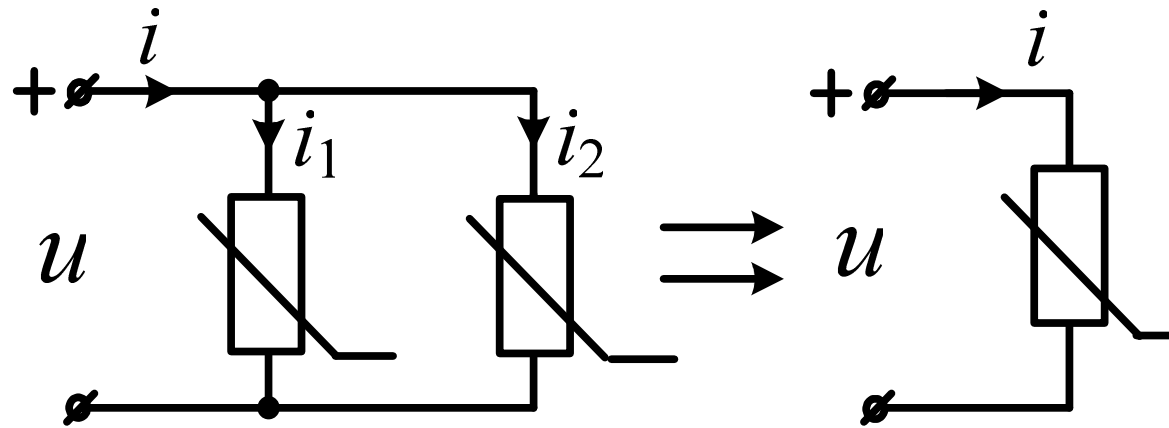
3. Сложение ВАХ – применяется для упрощения схем: несколько НРЭ заменяется одним эквивалентным НРЭ.

При этом на основании законов Кирхгофа ВАХ $i(u)$ последовательно соединенных НРЭ складываются вдоль оси u , а ВАХ параллельно соединенных НРЭ складываются вдоль оси i .

а) последовательное соединение



б) параллельное соединение



Законы Кирхгофа для магнитных цепей

Магнитопроводы из ферромагнитных материалов образуют **нелинейные магнитные цепи**, которые предназначены для **концентрации и усиления магнитных потоков Φ** .

Магнитные цепи характеризуются:

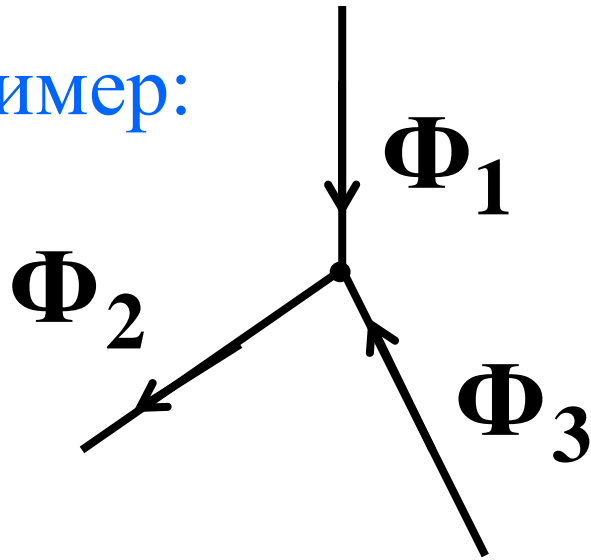
- средней длиной участка l (м)
- площадью сечения участка S (м²)
- величиной воздушного зазора δ (м)
- магнитной индукцией B (Тл)
- магнитной напряженностью H (А/м)
- магнитным потоком $\Phi=BS$ (Вб)
- числом витков катушки w (в)
- намагничивающей силой iw (А-в)

1. Первый закон Кирхгофа

$$\sum \pm \Phi_k = 0$$

Для любого **узла** магнитной цепи алгебраическая **сумма** магнитных **потоков** равна **нулю**, причем магнитные **потоки** выходящие из узла берутся со знаком **плюс** (“+”), а входящие в узел – со знаком **минус** (“-”)

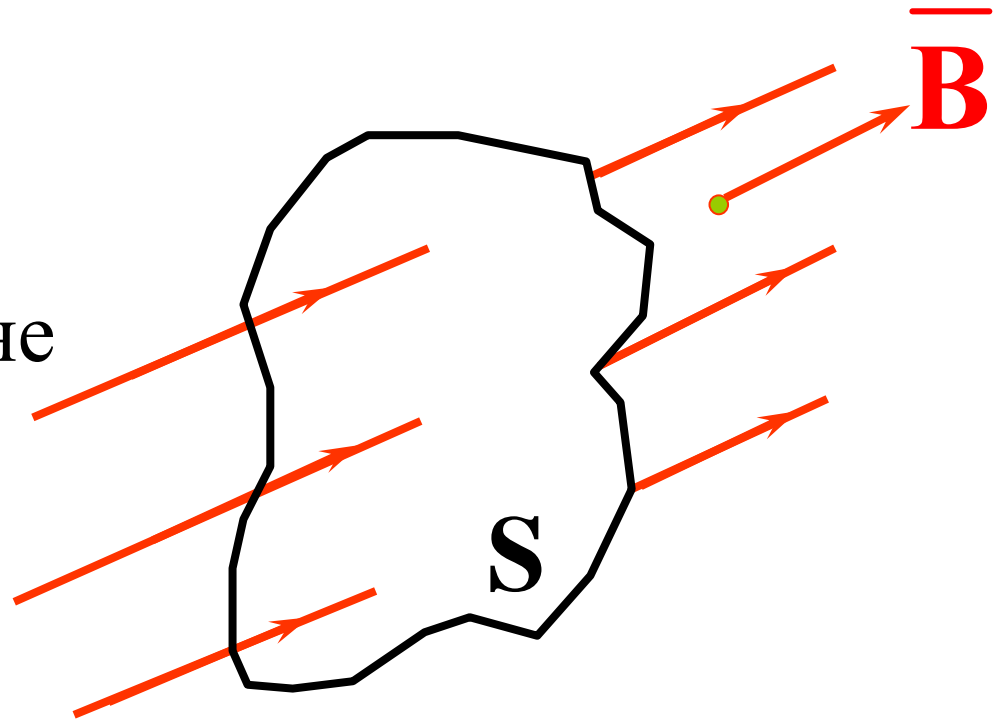
Например:



$$-\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0$$

Физически первый закон **Кирхгофа** основывается на законе **непрерывности** магнитного потока:

$$\oint_S \overline{\mathbf{B}} \, d\overline{\mathbf{S}} = 0$$



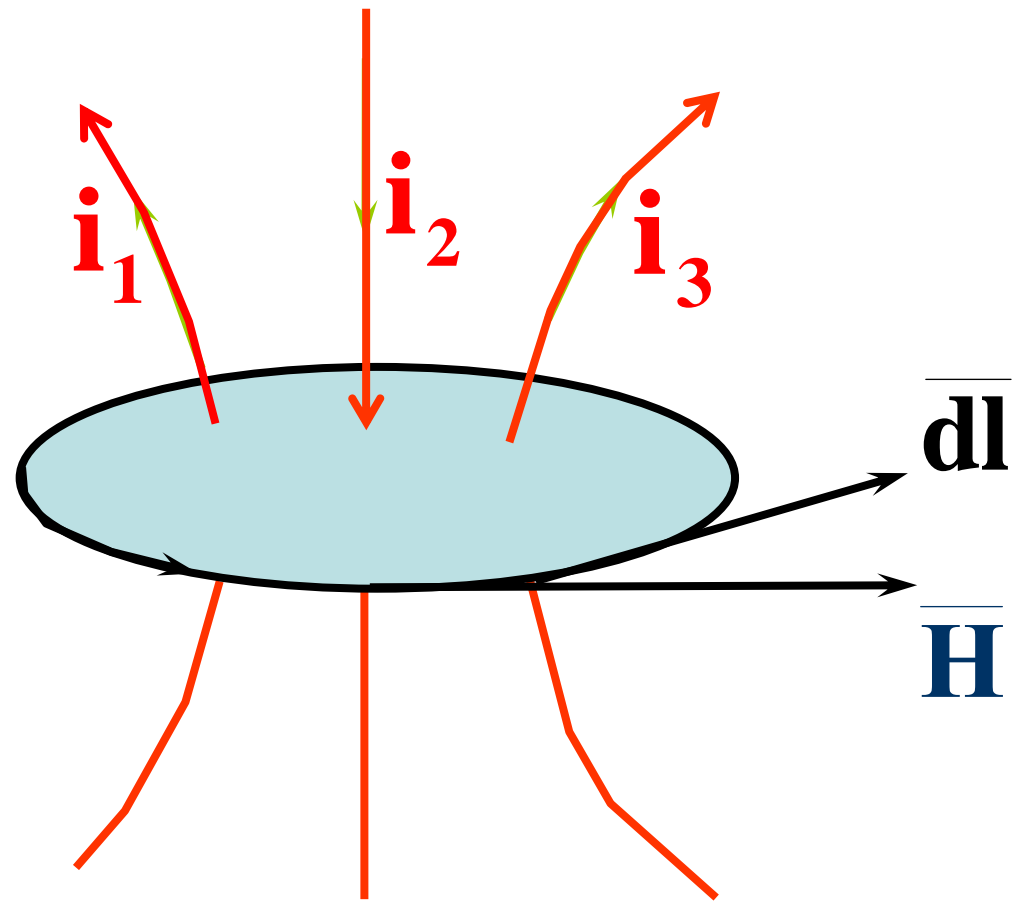
2. Второй закон Кирхгофа

$$\sum \pm i_q w_q = \sum \pm U_{Mk}$$

Для любого **контура** магнитной цепи алгебраическая сумма намагничивающих сил равна алгебраической сумме **магнитных напряжений**, причем со знаком **плюс (+)** записываются те слагаемые, **положительные** направления которых совпадают с направлением **обхода** контура

$$\oint_l \overline{\mathbf{H}} \, d\overline{\mathbf{l}} = \sum \pm \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$$

Физически второй закон **Кирхгофа** основывается на законе **полного тока**, причем **знаки** у токов определяются направлением обхода контура l согласно правилу «**буравчика**»



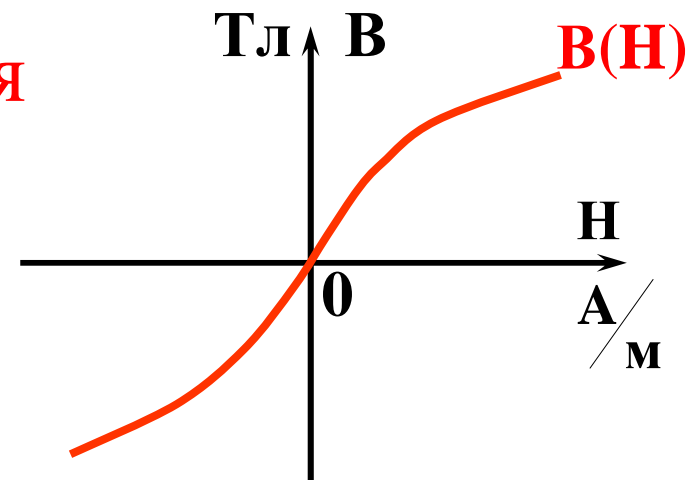
А) В магнитных цепях индукция \bar{B} :

а) $\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$ - для воздуха, где

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ - магнитная постоянная;

б) $\bar{B} = \mu(H) \cdot \bar{H}$ - для магнитопровода, где
 $\mu(H)$ - магнитная проницаемость (Гн/м)

Кривая намагничивания
ферромагнитного
материала
магнитопровода:

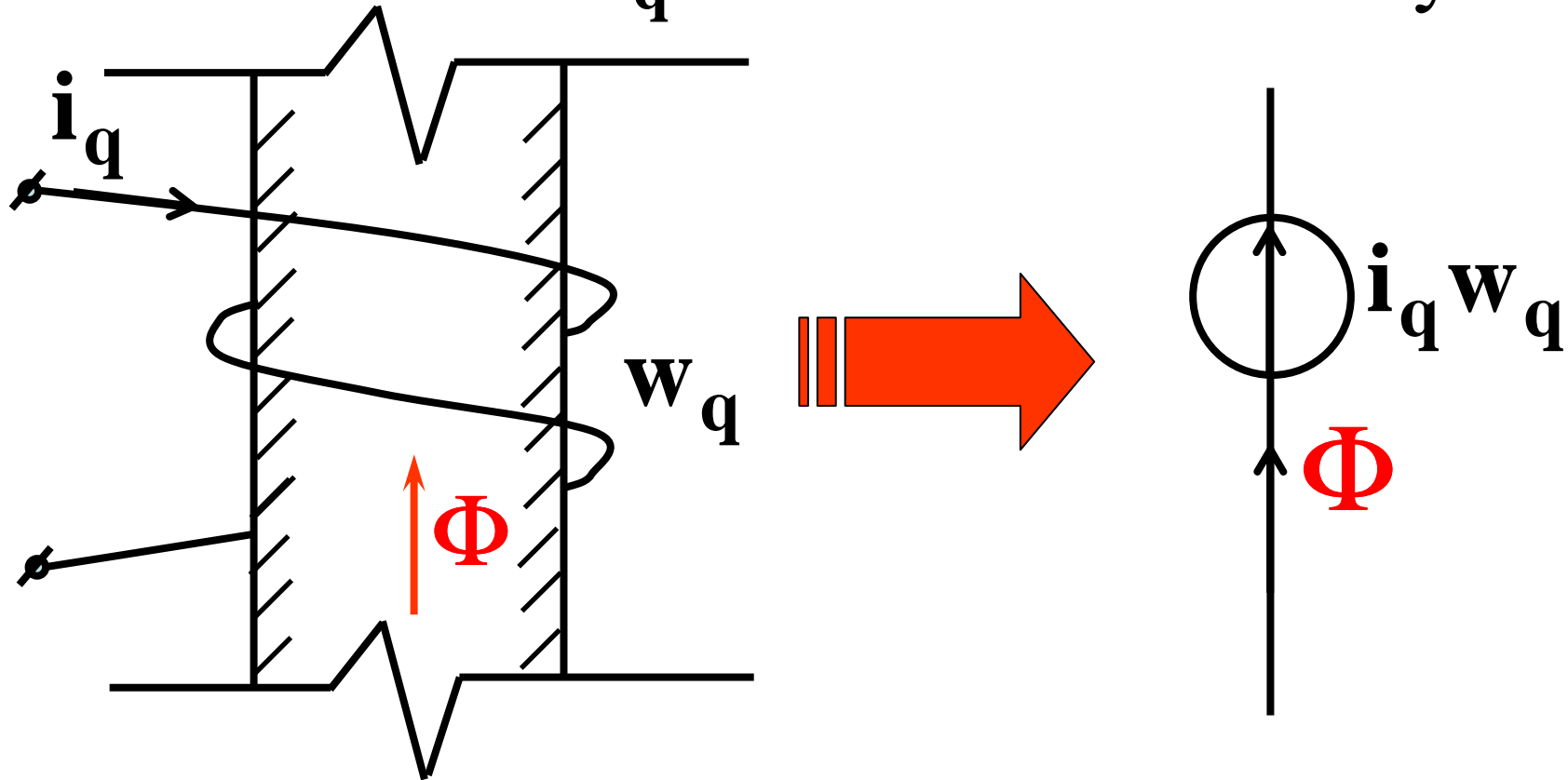


Б) Намагничивающая сила:

$$\dot{i}_q W_q \quad (\text{А-В})$$

\dot{i}_q - ТОК (А)

W_q - ЧИСЛО ВИТКОВ КАТУШКИ

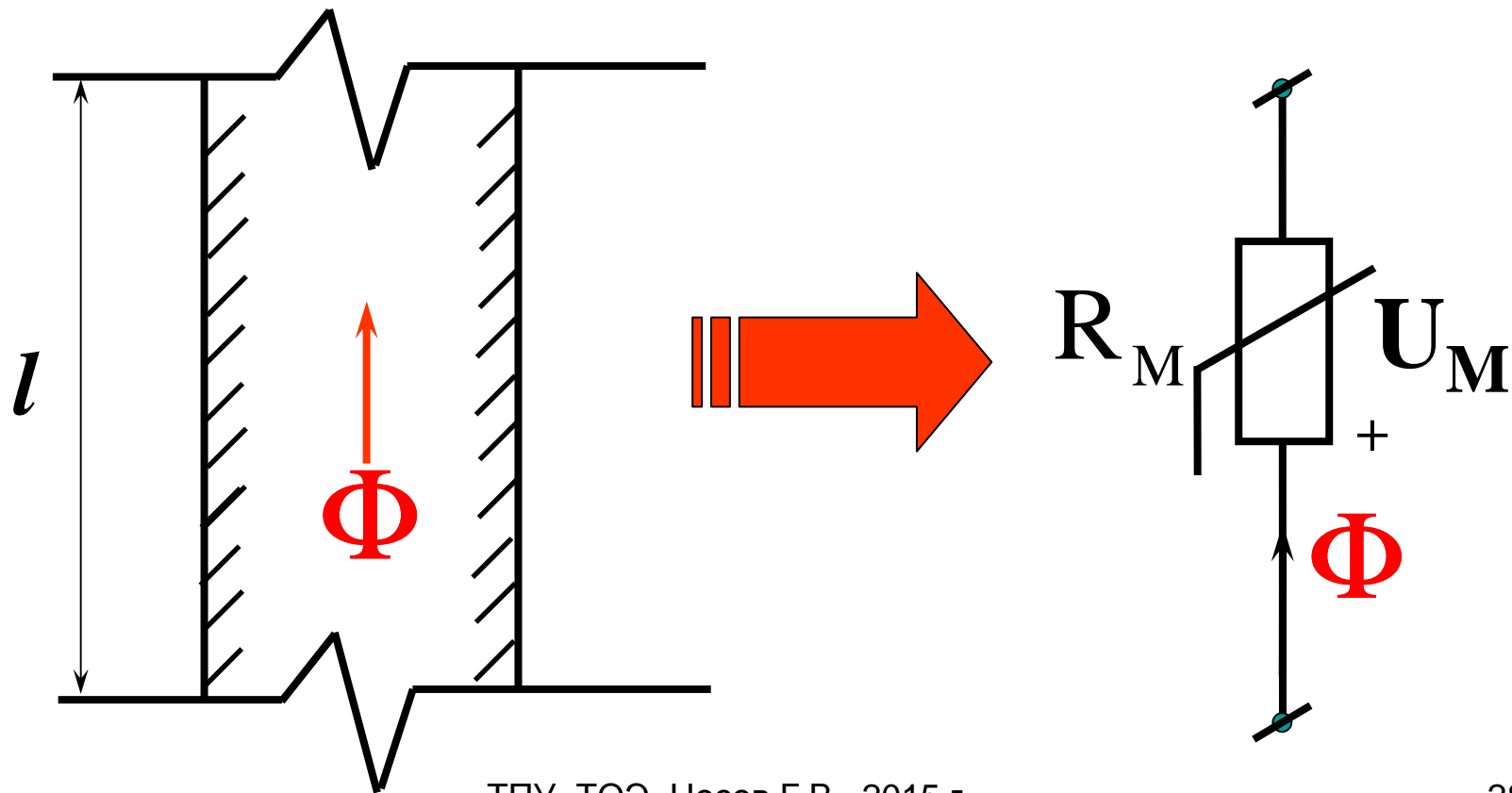


В) Нелинейное магнитное сопротивление участка магнитопровода:

$$R_M = \frac{l}{\mu(H) \cdot S} = \frac{H \cdot l}{B \cdot S}, \quad 1/\Gamma_H$$

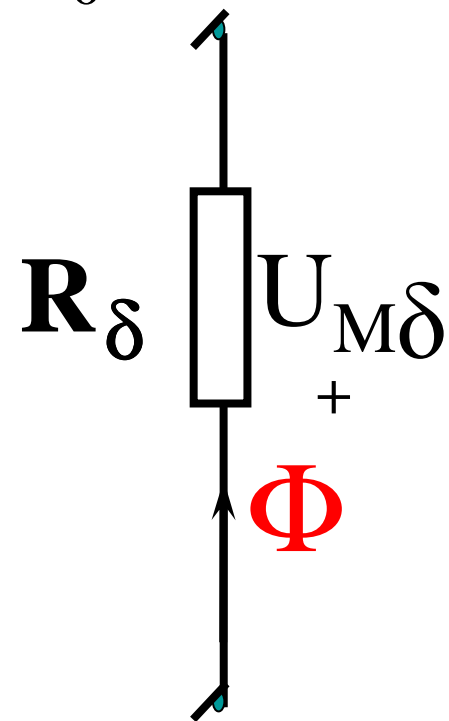
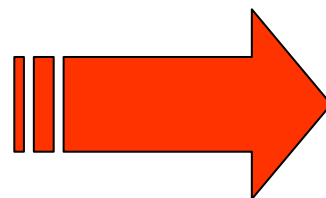
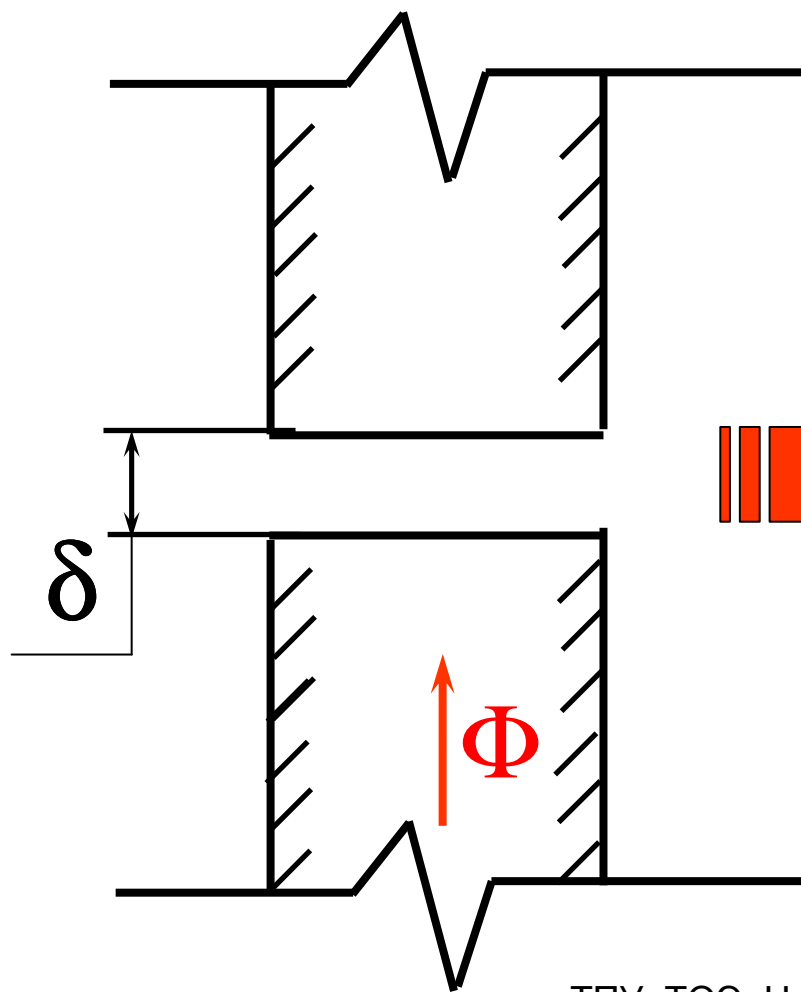
Магнитное напряжение:

$$U_M = R_M \cdot \Phi = H \cdot l, \quad \text{А}$$



Г) Линейное магнитное сопротивление воздушного зазора:

$$R_{\delta} = \frac{\delta}{\mu_0 S}, \quad \mathbf{1/\Gamma H}$$



Магнитное напряжение:
$$U_{M\delta} = R_{\delta} \Phi = \mathbf{B \cdot \delta / \mu_0}, \quad \mathbf{A}$$

Второй закон Кирхгофа

для магнитных цепей:

$$\sum \pm \mathbf{i}_q \mathbf{w}_q = \sum \pm (\mathbf{R}_{Mk} \Phi_k) + \sum \pm (\mathbf{R}_{\delta k} \Phi_k)$$

Аналогия между электрическими и магнитными цепями:

$$\mathbf{i} \rightarrow \Phi$$

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{U}_M$$

$$\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{i} \mathbf{w}$$

Расчет неразветвленной магнитной цепи

Неразветвленная
магнитная цепь
содержит **один**
магнитный поток Φ :

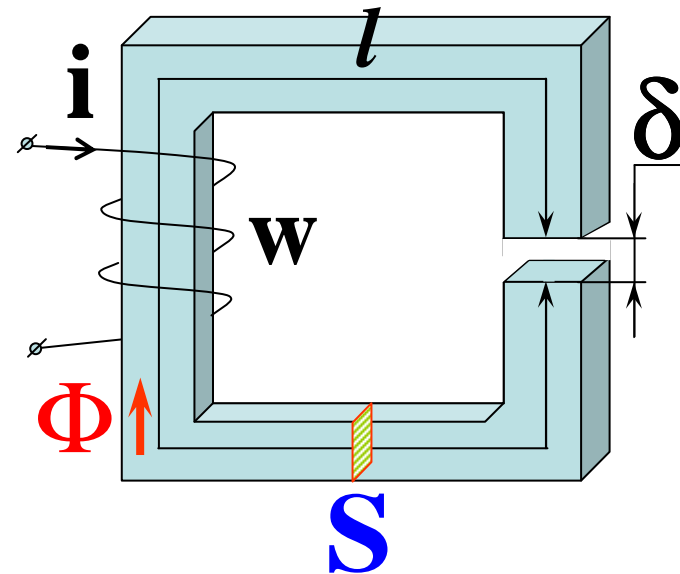
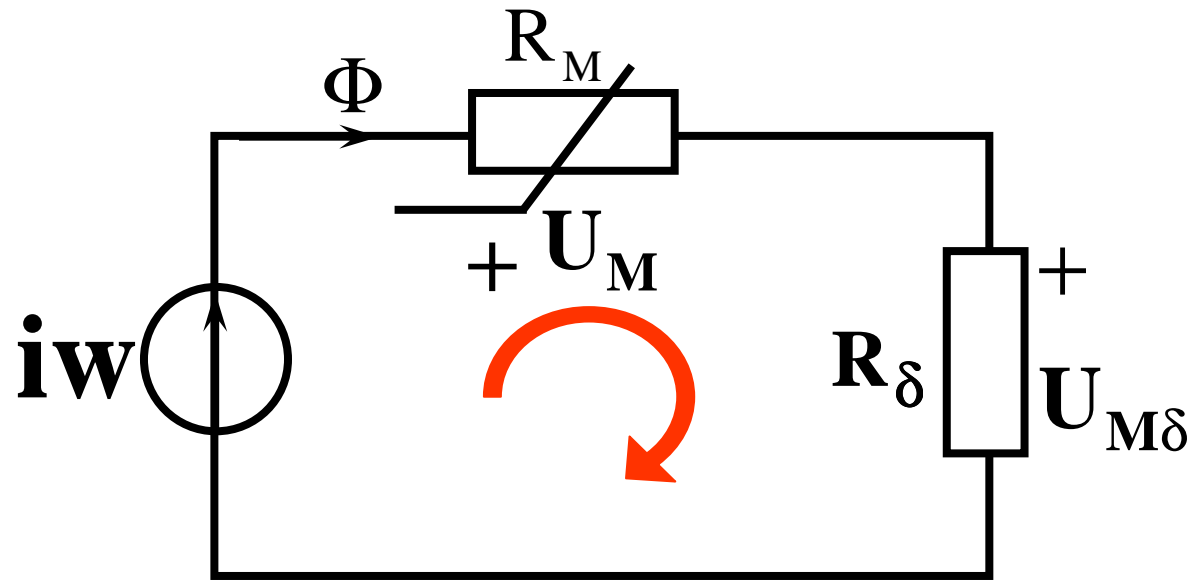


Схема **замещения** магнитной цепи:



По **2** закону **Кирхгофа**:

$$i_w = R_M \Phi + R_\delta \Phi = H \cdot l + \frac{B \cdot \delta}{\mu_0}, \text{ A}$$

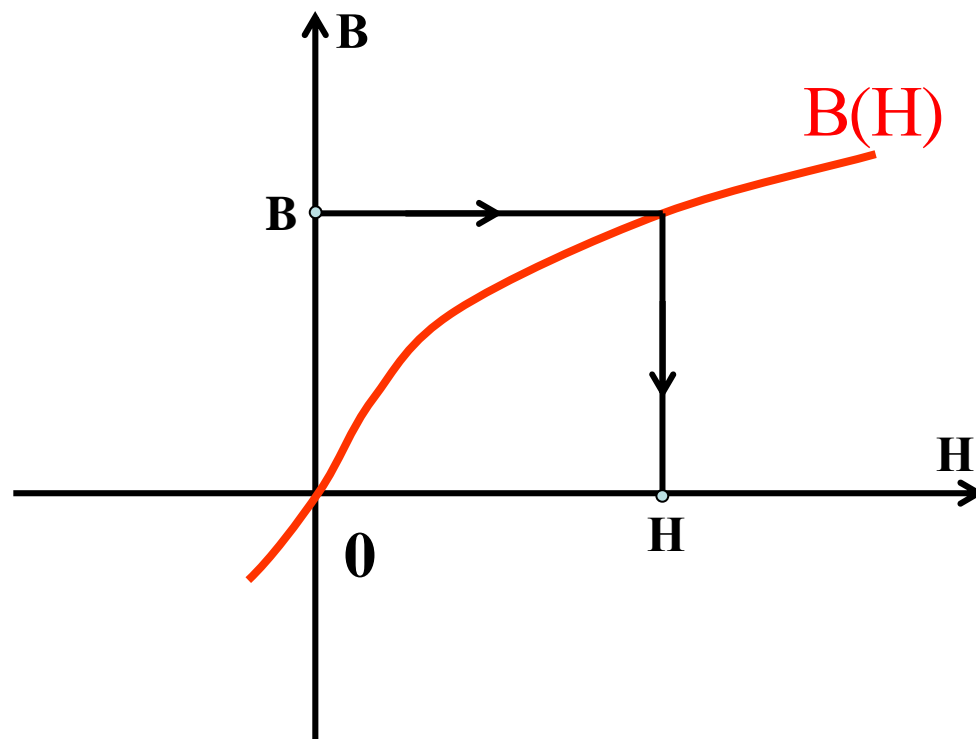
где $\Phi = B \cdot S$, Вб

1. Прямая задача:

известен магнитный поток Φ ,

тогда $B = \Phi / S$ и по $B(H)$

находим H :



В результате:

а) ТОК

$$i = \frac{H \cdot l + B \cdot \delta}{\mu_0}, \text{ А}$$

б) ПОТОКОСЦЕПЛЕНИЕ

$$\Psi = w \cdot \Phi, \text{ Вб}$$

в) СТАТИЧЕСКАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ

$$L_{\text{СТ}} = \frac{\Psi}{i_L}, \text{ Гн}$$

г) энергия магнитного поля
в воздушном зазоре

$$W_{\delta} \approx \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot S \cdot \delta, \quad \text{Дж}$$

д) сила, стягивающая зазор

$$F = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot S, \quad \text{Н}$$

2. Обратная задача:

известен ток $\dot{\mathbf{i}}$, тогда из уравнения

$$\dot{\mathbf{i}}w = \mathbf{H} \cdot l + \frac{\mathbf{B} \cdot \delta}{\mu_0}$$

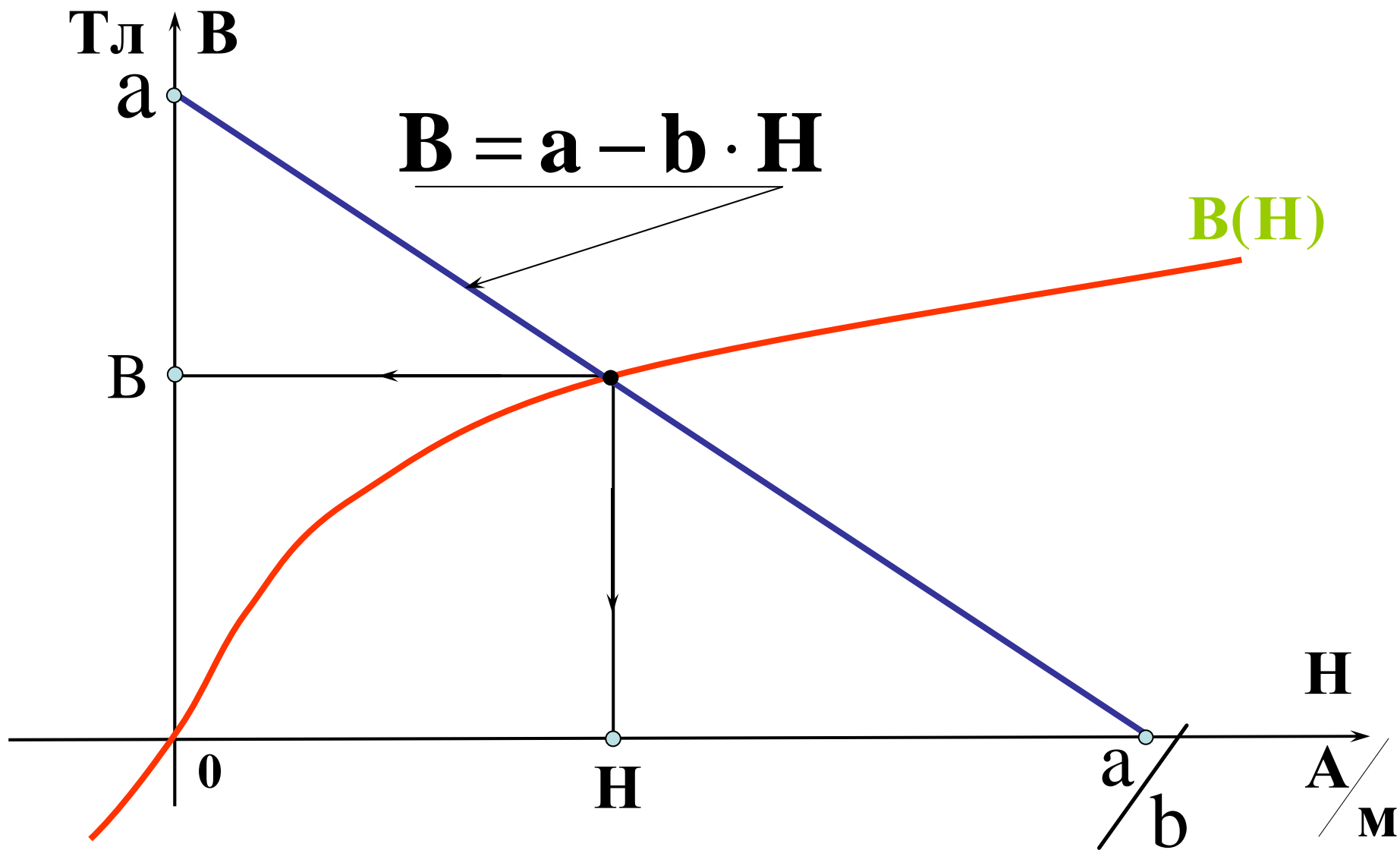
получаем уравнение **прямой** линии

$$\mathbf{B} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{H}$$

где

$$\mathbf{a} = \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{i}}w}{\delta}, \text{ Тл} \quad \mathbf{b} = \frac{\mu_0 \cdot l}{\delta}, \text{ Гн/м}$$

Графически определяем **V** и **H**:



Для **постоянного магнита** имеем **$i\omega=0$** ,
тогда уравнение **прямой**:

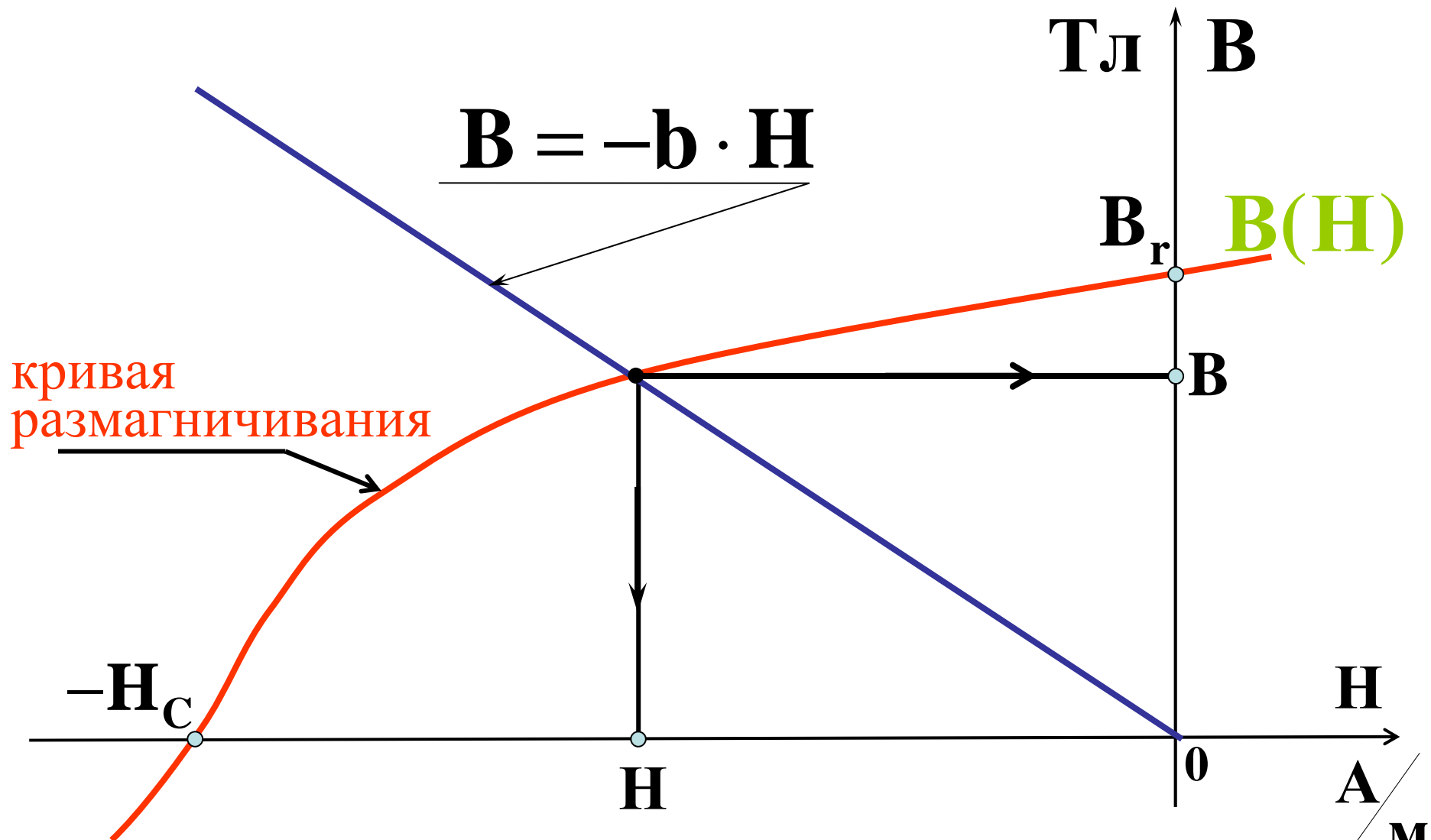
$$\mathbf{B} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{H}$$

где

$$\mathbf{a} = 0,$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mu_0 \cdot l}{\delta}, \quad \text{Гн/м}$$

Графическое решение для постоянного магнита:



Пример:

Дано: $I=5$ (А);

$w_1=1000$ (ВИТКОВ);

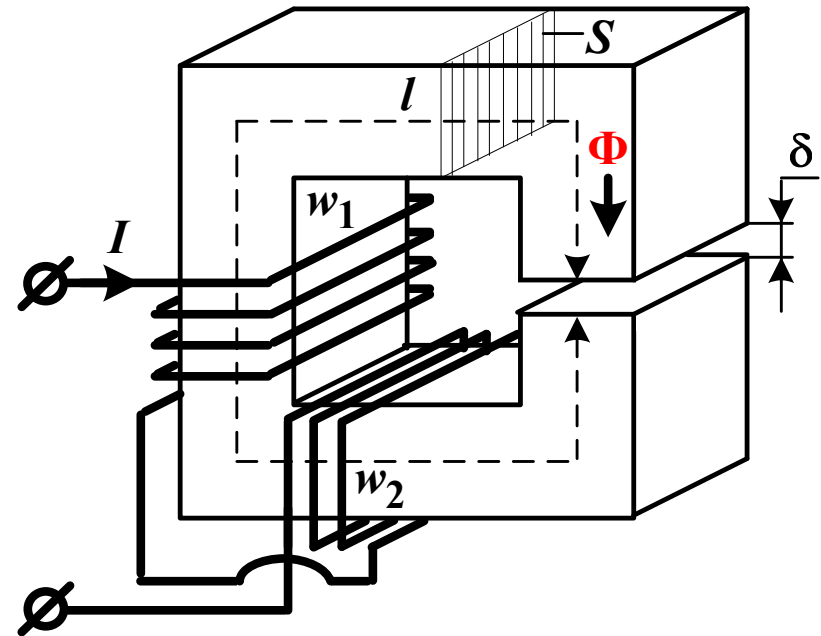
$w_2=600$ (ВИТКОВ);

$\delta=1,256$ (ММ); $l=40$ (СМ);

$S=20$ (СМ²).

Кривая намагничивания магнитопровода при $B>0$
 $H=2500B^2$ (А/М).

Определить магнитный
поток Φ (МВб).



Решение

По **2**-му закону **Кирхгофа**:

$$Iw_1 - Iw_2 = NI + B\delta/\mu_0, \text{ или } B^2 + B = 2.$$

В результате: $B = \mathbf{1}$ (Тл); $\mathbf{-2}$ (Тл).

Принимаем $B = \mathbf{1}$ (Тл),

тогда $\Phi = BS = 1 \cdot 20 \cdot 10^{-4} = \mathbf{2}$ (мВб).

Метод ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СИНУСОИД

Применяется для **приближенного** расчета **установившегося** режима в нелинейных цепях с **переменными** напряжениями и токами, которые содержат нелинейные элементы и **периодические** источники с **одинаковым** периодом **T**

При этом **несинусоидальные** напряжения и токи, **не содержащие постоянные** составляющие ($U_0=0; I_0=0$):

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_k \sin(\kappa \omega t + \beta_k + \varphi_k)$$

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(\kappa \omega t + \beta_k)$$

заменяются **эквивалентными синусоидами**:

$$u(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \beta + \varphi)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta)$$

Где:

$$U = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2} \quad I = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

активная мощность

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k$$

реактивная мощность

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k$$

Активная потребляемая мощность

$$P = UI \cos \varphi, \quad \text{Вт}$$

должна остаться **неизменной**.

По реактивной мощности **Q** находим знак

угла φ :

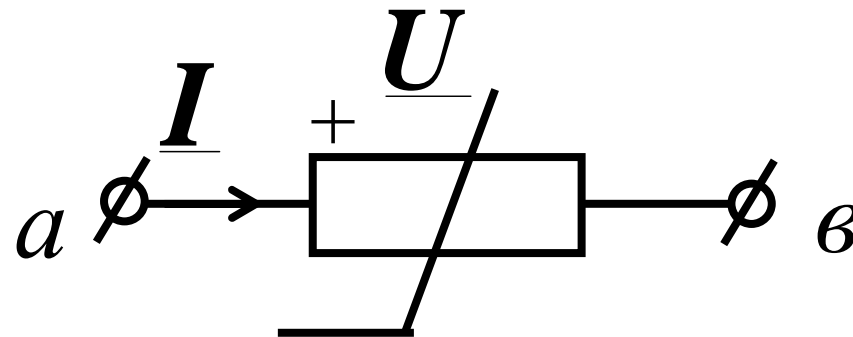
а) если **$Q < 0$** $\varphi = -\arccos \frac{P}{UI}$

б) если **$Q > 0$** $\varphi = \arccos \frac{P}{UI}$

Сущность метода

Несинусоидальные периодические напряжения $u(t)$ и токи $i(t)$ заменяются эквивалентными синусоидами с теми же действующими значениями U и I , с угловой частотой первой гармоники ω и таким углом сдвига фаз φ , чтобы активная мощность P осталась неизменной

Нелинейные элементы задаются
вольтамперными ВАХ $U(I)$ и
фазоамперными ФАХ $\varphi(I)$
характеристиками для действующих
значений. Далее применяется
СИМВОЛИЧЕСКИЙ метод:



Где:

а) комплекс действующего значения напряжения

$$\underline{U} = U(I)e^{j[\beta + \varphi(I)]}$$

б) комплекс действующего значения тока

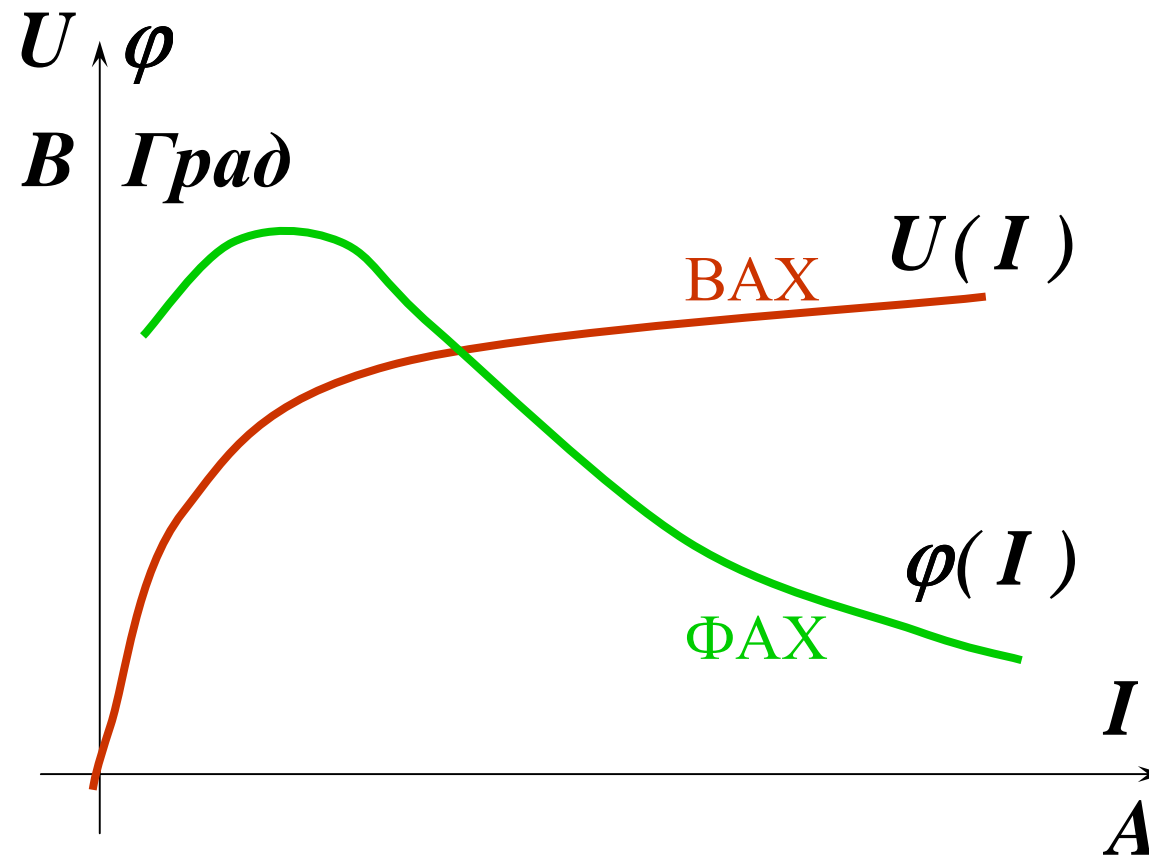
$$\underline{I} = Ie^{j\beta}$$

в) потребляемая активная мощность

$$P(I) = U(I) \cdot I \cdot \cos[\varphi(I)]$$

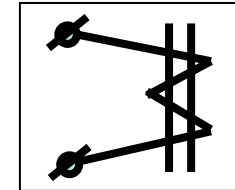
ВАХ $U(I)$ и ФАХ $\varphi(I)$

нелинейных элементов получают
экспериментально или расчетом:

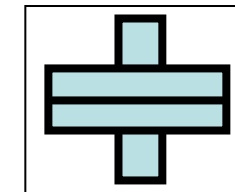


Действующие значения переменных напряжений и токов могут измеряться вольтметрами и амперметрами следующих систем:

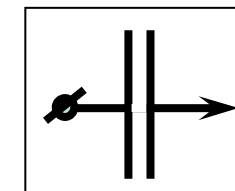
Электромагнитная



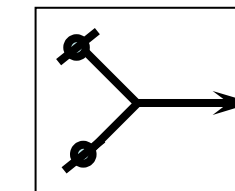
Электродинамическая



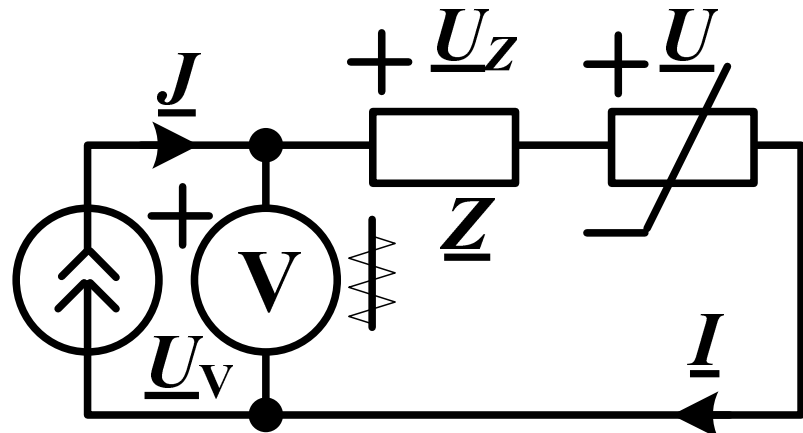
Электростатическая



Тепловая



Пример 1:



Дано: $\underline{J} = 2e^{-j90^\circ}$ (А);
 $\underline{Z} = 50e^{-j45^\circ}$ (Ом).

НЭ имеет

ВАХ $U(I) = 50I^2$ (В) и

ФАХ $\varphi(I) = -45^\circ + 45^\circ \cdot I$,

где ток I в амперах.

Определить показание
вольтметра U_V (В).

Решение:

$$\underline{I} = I e^{j\beta} = \underline{J} = 2e^{-j90^\circ} \text{ (A)} \quad \rightarrow$$

$$I = 2 \text{ (A)}; \beta = -90^\circ; U = 50I^2 = 200 \text{ (B)};$$

$$\varphi = -45^\circ + 45^\circ \cdot I = 45^\circ.$$

$$\rightarrow \underline{U} = U e^{j(\beta+\varphi)} = 200e^{-j45^\circ} \text{ (B)};$$

$$\underline{U}_Z = \underline{Z} \cdot \underline{I} = 100e^{-j135^\circ} \text{ (B)}.$$

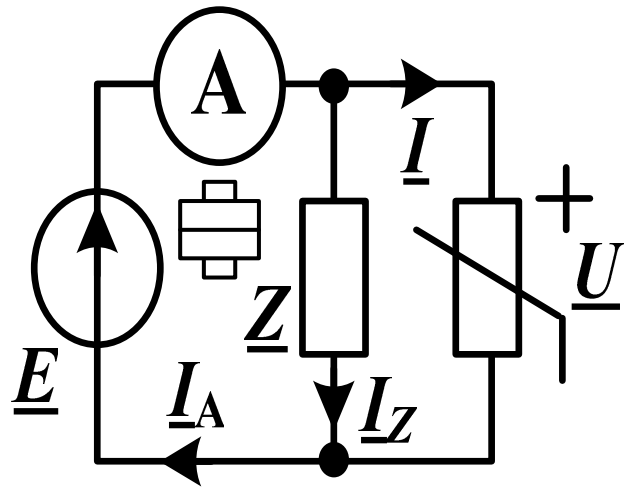
По второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned}\underline{U}_V &= \underline{U}_Z + \underline{U} = 100e^{-j135^\circ} + 200e^{-j45^\circ} = \\ &= (-70,7 - j70,7) + (141,4 - j141,4) = \\ &= 70,7 - j212,1 = 223,573e^{-j71,6^\circ} \text{ (В)}.\end{aligned}$$

Показание вольтметра
(действующее значение):

$$U_V = 223,573 \text{ (В)}.$$

Пример 2:



Дано: $\underline{E} = 100e^{j45^\circ}$ (В);
 $\underline{Z} = 100e^{j45^\circ}$ (Ом).

НЭ имеет

ВАХ $U(I) = 100I^2$ (В) и

ФАХ $\varphi(I) = -90^\circ + 45^\circ \cdot I$,

где ток I в амперах.

Определить показание
амперметра I_A (А).

Решение:

$$\underline{U} = Ue^{j\alpha} = \underline{E} = 100e^{j45^\circ} \text{ (В)} \quad \rightarrow$$

$$U = 100 \text{ (В)}; \alpha = 45^\circ; I = \sqrt{U/100} = 1 \text{ (А)};$$

$$\varphi = -90^\circ + 45^\circ \cdot I = -45^\circ.$$

$$\rightarrow \underline{I} = Ie^{j(\alpha-\varphi)} = 1e^{j90^\circ} \text{ (А)};$$

$$\underline{I}_Z = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = 1e^{j0^\circ} \text{ (А)}.$$

По второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned}\underline{I}_A &= \underline{I}_Z + \underline{I} = 1e^{j0^\circ} + 1e^{j90^\circ} = \\ &= 1 + j1 = 1,41e^{j45^\circ} \text{ (A)}.\end{aligned}$$

Показание амперметра
(действующее значение):

$$I_A = 1,41 \text{ (A)}.$$