4 лекция

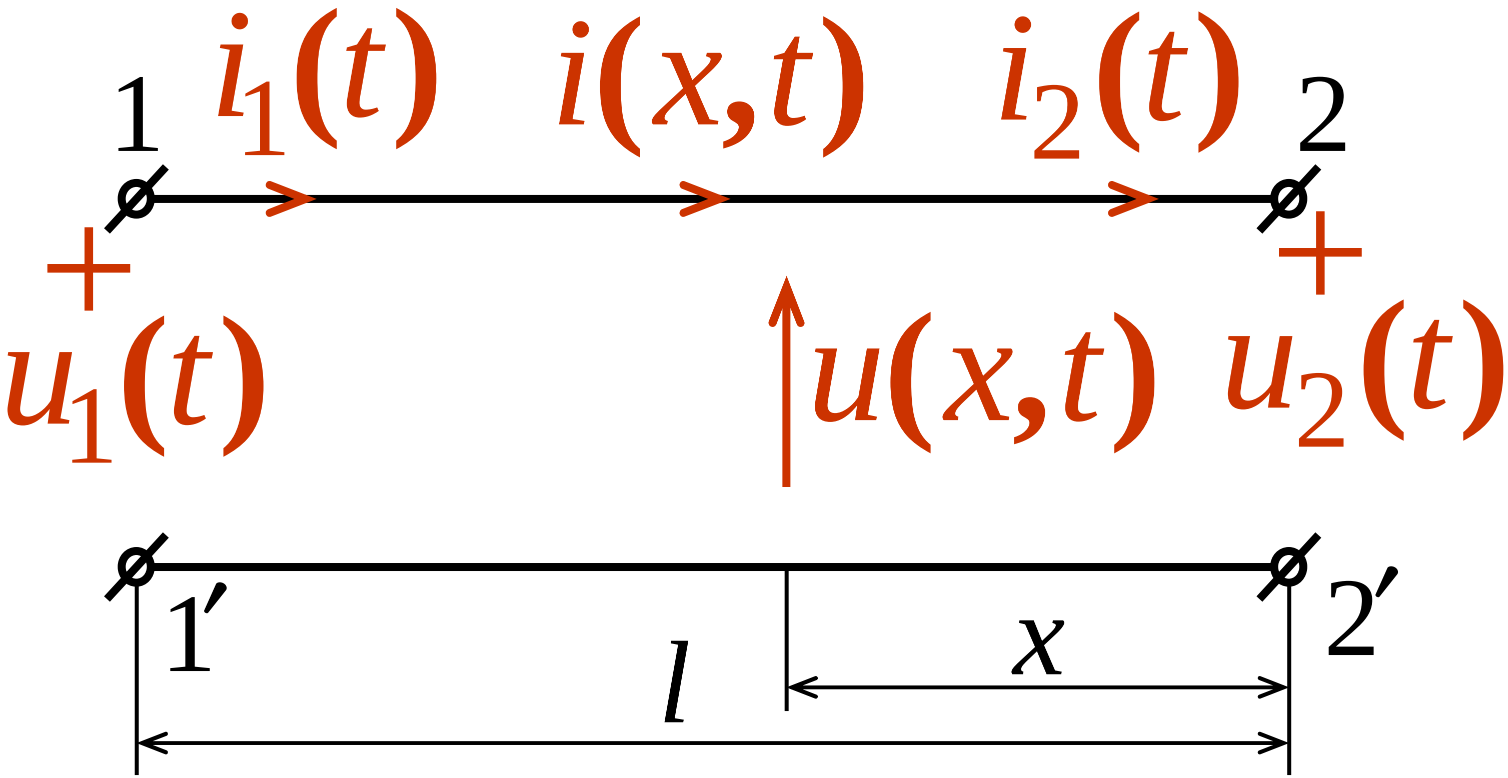
Электрические цепи с распределенными параметрами

Это такие цепи, длина которых соизмерима с длиной электромагнитной волны.

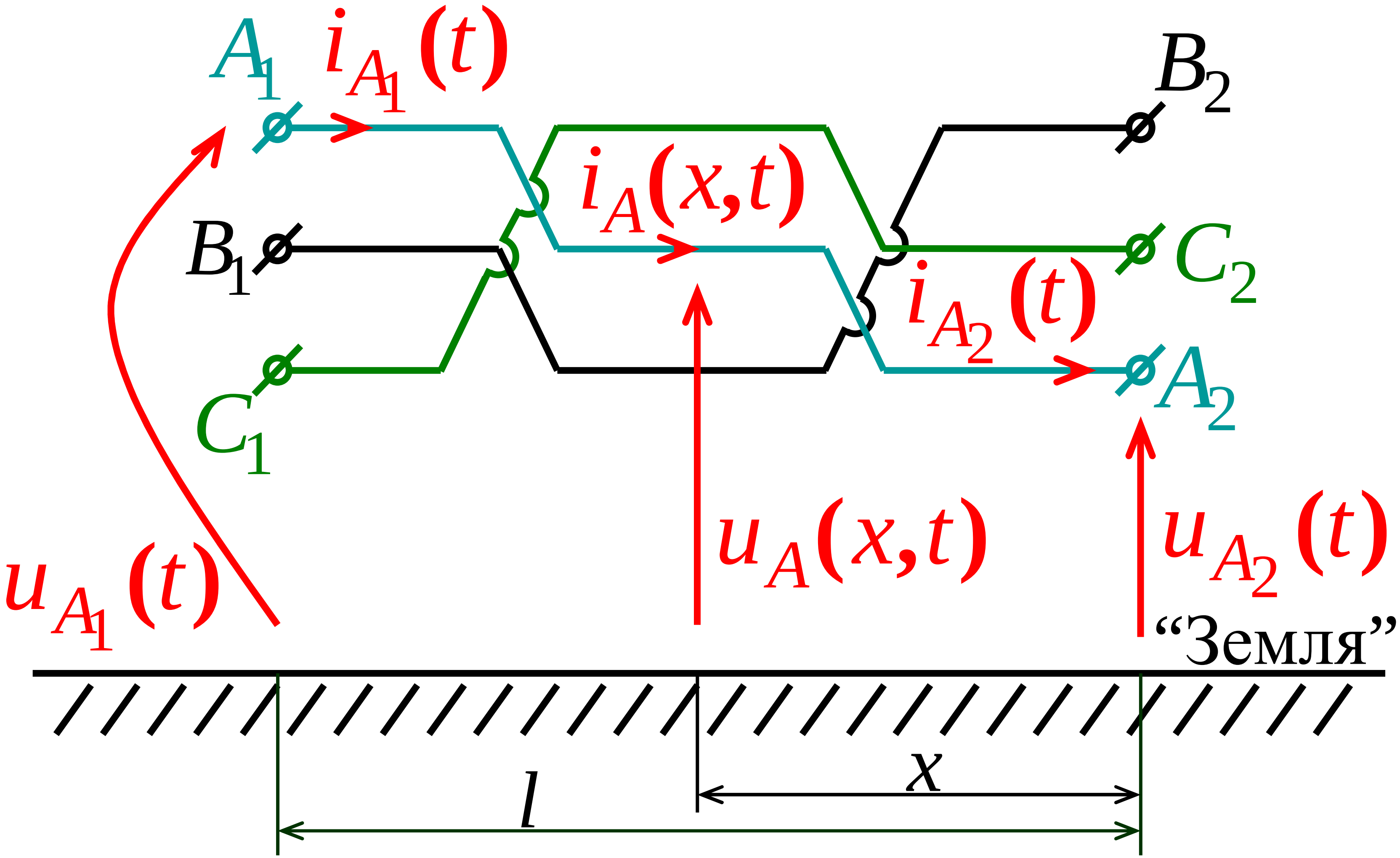
Напряжения и токи изменяются вдоль этих цепей.

Примерами цепей с распределенными параметрами являются:

а) двухпроводная линия (связи)



б) трехфазная транспонированная линия (электропередачи)



Изменение напряжения и тока вдоль линии в функции x обусловлено наличием продольных сопротивлений и поперечных проводимостей

Линии, у которых напряжения и токи заметно изменяются вдоль их длины, называются *длинными линиями*.

Для линий электропередачи при $\omega = 314$ (1/с) и f=50 (Гц) такое изменение заметно при длине $l > 300$ км

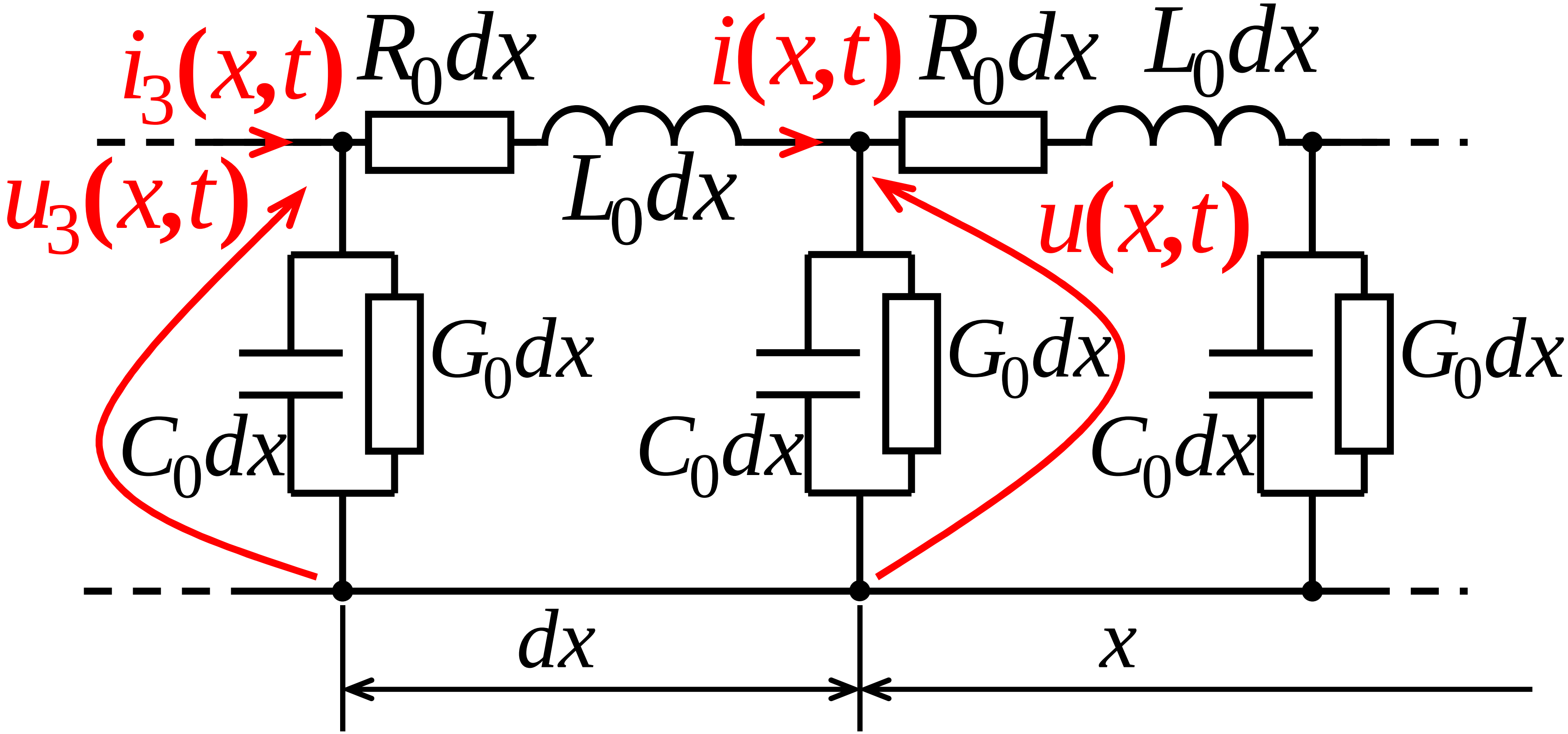
Бесконечно малый участок dx

двухпроводной линии или

трехфазной линии на одну фазу

(в симметричном режиме) может

быть представлен так:


$i_з(x,t)$
R_0dx
L_0dx
$i(x,t)$
R_0dx
L_0dx
$u_з(x,t)$
$u(x,t)$
G_0dx
G_0dx
G_0dx
C_0dx
C_0dx
C_0dx
dx
x

Где

$$i_3(x,t)=i(x,t)+\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}dx$$

$$u_3(x,t)=u(x,t)+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dx$$

R_0 (Ом/км), L_0 (Гн/км),

G_0(См/км), C_0(Ф/км) –

первичные (удельные)

параметры линий

Ограничимся рассмотрением однородных линий, у которых первичные параметры постоянны.

Для бесконечно малого участка линии длиной *dx* по законам Кирхгофа получаем основные уравнения в частных производных:

$$
\begin{cases}
\pm\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}=R_0\cdot i(x,t)+L_0\cdot\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t}\\
\pm\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x}=G_0\cdot u(x,t)+C_0\cdot\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}
\end{cases}
$$

1

Где:

знак + - при отсчете x от конца линии

знак – - при отсчете x от начала линии

Решение уравнений 1 при определенных начальных $(t=0)$ и граничных условиях

$(x=0,\ x=l)$ позволяет

определить $u(x,t)$ и $i(x,t)$

Установившийся гармонический режим однородной линии

При напряжении

$$u_2(t)=\sqrt{2}\cdot U_2\cdot\mathbf{sin}\left(\omega t+\psi_{U_2}\right)$$

имеем

$$u(x,t)=\sqrt{2}\cdot U(x)\cdot\mathbf{sin}\left[\omega t+\psi_U(x)\right]$$

$$i(x,t)=\sqrt{2}\cdot I(x)\cdot\mathbf{sin}\left[\omega t+\psi_I(x)\right]$$

Тогда для комплексов действующих значений

$$\underline{U}(x) = U(x) \cdot e^{j\psi_U(x)}$$

$$\underline{I}(x) = I(x) \cdot e^{j\psi_I(x)}$$

Из уравнений 1

получаем

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{U}(x)}{dx} = \underline{Z}_0 \cdot \underline{I}(x) \\ \dfrac{d\underline{I}(x)}{dx} = \underline{Y}_0 \cdot \underline{U}(x) \end{cases} \qquad 2$$

Где

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$$ (Ом/км) –

– комплекс продольного сопротивления линии на единицу длины;

$\boldsymbol{j = \sqrt{-1}}$ - мнимая единица;

$$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$$ (См/км) –

– комплекс поперечной проводимости линии на единицу длины

Решением уравнений 2

при отсчете х от конца

линии будут следующие

комплексы действующих

значений:

а) напряжение

$$\underline{U}(x)=\underline{A}_1\cdot e^{\underline{\gamma}x}+\underline{A}_2\cdot e^{-\underline{\gamma}x}=$$

$$=\underline{U}_2\cdot\mathbf{ch}\underline{\gamma}x+\underline{Z}_{\text{в}}\cdot\underline{I}_2\cdot\mathbf{sh}\underline{\gamma}x$$

3

б) ток

$$\underline{I}(x)=\frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_{\text{в}}}\cdot e^{\underline{\gamma}x}-\frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_{\text{в}}}\cdot e^{-\underline{\gamma}x}=$$

$$=\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{\text{в}}}\cdot\mathbf{sh}\underline{\gamma}x+\underline{I}_2\cdot\mathbf{ch}\underline{\gamma}x$$

4

Где:

$$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\psi_1} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_\text{В} \cdot \underline{I}_2}{2},\ B$$

$$\underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\psi_2} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_\text{В} \cdot \underline{I}_2}{2},\ B$$

- постоянные интегрирования

$$\underline{Z}_{\text{в}} = Z_{\text{в}} \cdot e^{j\varphi_{\text{в}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}, \text{ (Ом) –}$$

– волновое сопротивление

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0}, \quad \text{(1/км) –}$$

– постоянная распространения (передачи)

α, (Нп/км) – коэффициент затухания (ослабления),

причем

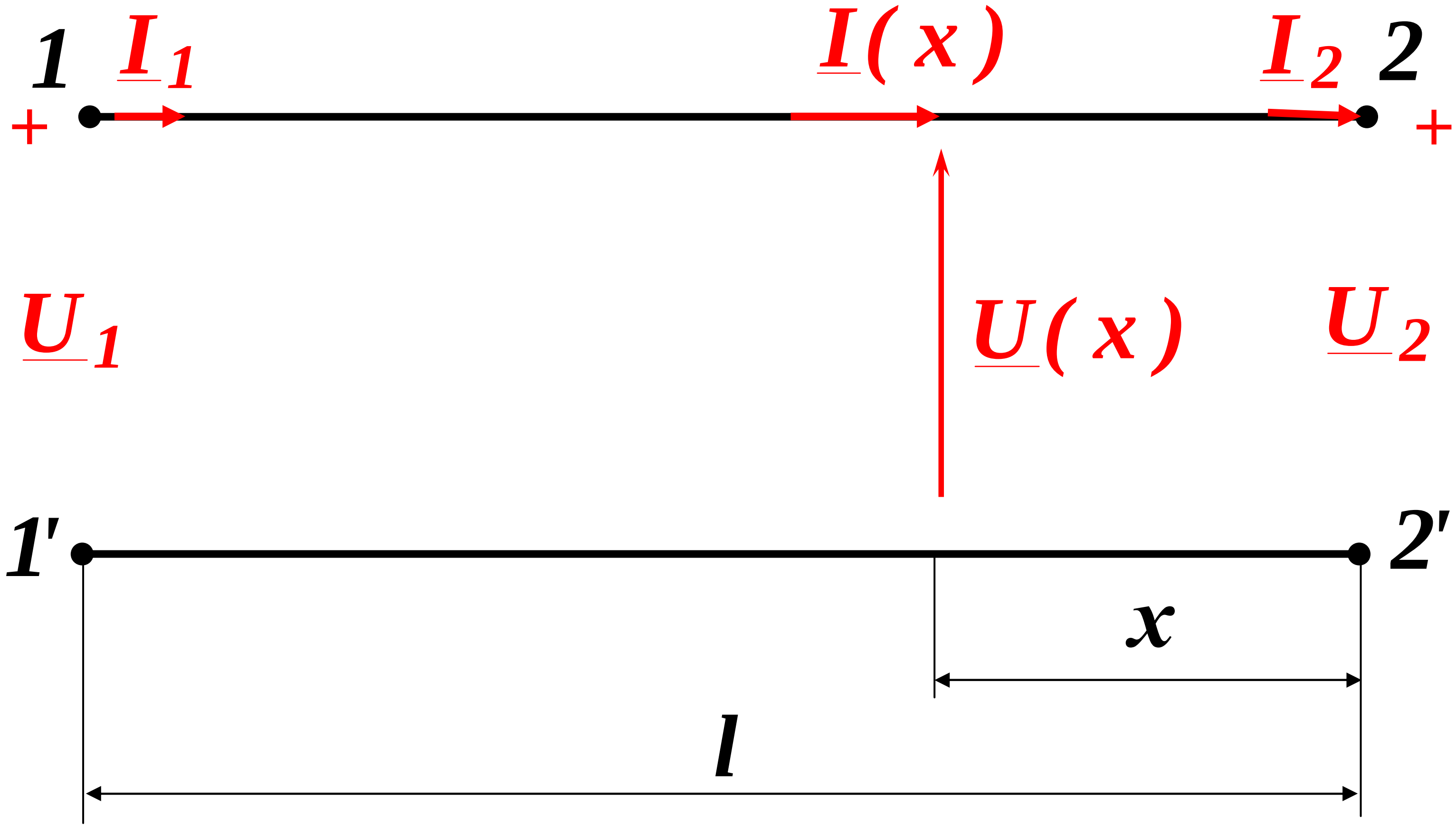
α = 1 Нп/км = 1 Непер/км =

$=\ln[U(x=1\ \text{км})/U_2] = \ln(2{,}718)=1$

β, (рад/км) – коэффициент фазы

$$\underline{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\psi_{U_2}}, \ \underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\psi_{I_2}}$$

– комплексы действующих значений напряжения и тока в концe линии



1
I1
I(x)
I2
2
+
+
U1
U(x)
U2
1'
2'
x
l

Напряжение и ток в линии можно рассматривать как сумму падающей (прямой) и отраженной (обратной) волн:

$$
5 \quad \begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_{\text{п}}(x) + \underline{U}_{\text{отр}}(x) \\ \underline{I}(x) = \underline{I}_{\text{п}}(x) + \underline{I}_{\text{отр}}(x) \end{cases}
$$

Где:

$$\underline{U}_{\text{п}}(x) = \underline{A}_1 \cdot e^{\underline{\gamma} x}, \quad \underline{I}_{\text{п}}(x) = \frac{\underline{U}_{\text{п}}(x)}{\underline{Z}_{\text{в}}}$$

– комплексы действующих значений падающих волн напряжения и тока

$$\underline{U}_{\text{отр}}(x)=\underline{A}_2\cdot e^{-\underline{\gamma}x},$$

$$\underline{I}_{\text{отр}}(x)=-\frac{\underline{U}_{\text{отр}}(x)}{\underline{Z}_{\text{в}}}$$

– комплексы действующих значений отраженных волн напряжения и тока

При изменении x от 0 до l

по формулам 3 и 4

можно рассчитать

$$\underline{U}(x) = U(x) \cdot e^{j\psi_U(x)}$$

$$\underline{I}(x) = I(x) \cdot e^{j\psi_I(x)}$$

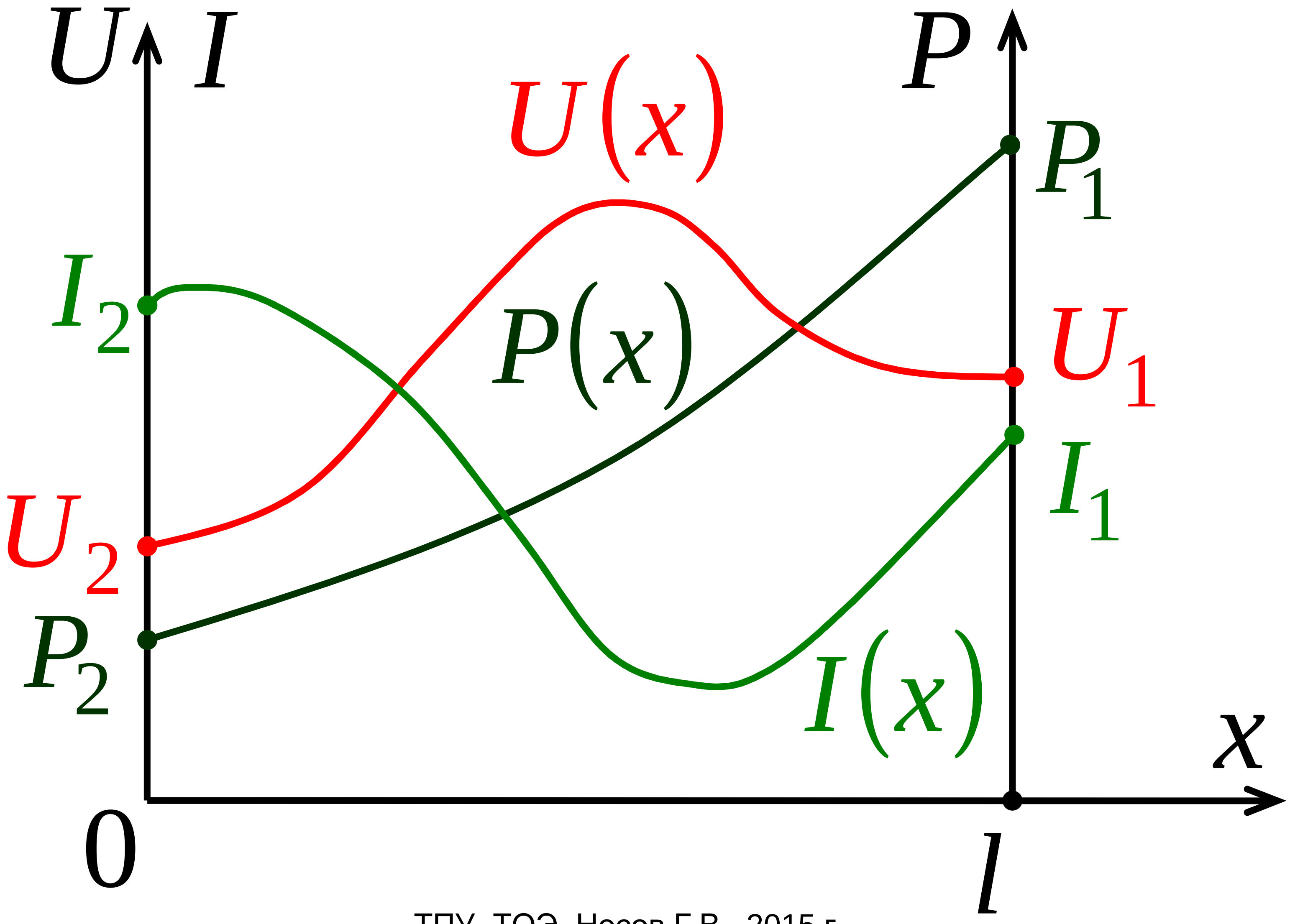
и определить активную мощность

$$P(x) = U(x) \cdot I(x) \cdot$$

$$\cdot \mathbf{cos}\left[\psi_U(x) - \psi_I(x)\right], \text{ Вт}$$

которая монотонно возрастает к началу линии

Графики зависимостей $U(x)$, $I(x)$, $P(x)$ и КПД $\eta = {}^{P_2}\!/_{P_1} < 1$ используются для анализа установившегося режима линий


U I
P
U(x)
P1
I2
P(x)
U1
I1
U2
P2
I(x)
x
0
l

Примечания:

$$\mathbf{sh}\underline{\gamma}x = \frac{e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x}}{2} = B_1 \cdot e^{j\lambda_1}$$

\- гиперболический синус

$$\mathbf{ch}\underline{\gamma}x = \frac{e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x}}{2} = B_2 \cdot e^{j\lambda_2}$$

- гиперболический косинус

$$e^{\underline{\gamma} x} = e^{(\alpha + j\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x} = B_3 e^{j\lambda_3}$$

$$B_3 = e^{\alpha x} \qquad \lambda_3 = \frac{\beta x \cdot 180}{\pi} \quad \text{(Град)}$$

$$e^{-\underline{\gamma}x} = e^{-(\alpha + j\beta)x} =$$

$$= e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} = B_4 e^{j\lambda_4}$$

$$B_4 = {}^{1}\!/\!{}_{B_3} \qquad \lambda_4 = -\lambda_3$$

При постоянных напряжениях и токах ($\omega=0$) имеем:

$$\underline{Z}_{\text{в}} = Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}; \quad \underline{\gamma} = \alpha = \sqrt{R_0 \cdot G_0}$$

$$\underline{U}(x) = U(x) \qquad \underline{I}(x) = I(x)$$

$$P(x) = U(x) \cdot I(x)$$

Однородная линия без потерь при гармонических напряжениях и токах

Линией без потерь считается линия, у которой $R_0 << \omega L_0$ и $G_0 << \omega C_0$, поэтому $R_0 \approx 0$, $G_0 \approx 0$

Тогда

$$\underline{Z}_0 = j\omega L_0 \qquad \underline{Y}_0 = j\omega C_0$$

$$\underline{Z}_\text{В} = Z_\text{В} = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0} = \sqrt{L_0 / C_0}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = j\omega\sqrt{L_0 C_0}$$

Таким образом:

$$\alpha = 0 \qquad \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$$

Фазовая скорость:

$$\mathrm{v}_{\Phi} = \omega/\beta = 1/\sqrt{\mathrm{L}_0 \mathrm{C}_0}$$

Длина волны:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{L_0 C_0}}$$

Амплитуды падающей и отраженной волн напряжения и тока вдоль линии меняться не будут ($\alpha = 0$).

Будет изменяться фаза напряжения и тока вдоль линии ($\beta \neq 0$).

Поскольку α и $v_ф$ не зависят от ω, то линия без потерь является линией без искажений форм напряжения и тока, так как: $R_0/L_0 = G_0/C_0 \approx 0$

Так как

$$\mathbf{ch}\,\underline{\gamma} x = \mathbf{ch}\left(j\beta x\right) = \mathbf{cos}\,\beta x$$

$$\mathbf{sh}\,\underline{\gamma} x = \mathbf{sh}\left(j\beta x\right) = j\,\mathbf{sin}\,\beta x$$

тогда основные уравнения однородной линии без потерь при отсчете *x* от конца линии будут следующими:

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cdot \mathbf{cos}\,\beta x + jZ_{\text{В}} \cdot \underline{I}_2 \cdot \mathbf{sin}\,\beta x \\ \underline{I}(x) = j \cdot \dfrac{\underline{U}_2}{Z_{\text{В}}} \cdot \mathbf{sin}\,\beta x + \underline{I}_2 \cdot \mathbf{cos}\,\beta x \end{cases}$$

Где: $\underline{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\psi_{U_2}}$ $\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\psi_{I_2}}$

- напряжение и ток в конце линии

а) мгновенное значение напряжения:

$$u(x,t)=\sqrt{2}\cdot U_2\cdot \mathbf{cos}\beta x\cdot \mathbf{sin}\left(\omega t+\psi_{U_2}\right)+$$
$$+\sqrt{2}\cdot I_2\cdot Z_{\text{В}}\cdot \mathbf{sin}\beta x\cdot \mathbf{sin}\left(\omega t+\psi_{I_2}+90^{\circ}\right)$$

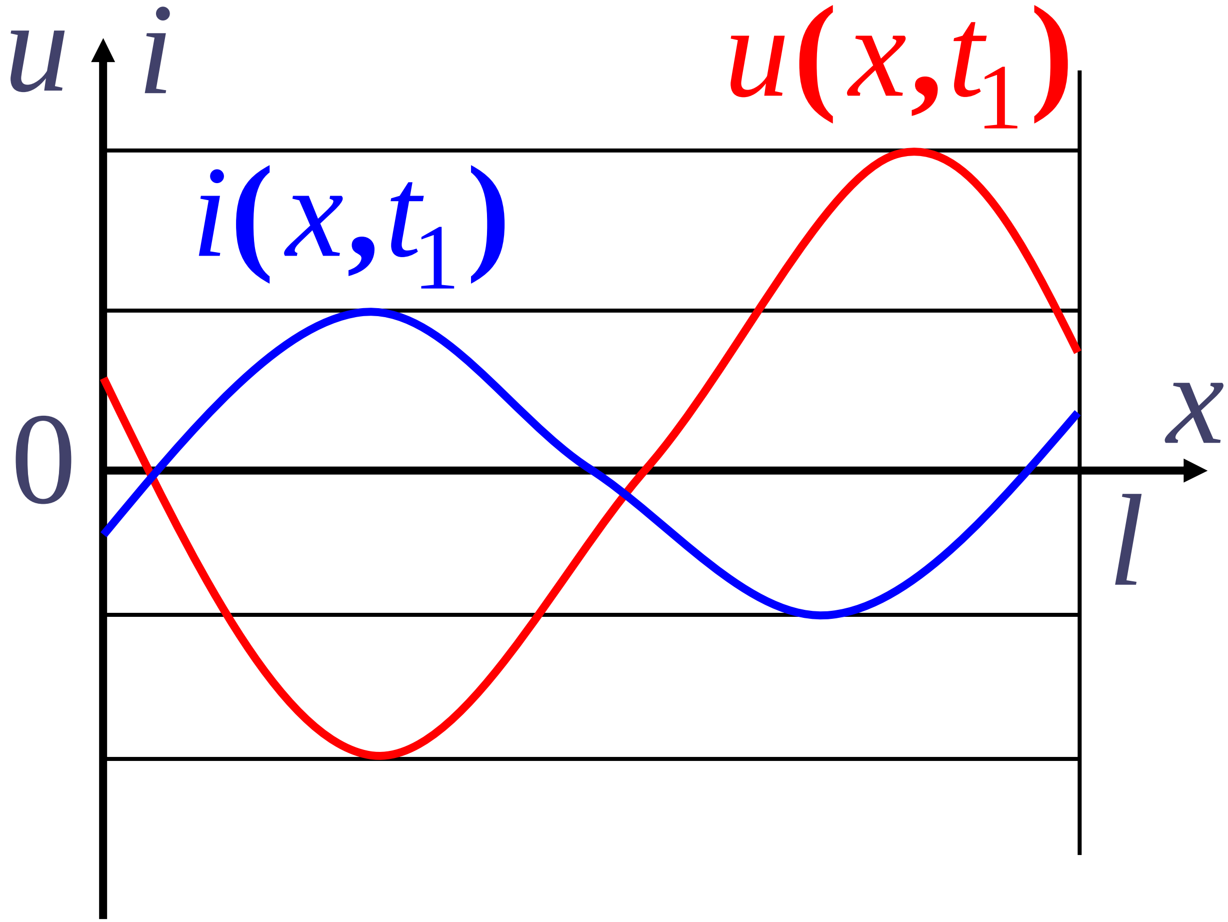
б) мгновенное значение тока:

$$i(x,t)=$$

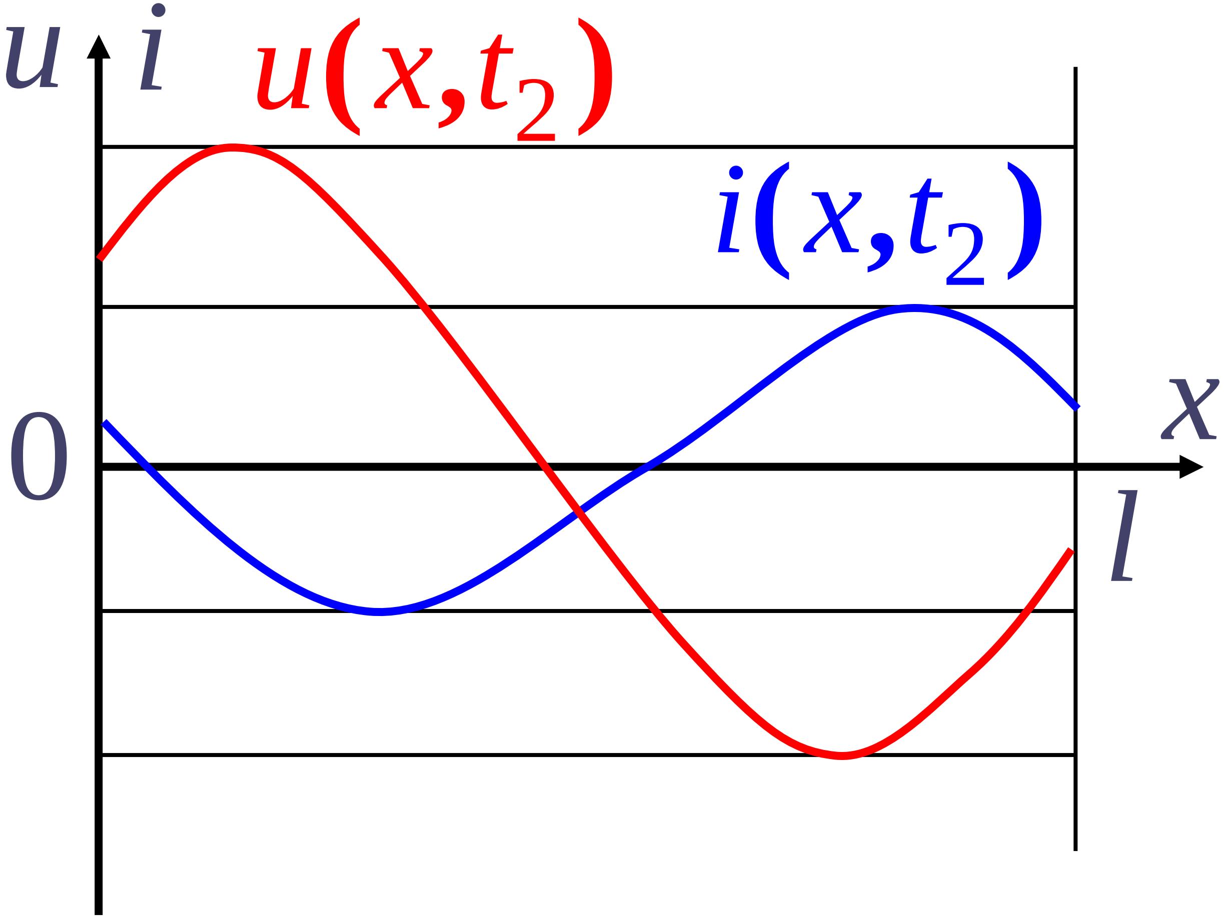
$$=\sqrt{2}\cdot\frac{U_2}{Z_В}\cdot\mathbf{sin}\beta x\cdot\mathbf{sin}\left(\omega t+\psi_{U_2}+90^\circ\right)+$$

$$+\sqrt{2}\cdot I_2\cdot\mathbf{cos}\beta x\cdot\mathbf{sin}\left(\omega t+\psi_{I_2}\right)$$

Для любого момента времени распределение напряжения и тока вдоль линии без потерь в функции x является гармоническим а) $t = t_1$



б) $t = t_2$



В режиме согласованной нагрузки $\underline{Z}_\text{Н}=\underline{Z}_\text{В}$, в режиме холостого хода линия разомкнута на конце и $\underline{Z}_\text{Н}=\infty$; $\underline{I}_2=0$, в режиме короткого замыкания линия замкнута на конце и $\underline{Z}_\text{Н}=0$; $\underline{U}_2=0$.

где $\underline{Z}_\text{Н}=\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}$ - сопротивление нагрузки

Пример 1

Линия без потерь длиной l=**200** (км) работает в режиме согласованной нагрузки.

Определить постоянную распространения $\underline{\gamma}$ (1/км), если в начале линии напряжение $\underline{U}_1 = j200$ (В) , а в конце линии напряжение $\underline{U}_2=200$ (В).

Решение: $\underline{U}_2=\underline{Z}_Н\underline{I}_2=\underline{Z}_В\underline{I}_2$, **тогда**

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cos\beta x + jZ_В \underline{I}_2 \sin\beta x =$$

$$= \underline{U}_2(\cos\beta x + j\sin\beta x) = \underline{U}_2 e^{j\beta x} = \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma} x}$$

Так как $\underline{U}_1=\underline{U}_2e^{\underline{\gamma} l}$ **, тогда**

Так как $\underline{U}_1=\underline{U}_2 e^{\underline{\gamma} l}$, тогда

$$\underline{\gamma}=\frac{1}{l}\ln\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)=\frac{1}{200}\ln\left(\frac{j200}{200}\right)=5\cdot 10^{-3}\ln(j)=$$

$$=5\cdot 10^{-3}\ln\left(1e^{j90^\circ}\right)=5\cdot 10^{-3}\left[\ln 1+j90^\circ\frac{\pi}{180^\circ}\right]=$$

$$=(0+j7,85)\cdot 10^{-3}=j7,85\cdot 10^{-3}\ \textbf{(1/км)}$$

Пример 2

Линия без потерь длиной l=100 (км)

при частоте f = 3000 (Гц)

с фазовой скоростью $V_ф=3\cdot10^5$ (км/с)

и волновым сопротивлением $\underline{Z}_В=100$ (Ом)

нагружена на сопротивление $\underline{Z}_Н=-j100$ (Ом).

Определить ток $\underline{I}_2$ в конце линии,

если в начале линии напряжение $\underline{U}_1=1000$ (В).

Решение: $\beta=2\pi f/V_ф=2\pi\cdot10^{-2}$ (1/км).

Так как $\underline{U}_2=\underline{Z}_Н\underline{I}_2=-j\underline{Z}_В\underline{I}_2$, **тогда**

$$\underline{U}_1=\underline{U}_2\cos\beta l+j\underline{Z}_В\underline{I}_2\sin\beta l=$$

$$=j\underline{Z}_В\underline{I}_2\left(-\cos\beta l+\sin\beta l\right)$$

В результате:

$$\underline{\boldsymbol{I}}_2=\frac{\underline{\boldsymbol{U}}_1}{\boldsymbol{jZ}_{\mathbf{в}}\left(-\cos\beta\boldsymbol{l}+\sin\beta\boldsymbol{l}\right)}=$$

$$=\frac{1000}{\boldsymbol{j}100\left(-\cos 2\boldsymbol{\pi}+\sin 2\boldsymbol{\pi}\right)}=$$

$$=\frac{1000}{-\boldsymbol{j}100}=\boldsymbol{j}10=10\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}90^\circ}\ \mathbf{(A)}$$