2 лекция

Порядок расчета классическим методом

1. Определяются ННУ
   при $t = 0-$:

$$\mathbf{i_L(0_-)}\ ,\ \mathbf{u_C(0_-)}$$

2. Определяются ЗНУ
   при $t = 0+$:

$$\mathbf{u_L(0_+),\ i_C(0_+)}$$

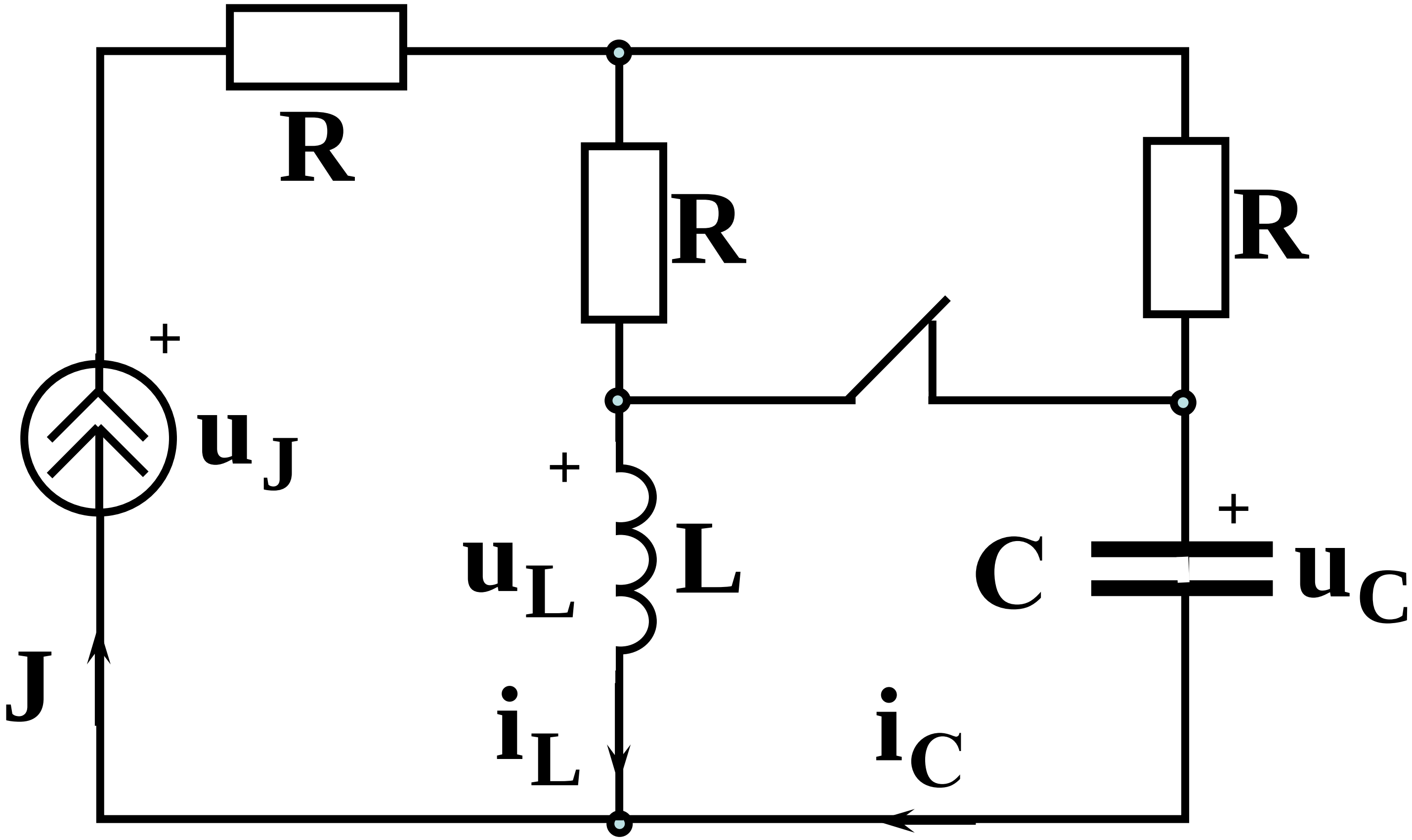
и другие напряжения и токи

3. Определяются принужденные составляющие при $\mathbf{t} = \infty$.

4. Определяются корни характеристического уравнения $p_{\boldsymbol{к}}$ по $\mathbf{Z(p) = 0}$.

5. Взависимости от вида корней p_k записываются свободные составляющие и определяются постоянные интегрирования при $t = 0+$.

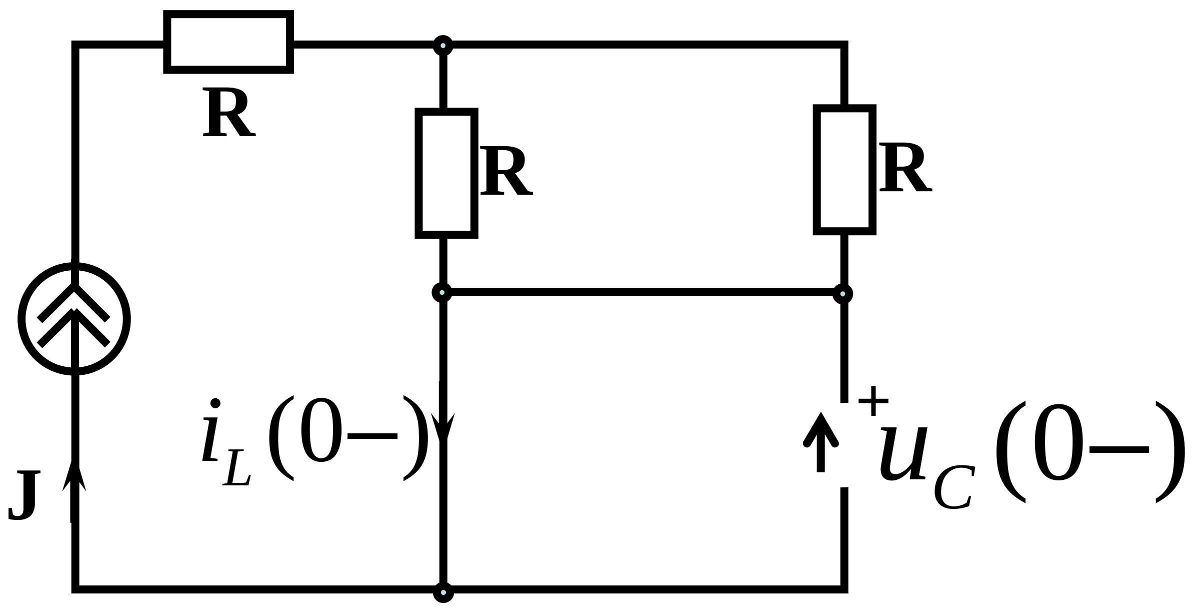
Пример цепи 2-го порядка:



$J = 2$ **(А)** $C = 1111{,}1$ **(мкФ)** $L = 1$ **(Гн)** $R = 50$ **(Ом)**

Определить: $i_L(t) = ?$ $u_C(t) = ?$

1. Определяем независимые начальные условия:



$$i_L(0-) = J = 2\ \mathbf{A} \qquad u_C(0-) = 0$$

2. Определяем зависимые начальные условия при $t = 0+$

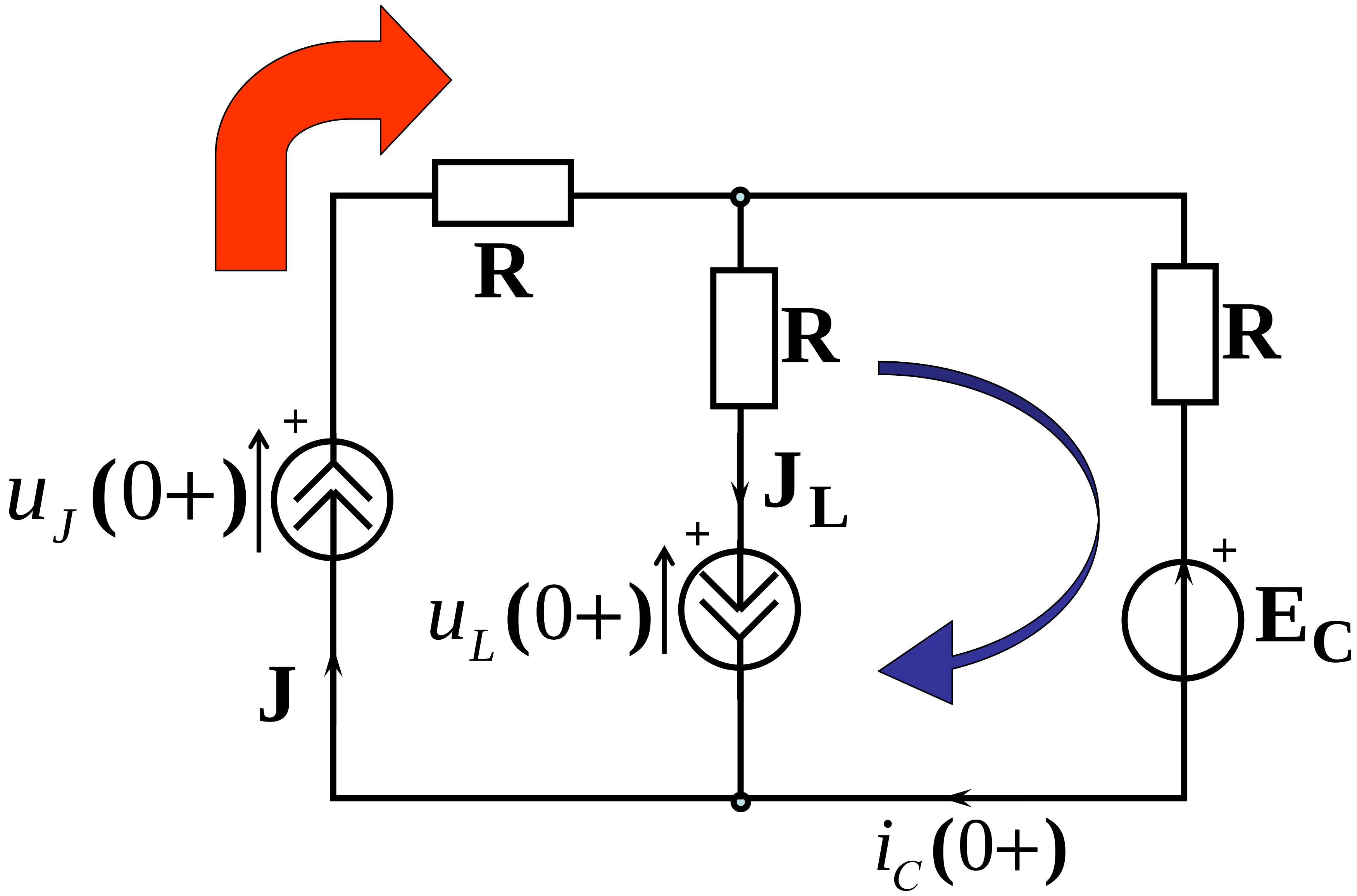
схема после коммутации

$$J_L = i_L(0-) = i_L(0+) = 2 \ \mathbf{A}$$

$$E_C = u_C(0-) = u_C(0+) = 0$$

По 1 закону Кирхгофа

$$i_C(0+) = J - J_L = 0$$


R
R
R
+
$u_J(0+)$
J_L
+
$u_L(0+)$
+
E_C
J
$i_C(0+)$

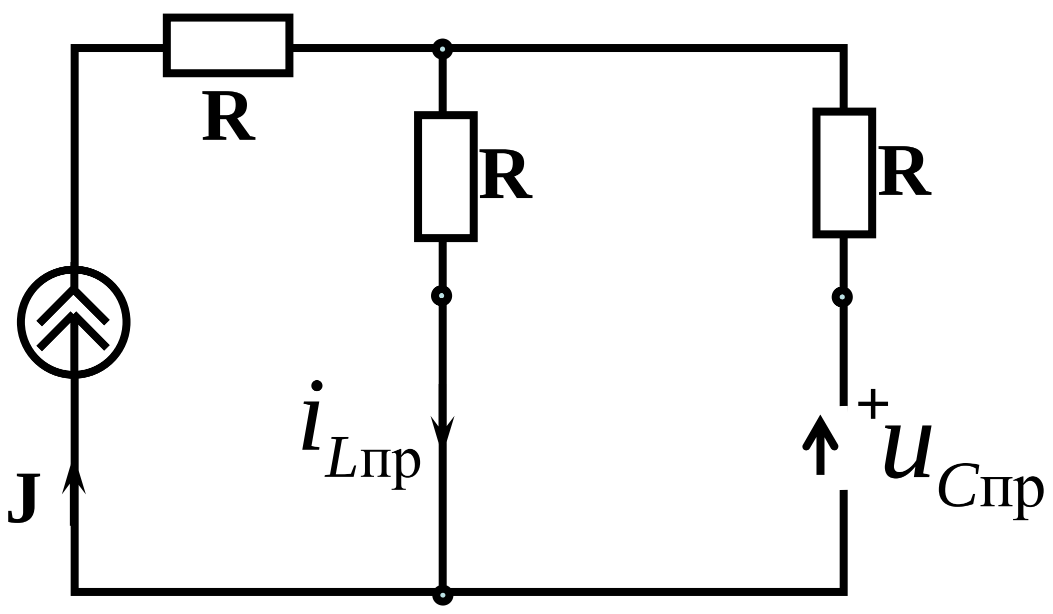
По 2 закону Кирхгофа

$$Ri_C(0+) - RJ_L = u_L(0+) - E_C$$

тогда

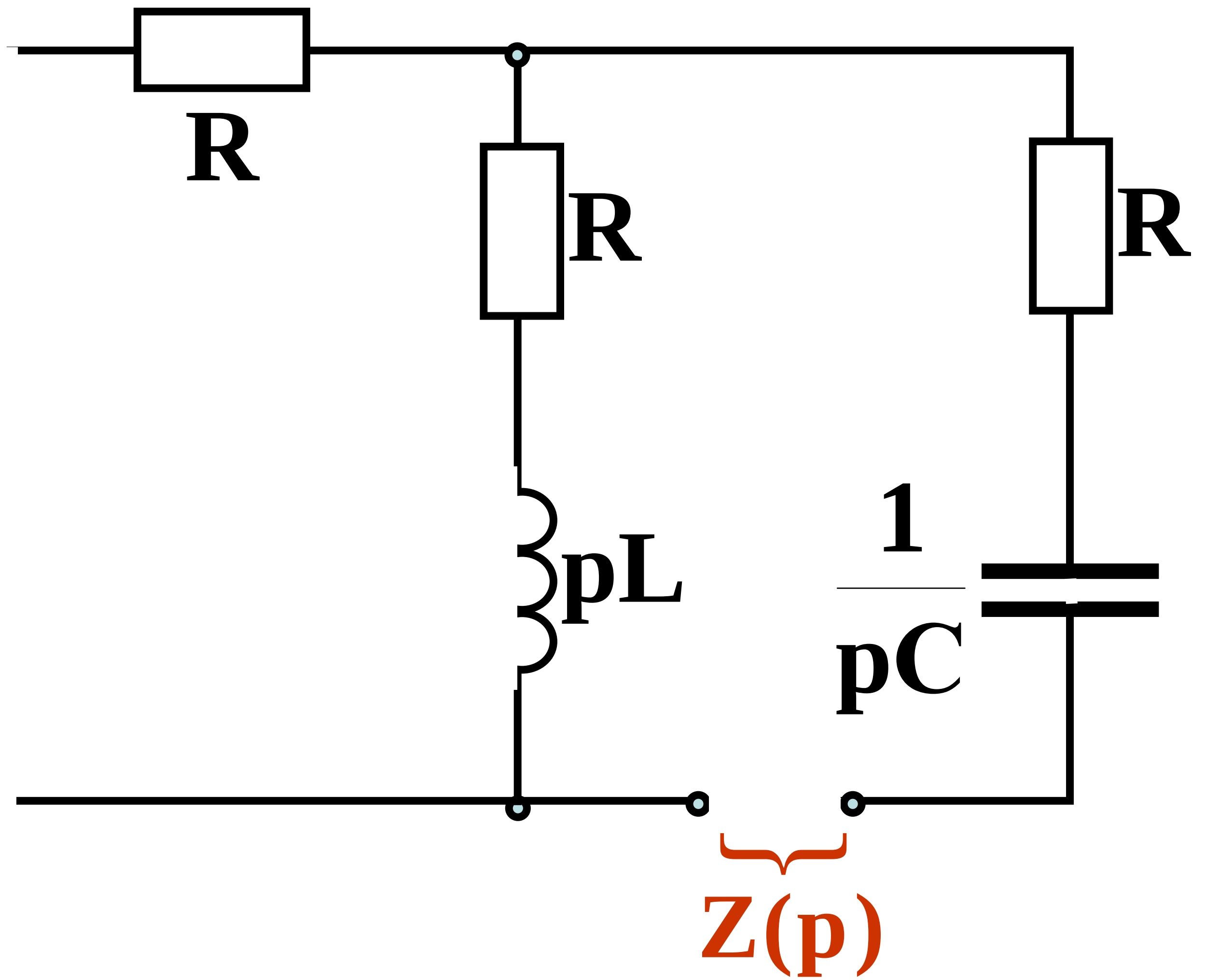
$$u_L(0+) = Ri_C(0+) + E_C - RJ_L = -100 \quad B$$

3. Определяем принужденные составляющие при *t*=∞:



$$i_{L\text{пр}} = J = 2\,(\text{А}); \quad u_{C\text{пр}} = R \cdot i_{L\text{пр}} = 100\,(\text{В}).$$

4. Находим корни характеристического уравнения



$$\mathbf{Z(p) = 2R + pL + {}^{1}\!/_{pC} = 0} \Rightarrow \mathbf{p^2 + \frac{2R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0}$$

Тогда

$$p_{1,2} = -\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{1}{LC}} = -50 \pm 40 \ \ (1/\text{с})$$

или

$$p_1 = -50 + 40 = -10\,(1/\text{с}), \ \ p_2 = -50 - 40 = -90\,(1/\text{с})$$

- апериодический переходный процесс

5. Определяем постоянные интегрирования A_1, A_2 и B_1, B_2:

$$i_L(t) = i_{L\text{пр}} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = A_1 L p_1 e^{p_1 t} + A_2 L p_2 e^{p_2 t};$$

$$u_C(t) = u_{C\text{пр}} + B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t},$$

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = B_1 C p_1 e^{p_1 t} + B_2 C p_2 e^{p_2 t}.$$

При $t = 0+$:

$$i_L(0+) = i_{L\text{пр}} + A_1 + A_2,$$

$$u_L(0+) = A_1 L p_1 + A_2 L p_2;$$

тогда

$$A_1 = \frac{u_L(0+) + \left[i_{L\text{пр}} - i_L(0+) \right] L p_2}{(p_1 - p_2) L} = -1{,}25 (\text{A});$$

$$A_2 = i_L(0+) - i_{L\text{пр}} - A_1 = 1{,}25 (\text{A}).$$

При $t = 0+$:

$$u_C(0+) = u_{C\text{пр}} + B_1 + B_2,$$

$$i_C(0+) = B_1 C p_1 + B_2 C p_2;$$

тогда

$$B_1 = \frac{i_C(0+) + \left[u_{C\text{пр}} - u_C(0+)\right] C p_2}{(p_1 - p_2)C} = -112,5\,(\text{В});$$

$$B_2 = u_C(0+) - u_{C\text{пр}} - B_1 = 12,5\,(\text{В}).$$

6. Окончательный результат

$$i_L(t) = 2 - 1,25e^{-10t} + 1,25e^{-90t}, (\mathrm{A})$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = 12,5e^{-10t} - 112,5e^{-90}, (\mathrm{B})$$

$$u_C(t) = 100 - 112,5e^{-10t} + 12,5e^{-90t}, (\mathrm{B})$$

$$i_C(t) = 1,25e^{-10t} - 1,25e^{-90t}, (\mathrm{A})$$

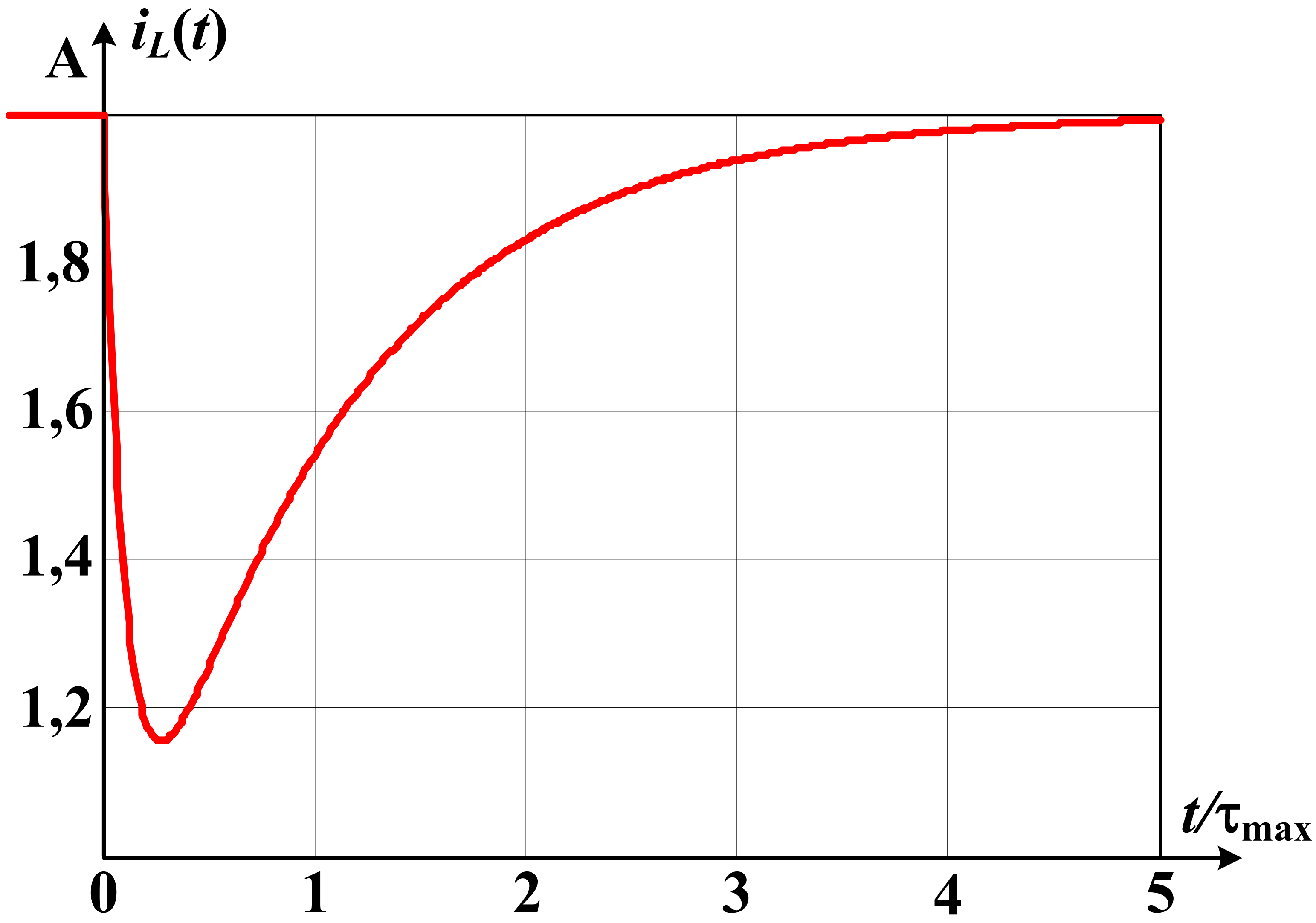
Постоянные времени экспонент:

$$\tau_1 = 1/|p_1| = 1/10 = 0{,}1 \ (\text{с});$$

$$\tau_2 = 1/|p_2| = 1/90 = 0{,}0111 \ (\text{с}).$$

Длительность переходного процесса:

$$t_{\text{П}} = 5\tau_{\max} = 0{,}5 \ (\text{с}).$$



$i_L(t)$
A
1,8
1,6
1,4
1,2
0
1
2
3
4
5
t/τ_{max}

Основы операторного метода расчета переходных процессов

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, характеризующие переходные процессы в линейных цепях могут быть решены при помощи интегральных преобразований Лапласа, причем из математики известно:

Если

$$|f(t)| < |M| e^{|\sigma| t},$$

то при $t > 0$ и $p = \delta_0 + j\omega_0$, $1/c$

имеем

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

- прямое преобразование Лапласа

Где

$\mathbf{f(t)}$ – оригинал

$\mathbf{F(p)}$ – операторное изображение f(t)

причем $\mathbf{F(p)} \;\dot{=}\; \mathbf{f(t)}$

Если $\mathbf{f(t) = F_m = const,}$ то

$$\mathbf{F(p) = \int_0^\infty F_m e^{-pt} dt = \frac{F_m}{(-p)} e^{-pt} \Big|_0^\infty = \frac{F_m}{p}}$$

Аналогично:

$$f(t) = F_m e^{\delta t} \doteq \frac{F_m}{p-\delta}$$

$$f(t) = F_m t \doteq \frac{F_m}{p^2}$$

$$f(t) = F_m \sin(\omega t + \alpha) \doteq$$

$$\doteq F_m \frac{p \sin\alpha + \omega\cos\alpha}{p^2 + \omega^2}$$

и т.д.

При

$$f(t) \doteq F(p)$$

имеем

$$\int_0^t f(t)dt \doteq F(p)/p$$

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0_+)$$

$$f''(t) \doteq p^2F(p) - pf(0_+) - f'(0_+)$$

$$f'''(t) \doteq p^3F(p) - p^2f(0_+) - pf'(0_+) -$$

$$- f''(0_+)$$

и т.д.

В результате линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами могут быть заменены алгебраическими уравнениями.

Например:

$$a_2 f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = F(t)$$

Если $f(t) \doteq F(p)$ и $F(t) \doteq Y(p)$,

то $$a_2[p^2F(p) - pf(0_+) - f'(0_+)] +$$

$$+ a_1[pF(p) - f(0_+)] + a_0F(p) = Y(p)$$

Таким образом

$$F(p) = \frac{Y(p) + a_2pf(0_+) + a_2f'(0_+) + a_1f(0_+)}{a_2p^2 + a_1p + a_0}$$

Для определения оригинала **f(t)** используется обратное преобразование Лапласа:

$$\mathbf{f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty}F(p)\cdot e^{pt}dp}$$

Теорема разложения

На основании обратного преобразования Лапласа получена теорема разложения

Если операторное изображение записано в виде:

$$F(p)=\frac{D(p)}{B(p)}=\frac{d_0+d_1p+d_2p^2+...+d_mp^m}{b_0+b_1p+b_2p^2+...+b_np^n}$$

причем

- **m<n**
- корни **B(p)=0** различны
- корни **D(p)=0** и **B(p)=0** различны

Тогда оригинал определяется так:

$$f(t)=\sum_{к=1}^{n}\frac{D(p_к)}{B'(p_к)}\cdot e^{p_к t}$$

Где

- $p_к$ корни $B(p)=0$

- $$B'(p_к)=\left.\frac{dB(p)}{dp}\right|_{p=p_к}$$

Пример

$$\mathbf{F(p) = I(p) = \frac{p + 10}{p^3 + 6p^2 + 8p} =}$$

$$\mathbf{= \frac{D(p)}{B(p)},\ (Ac)}$$

$$B(p) = p^3 + 6p^2 + 8p = p(p^2 + 6p + 8) = 0$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = -2\left(1/c\right)$$

$$p_3 = -4\left(1/c\right)$$

$$B'(p) = 3p^2 + 12p + 8$$

тогда

$$i(t) = \sum_{к=1}^{n=3} \frac{D(p_к)}{B'(p_к)} \cdot e^{p_к t}$$

Или

$$i(t)=\frac{0+10}{3\cdot 0^2+12\cdot 0+8}\cdot e^{0t}+$$

$$+\frac{-2+10}{3\cdot(-2)^2+12\cdot(-2)+8}\cdot e^{(-2)t}+$$

$$+\frac{-4+10}{3\cdot(-4)^2+12\cdot(-4)+8}\cdot e^{(-4)t}$$

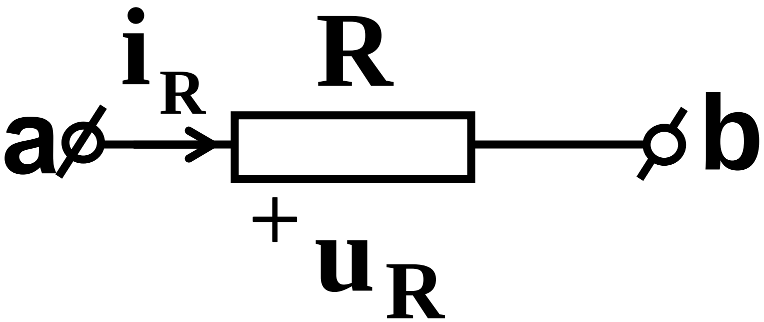
Т.е.

$$i(t)=1{,}25-2e^{-2t}+0{,}75e^{-4t}\ \ (A)$$

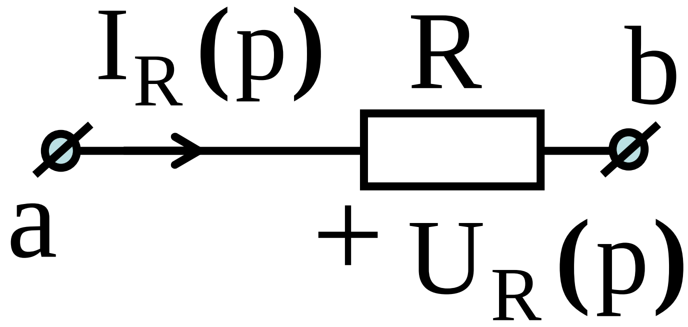
Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме

Для схемы после коммутации составляется операторная схема из отдельных элементов, операторные схемы замещения которых получены при помощи прямого преобразования Лапласа

1. Резистивный элемент

<table>
<tr><td>Элемент</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Напряжение</td><td>$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$</td></tr>
</table>

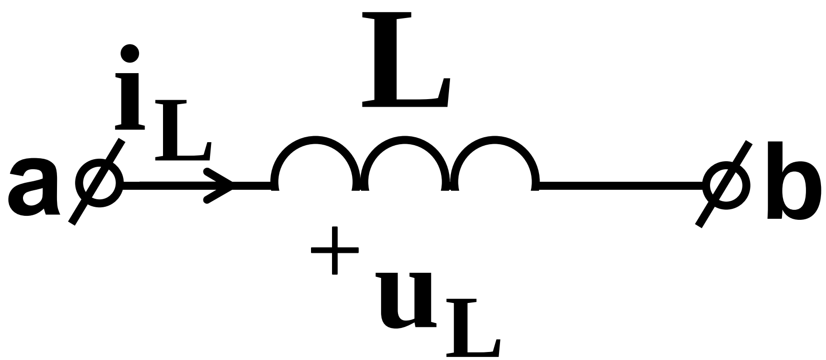
Операторная схема замещения резистора:



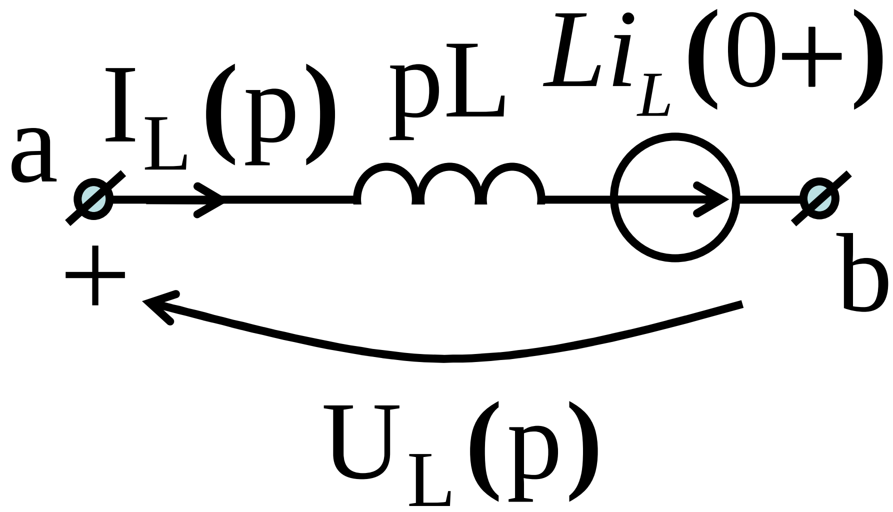
$$U_R(p) = R\,I_R(p)$$

- закон Ома в операторной форме для резистивного элемента

2. Индуктивный элемент

<table>
<tr><td>Элемент</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Напряжение</td><td>$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = L \cdot i_L^{'}(t)$$</td></tr>
</table>

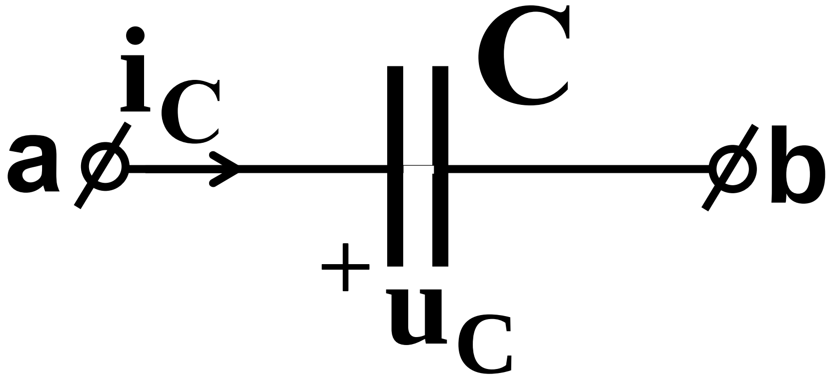
Операторная схема замещения индуктивности:



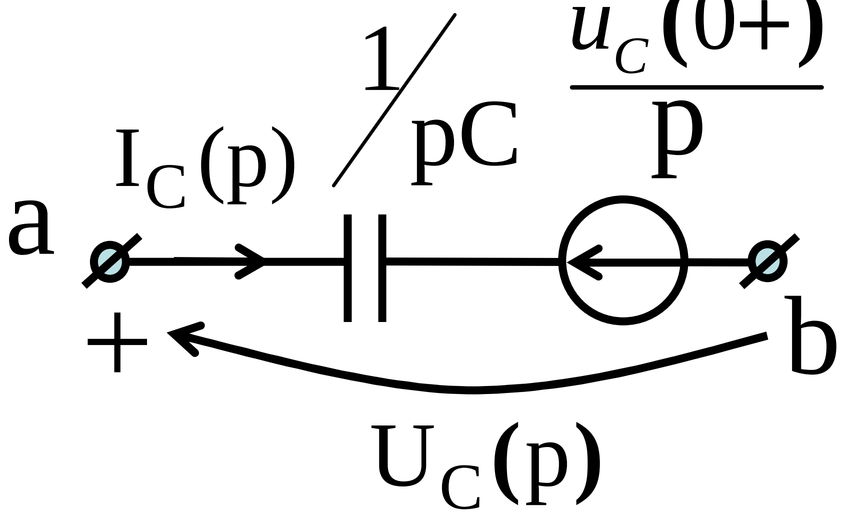
$$U_L(p) = pL \cdot I_L(p) - L \cdot i_L(0+)$$

- операторное изображение напряжения на индуктивности

3. Емкостный элемент

Элемент	
Напряжение	$u_C(t) = u_C(0+) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt$

Операторная схема замещения емкости:



$$U_C(p) = \frac{1}{pC} \cdot I_C(p) + {u_C(0+)}\big/{p}$$

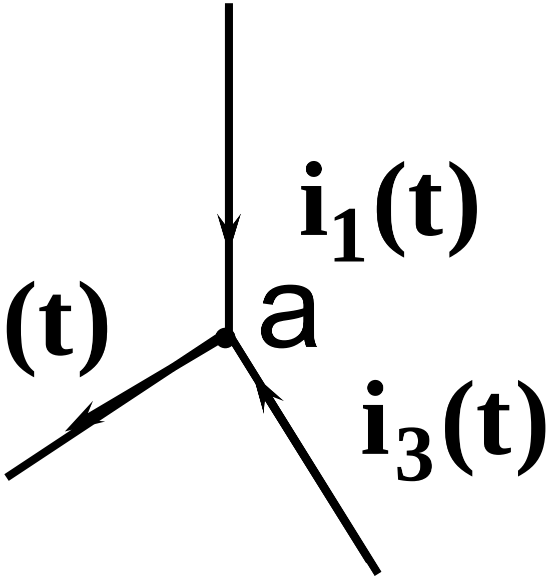
- операторное изображение напряжения на емкости

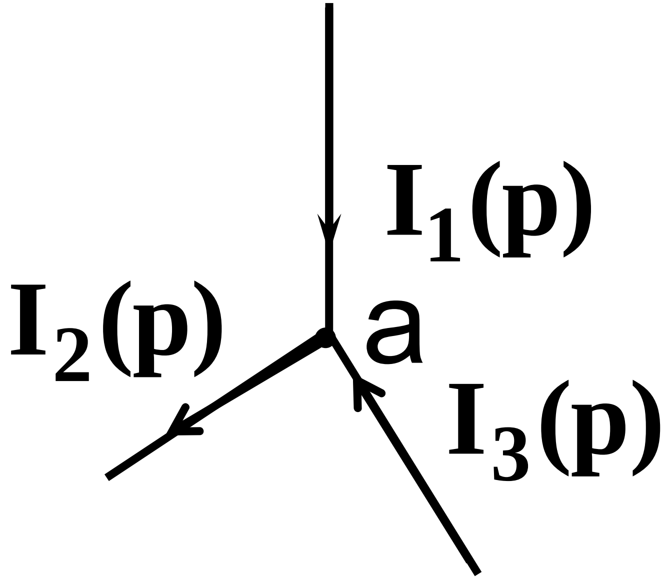
4. Первый закон Кирхгофа в операторной форме

$$\sum \pm \mathbf{I}_{\mathbf{к}}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

Для любого узла операторной схемы алгебраическая сумма операторных изображений токов равна нулю

Например:





$$-i_1(t)+i_2(t)-i_3(t)=0$$

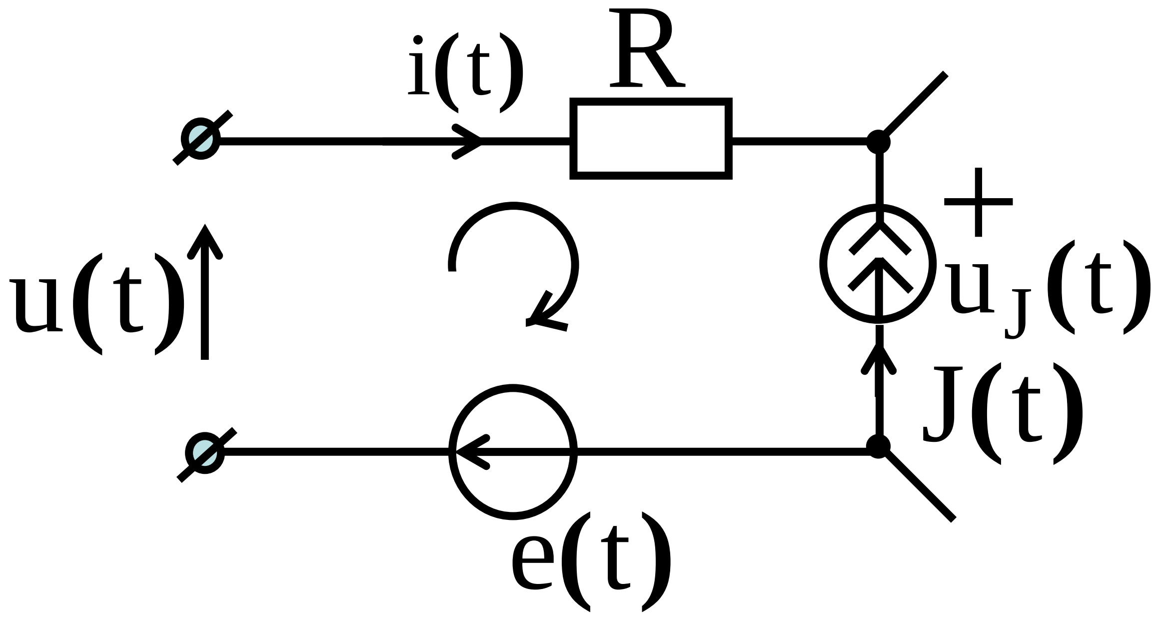
$$-I_1(p)+I_2(p)-I_3(p)=0$$

5. Второй закон Кирхгофа в операторной форме

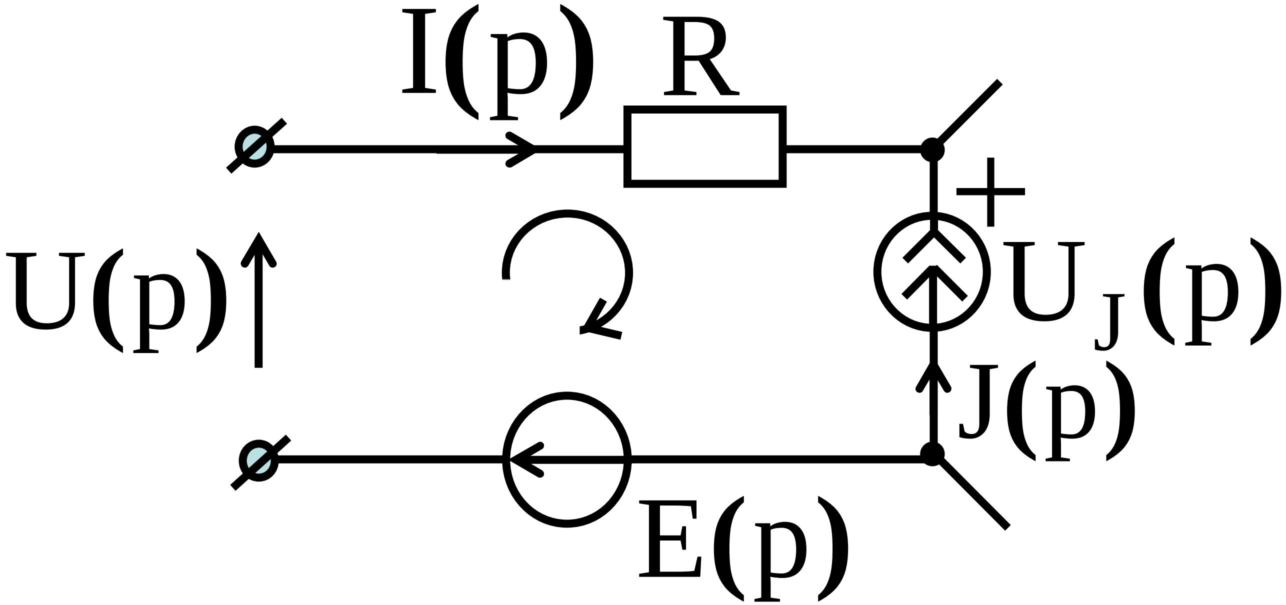
$$\sum \pm U_n(p) = \sum \pm E_к(p) + \sum \pm U_{J_q}(p)$$

Для любого контура операторной схемы алгебраическая сумма операторных изображений напряжений на пассивных элементах равна алгебраической сумме операторных изображений ЭДС и напряжений на источниках токов, действующих в этом контуре

Например:



$$R\,i(t) = u(t) + e(t) - u_J(t)$$



$$R\,I(p) = U(p) + E(p) - U_J(p)$$

Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме аналогичны этим законам на постоянном токе. Поэтому к операторным схемам замещения применимы те же методы расчета, но в операторной форме.

Порядок расчета переходных процессов операторным методом

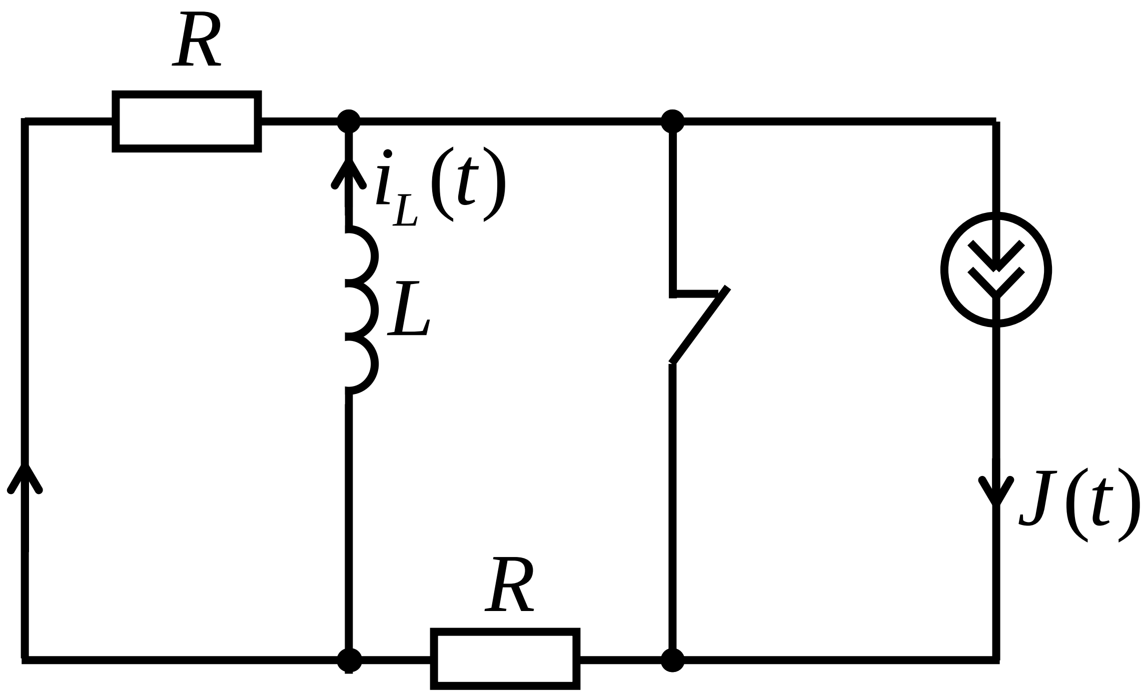
1. Определяются независимые начальные условия:

$$i_L(0-)=i_L(0) \qquad u_C(0)=u_C(0)$$

2. Для схемы после коммутации изображается операторная схема, которая рассчитывается любым методом в операторной форме.

3. По теореме разложения определяются напряжения и токи переходного процесса в функции времени.

Пример:



Дано: $J(t) = 2e^{-200t}$ (A)

$R = 100$ (Ом) $L = 1$ (Гн)

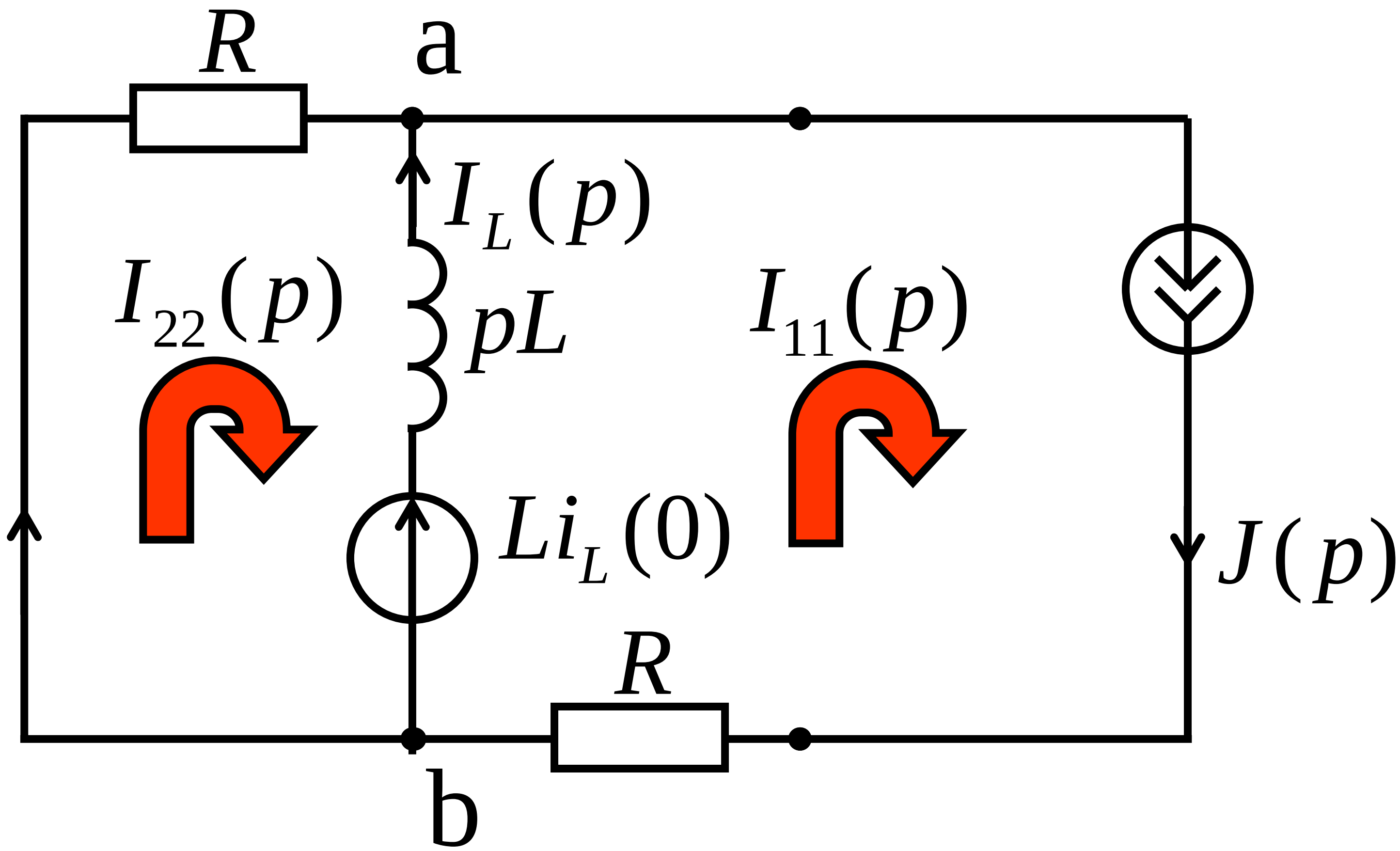
Определить: $i_L(t) = ?$

1. Определяем независимое начальное условие $(t = 0-)$:

$$i_L(0-) = 0$$

2. Операторная схема после коммутации: $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$

$$J(p) = \frac{2}{p + 200} \; (\mathrm{A} \cdot \mathrm{c})$$



R
a
$I_L(p)$
$I_{22}(p)$
pL
$I_{11}(p)$
$Li_L(0)$
$J(p)$
R
b

По методу контурных токов:

$$I_{11}(p)=J(p)=\frac{2}{p+200};$$

$$\left(R+pL\right)\cdot I_{22}(p)-pL\cdot I_{11}(p)=-L\cdot i_L(0).$$

В результате:

$$I_{22}(p)=\frac{pL\cdot J(p)}{R+pL}=\frac{2p}{(p+100)(p+200)};$$

$$I_L(p)=I_{11}(p)-I_{22}(p)=\frac{200}{(p+100)(p+200)}.$$

3. По теореме разложения $i_L(t)$

определяем

$$I_L(p)=\frac{200}{(p+100)(p+200)}=\frac{D(p)}{B(p)};$$

$$B(p)=(p+100)(p+200)=0;$$

$$p_1=-100\ (1/\text{c});\ p_2=-200\,(1/\text{c});$$

$$\frac{d\left[B(p)\right]}{dp}=2p+300.$$

В результате

$$i_L(t)=\frac{200}{2(-100)+300}e^{-100t}+\frac{200}{2(-200)+300}e^{-200t}=$$

$$=2e^{-100t}-2e^{-200t},(\text{A}).$$

Проверка:

$$i_L(0)=0; \quad i_L(\infty)=0.$$

$$\tau = L/R = 0{,}01 \text{ (c)}$$