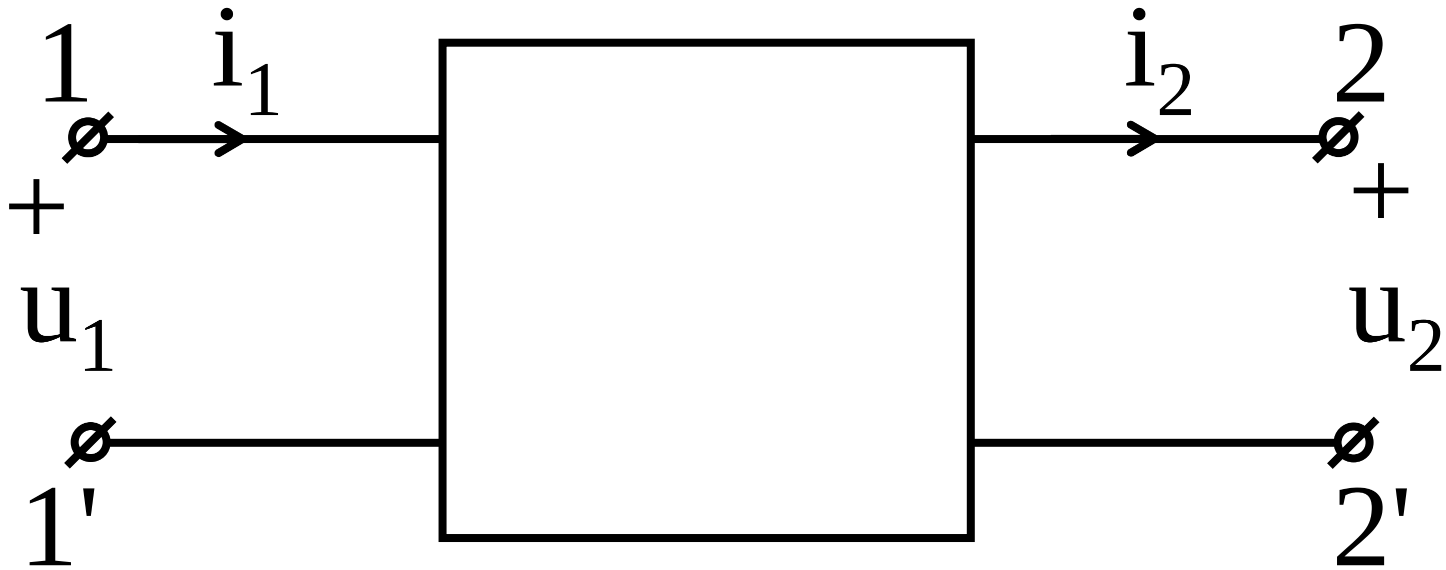
5 лекция

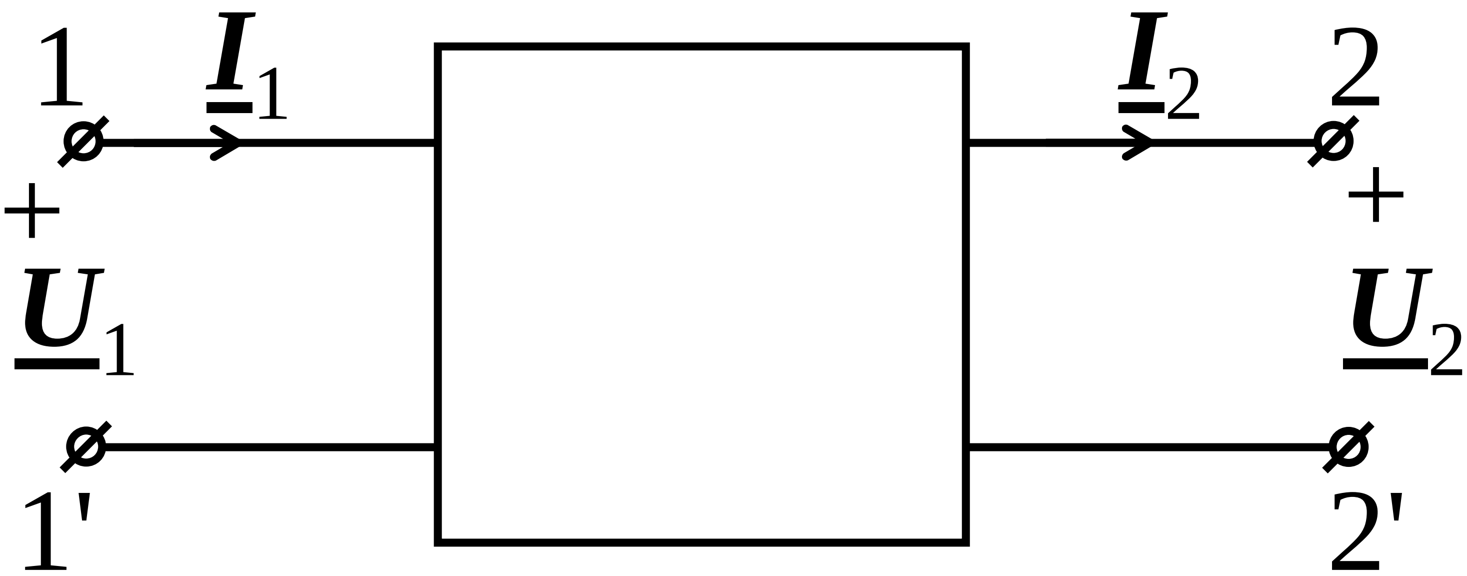
Четырехполюсники в линейном режиме



Четырехполюсники – это цепи, имеющие два входных (1, 1') и два выходных (2, 2') зажима

Пассивные четырехполюсники, удовлетворяющие принципу взаимности, называют обратимыми (линии связи, трансформатор, электрический фильтр).

Четырехполюсники с нелинейными элементами, а также все активные четырехполюсники, (с независимыми и зависимыми источниками) – необратимые. Это электронные генераторы, усилители, активные фильтры.



В линейном режиме у пассивных обратимых четырехполюсников комплексы гармонических входных и выходных напряжений и токов связаны следующими линейными зависимостями:

1. Уравнения типа А:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{A}_{11}\dot{U}_2 + \underline{A}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = \underline{A}_{21}\dot{U}_2 + \underline{A}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = (\underline{\mathrm{A}}) \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix}; (\underline{\mathrm{A}}) = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix},$$

причем $\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{21}\underline{A}_{12} = 1$

2. Уравнения типа Y :

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = \underline{Y}_{21}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = (\underline{\mathrm{Y}})\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix}; \quad (\underline{\mathrm{Y}}) = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix},$$

причем $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21};$

$$\underline{Y}_{11} = \underline{A}_{22}/\underline{A}_{12}; \ \underline{Y}_{12} = -1/\underline{A}_{12}; \ \underline{Y}_{21} = 1/\underline{A}_{12}; \ \underline{Y}_{22} = -\underline{A}_{11}/\underline{A}_{12}$$

3. Уравнения типа Z:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = (\underline{\mathrm{Z}}) \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}; \quad (\underline{\mathrm{Z}}) = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix},$$

причем $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21};$

$$\underline{Z}_{11} = \underline{A}_{11}/\underline{A}_{21}; \ \underline{Z}_{12} = -1/\underline{A}_{21}; \ \underline{Z}_{21} = 1/\underline{A}_{21}; \ \underline{Z}_{22} = -\underline{A}_{22}/\underline{A}_{21}$$

4. Уравнения типа *H*:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{H}_{11}\dot{I}_1 + \underline{H}_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = \underline{H}_{21}\dot{I}_1 + \underline{H}_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \left(\underline{\mathrm{H}}\right)\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix}; \quad \left(\underline{\mathrm{H}}\right) = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix},$$

причем $\underline{H}_{12} = \underline{H}_{21};$

$$\underline{H}_{11} = \underline{A}_{12}/\underline{A}_{22}; \ \underline{H}_{12} = 1/\underline{A}_{22}; \ \underline{H}_{21} = 1/\underline{A}_{22}; \ \underline{H}_{22} = -\underline{A}_{21}/\underline{A}_{22}$$

5. Уравнения типа G:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \underline{G}_{11}\dot{U}_1 + \underline{G}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \underline{G}_{21}\dot{U}_1 + \underline{G}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = (\underline{G})\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}; (\underline{G}) = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} \end{pmatrix},$$

причем $\underline{G}_{21} = \underline{G}_{12}$;

$$\underline{G}_{11} = \underline{A}_{21}/\underline{A}_{11};\ \underline{G}_{12} = 1/\underline{A}_{11};\ \underline{G}_{21} = 1/\underline{A}_{11};\ \underline{G}_{22} = -\underline{A}_{12}/\underline{A}_{11}$$

6. Уравнения типа *B*:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \underline{B}_{11}\dot{U}_1 + \underline{B}_{12}\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = \underline{B}_{21}\dot{U}_1 + \underline{B}_{22}\dot{I}_1 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = (\underline{\mathbf{B}})\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix}; \quad (\underline{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{pmatrix},$$

причем $\underline{B}_{11}\underline{B}_{22} - \underline{B}_{21}\underline{B}_{12} = 1;$

$$\underline{B}_{11} = \underline{A}_{22};\ \underline{B}_{12} = -\underline{A}_{12};\ \underline{B}_{21} = -\underline{A}_{21};\ \underline{B}_{22} = \underline{A}_{11}$$

Комплексные коэффициенты (A), (B), (Y), (Z), (H), (G) – определяются внутренней структурой четырехполюсника, параметрами его элементов и частотой сигнала

Ограничимся подробным рассмотрением уравнений типа **А**:

$$\begin{cases} \underline{\boldsymbol{U}}_1 = \underline{\boldsymbol{A}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_2 + \underline{\boldsymbol{B}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_2 = \underline{\boldsymbol{A}}_{11} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_2 + \underline{\boldsymbol{A}}_{12} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_2 \\ \underline{\boldsymbol{I}}_1 = \underline{\boldsymbol{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_2 + \underline{\boldsymbol{D}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_2 = \underline{\boldsymbol{A}}_{21} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_2 + \underline{\boldsymbol{A}}_{22} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_2 \end{cases}$$

причем комплексные коэффициенты $\underline{A}_{11}$, $\underline{A}_{12}$ (Ом), $\underline{A}_{21}$ (1/Ом), $\underline{A}_{22}$ **постоянны.**

Коэффициенты $\underline{A}_{11}$, $\underline{A}_{12}$, $\underline{A}_{21}$, $\underline{A}_{22}$ можно определить при помощи расчета или эксперимента, используя режимы холостого хода ($\underline{I}_2=0$) и короткого замыкания ($\underline{U}_2=0$)

При **прямом** включении (со стороны входа) для параметров $\underline{A}$ имеем:

$$\underline{A}_{11} = \underline{U}_1^{(xx)} / \underline{U}_2^{(xx)} \qquad \underline{A}_{21} = \underline{I}_1^{(xx)} / \underline{U}_2^{(xx)}$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{U}_1^{(кз)} / \underline{I}_2^{(кз)} \qquad \underline{A}_{22} = \underline{I}_1^{(кз)} / \underline{I}_2^{(кз)}$$

где $\underline{I}_2^{(xx)} = 0$; $\underline{U}_2^{(кз)} = 0$.

В режимах **холостого хода** ($I_{2x}=0$)
и **короткого замыкания** ($U_{2k}=0$)

входные сопротивления при прямом включении соответственно равны:

$$\underline{Z}_{1x} = \underline{A}_{11}/\underline{A}_{21} = \underline{U}_{1x}/\underline{I}_{1x};$$

$$\underline{Z}_{1к} = \underline{A}_{12}/\underline{A}_{22} = \underline{U}_{1к}/\underline{I}_{1к}.$$

При обратном включении в режимах хх ($\underline{I}_{1x} = 0$) и кз ($\underline{U}_{1k} = 0$) имеем:

$$\underline{Z}_{2x} = \underline{U}_{2x}/\underline{I}_{2x} = \underline{A}_{22}/\underline{A}_{21};$$

$$\boxed{\underline{Z}_{2к} = \underline{U}_{2к}/\underline{I}_{2к} = \underline{A}_{12}/\underline{A}_{11}.}$$

Решая уравнения, получаем:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1х}}{\underline{Z}_{2х} - \underline{Z}_{2к}}}; \qquad \underline{A}_{12} = \underline{A}_{11}\underline{Z}_{2к};$$

$$\underline{A}_{21} = \underline{A}_{11} / \underline{Z}_{1х}; \qquad \underline{A}_{22} = \underline{A}_{11}\underline{Z}_{2х} / \underline{Z}_{1х}.$$

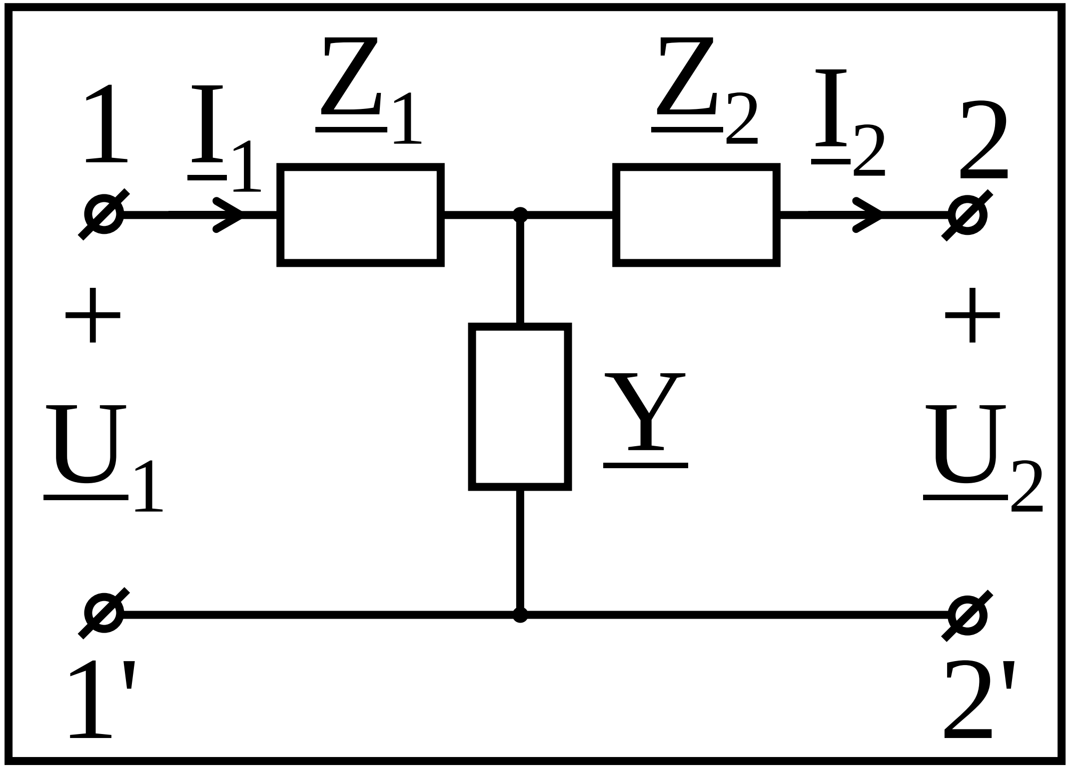
При этом: $$\frac{\underline{Z}_{1х}}{\underline{Z}_{1к}} = \frac{\underline{Z}_{2х}}{\underline{Z}_{2к}}.$$

Пассивный четырехполюсник может быть представлен “Т – образной” и “П – образной” схемами:

а) “Т – образная” схема

$$\underline{\boldsymbol{A}}_{11} = 1 + \underline{\boldsymbol{Z}}_1 \cdot \underline{\boldsymbol{Y}}$$

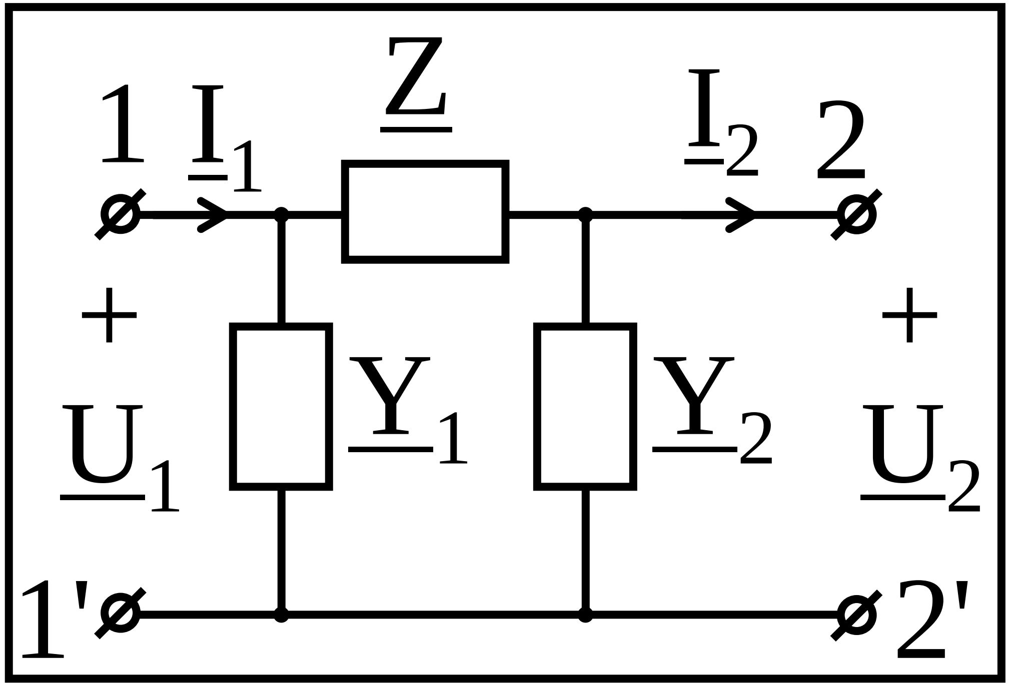
$$\underline{\boldsymbol{A}}_{12} = \underline{\boldsymbol{Z}}_1 + \underline{\boldsymbol{Z}}_2 + \underline{\boldsymbol{Z}}_1 \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}_2 \cdot \underline{\boldsymbol{Y}}$$



$$\underline{\boldsymbol{A}}_{21} = \underline{\boldsymbol{Y}}$$

$$\underline{\boldsymbol{A}}_{22} = 1 + \underline{\boldsymbol{Z}}_2 \cdot \underline{\boldsymbol{Y}}$$

б) “П – образная” схема



$$\underline{\boldsymbol{A}}_{11} = 1 + \underline{\boldsymbol{Y}}_2 \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}$$

$$\underline{\boldsymbol{A}}_{12} = \underline{\boldsymbol{Z}}$$

$$\underline{\boldsymbol{A}}_{21} = \underline{\boldsymbol{Y}}_1 + \underline{\boldsymbol{Y}}_2 + \underline{\boldsymbol{Y}}_1 \cdot \underline{\boldsymbol{Y}}_2 \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}$$

$$\underline{\boldsymbol{A}}_{22} = 1 + \underline{\boldsymbol{Y}}_1 \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}$$

Для пассивного симметричного четырехполюсника нет разницы между входными и выходными зажимами, причем

$\underline{A}_{11}=\underline{A}_{22}$, $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2$ (“Т”- схема), $\underline{Y}_1=\underline{Y}_2$ (“П”- схема)

Комплекс входного сопротивления четырехполюсника равен

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{U}_1 / \underline{I}_1$$

Или

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{вх}} = \frac{\underline{\boldsymbol{A}}_{11} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_2 + \underline{\boldsymbol{A}}_{12} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_2}{\underline{\boldsymbol{A}}_{21} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_2 + \underline{\boldsymbol{A}}_{22} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_2}$$

$$= \frac{\underline{\boldsymbol{A}}_{11} \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{н}} + \underline{\boldsymbol{A}}_{12}}{\underline{\boldsymbol{A}}_{21} \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{н}} + \underline{\boldsymbol{A}}_{22}}$$

Где

$$\underline{Z}_н = \underline{U}_2 / \underline{I}_2$$ - комплекс выходного сопротивления или комплекс сопротивления нагрузки

Для четырехполюсников могут быть следующие режимы:

$$a)\ \underline{\mathbf{Z}}_{вх} = 0 \ \ при\ \ \underline{\mathbf{Z}}_{н} = {-\underline{\boldsymbol{A}}_{12}} \big/ {\underline{\boldsymbol{A}}_{11}}$$

$$б)\ \underline{Z}_{вх} = \infty \quad при \quad \underline{Z}_{н} = -\underline{A}_{22} / \underline{A}_{21}$$

$$в)\ \underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_{н} \quad при$$

$$\underline{Z}_{н} = \frac{\underline{A}_{11} - \underline{A}_{22}}{2\underline{A}_{21}} \pm \sqrt{\frac{\left(\underline{A}_{11} - \underline{A}_{22}\right)^2}{4\underline{A}_{21}^2} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}$$

Для симметричного пассивного четырехполюсника при $\underline{A}_{11}=\underline{A}_{22}$ вводится понятие режима согласованной нагрузки, когда

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{вх}}=\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{н}}=\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{c}}=\sqrt{\underline{\boldsymbol{A}}_{12}/\underline{\boldsymbol{A}}_{21}}$$

где $\underline{Z}_c$ – характеристическое сопротивление

В этом режиме используется **постоянная передачи**

$$\underline{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b} = \ln\frac{\underline{\boldsymbol{U}}_1}{\underline{\boldsymbol{U}}_2} = \ln\frac{\underline{\boldsymbol{I}}_1}{\underline{\boldsymbol{I}}_2} =$$

$$= \ln\left(\underline{\boldsymbol{A}}_{11} + \sqrt{\underline{\boldsymbol{A}}_{12}\cdot\underline{\boldsymbol{A}}_{21}}\right)$$

Где:

$$\boldsymbol{a}=\ln\frac{\boldsymbol{U}_1}{\boldsymbol{U}_2}=\ln\frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{I}_2}$$

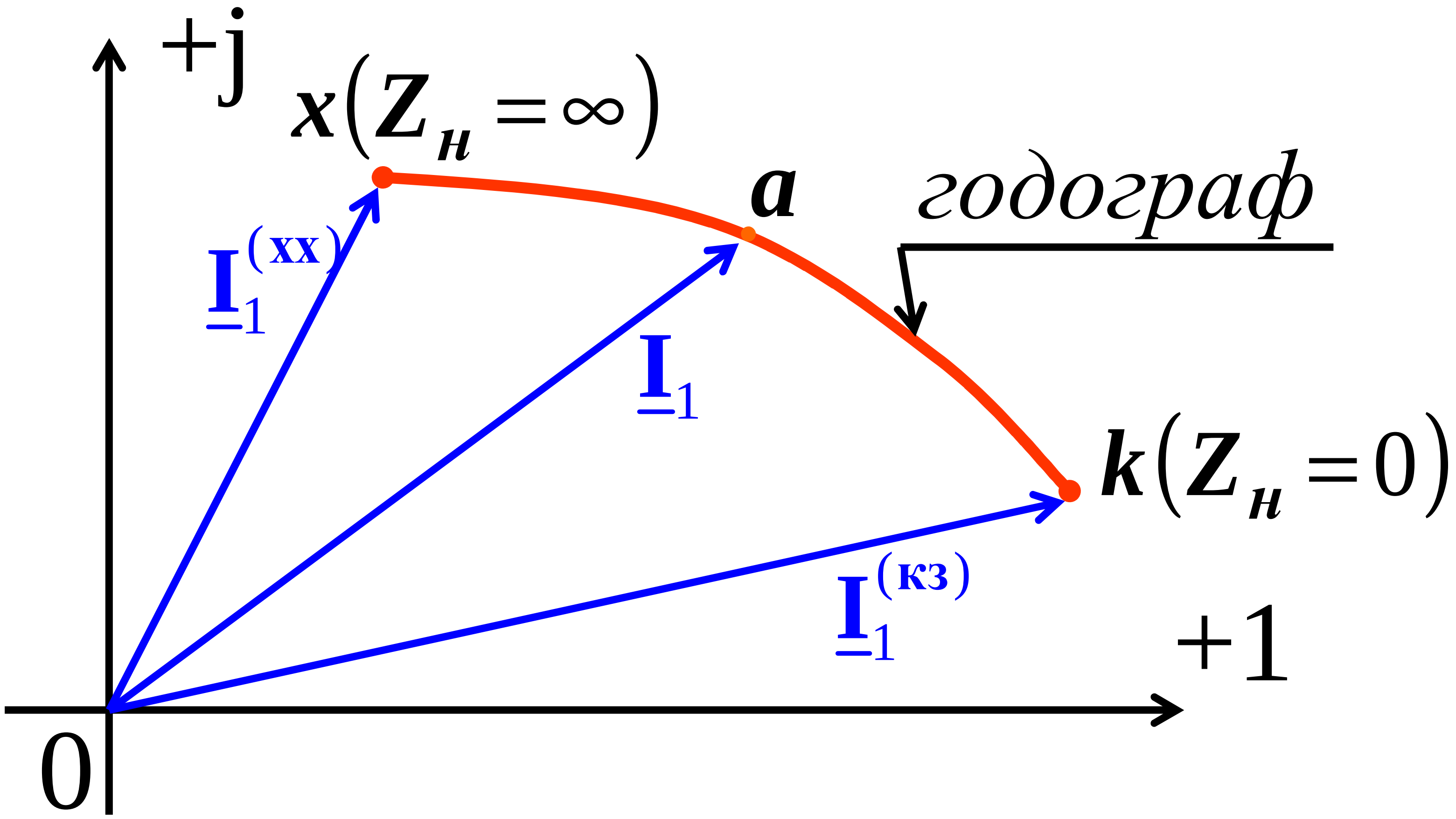
- коэффициент затухания, Нп (непер);

$$b=\arg\left(\underline{U}_1\right)-\arg\left(\underline{U}_2\right)=\arg\left(\underline{I}_1\right)-\arg\left(\underline{I}_2\right)$$

- коэффициент фазы, радиан

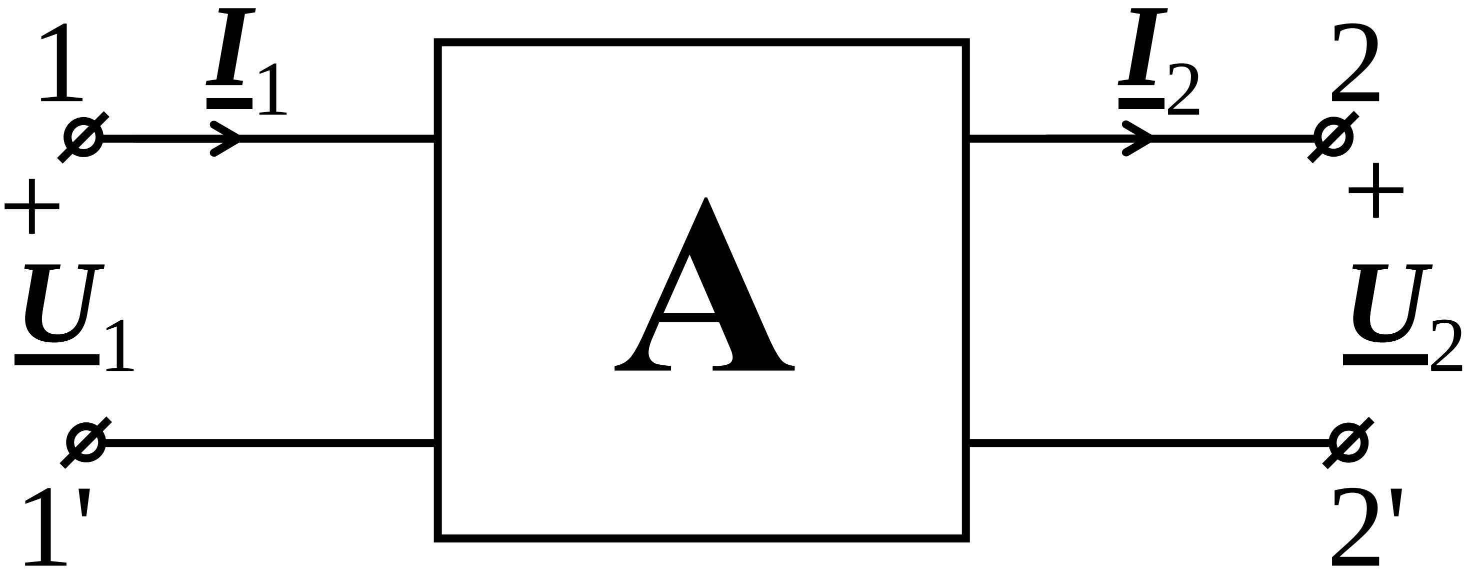
При изменении модуля сопротивления нагрузки $Z_н = 0 \div \infty$ и $\varphi_н = const$ годограф тока $\underline{I}_1$ представляет собой дугу окружности (круговая диаграмма)

Например:



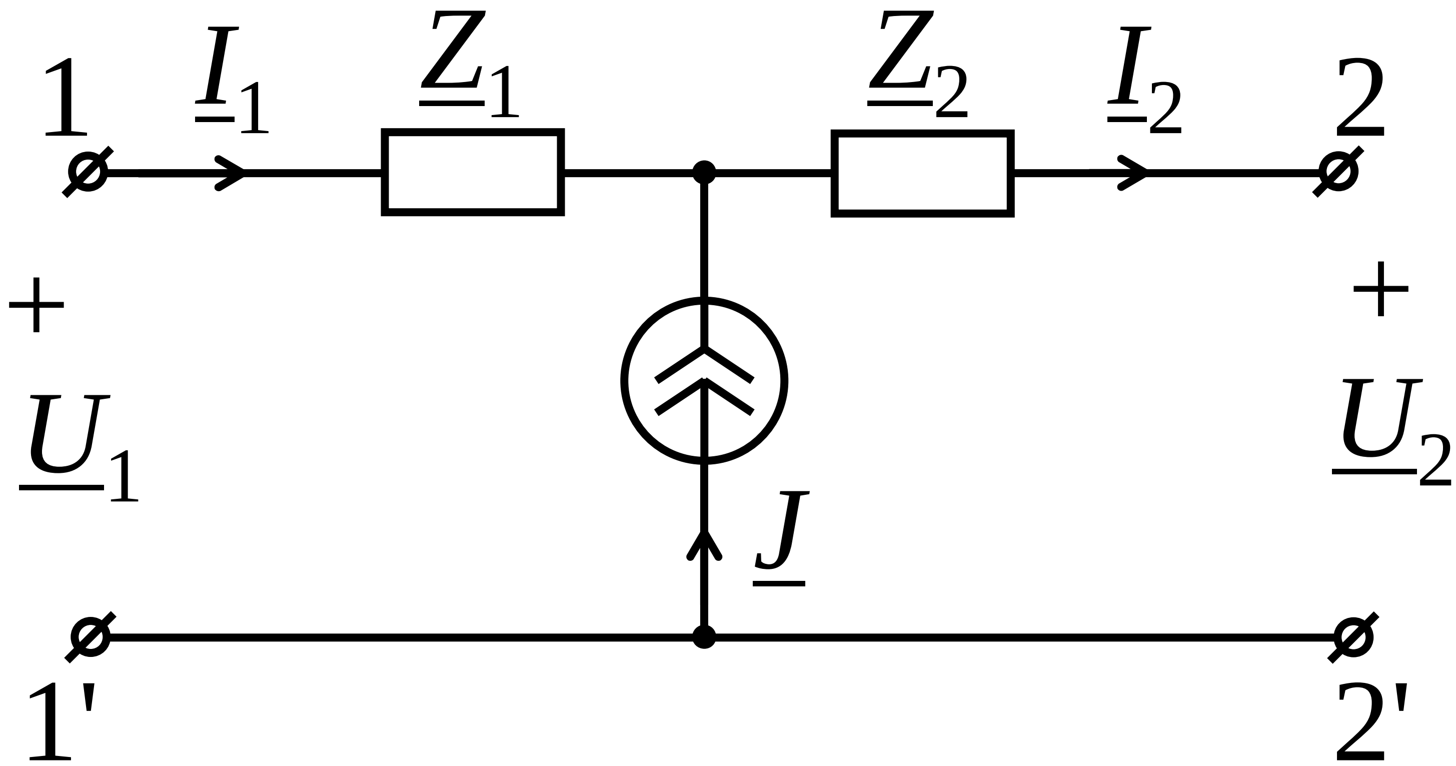
+j
$x(Z_н=\infty)$
a
годограф
$\underline{I}_1^{(хх)}$
$\underline{I}_1$
$k(Z_н=0)$
$\underline{I}_1^{(кз)}$
+1
0

Активные четырехполюсники характеризуются теми же уравнениями типа А , но с дополнительными слагаемыми $\underline{M}$ и $\underline{N}$



$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot \underline{I}_2 + \underline{M} \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot \underline{I}_2 + \underline{N} \end{cases}$$

Например:



1
$\underline{I}_1$
$\underline{Z}_1$
$\underline{Z}_2$
$\underline{I}_2$
2
+
$\underline{U}_1$
+
$\underline{U}_2$
$\underline{J}$
1'
2'

По законам Кирхгофа получаем:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_1 = \underline{\boldsymbol{U}}_2 + \underline{\boldsymbol{Z}}_1 \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_1 + \underline{\boldsymbol{Z}}_2 \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 - \underline{J}$$

Тогда

$$\underline{\boldsymbol{U}}_1 = \underline{\boldsymbol{U}}_2 + \underline{\boldsymbol{Z}}_1 \cdot \left(\underline{\boldsymbol{I}}_2 - \underline{\boldsymbol{J}}\right) + \underline{\boldsymbol{Z}}_2 \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_2 =$$

$$= \underline{\boldsymbol{U}}_2 + \left(\underline{\boldsymbol{Z}}_1 + \underline{\boldsymbol{Z}}_2\right) \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_2 - \underline{\boldsymbol{Z}}_1 \cdot \underline{\boldsymbol{J}}$$

$$\underline{\boldsymbol{I}}_1 = 0 \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_2 + \underline{\boldsymbol{I}}_2 - \underline{\boldsymbol{J}}$$

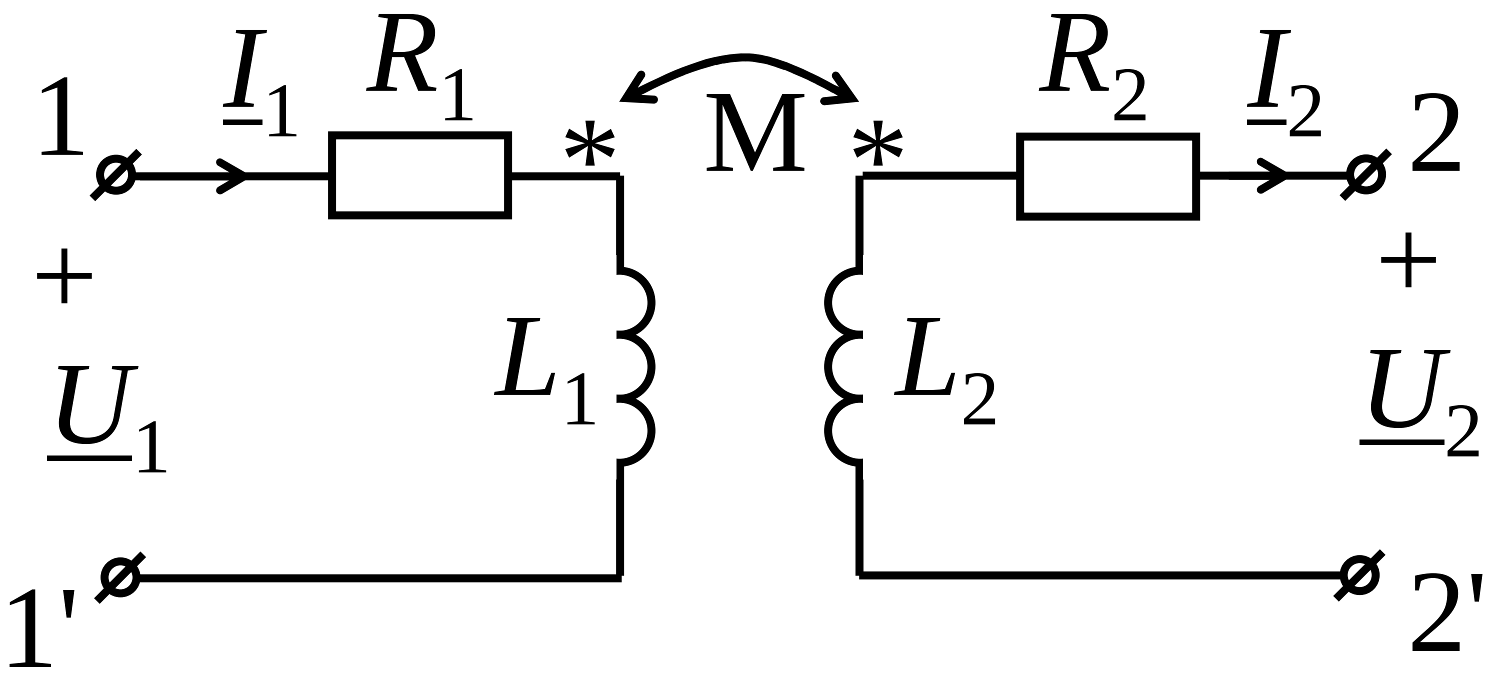
т.е.

$$\underline{A}_{11}=1 \qquad \underline{A}_{12}=\underline{Z}_1+\underline{Z}_2$$

$$\underline{A}_{21}=0 \qquad \underline{A}_{22}=1$$

$$\underline{M}=-\underline{Z}_1\cdot\underline{J} \qquad \underline{N}=-\underline{J}$$

Пример:



$$\underline{\mathbf{Z}}_1 = \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{j}\omega\boldsymbol{L}_1 \qquad \underline{\mathbf{Z}}_2 = \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{j}\omega\boldsymbol{L}_2$$

$$\underline{\mathbf{Z}}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{j}\omega\mathrm{M}$$

По 2 закону Кирхгофа

$$\underline{\boldsymbol{U}}_1 = \underline{\boldsymbol{Z}}_1 \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_1 - \underline{\boldsymbol{Z}}_{\mathrm{M}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_2$$

$$0 = \underline{\boldsymbol{U}}_2 + \underline{\boldsymbol{Z}}_2 \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_2 - \underline{\boldsymbol{Z}}_{\mathrm{M}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_1$$

Тогда при

$$\underline{\boldsymbol{I}}_1 = \frac{\underline{\boldsymbol{U}}_2 + \underline{\boldsymbol{Z}}_2 \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_2}{\underline{\boldsymbol{Z}}_\text{М}}$$

получаем уравнения типа А

$$\begin{cases} \underline{\boldsymbol{U}}_1 = \dfrac{\underline{\boldsymbol{Z}}_1}{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\text{М}}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_2 + \dfrac{\underline{\boldsymbol{Z}}_1 \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}_2 - \underline{\boldsymbol{Z}}_{\text{М}}^2}{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\text{М}}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_2 \\ \underline{\boldsymbol{I}}_1 = \dfrac{1}{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\text{М}}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_2 + \dfrac{\underline{\boldsymbol{Z}}_2}{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\text{М}}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_2 \end{cases}$$

Таким образом

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_M} \qquad \underline{A}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_M}$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_M} \qquad \underline{A}_{22} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_M}$$

Если $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}$, то

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}^2 - \underline{Z}_{\text{М}}^2}$$

$$\underline{\Gamma} = a + jb = \ln\left(\frac{\underline{Z} + \underline{Z}_c}{\underline{Z}_{\text{М}}}\right)$$