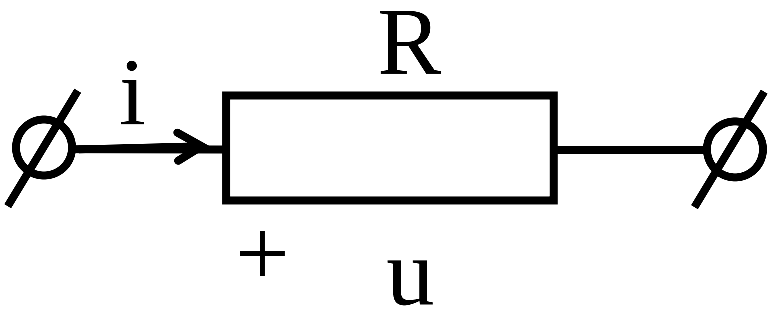
3 лекция

Действующие значения гармонических токов и напряжений

Действующие значения тока и напряжения характеризуют тепловое действие в линейном резистивном элементе с сопротивлением R

Ток: $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$



ПО ЗАКОНУ ДЖОУЛЯ – ЛЕНЦА ЭНЕРГИЯ W:

$$\mathbf{W = \int_0^T i^2 R\,dt = I^2 RT,\ Дж}$$

$$\mathbf{T = 2\pi/\omega,\ c}$$ - период

ПО ЗАКОНУ ОМА НАПРЯЖЕНИЕ u:

$$\mathbf{u = R\,i = U_m \sin(\omega t + \alpha),\ B;\ U_m = RI_m.}$$

Действующее значение тока:

$$\mathbf{I} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \mathbf{I_m} \big/ \sqrt{2}$$

Действующее значение напряжения:

$$\mathbf{U} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt} = \mathbf{U_m} \big/ \sqrt{2}$$

Действующее значение гармонического тока i численно равно такому постоянному току I , который за время равное периоду T в том же сопротивлении R выделяет такое же количества тепла W

Действующие значения тока и напряжения не зависят от угловой частоты ω и начальной фазы α

В результате :

$$i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \alpha)$$

$$u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \alpha)$$

Символический метод

Символический метод применяется для расчета линейных цепей с **синусоидальными** токами и напряжениями.
Этот **метод** основан на изображении **синусоидальных** величин **комплексными** числами.

При этом проекция вращающегося вектора на любой из диаметров окружности является гармонической функцией времени

Следовательно, синусоидальная величина может быть изображена вращающимся вектором длиной F на комплексной плоскости, причем этот вектор записывается в показательной ($Fe^{j\alpha}$), тригонометрической ($F\cos\alpha + jF\sin\alpha$) и алгебраической формах ($a+jb$),

где $j=\sqrt{-1}$ **- мнимая единица**

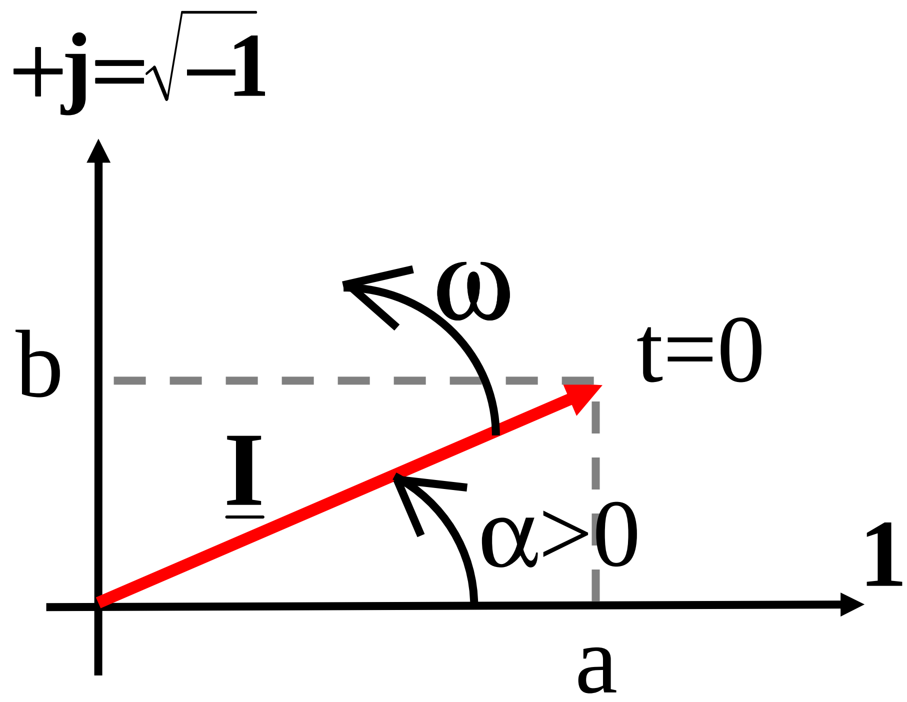
Таким образом:

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \alpha) =$$

$$= IM[\sqrt{2}\, I e^{j(\omega t+\alpha)}] = IM[\sqrt{2}\, \underline{I}\, e^{j\omega t}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I} = I\, e^{j\alpha} = I\cos\alpha + jI\sin\alpha = a + j\,b$$

$IM[\sqrt{2}\, I e^{j(\omega t+\alpha)}]$- **мнимая составляющая вращающегося вектора**



$\underline{I} = Ie^{j\alpha}$ – комплекс действующего значения тока

Синусоидальной величине (току или напряжению) соответствует комплекс ее действующего значения и наоборот.

Например: току

$$i = 2,82 \cdot \sin(\omega t - 30^\circ), \text{ А}$$

соответствует $$\underline{I} = \dot{I} = \frac{2,82}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j30^\circ}$$

При этом, например, комплексу действующего значения напряжения

$$\underline{U} = \dot{U} = 100 \cdot e^{j45^{\circ}}, \text{В}$$

соответствует синусоидальная функция времени

$$u = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot \sin(\omega t + 45^{\circ}), \text{В}$$

Действия с комплексными числами

$\underline{F} = F \cdot e^{j\alpha} = a + jb$ - комплексное число

F - модуль α - аргумент (фаза)

a - вещественная составляющая

b - мнимая составляющая

1. Переход от алгебраической формы записи к показательной форме

$$\mathbf{a + jb \Rightarrow Fe^{j\alpha}}$$

$$F = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = (180^\circ) + \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$$

180 градусов учитывается при a<0

Например:

$$-3+j4=$$

$$=\left[\sqrt{(-3)^2+4^2}\right]\cdot e^{j\left[180^\circ+\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{-3}\right)\right]}=$$

$$=5e^{j\left(180^\circ-53{,}1^\circ\right)}=5e^{j126{,}9^\circ}$$

2. Переход от показательной формы записи к алгебраической форме

$$Fe^{j\alpha} \Rightarrow a + jb$$

$$a = F \cdot \cos\alpha$$

$$b = F \cdot \sin\alpha$$

$$4e^{-j120^\circ} = 4\cos\left(-120^\circ\right) +$$

$$+ j4\sin\left(-120^\circ\right) =$$

$$= -2 - j3,46$$

3. Сложение и вычитание

$$F_1 e^{j\alpha_1} \pm F_2 e^{j\alpha_2} = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) =$$

$$= (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) = a + jb = Fe^{j\alpha}.$$

Например:

$$5e^{-j30^\circ} - 3e^{j120^\circ} =$$

$$= (4,33 - j2,5) - (-1,5 + j2,6) =$$

$$= 5,83 - j5,1 = 7,74e^{-j41,2^\circ}$$

4. Умножение

$$(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = F_1 e^{j\alpha_1} \cdot F_2 e^{j\alpha_2} =$$

$$= F_1 F_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} = Fe^{j\alpha} = a + jb.$$

Например:

$$(-1 - j) \cdot (2 - j3) =$$

$$= 1,41 e^{-j135^\circ} \cdot 3,61 e^{-j56,3^\circ} =$$

$$= 5,09 e^{-j191,3^\circ} = -5 + j$$

5. Деление

$$\frac{a_1+jb_1}{a_2+jb_2}=\frac{F_1e^{j\alpha_1}}{F_2e^{j\alpha_2}}=\frac{F_1}{F_2}e^{j(\alpha_1-\alpha_2)}=Fe^{j\alpha}=a+jb.$$

Например:

$$\frac{3+j4}{4-j3}=\frac{5e^{j53,1^\circ}}{5e^{-j36,9^\circ}}=1e^{j90^\circ}=j1$$

6. Возведение в степень m

$$(a_1+jb_1)^m = (F_1 e^{j\alpha_1})^m = F_1^m e^{jm\alpha_1} = Fe^{j\alpha} = a+jb.$$

Например:

$$\sqrt{-2+j2} = (-2+j2)^{0,5} =$$

$$= \left(2,82e^{j135^\circ}\right)^{0,5} = 1,68e^{j67,5^\circ} =$$

$$= 0,643 + j1,552$$

7. Логарифм

$$\ln(a_1+jb_1)=\ln(F_1e^{j\alpha_1})=\ln(F_1)+j\alpha_{1(\text{рад})}=$$

$$=a+jb=Fe^{j\alpha}.$$

Например:

$$\ln(-8+j6)=\ln\left(10e^{j143,1^\circ}\right)=$$

$$=\ln(10)+j\left(143,1^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}\right)=$$

$$=2,3+j2,5=3,397e^{j47,4^\circ}$$

8. Некоторые соотношения

$$j = \sqrt{-1} \qquad j^2 = -1 \qquad j^3 = -j$$

$$1/j = -j$$

$$1 = e^{j0^\circ} \qquad -1 = e^{j180^\circ}$$

$$j = e^{j90^\circ} \qquad -j = e^{-j90^\circ}$$

Действия с синусоидальными величинами

Рассмотрим действия с синусоидальными величинами, имеющими одинаковую угловую частоту ω

1. Сложение и вычитание

$$f(t)=f_1(t)\pm f_2(t)=\sqrt{2}F_1\sin(\omega t+\alpha_1)\pm$$
$$\pm\sqrt{2}F_2\sin(\omega t+\alpha_2)=\sqrt{2}F\sin(\omega t+\alpha).$$

$$f_1(t)=\sqrt{2}F_1\sin(\omega t+\alpha_1)\Rightarrow \underline{F}_1=F_1e^{j\alpha_1}$$

$$f_2(t)=\sqrt{2}F_2\sin(\omega t+\alpha_2)\Rightarrow \underline{F}_2=F_2e^{j\alpha_2}$$

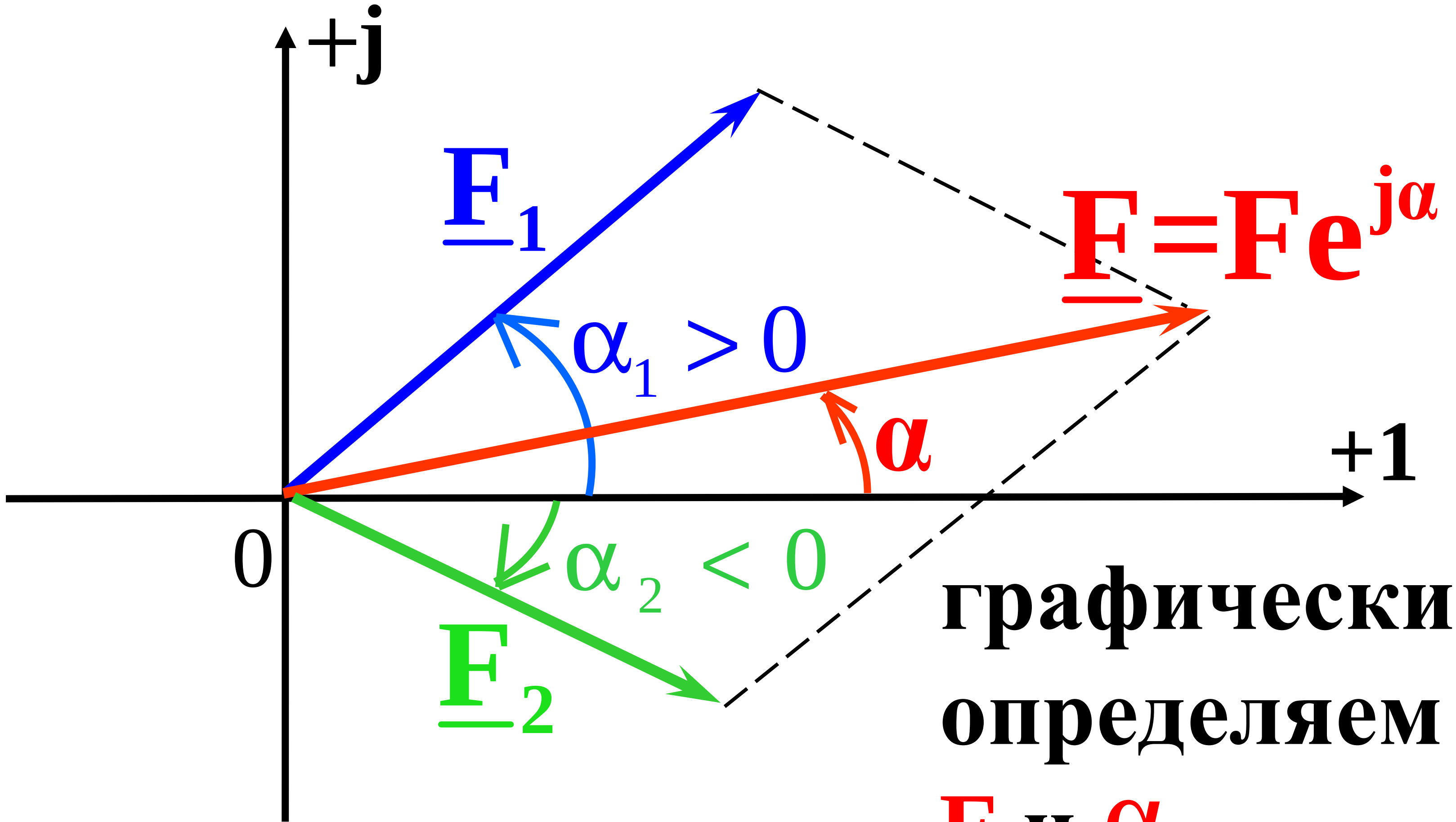
Для определения F и α используются:

а) комплексные числа

$$F_1 e^{j\alpha_1} \pm F_2 e^{j\alpha_2} = F e^{j\alpha}$$

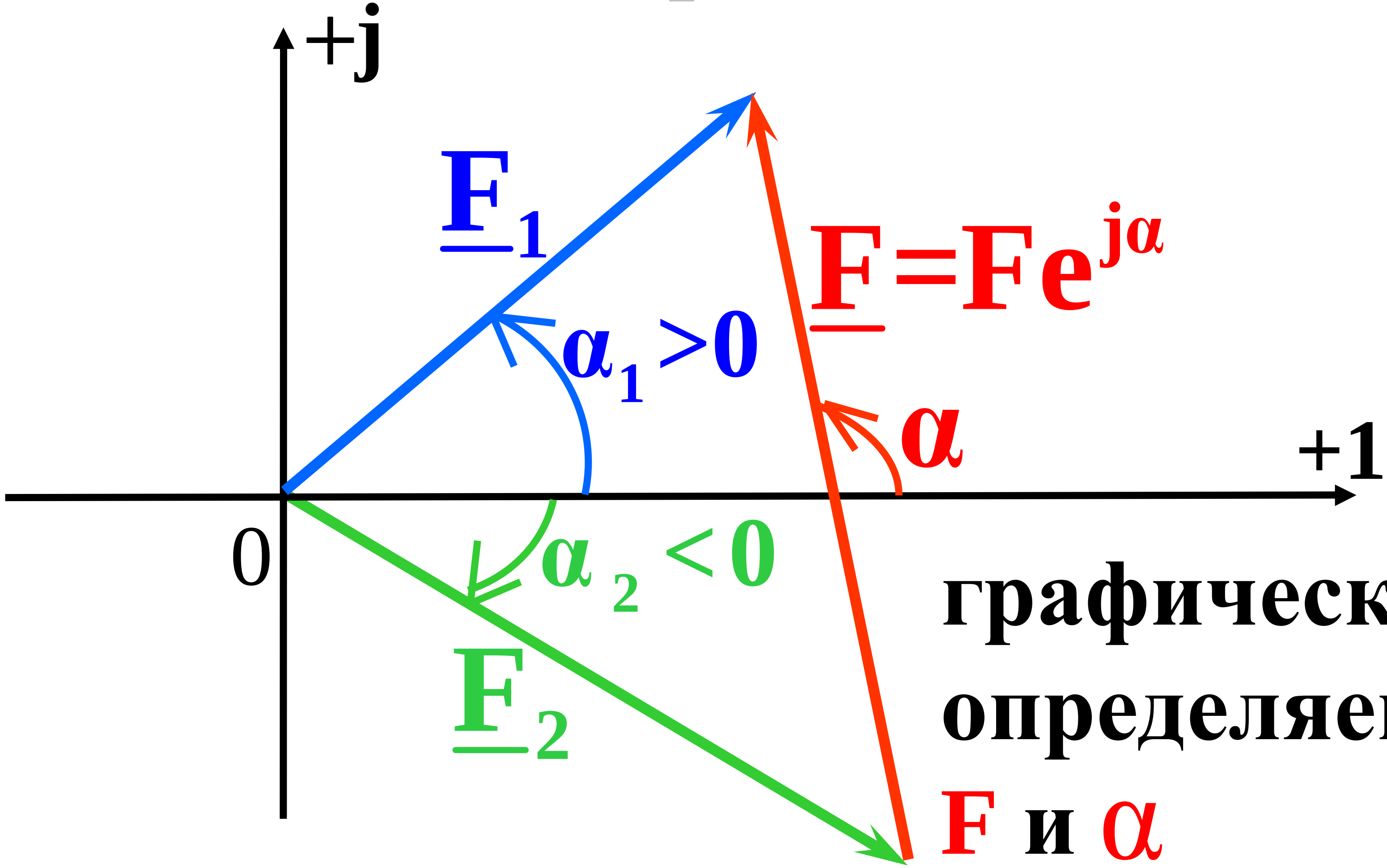
$\Rightarrow$ **определяются F и α**

б) вектора на комплексной плоскости при сложении



графически определяем F и α

в) вектора на комплексной плоскости при вычитании



графически определяем F и α

2. Дифференцирование

$$f(t)=\sqrt{2}F\sin(\omega t+\alpha)\Rightarrow \underline{F}=Fe^{j\alpha}$$

$$\frac{df(t)}{dt}=\sqrt{2}\omega F\sin(\omega t+\alpha+90°)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega Fe^{j(\alpha+90°)}=j\omega\underline{F}$$

Дифференцированию синусоидальной функции соответствует умножение изображающего ее комплекса на $j\omega$

3. Интегрирование

$$\int f(t)dt = \frac{\sqrt{2}F}{\omega}\sin(\omega t+\alpha-90°) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F}{\omega}e^{j(\alpha-90°)} = \frac{\underline{F}}{j\omega}$$

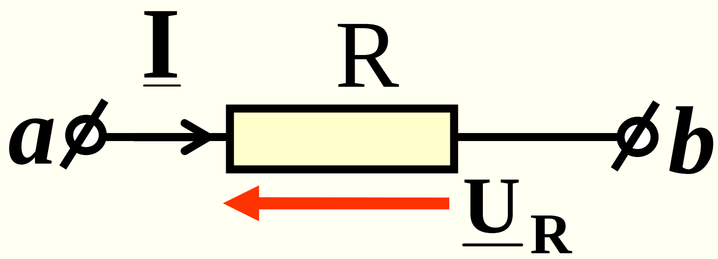
Интегрированию синусоидальной функции соответствует деление изображающего ее комплекса на $j\omega$

ЗАКОН ОМА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Закон Ома в комплексной форме основан на символическом методе и справедлив для линейных цепей с гармоническими напряжениями и токами.

Этот закон следует из взаимосвязи между током и напряжением отдельных элементов цепи.

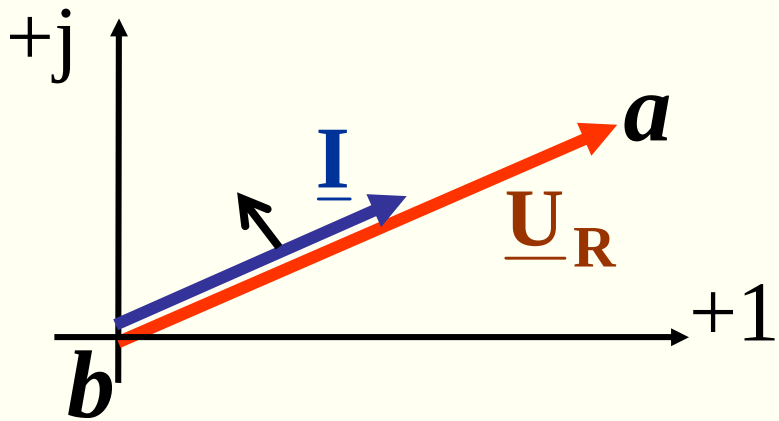
Резистивный элемент



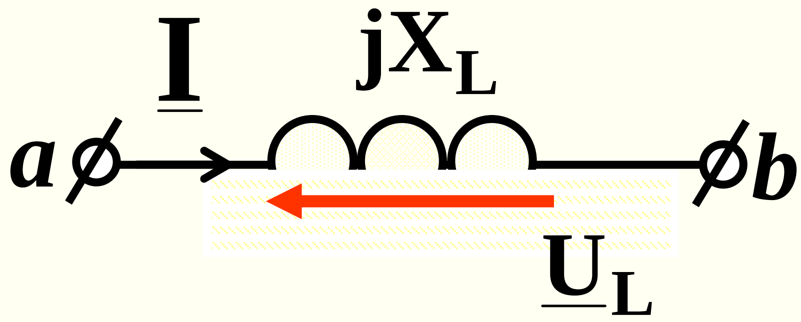
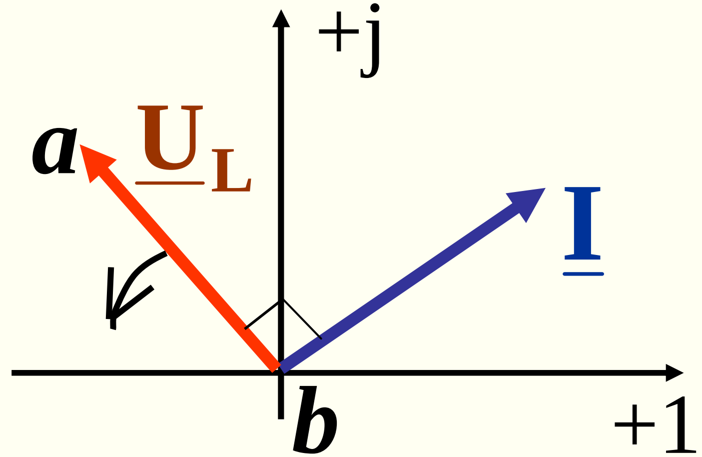
Комплекс напряжения

$$\underline{U}_{R} = R \cdot \underline{I}$$

Вектора напряжения и тока



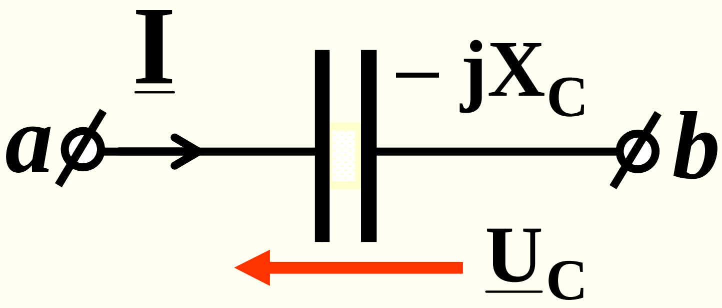
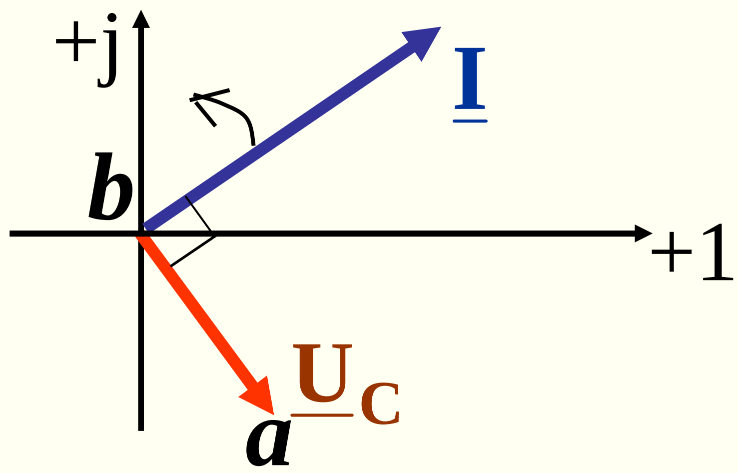
На комплексной плоскости вектор напряжения резистивного элемента совпадает по направлению с вектором своего тока

Индуктивный элемент	
Комплекс напряжения	$$\underline{U}_L = j\omega L\underline{I} = jX_L\underline{I}$$
Вектора напряжения и тока	

На комплексной плоскости вектор напряжения индуктивного элемента опережает по направлению вектор своего тока на 90 градусов.

Где:

$X_L = \omega L$ - **индуктивное сопротивление (Ом)**

Емкостный элемент	
Комплекс напряжения	$\underline{U}_C = -\dfrac{j}{\omega C}\underline{I} = -jX_C\underline{I}$
Вектора напряжения и тока	

На комплексной плоскости вектор напряжения емкостного элемента отстает по направлению от вектора своего тока на 90 градусов.

Где:

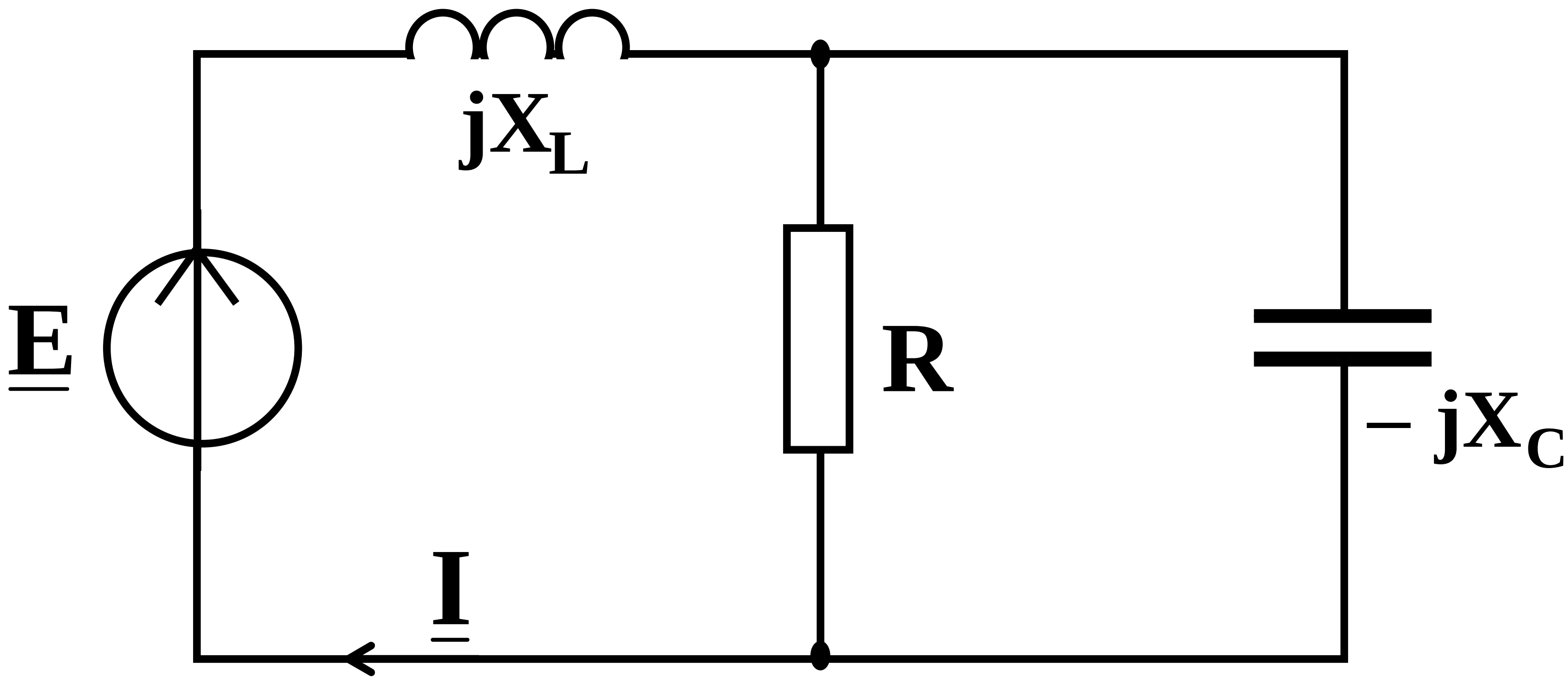
$$X_C = 1/\omega C$$

- емкостное сопротивление (Ом)

Закон Ома в комплексной форме для отдельных элементов аналогичен закону Ома для резистивного элемента при постоянном токе.

Для символического метода необходимо составить комплексную схему замещения с комплексными сопротивлениями и с комплексами действующих значений токов и напряжений

Например, комплексная схема замещения цепи:



Эквивалентное комплексное сопротивление:

$$\underline{Z} = jX_L + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}$$

По закону Ома в комплексной форме:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}}$$

Где:

$$\underline{\underline{Z}} = R_Э + jX_Э = Z \cdot e^{j\varphi}$$

– эквивалентное комплексное сопротивление цепи (Ом);

$$Z = \sqrt{R_Э{}^2 + X_Э{}^2}$$

- модуль сопротивления (Ом);

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_Э}{R_Э}$$

-аргумент (фаза)сопротивления (Град).

ЗАКОНЫ КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

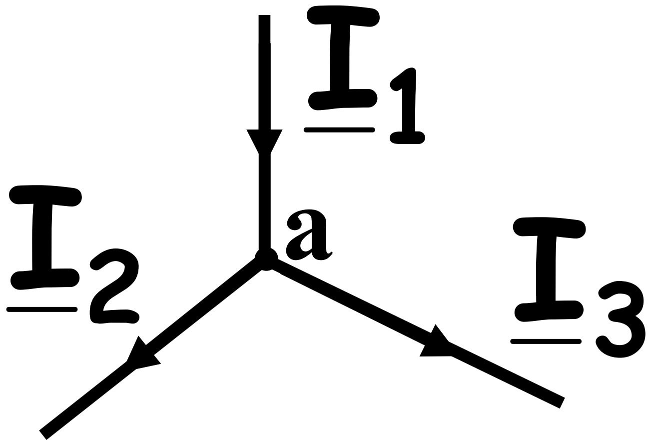
Сложению и вычитанию гармонических токов и напряжений с одинаковой угловой частотой ω в законах Кирхгофа соответствует сложение и вычитание их комплексных величин

1. ПЕРВЫЙ ЗАКОН КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Для любого узла комплексной схемы замещения цепи алгебраическая сумма комплексных значений токов равна нулю:

$$\sum \pm \underline{\mathbf{I}}_{\mathbf{k}} = 0$$

Например:



узел **a**:

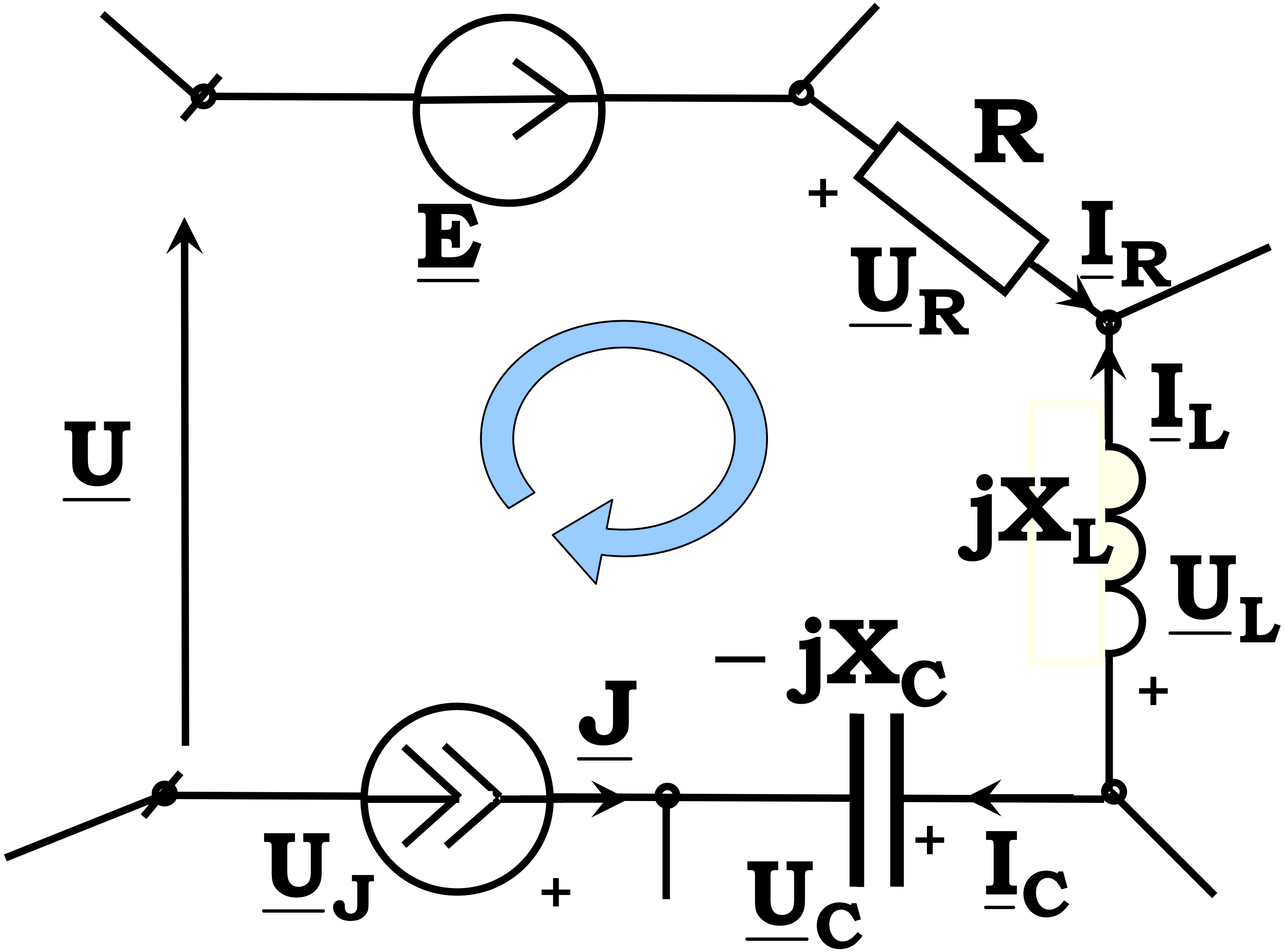
$$-\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

2. ВТОРОЙ ЗАКОН КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Для любого контура комплексной схемы замещения цепи алгебраическая сумма комплексов напряжений на пассивных элементах равна алгебраической сумме комплексов ЭДС, напряжений на источниках тока и напряжений на разрывах контура:

$$\sum \pm \underline{U}_n = \sum \pm \underline{E}_k + \sum \pm \underline{U}_{J_q} + \sum \pm \underline{U}_p$$

Например:



$$\underline{U}_R - \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{E} - \underline{U}_J + \underline{U}$$

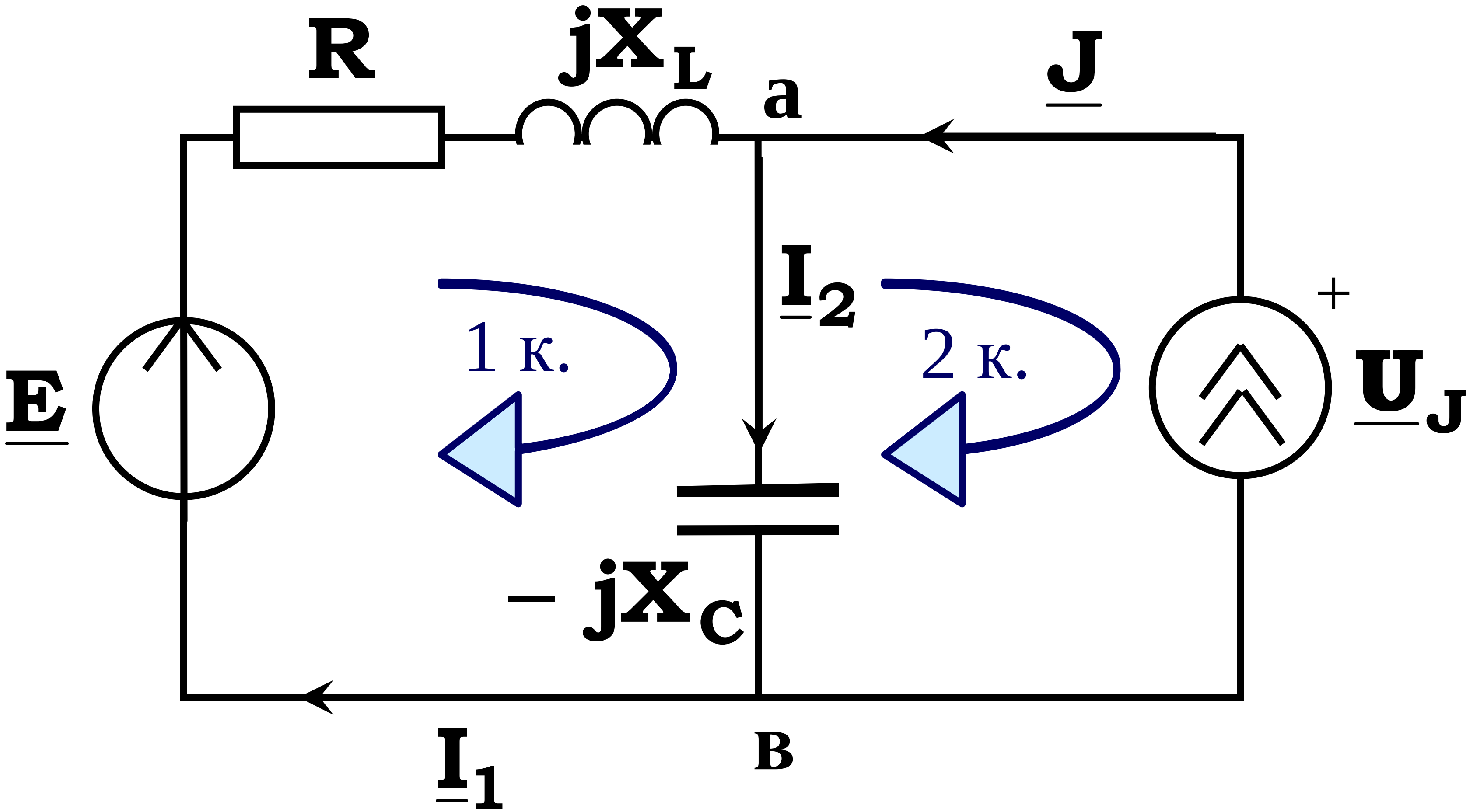
или

$$R\underline{I}_R - jX_L\underline{I}_L + (-jX_C)\underline{I}_C = \underline{E} - \underline{U}_J + \underline{U}$$

3. МЕТОД ЗАКОНОВ КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Решая комплексные алгебраические уравнения, составленные по законам Кирхгофа в комплексной форме, можно определить комплексы токов и напряжений в комплексной схеме замещения цепи

Например:



$n_у = 2$	$n_в = 3$

$$\boxed{n_1 = n_у - 1 = 1}$$

$$\boxed{n_2 = n_в - n_1 = 2}$$

$$a: \quad -\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{J} = 0$$

$$1к: \quad (R + jX_L) \cdot \underline{I}_1 + (-jX_C) \cdot \underline{I}_2 = \underline{E}$$

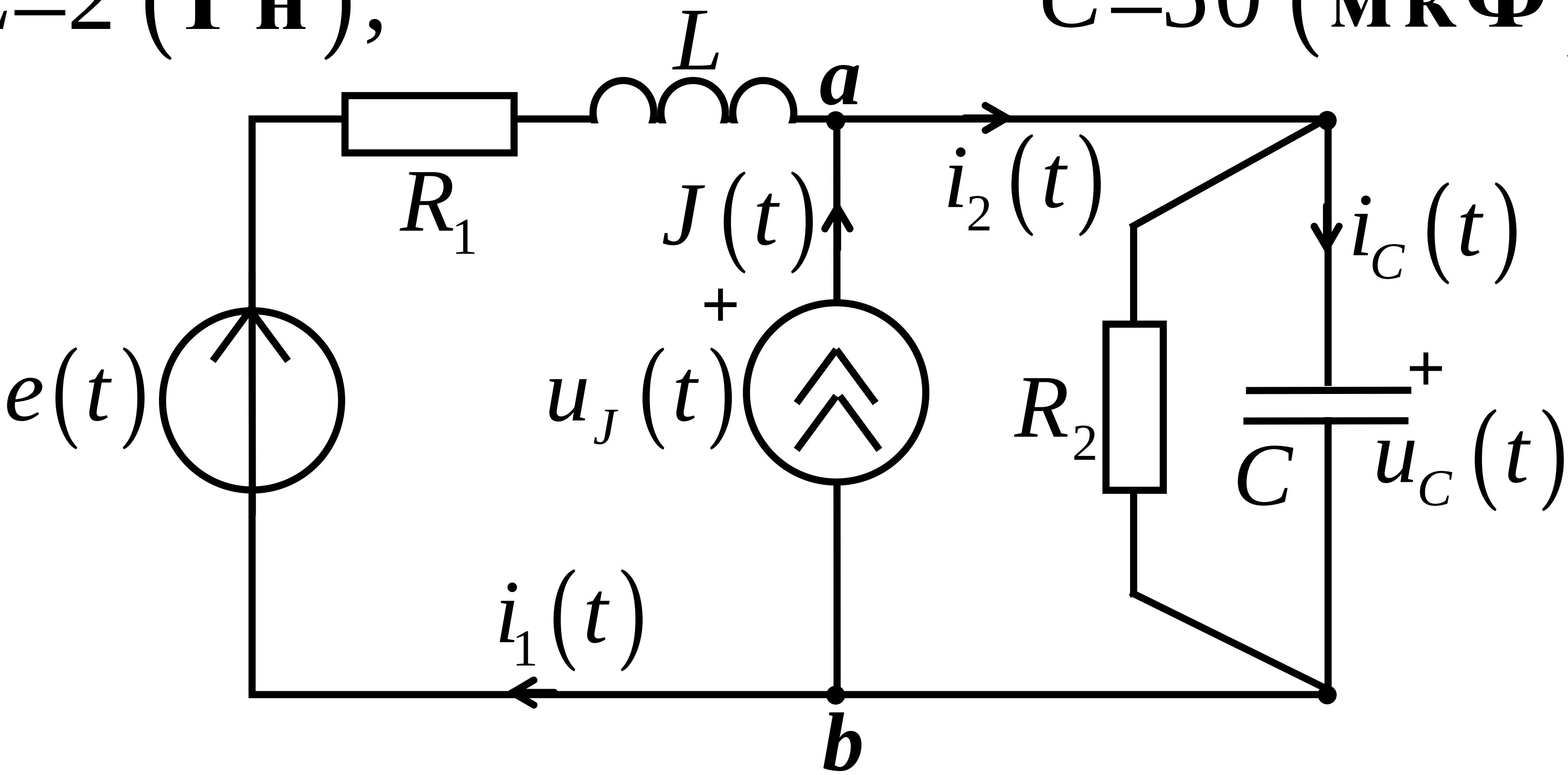
$$2к: \quad -(-jX_C) \cdot \underline{I}_2 = -\underline{U}_J$$

**ЗАКОНЫ ОМА И КИРХГОФА
В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ
ИМЕЮТ ТАКОЙ ЖЕ ВИД КАК
И ДЛЯ ЦЕПЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ
ТОКАМИ, ПОЭТОМУ К
КОМПЛЕКСНЫМ СХЕМАМ
ПРИМЕНИМЫ ВСЕ ИЗВЕСТНЫЕ
МЕТОДЫ РАСЧЕТА
В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ**

Пример: $e(t)=200\sqrt{2}\sin\left(100t+90^{\circ}\right),\text{В};$

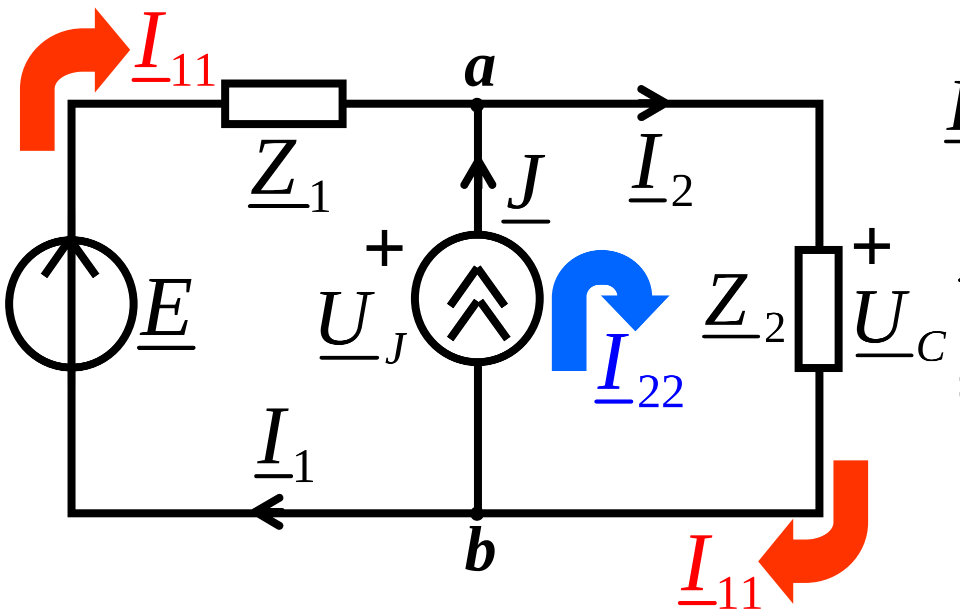
$J(t)=2\sqrt{2}\sin(100t),\text{А};\quad R_1=R_2=200\ (\text{Ом});$

$L=2\ (\text{Гн});\qquad C=50\ (\text{мкФ}).$



Найти: $i_1(t) = ?\quad u_C(t) = ?$

Комплексная схема:



$$\underline{E} = 200e^{j90^\circ}\ (\mathbf{В});\ \underline{J} = 2e^{j0^\circ}\ (\mathbf{А});$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_L = $$

$$= 200 + j200 \approx 283e^{j45^\circ}\ (\mathbf{Ом});$$

$$\omega = 100\ (1/\mathbf{с});$$

$$X_L = \omega L = 100 \cdot 2 = 200\ (\mathbf{Ом});$$

$$X_C = 1/\omega C = 1/100 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 200\ (\mathbf{Ом}).$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2(-jX_C)}{R_2 - jX_C} =$$

$$= \frac{200(-j200)}{200 - j200} =$$

$$= 100 - j100 \approx 141e^{-j45^\circ}\ (\mathbf{Ом}).$$

Метод контурных токов:

$$\underline{I}_{22} = \underline{J} = 2e^{j0^\circ}\left(\mathbf{A}\right); \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right)\underline{I}_{11} + \underline{Z}_2\underline{I}_{22} = \underline{E};$$

$$\left(300 + j100\right)\underline{I}_{11} + \left(100 - j100\right)2e^{j0^0} = 200e^{j90^0};$$

$$\underline{I}_{11} = \frac{200e^{j90^0} - \left(100 - j100\right)2e^{j0^0}}{300 + j100} =$$

$$= \frac{-200 + j400}{300 + j100} \approx 1,41e^{j98^\circ}\left(\mathbf{A}\right);$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} \approx 1,41 e^{j98^\circ} \, (\mathbf{A});$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{11} + \underline{I}_{22} \approx 2,28 e^{j38^\circ} \, (\mathbf{A});$$

$$\underline{U}_C = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = (100 - j100) 2,28 e^{38^\circ} \approx 322,5 e^{-j7^\circ} \, (\mathbf{B});$$

Ответ:

$$i_1(t) \approx 1,41\sqrt{2} \sin\left(100t + 98^\circ\right), (\mathbf{A});$$

$$u_C(t) \approx 322,5\sqrt{2} \sin\left(100t - 7^\circ\right), (\mathbf{B}).$$