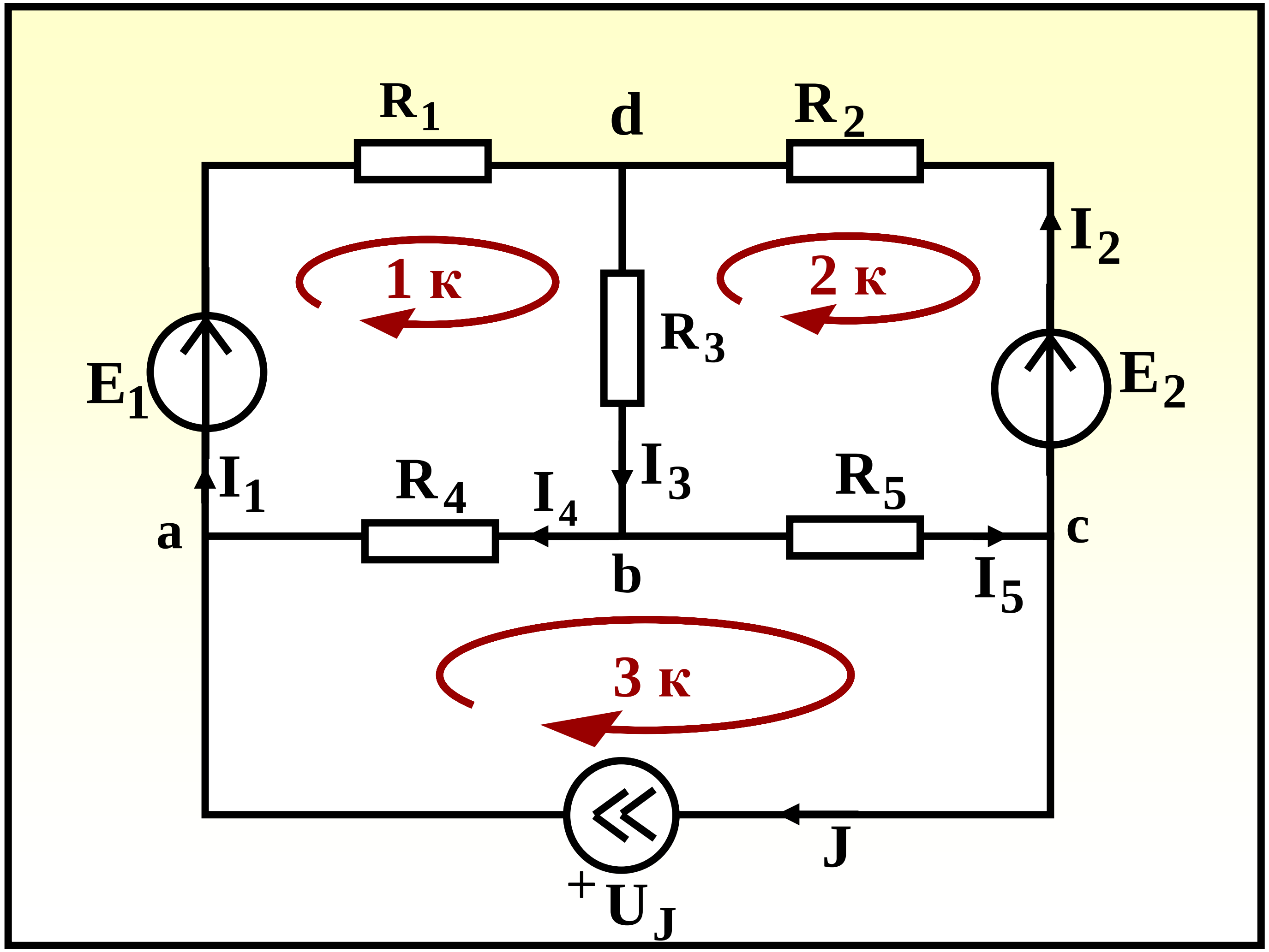
2 лекция

Методы расчета линейных электрических цепей

1. Метод законов Кирхгофа

Решение системы уравнений, составленных по законам Кирхгофа, позволяет определить все токи и напряжения в рассматриваемой цепи


R1
d
R2
I2
1 к
2 к
R3
E1
E2
I1
R4
I4
I3
R5
a
c
b
I5
3 к
J
+UJ

$$\boxed{\begin{gathered} n_у = 4 \\ n_в = 6 \end{gathered}}$$

$n_у$ – число узлов; $n_в$ – число ветвей

$$\boxed{\begin{gathered} n_1 = n_у - 1 = 3 \\ n_2 = n_в - n_1 = 3 \end{gathered}}$$

n_1 – число уравнений по 1 закону Кирхгофа;
n_2 – число уравнений по 2 закону Кирхгофа

Уравнения по 1-му закону Кирхгофа:

$$a: \quad I_1 - I_4 - J = 0$$

$$b: \quad -I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

$$c: \quad I_2 - I_5 + J = 0$$

Уравнения по 2-му закону Кирхгофа:

$$1к: \quad R_1I_1 + R_3I_3 + R_4I_4 = E_1$$

$$2к: \quad -R_2I_2 - R_3I_3 - R_5I_5 = -E_2$$

$$3к: \quad -R_4I_4 + R_5I_5 = U_J$$

2. Метод контурных токов

Основан на решении уравнений, составленных для независимых замкнутых контуров и позволяет уменьшить порядок системы уравнений.

Контурный ток – это фиктивный ток, текущий в независимом замкнутом контуре, отличающейся наличием хотя бы одной новой ветви.

Число контурных токов: $\mathbf{n_{кт} = n_в - n_у + 1}$

Число решаемых уравнений:

$$\mathbf{n_{ку} = n_i - n_у + 1}$$

Где: $\mathbf{n_i}$ – число неизвестных токов

Алгоритм составления уравнений

1. Контурный ток рассматриваемого контура умножается на сумму сопротивлений этого контура.
2. К данному произведению добавляются произведения всех соседних контурных токов на общие сопротивления со знаком "+" если контурные токи обтекают общее сопротивление в одном направлении и со знаком "-" если направления контурных токов не совпадают в общем сопротивлении.
3. В правой части уравнения записывается алгебраическая сумма ЭДС рассматриваемого контура, причем со знаком "+" берутся те ЭДС, направления которых совпадают с направлением рассматриваемого контурного тока.

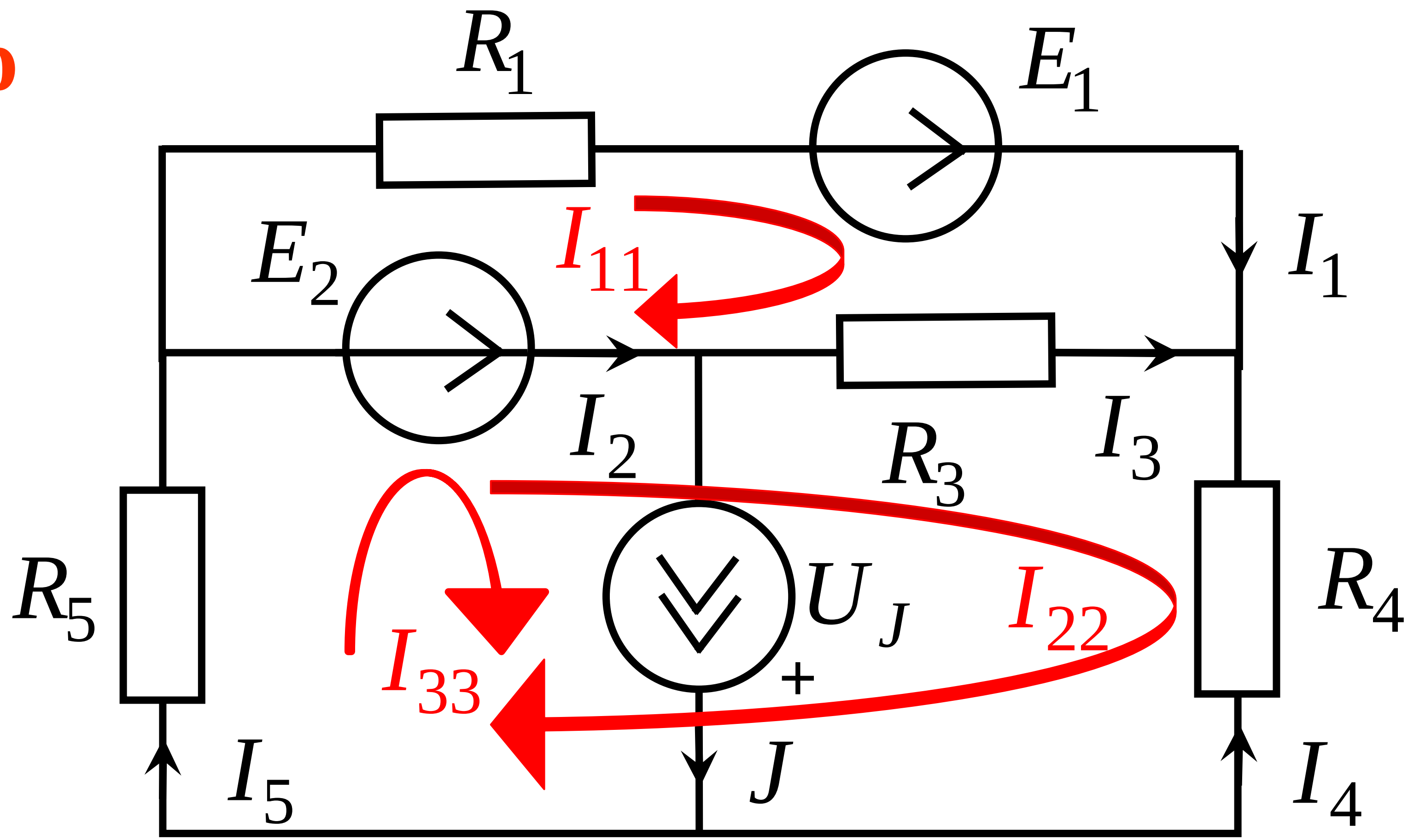
Во всех ветвях должен проходить хотя бы один контурный ток.

Через источник тока J должен проходить один контурный ток, который будет известен и равен току J.

Порядок расчета

- Обозначаются токи ветвей;
- выбираются контурные токи;
- составляется система уравнений;
- находятся контурные токи;
- находятся реальные токи в ветвях схемы.

Пример



$\mathbf{n_у = 4}$	$\mathbf{n_в = 6}$	$\mathbf{n_i = 5}$

$$\mathbf{n_{кт} = n_в - n_у + 1 = 3}$$

$$\mathbf{n_{ку} = n_i - n_у + 1 = 2}$$

$$I_{33} = J$$

$$(R_1 + R_3)I_{11} - R_3 I_{22} - 0 \cdot I_{33} = E_1 - E_2$$

$$-R_3 I_{11} + (R_5 + R_3 + R_4)I_{22} + R_5 I_{33} = E_2$$

$$I_1 = I_{11} \qquad I_2 = I_{22} + I_{33} - I_{11}$$

$$I_3 = I_{22} - I_{11} \qquad I_4 = -I_{22} \qquad I_5 = I_{22} + I_{33}$$

$$U_J = R_4 I_4 - R_3 I_3$$ **-по 2 закону Кирхгофа**

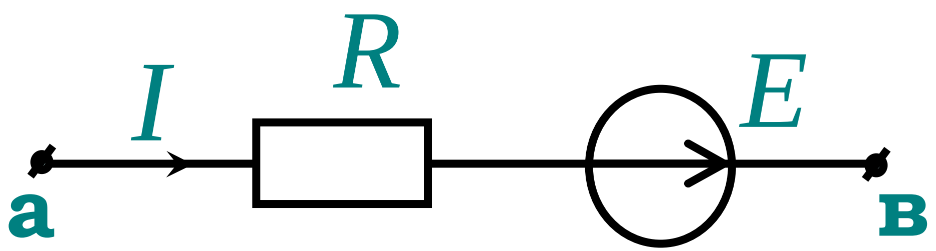
По методу контурных токов необходимо решить значительно меньше уравнений по сравнению с методом законов Кирхгофа

3. Метод узловых потенциалов

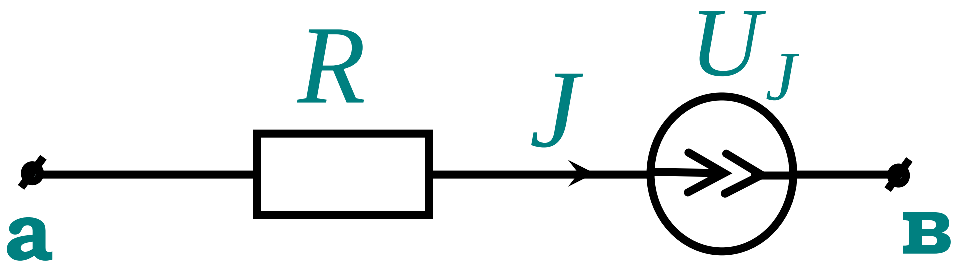
используется для расчета сложных схем замещения.

Расчетные уравнения данного метода могут быть доказаны при помощи законов Кирхгофа и обобщенного закона Ома.

Обобщенный закон Ома



$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_в + E}{R}$$



$$U_J = \varphi_в - \varphi_a + RJ$$

Потенциал $\varphi_к$ рассматриваемого *к*-узла умножается на сумму проводимостей ветвей подходящих к этому узлу, причем перед этим произведением всегда ставится знак “+” и проводимость ветви с источником тока равна нулю.

Потенциал φ_m соседнего *m*-узла умножается на проводимость ветви, соединяющей рассматриваемый *к*-узел с *m*-узлом, причем перед этим произведением всегда ставится знак “-” .

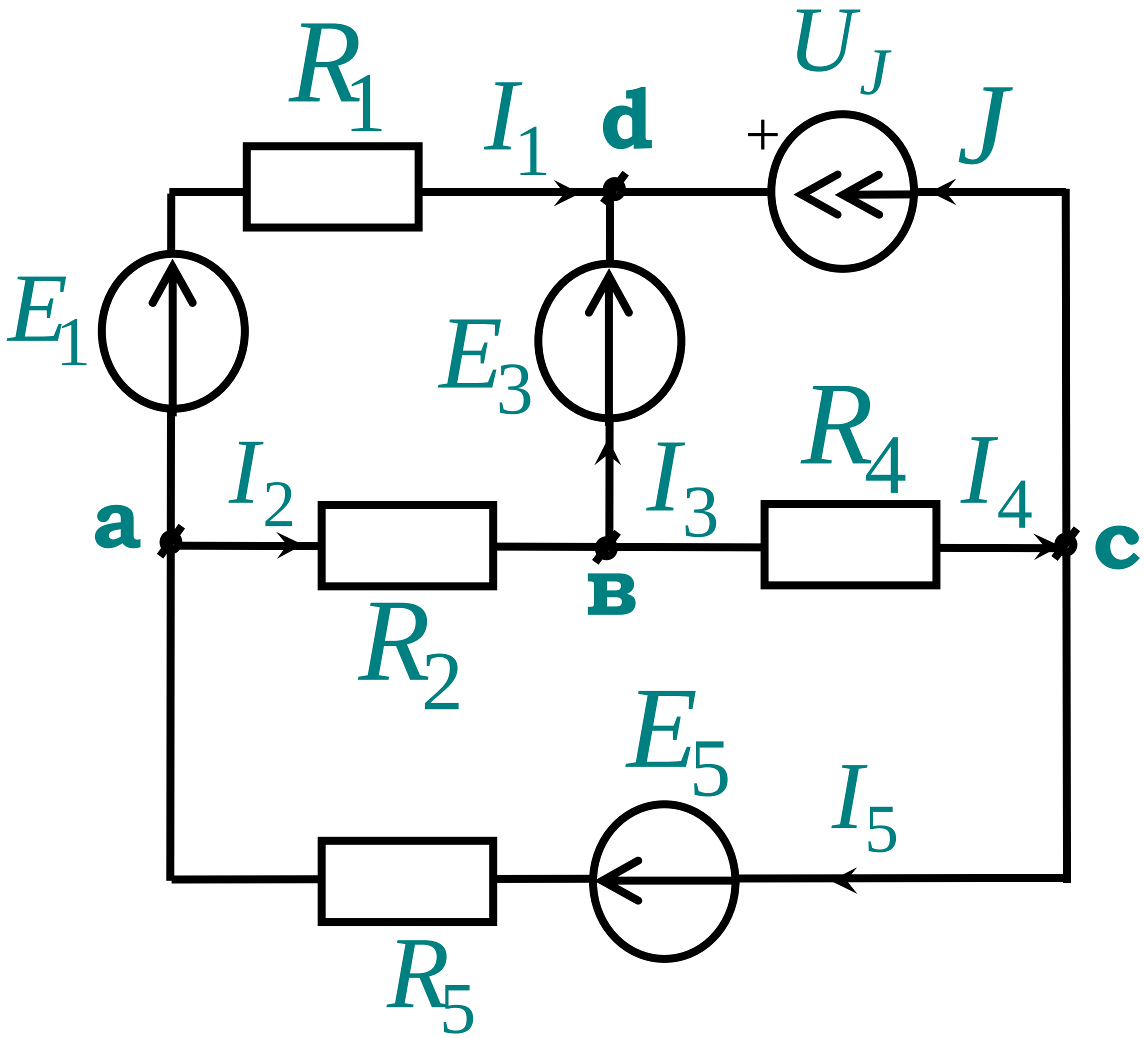
В правой части уравнения записывается узловой ток рассматриваемого *к*-узла, равный алгебраической сумме подходящих к этому узлу токов источников тока и произведений подходящих к этому узлу ЭДС на проводимости своих ветвей.

В узловом токе со знаком “+” берутся те слагаемые, у которых источники тока и ЭДС направлены в рассматриваемый *к*-узел.

Потенциал одного из узлов принимается равным нулю, причем за такой узел принимается узел, соединенный с корпусом или “землей”, или один из узлов, к которому подходит ветвь с нулевым сопротивлением и ЭДС.

Таким образом для схемы с $n_у$ узлами по методу узловых потенциалов составляется система, содержащая не более $n_1 = n_у - 1$ уравнений, из решения которых определяются потенциалы узлов, а затем по обобщенному закону Ома рассчитываются токи и напряжения в ветвях схемы .

Пример



$$g_1 = 1/R_1;$$

$$g_2 = 1/R_2;$$

$$g_4 = 1/R_4;$$

$$g_5 = 1/R_5.$$

$$\varphi_{в} = 0 \qquad \varphi_d = E_3$$

$$(g_1 + g_2 + g_5) \cdot \varphi_a - g_1\varphi_d - g_5\varphi_c = -E_1 g_1 + E_5 g_5$$

$$-g_5\varphi_a + (g_4 + g_5) \cdot \varphi_c = -E_5 g_5 - J$$

$$I_1 = (\varphi_a - \varphi_d + E_1) \cdot g_1 \qquad I_2 = (\varphi_a - \varphi_{в}) \cdot g_2$$

$$I_3 = -I_1 - J \qquad I_4 = (\varphi_{в} - \varphi_c) \cdot g_4$$

$$I_5 = (\varphi_c - \varphi_a + E_5) \cdot g_5$$

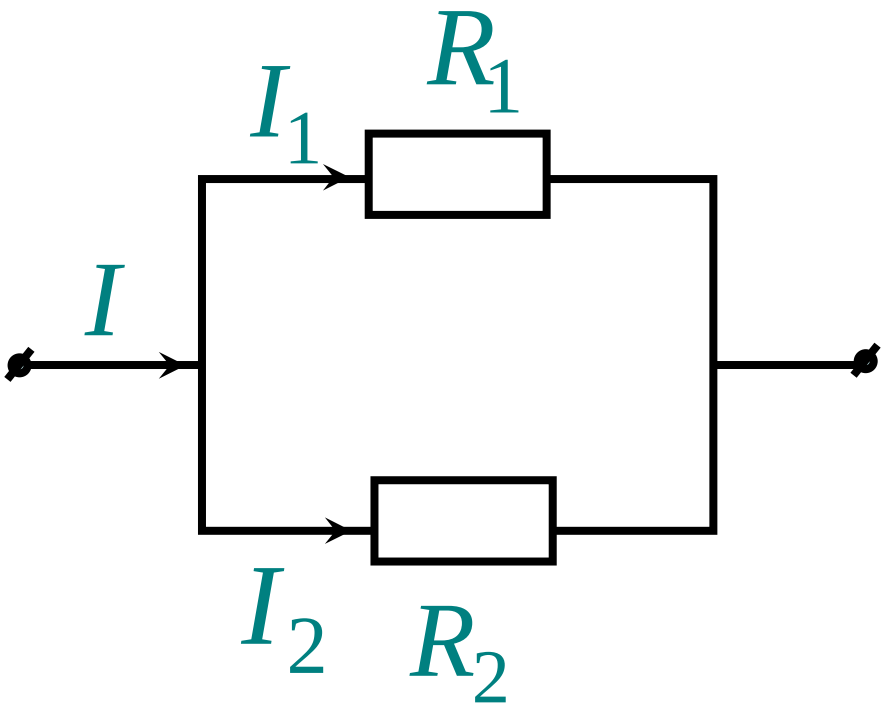
$$U_J = \varphi_d - \varphi_c$$

Таким образом по методу узловых потенциалов необходимо решить значительно меньше уравнений по сравнению с методом законов Кирхгофа .

4. Метод преобразований

Этот метод основывается на правилах преобразований линейных цепей, которые доказываются при помощи законов Ома и Кирхгофа

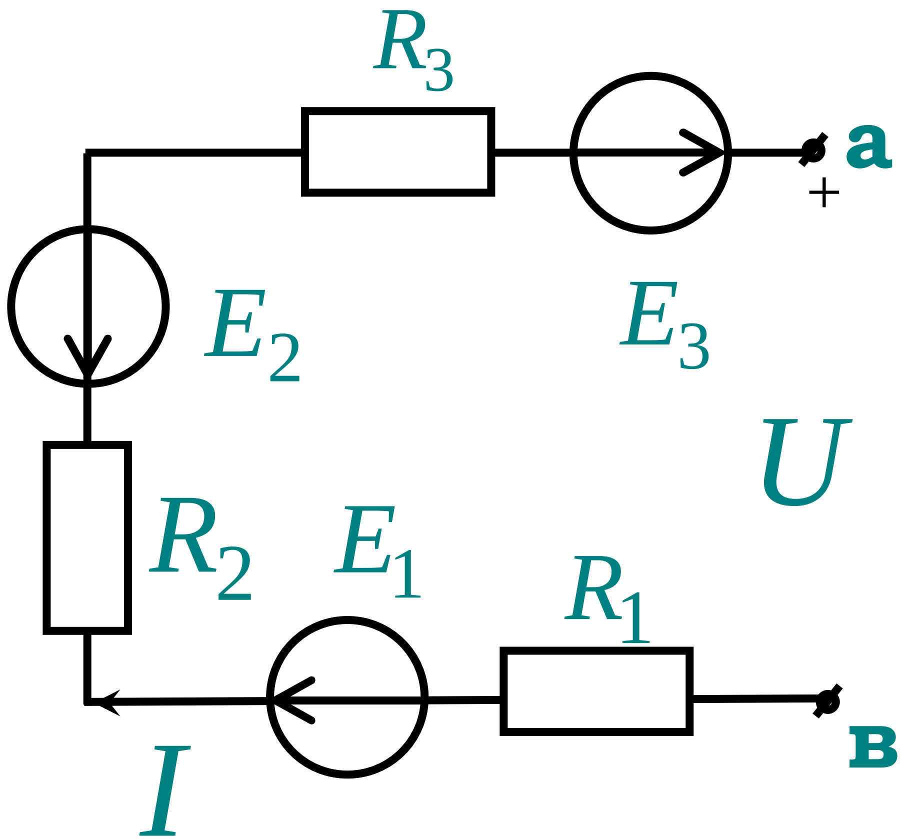
4.1. Правило распределения (разброса) тока в параллельных ветвях

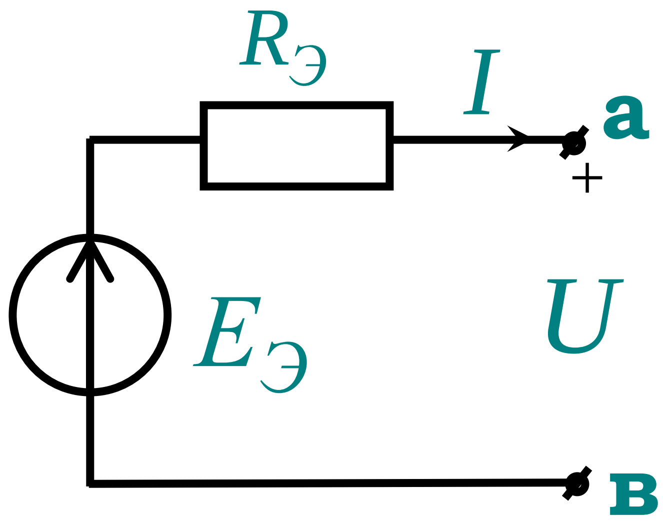


$$I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

4.2. Последовательное соединение ЭДС и сопротивлений

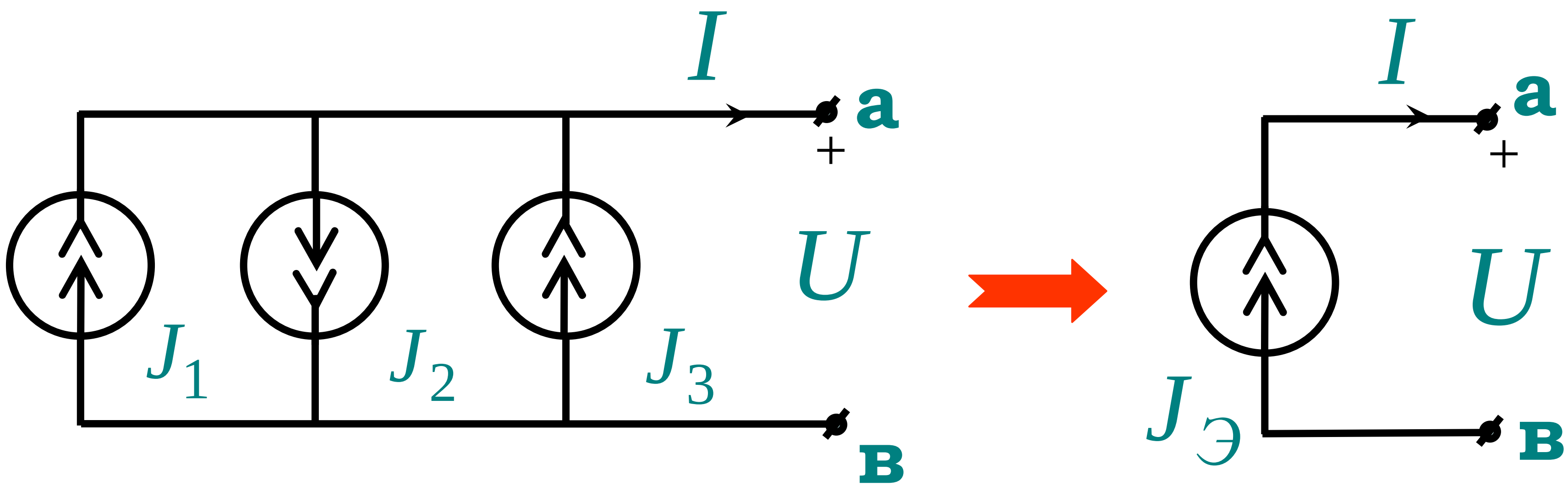




$$E_Э = E_1 - E_2 + E_3$$

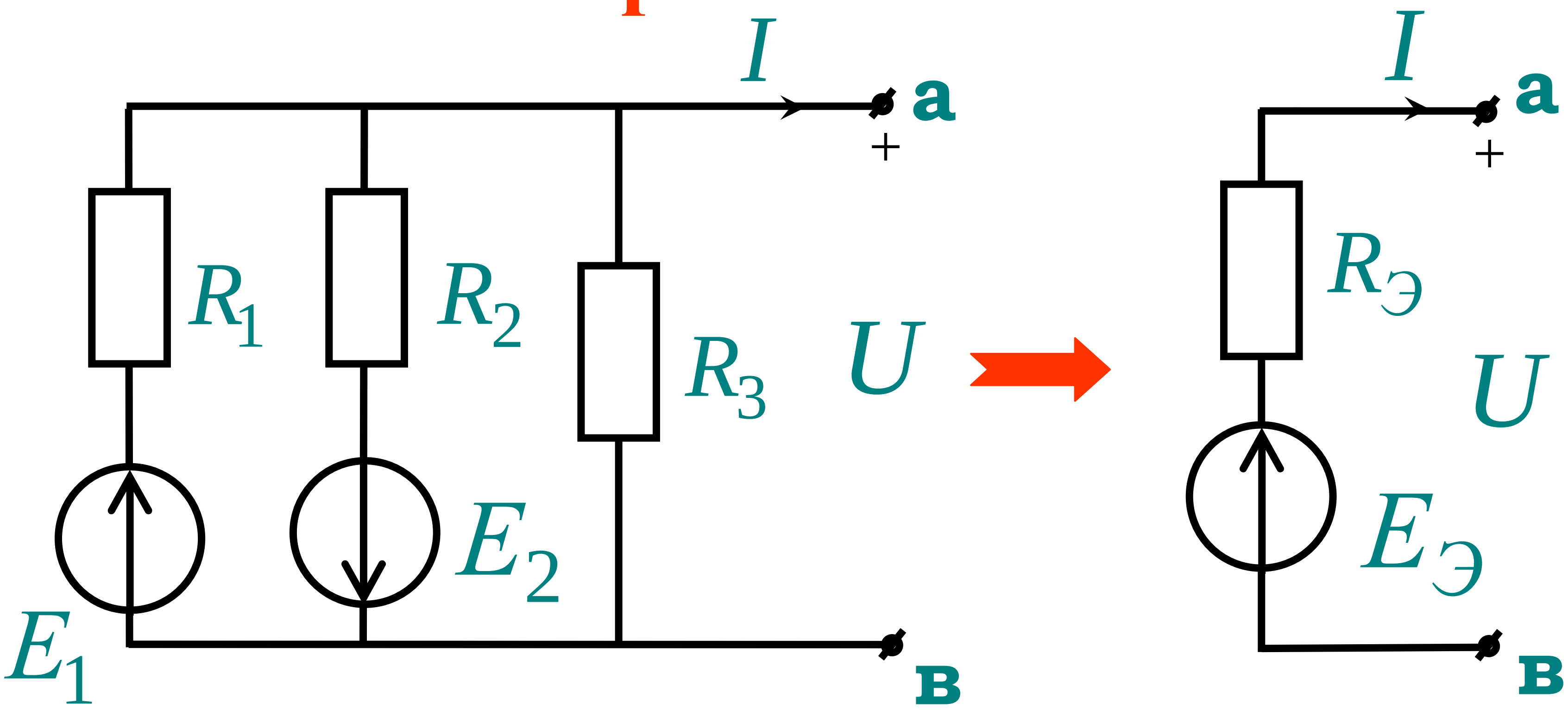
$$R_Э = R_1 + R_2 + R_3$$

4.3. Параллельное соединение источников тока



$$J_Э = J_1 - J_2 + J_3$$

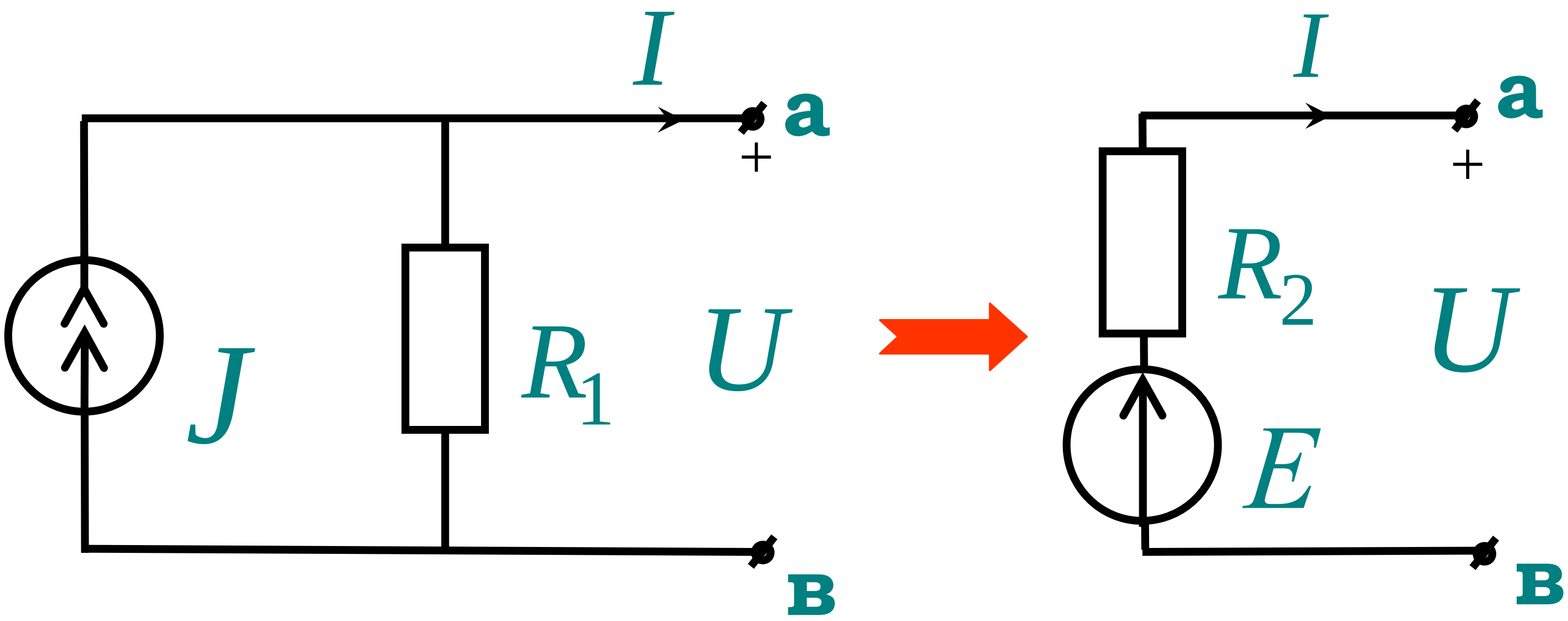
4.4. Параллельное соединение ЭДС и сопротивлений



$$R_{Э} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}$$

$$E_{Э} = \left(\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}\right) \cdot R_{Э}$$

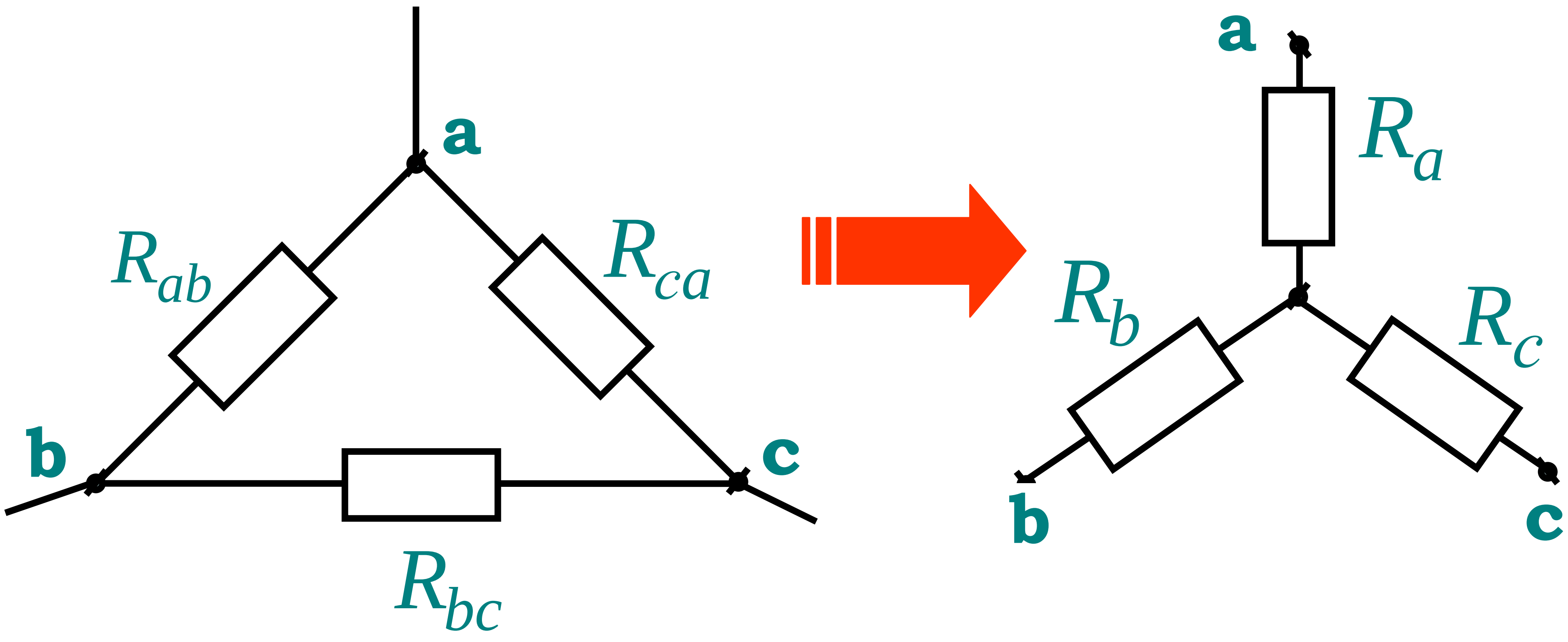
4.5. Замена источника тока на источник ЭДС и наоборот



$$\boxed{R_1 = R_2}$$

$$\boxed{E = JR_1}$$

4.6. Преобразование треугольника в звезду и наоборот



$$R_a = \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_b = \frac{R_{ab}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

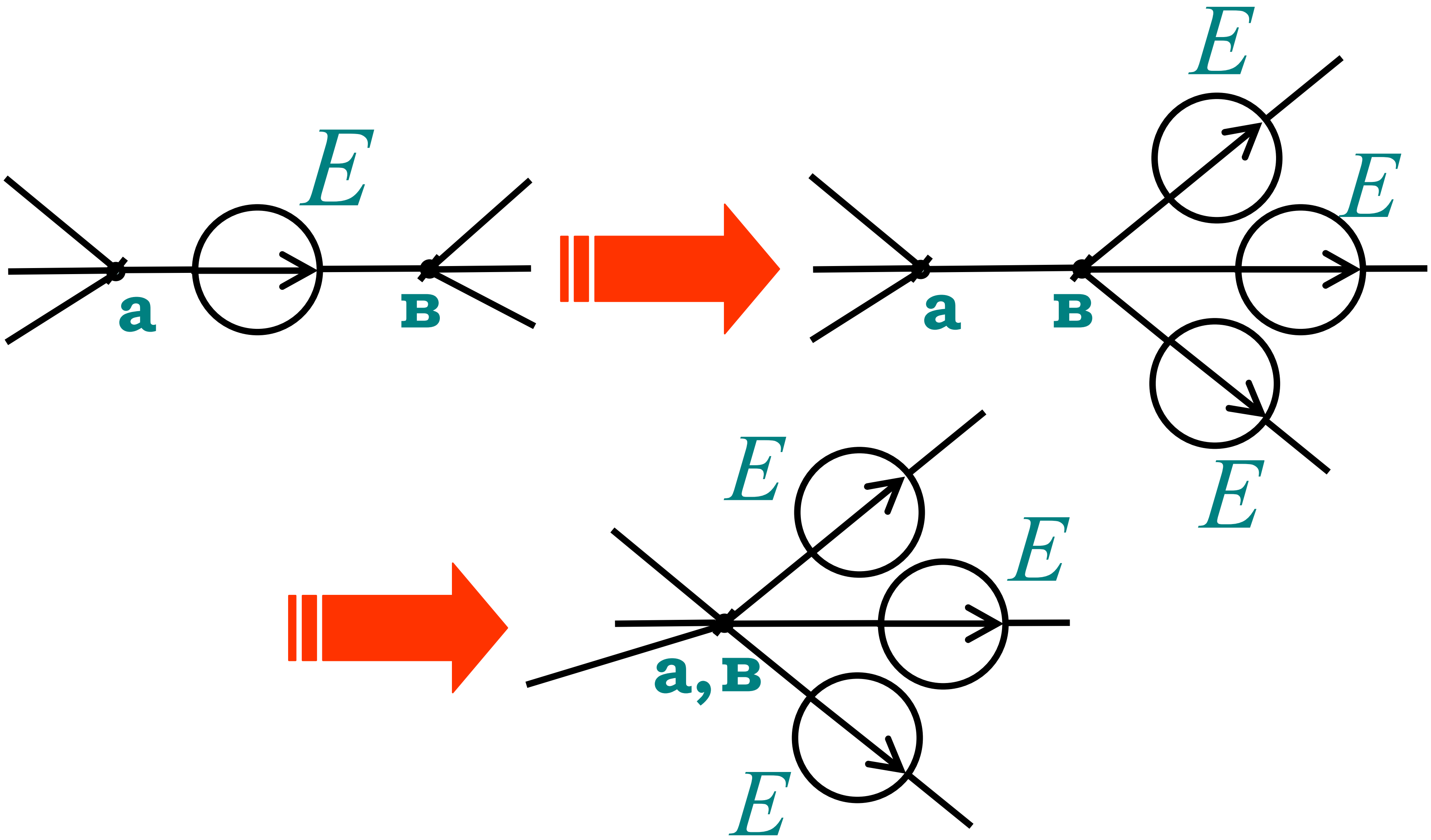
$$R_c = \frac{R_{ca}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$\boxed{R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c}}$$

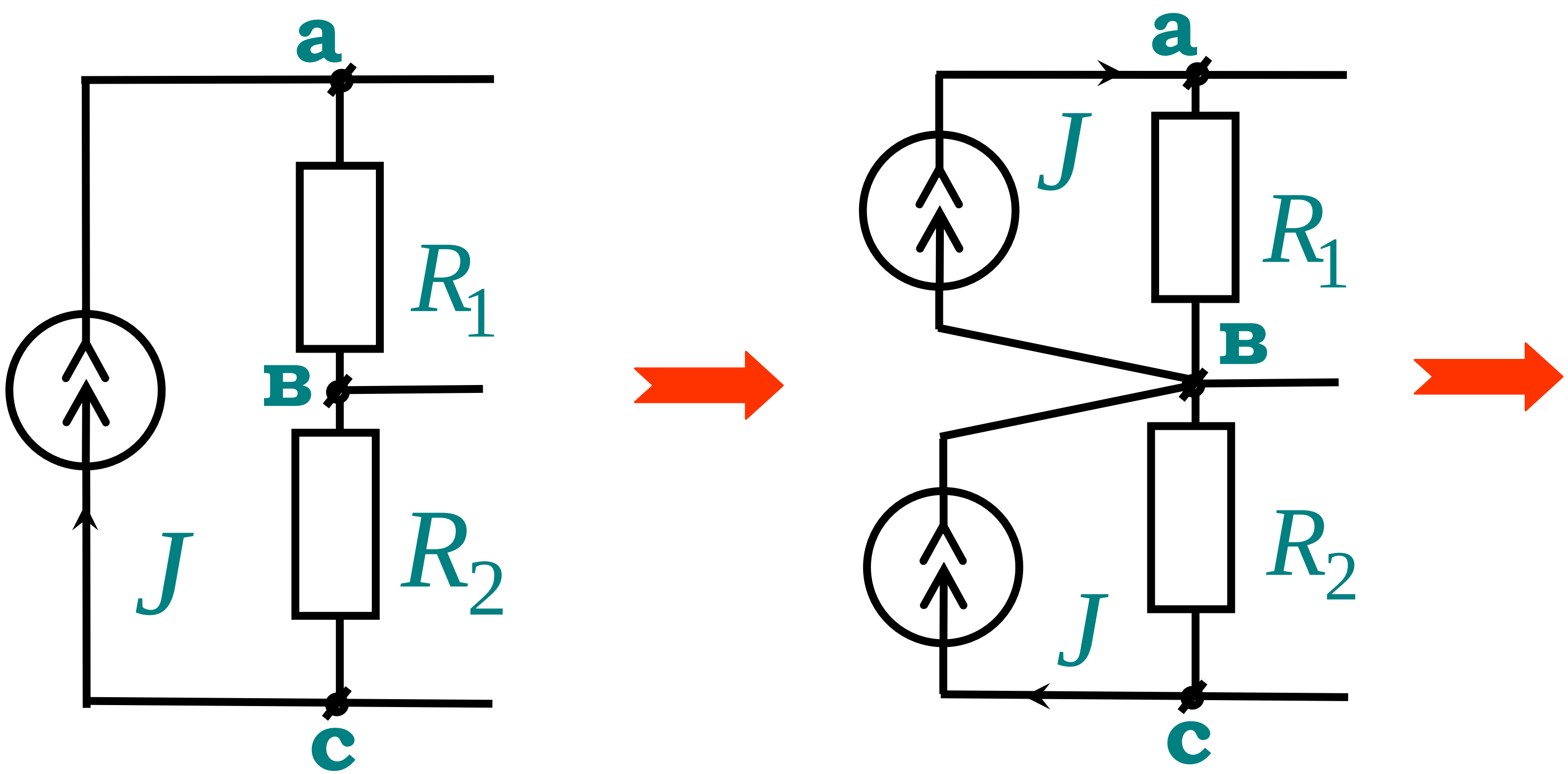
$$\boxed{R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a}}$$

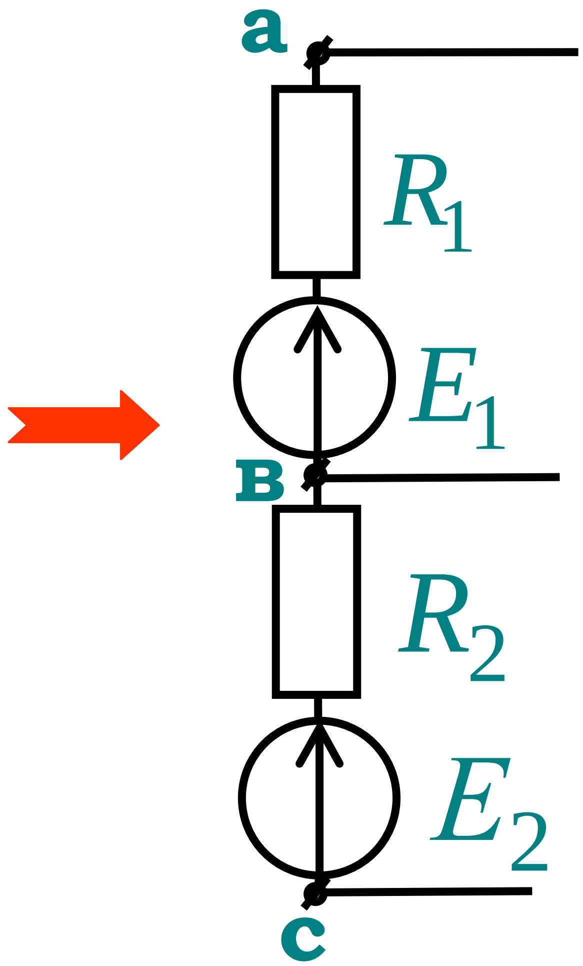
$$\boxed{R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c R_a}{R_b}}$$

4.7. Перенос источников ЭДС



4.8. Перенос источника тока



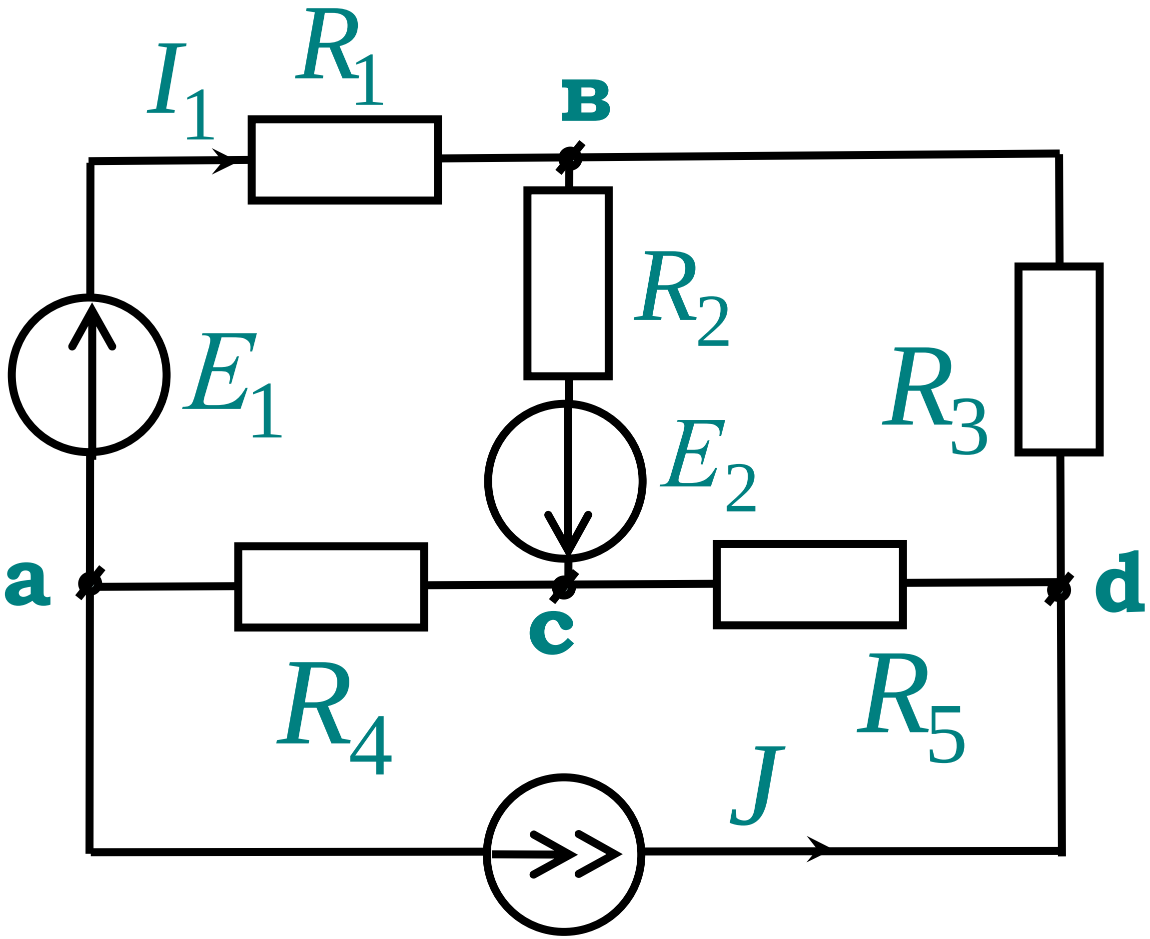


$$\boxed{E_1 = R_1 J}$$

$$\boxed{E_2 = R_2 J}$$

На основе приведенных правил можно реализовать метод преобразований для расчета тока или напряжения в к-ветви схемы. Для этого схема преобразуется до одного контура с искомым током или напряжением, где эти величины легко определяются

Пример



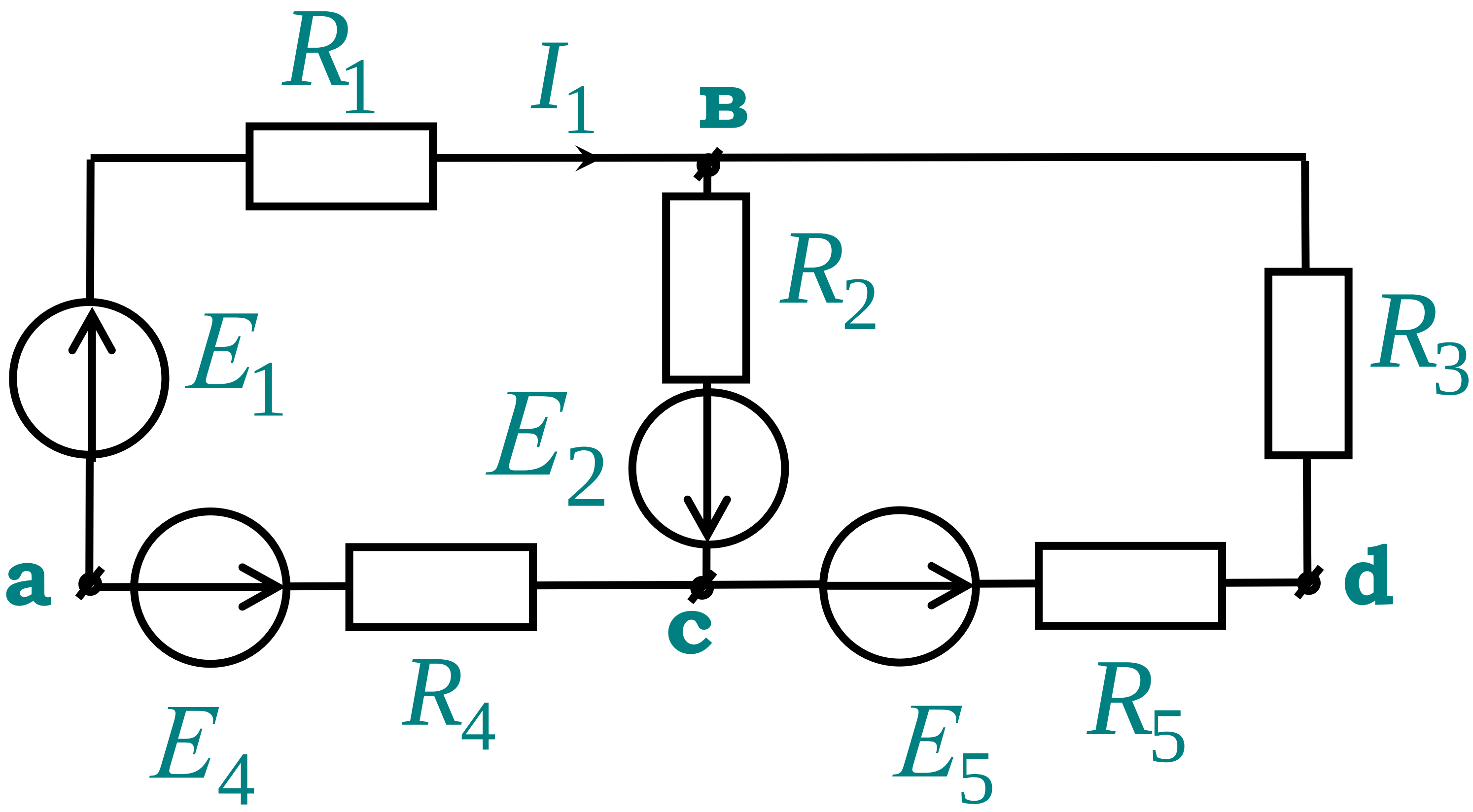
Определить

I_1

методом

преобразований

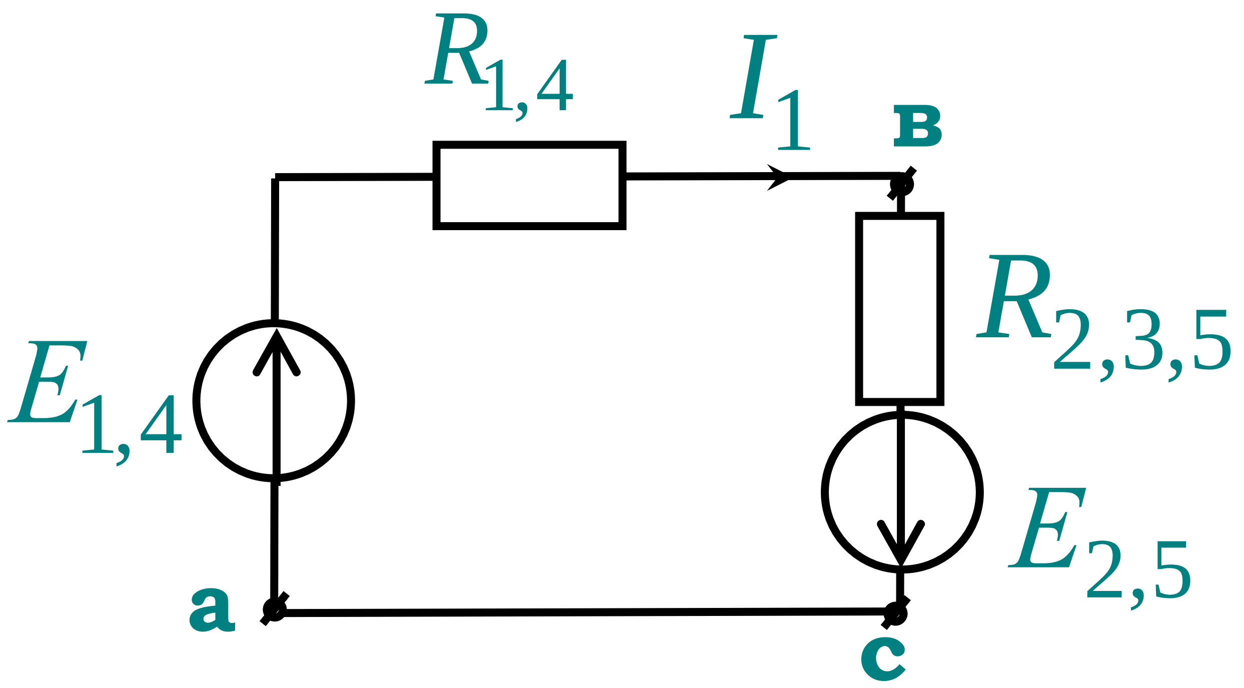
а) перенос источника тока



$$\boxed{E_4 = R_4 J}$$

$$\boxed{E_5 = R_5 J}$$

б) преобразования соединений сопротивлений и ЭДС

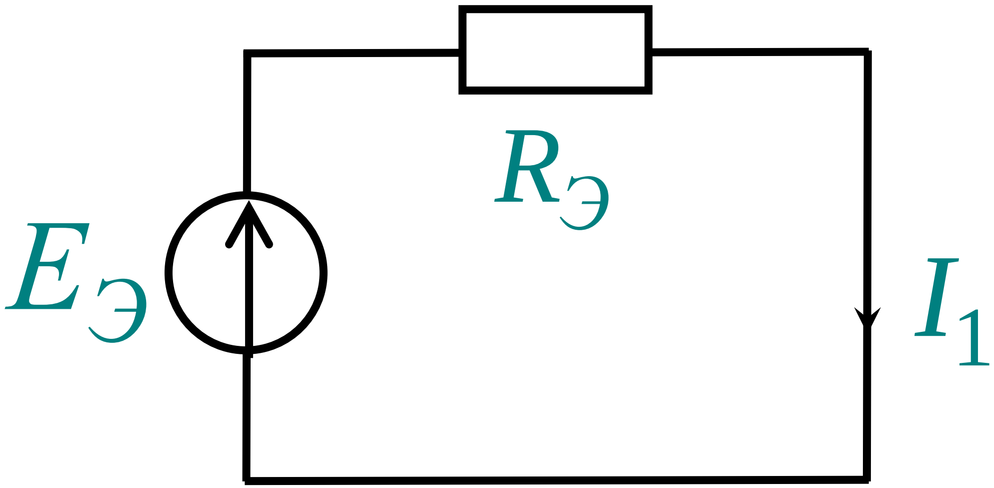


$$\boxed{E_{1,4} = E_1 - E_4}$$

$$\boxed{R_{1,4} = R_1 + R_4}$$

$$\boxed{R_{2,3,5} = \frac{R_2(R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_5}}$$

$$\boxed{E_{2,5} = \left(\frac{E_2}{R_2} - \frac{E_5}{R_3 + R_5}\right) \cdot R_{2,3,5}}$$



$$E_Э = E_{1,4} + E_{2,5}$$

$$R_Э = R_{1,4} + R_{2,3,5}$$

$$I_1 = E_Э / R_Э$$

5. Метод наложения

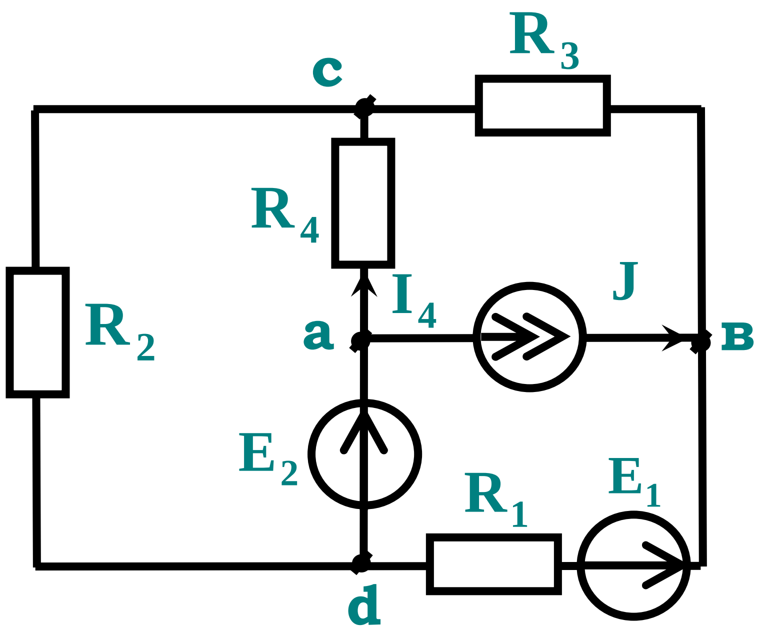
основывается на принципе наложения, когда любой ток (напряжение) равен алгебраической сумме составляющих от действия каждого источника в отдельности:

$$I_к = \sum \pm I_к^{(n)} \qquad U_к = \sum \pm U_к^{(n)}$$

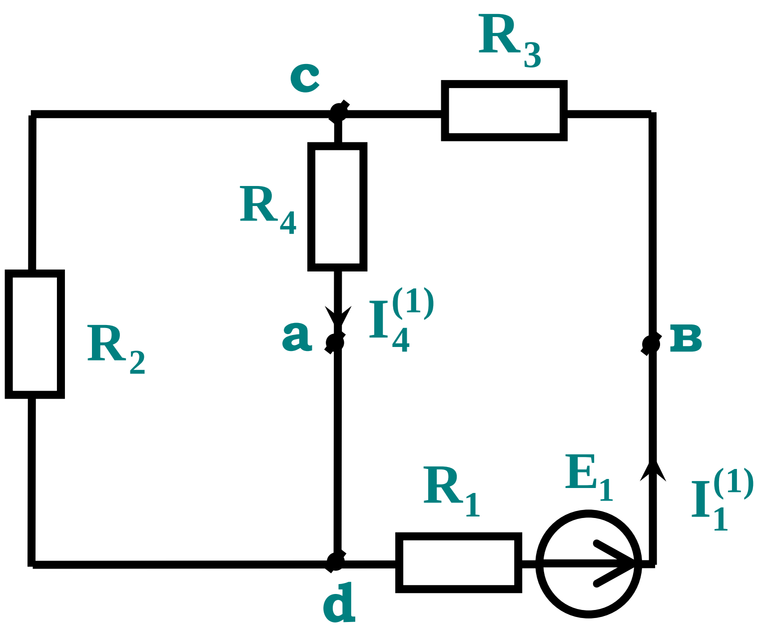
При этом для расчета составляющих токов и напряжений исходная схема разбивается на подсхемы, в каждой из которых действует один источник ЭДС или тока, причем остальные источники ЭДС закорочены, а ветви с остальными источниками тока разорваны.

Пример

Определить I_4



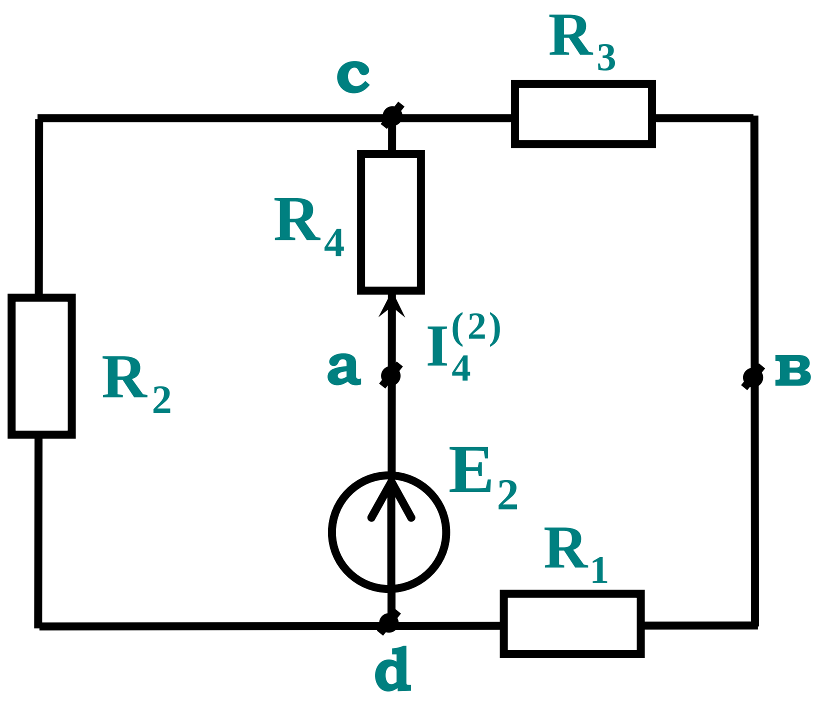
а) подсхема с E_1:



$$I_1^{(1)} = \frac{E_1}{(R_1 + R_3) + \dfrac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}}$$

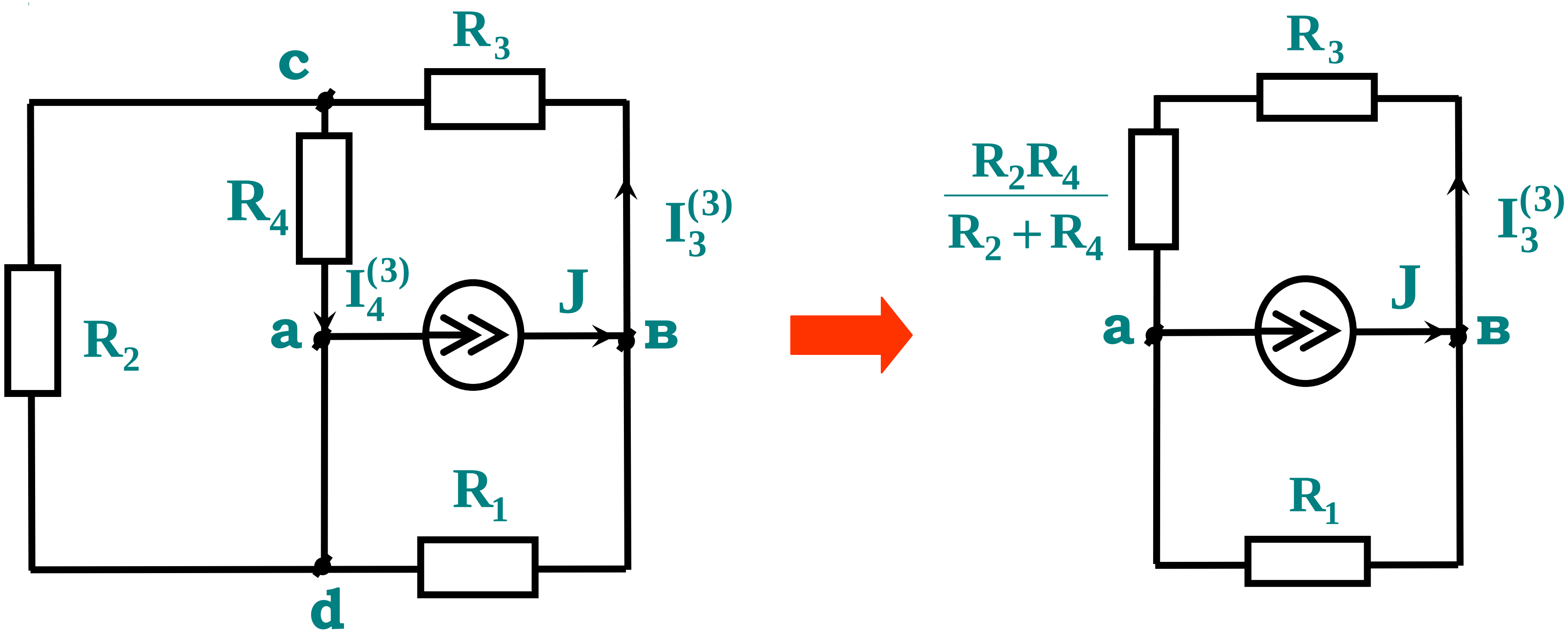
$$I_4^{(1)} = I_1^{(1)} \frac{R_2}{R_2 + R_4}$$

б) подсхема с E_2:



$$I_4^{(2)} = \frac{E_2}{R_4 + \dfrac{R_2(R_1 + R_3)}{R_2 + (R_1 + R_3)}}$$

в) подсхема с J:



$$I_3^{(3)} = J\frac{R_1}{R_1 + (R_3 + \dfrac{R_2R_4}{R_2 + R_4})}$$

$$I_4^{(3)} = I_3^{(3)}\frac{R_2}{R_2 + R_4}$$

г) окончательный результат

$$\boxed{\mathbf{I}_4 = \sum \pm \mathbf{I}_4^{(n)} = -\mathbf{I}_4^{(1)} + \mathbf{I}_4^{(2)} - \mathbf{I}_4^{(3)}}$$

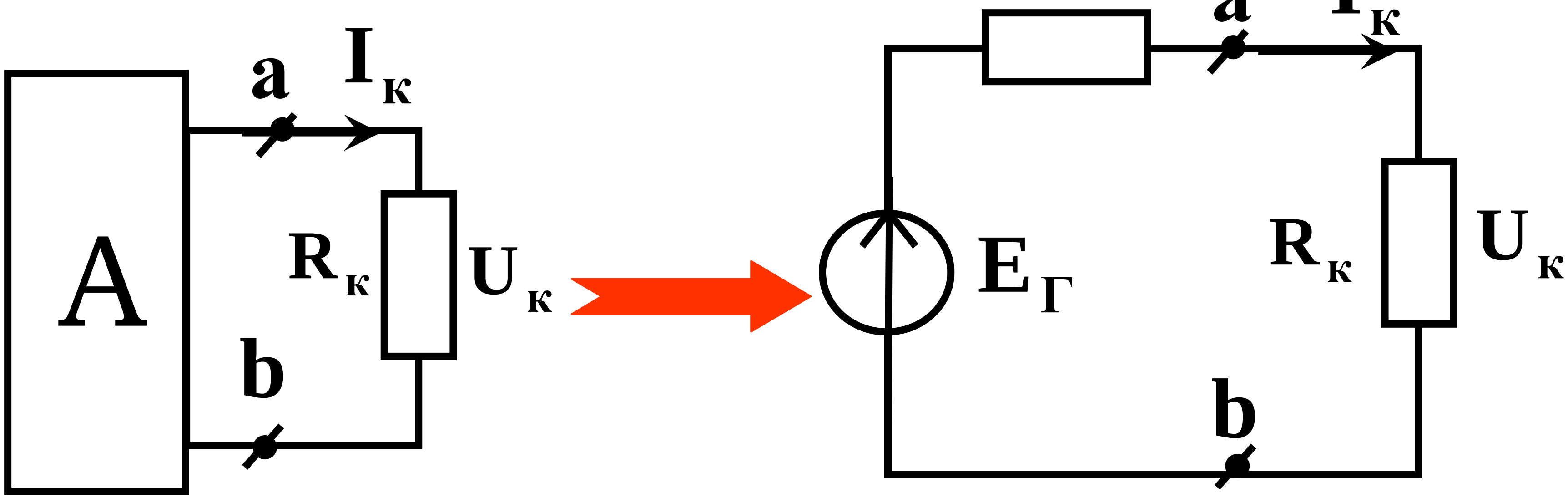
со знаком «плюс» учитываем частичные токи, которые совпадают по направлению с искомым током

6. Метод эквивалентного генератора

Используется при расчете цепей, когда нужно определить ток только в одной ветви.

Теорема: любой активный двухполюсник, рассматриваемый относительно двух зажимов, можно представить в виде эквивалентного источника ЭДС, равной напряжению холостого хода относительно этих зажимов. При этом внутреннее сопротивление источника ЭДС равно эквивалентному сопротивлению активного двухполюсника относительно рассматриваемых зажимов.

$$R_Г = R_{ab}$$



где $E_Г = U_к^{(xx)}$ когда $I_к = 0$ при $R_к = \infty$

- опыт холостого хода;

$$J_Г = \frac{E_Г}{R_Г} = I_к^{(кз)}$$ когда $U_к = 0$ при $R_к = 0$

- опыт короткого замыкания.

Алгоритм расчета

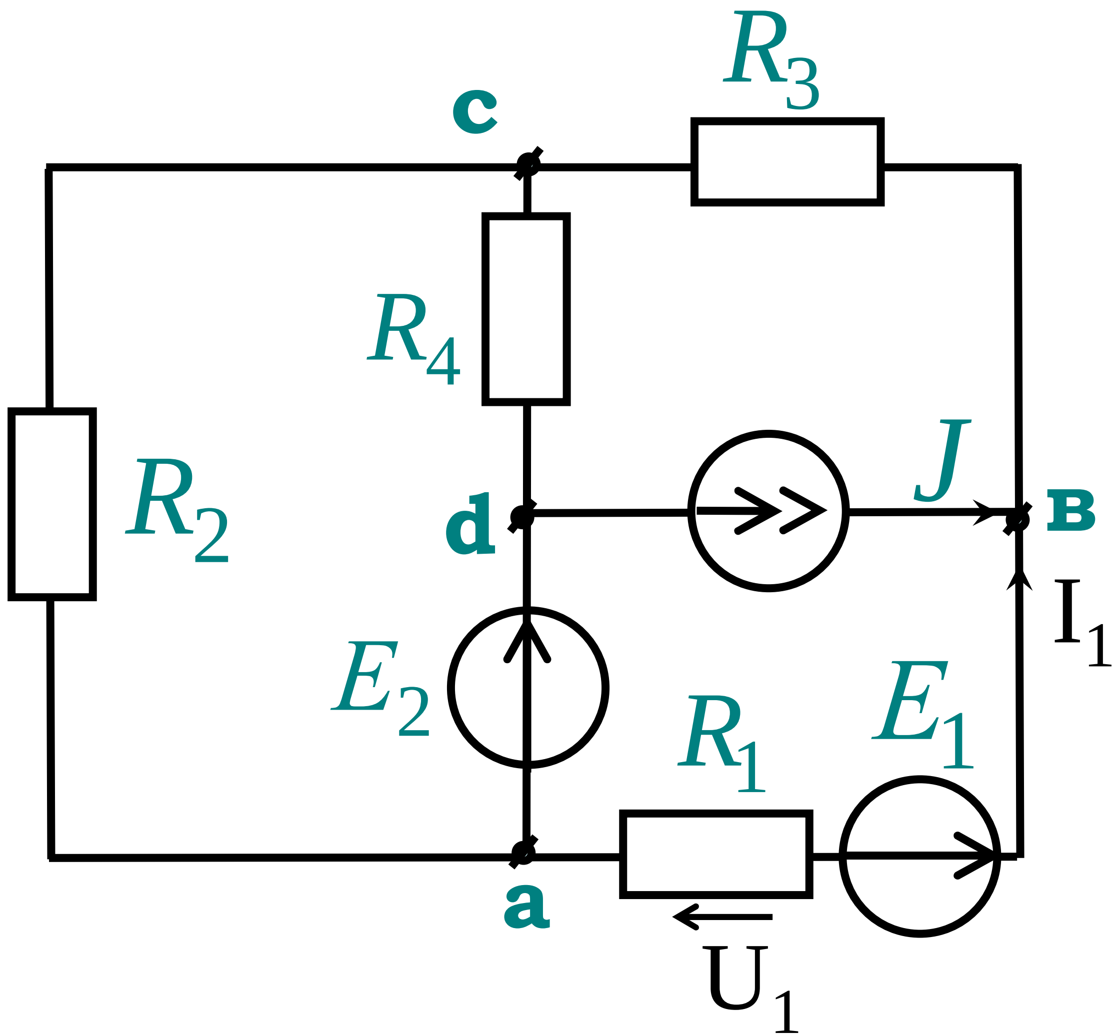
1. Разрывается цепь относительно выделенной ветви и любым методом определяется напряжение холостого хода $\mathbf{E_Г = U_{xx}}$

2. Определяется сопротивление цепи $\mathbf{R_Г}$ относительно выделенной ветви. При этом ветви с источниками тока удаляются, а источники ЭДС заменяются проводниками (закорачиваются).

3. Определяется ток ветви при $\mathbf{J_Г = E_Г / R_Г}$:

$$\boxed{\mathbf{I_к = \frac{E_Г}{R_Г + R_k} = \frac{J_Г}{1 + R_k / R_Г}}}$$

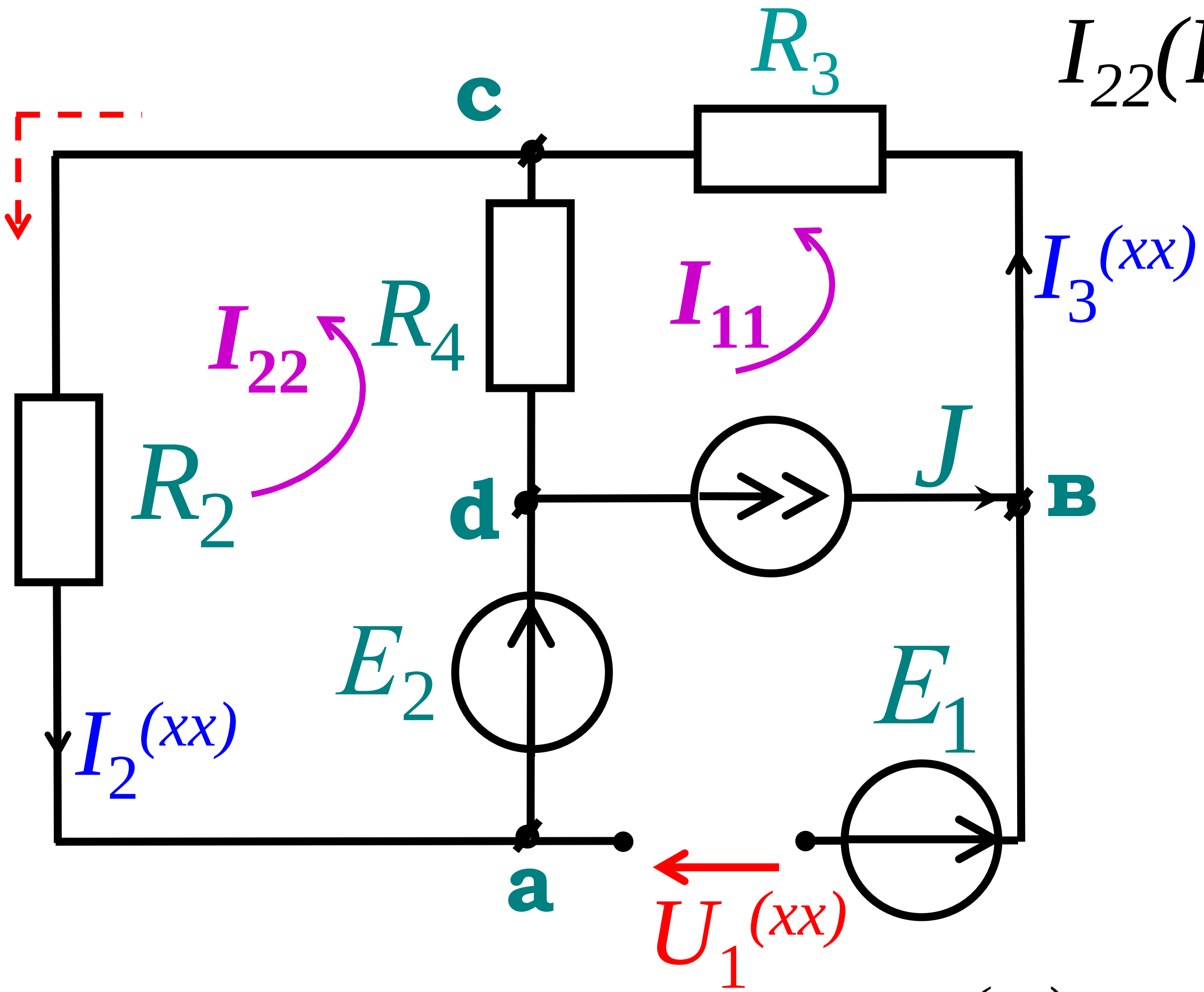
Пример



Определить

$I_1 = ?$

а) напряжение холостого хода $U_1^{(xx)}$:



$$I_{22}(R_2+R_4)-I_{11}R_4=E_2$$

$$I_{11}=J$$

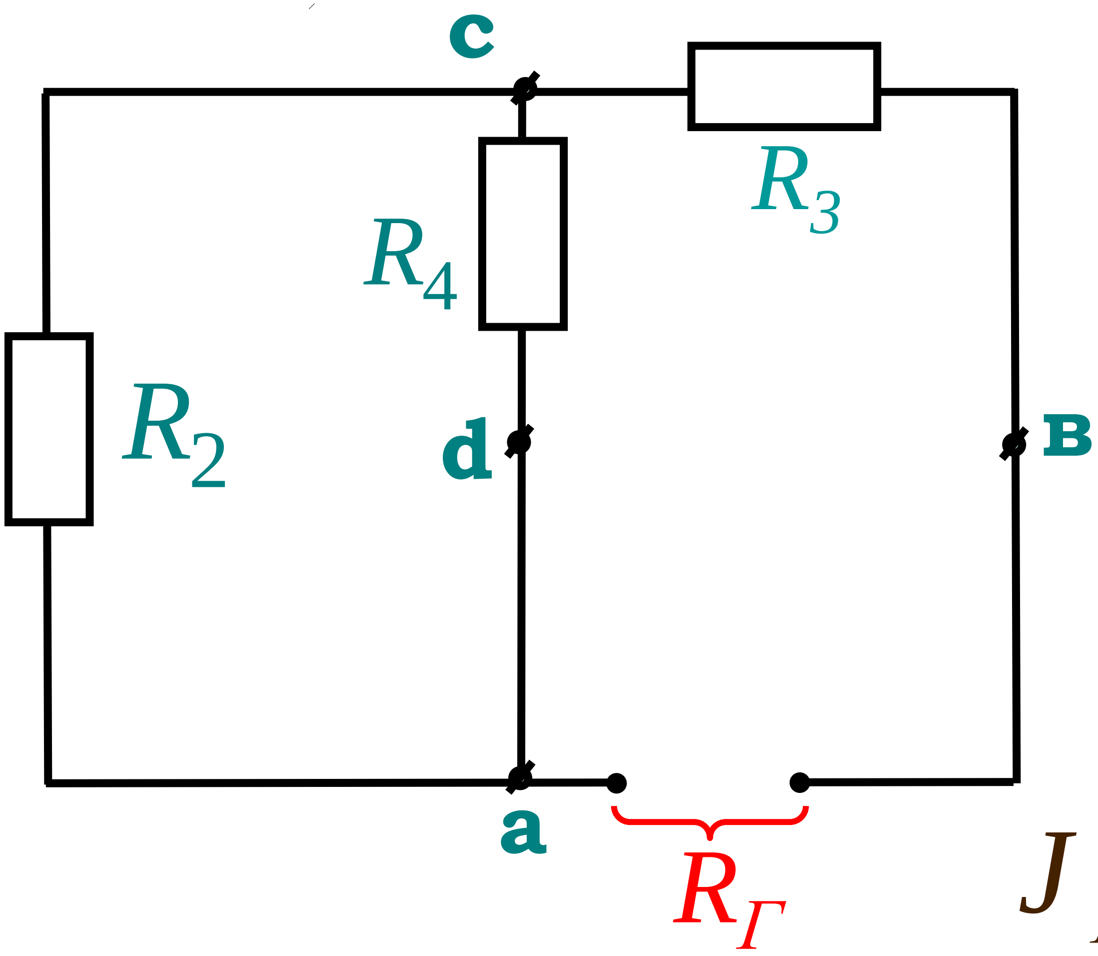
$$I_2^{(xx)}=I_{22}$$

$$I_3^{(xx)}=I_{11}$$

$$U_1^{(xx)}=E_\Gamma=?$$

$$-U_1^{(xx)}+E_1=R_3I_3^{(xx)}+R_2I_2^{(xx)}$$

б) эквивалентное сопротивление $R_Г$:



$R_Г = R_3 +$
$+ R_2 R_4 / (R_2 + R_4)$

Тогда

$$J_Г = I_1^{(кз)} = \frac{E_Г}{R_Г}$$

в) окончательный результат

$$I_1 = \frac{E_Г}{R_Г + R_1} = \frac{J_Г}{1 + {R_1}/{R_Г}}$$

Графическое определение I_1 и U_1: