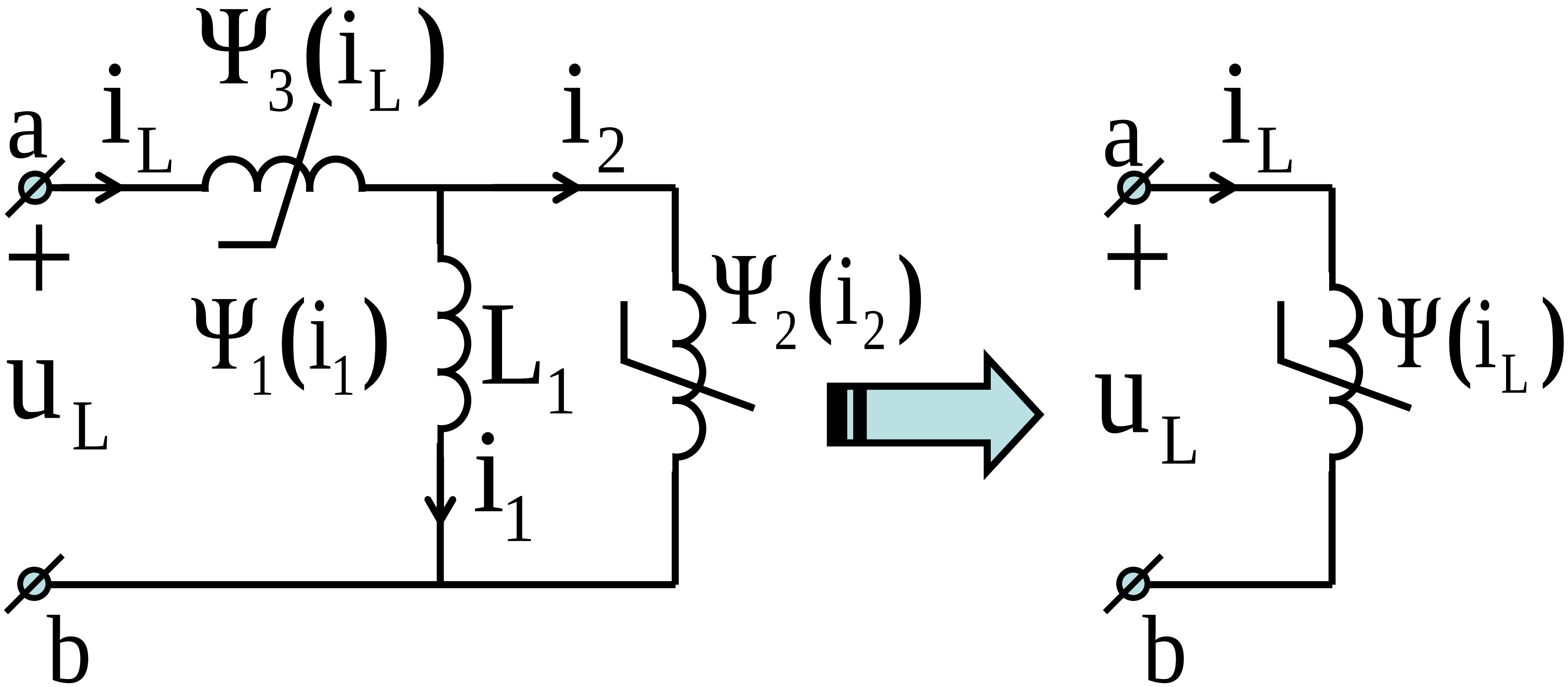
8 лекция

Расчет цепей с линейными и нелинейными индуктивными элементами

Расчет осуществляется графоаналитическими методами с использованием ВбАХ $\Psi(i_L)$.

1. Группа линейных и нелинейных индуктивных элементов на основании законов Кирхгофа заменяется одним НИЭ с эквивалентной ВбАХ $\Psi(i_L)$

Например:



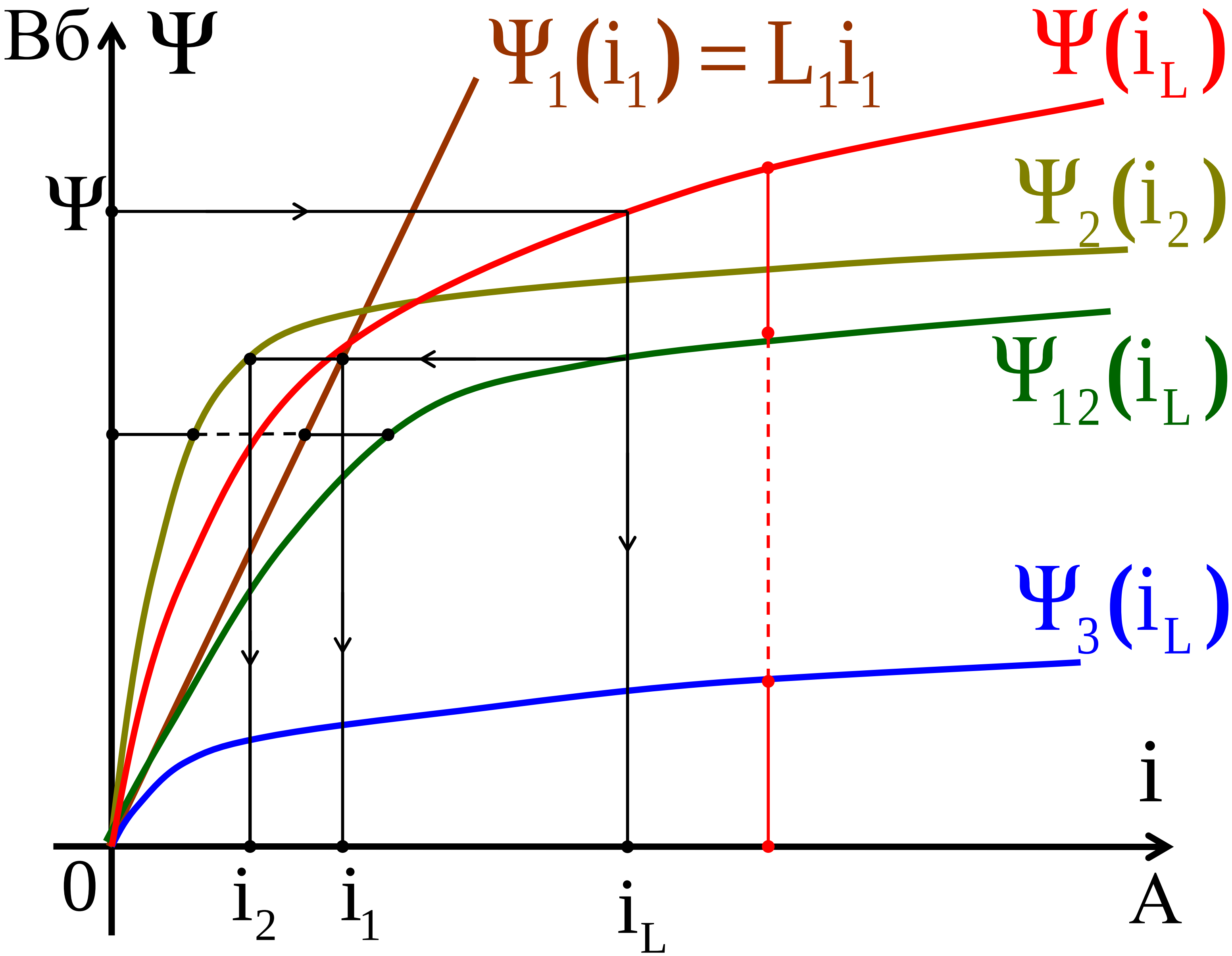
Потокосцепление

$$\Psi(t) = \int u_L(t)dt + A$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi &= \Psi(t_0) \\ i_L &= i_L(t_0) \end{aligned}\right\} -$$ мгновенные значения

$t = t_0 -$ расчетный момент времени

Графически определяем мгновенные значения i_L, i_1 и i_2, причем ВбАХ параллельных элементов складываются вдоль оси i, а последовательных- вдоль оси ψ



Вб
Ψ
$\Psi_1(i_1) = L_1 i_1$
$\Psi(i_L)$
Ψ
$\Psi_2(i_2)$
$\Psi_{12}(i_L)$
$\Psi_3(i_L)$
i
0
i_2
i_1
i_L
A

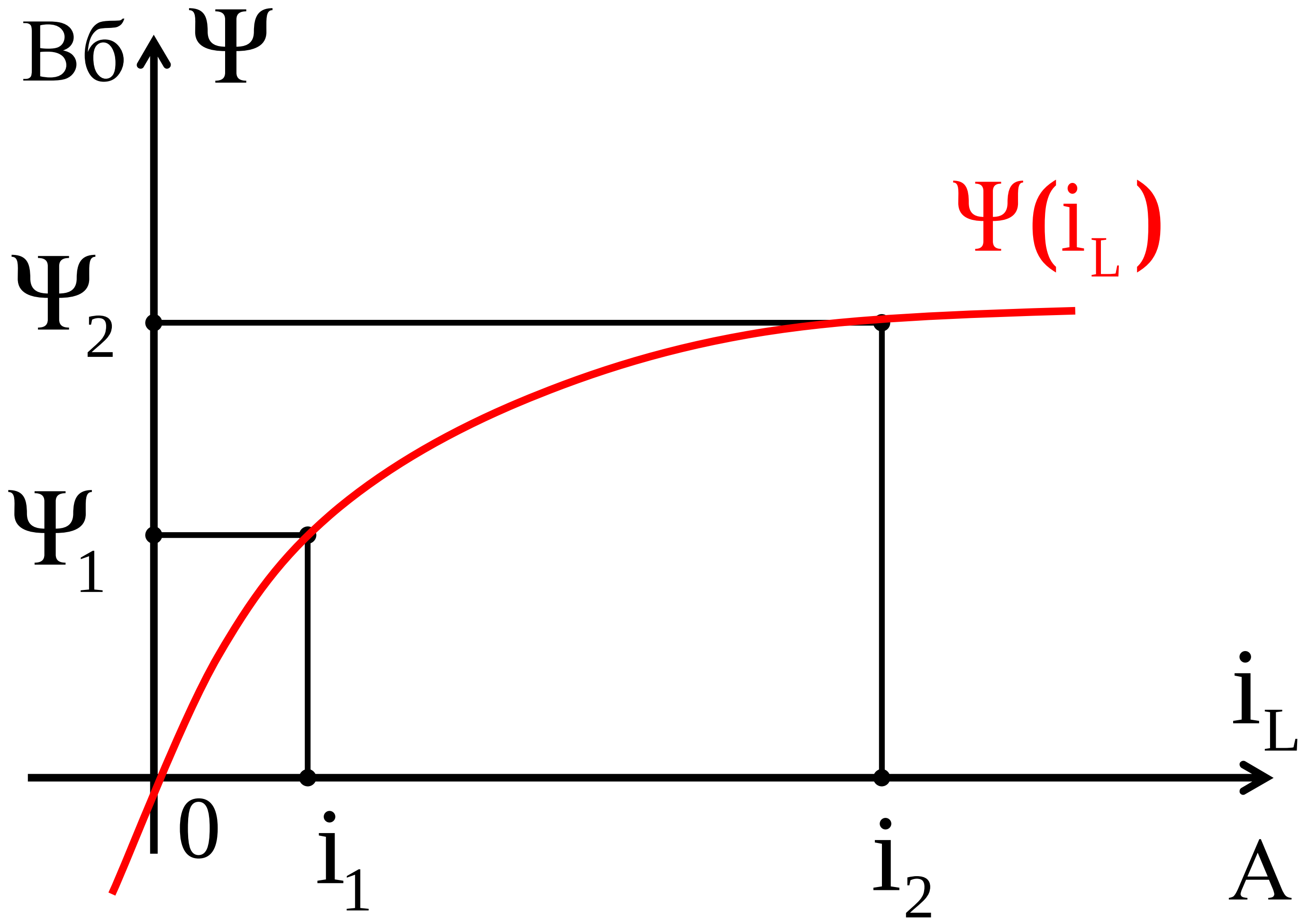
2. Заданная ВбАХ $\Psi(i_L)$ НИЭ может приближенно заменяться зависимостью:

$$i_L \approx K_1\Psi + K_3\Psi^3 + \dots$$

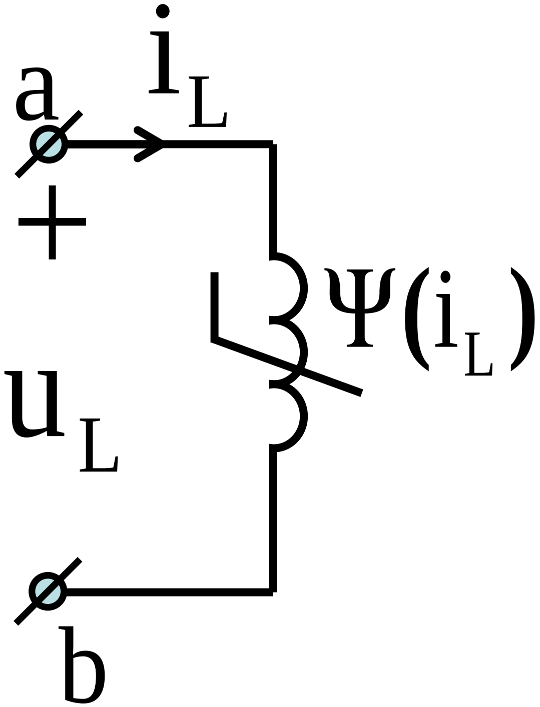
Коэффициенты K_1 и K_3 находятся из решения уравнений

$$\begin{cases} i_1 = K_1\Psi_1 + K_3\Psi_1^3 \\ i_2 = K_1\Psi_2 + K_3\Psi_2^3 \end{cases}$$

Где:



3. Если



$$i_L \approx K_1\Psi + K_3\Psi^3$$

$$u_L(t) \approx \sqrt{2}U_L\,\mathbf{cos}(\omega t + \beta)$$

тогда

$$\Psi(t) = \int u_L(t)dt + \cancelto{0}{A} = \frac{\sqrt{2}U_L}{\omega}\mathbf{sin}(\omega t + \beta)$$

В результате

$$i_L \approx K_1\Psi(t) + K_3\Psi^3(t) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}K_1U_L}{\omega}\mathbf{sin(\omega t + \beta)} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{2}K_3U_L^3}{\omega^3}\mathbf{sin}^3\mathbf{(\omega t + \beta)}$$

Однако

$$\sin^3(\omega t+\beta)=\frac{3}{4}\sin(\omega t+\beta)-\frac{1}{4}\sin(3\omega t+3\beta)$$

тогда

$$i_L(t)\approx\sqrt{2}\,I_1\sin(\omega t+\beta)+\sqrt{2}\,I_3\sin(3\omega t+3\beta)$$

Действующие значения

$$I_1 = \frac{K_1 U_L}{\omega} + \frac{3K_3 U_L^3}{2\omega^3} \qquad I_3 = -\frac{K_3 U_L^3}{2\omega^3}$$

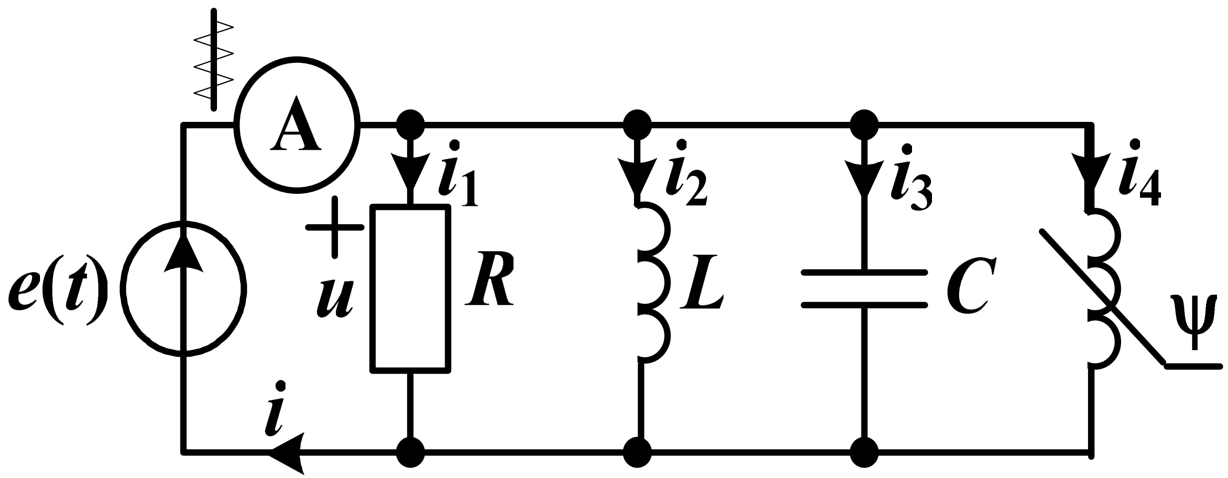
$$I_L = \sqrt{I_1^2 + I_3^2}$$

Изменяя U_L, можно рассчитать I_1, I_3, I_L и получить ВАХ $U_L(I_L)$ НИЭ для действующих значений

При расчете $U_L(I_L)$ удобно заполнять таблицу:

U_L, В				
I_1, А				
I_3, А				
I_L, А				
$K_Г = \| I_3/I_1 \|$				

Пример:



Дано: $e(t) = 100\cos 200t$ (В);

***R*=25** (Ом); ***L*=0,125** (Гн); ***C*=200** (мкФ).

НИЭ имеет ВбАХ: $i_4 = 2\psi + 32\psi^3$ (А).

Определить показание амперметра $\boldsymbol{I_{\mathrm{A}}}$ (А).

Примечание:

$$\sin^3\omega t = 0{,}75\sin\omega t - 0{,}25\sin 3\omega t.$$

Решение:

$$e(t)=u=\frac{d\psi}{dt}=Ri_1=L\frac{di_2}{dt}=\frac{1}{C}\int_0^t i_3 dt \Rightarrow$$

$$i_1=\frac{u}{R}=4\cos 200t,\ \mathrm{A}$$

$$i_2=\frac{1}{L}\int_0^t u dt=4\sin 200t,\ \mathrm{A}$$

$$i_3 = C\frac{du}{dt} = -4\sin 200t,\ \text{А}$$

$$\psi = \int_0^t u dt = 0{,}5\sin 200t, \quad \text{Вб}$$

$$i_4 = 2\psi + 32\psi^3 = 1\sin 200t + 4\sin^3 200t =$$

$$= 4\sin 200t - 1\sin 600t,\ \text{А}$$

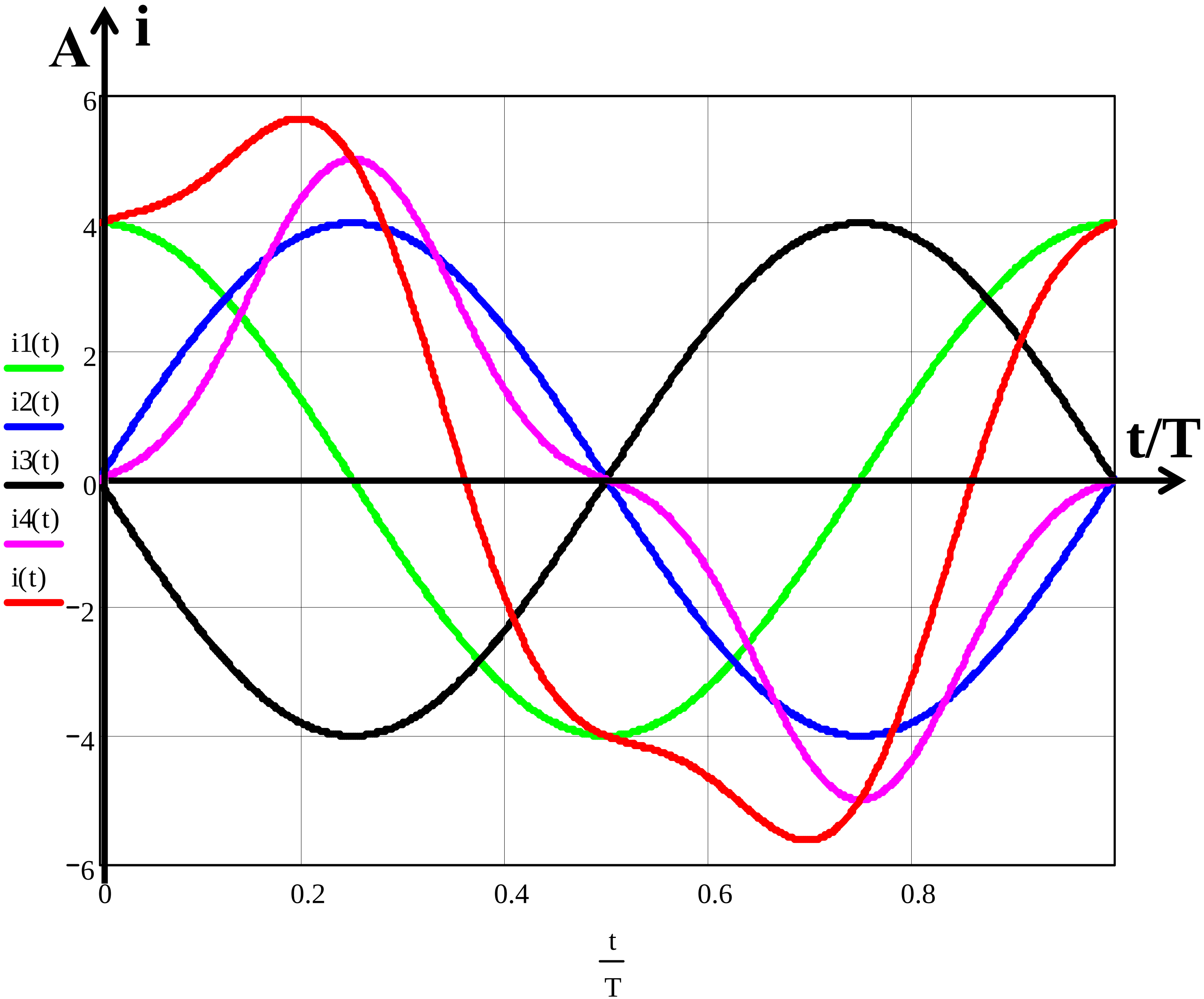
$$i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 =$$

$$= 4\sin 200t + 4\cos 200t - 1\sin 600t =$$

$$= 4\sqrt{2}\sin(200t + \pi/4) + 1\sin(600t + \pi),\ \mathrm{A}$$

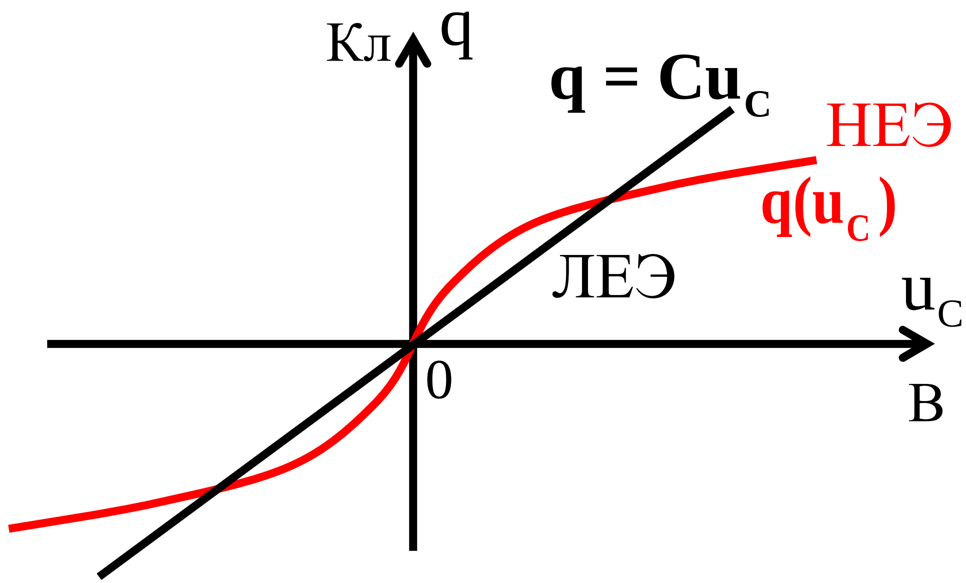
Показание амперметра ЭМ системы (действующее значение):

$$I_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2} + \frac{1^2}{2}} \approx 4{,}062\,(\mathrm{A})$$

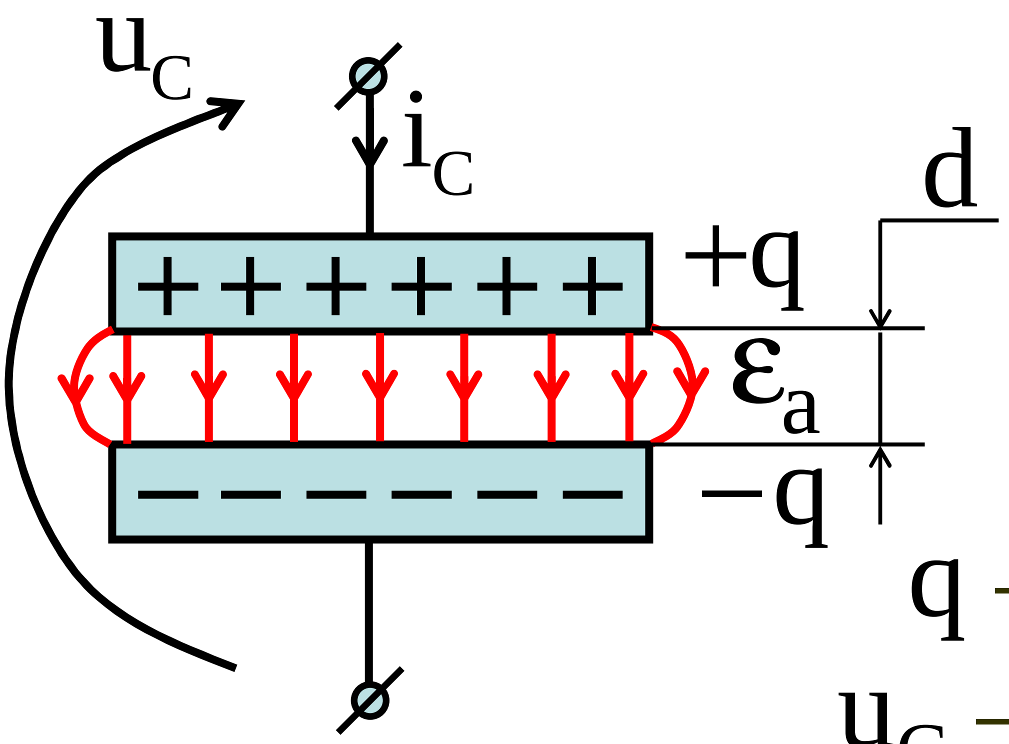

A
i
6
4
2
0
−2
−4
−6
0
0.2
0.4
0.6
0.8
t/T
i1(t)
i2(t)
i3(t)
i4(t)
i(t)
t
T

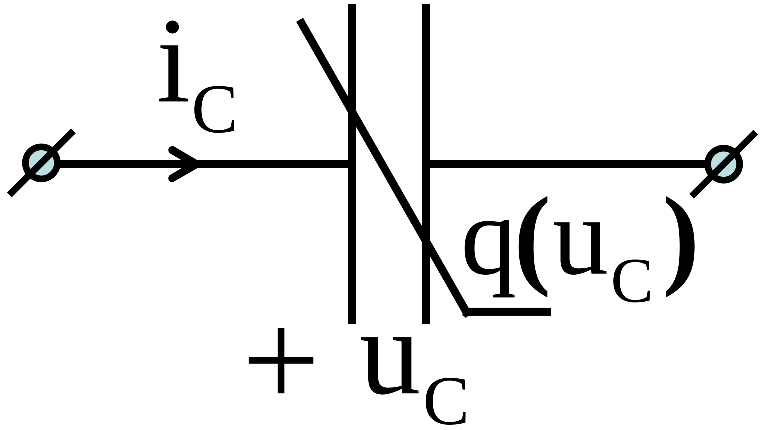
Нелинейные емкостные элементы (НЕЭ)

НЕЭ запасают энергию в электрическом поле и имеют нелинейную кулонвольтную характеристику (КВХ) $q(u_C)$



ЛЕЭ – линейный емкостный элемент





q – заряд НЕЭ, Кл

u_C – напряжение, В

ε_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость, Ф/м

d – расстояние между обкладками, м

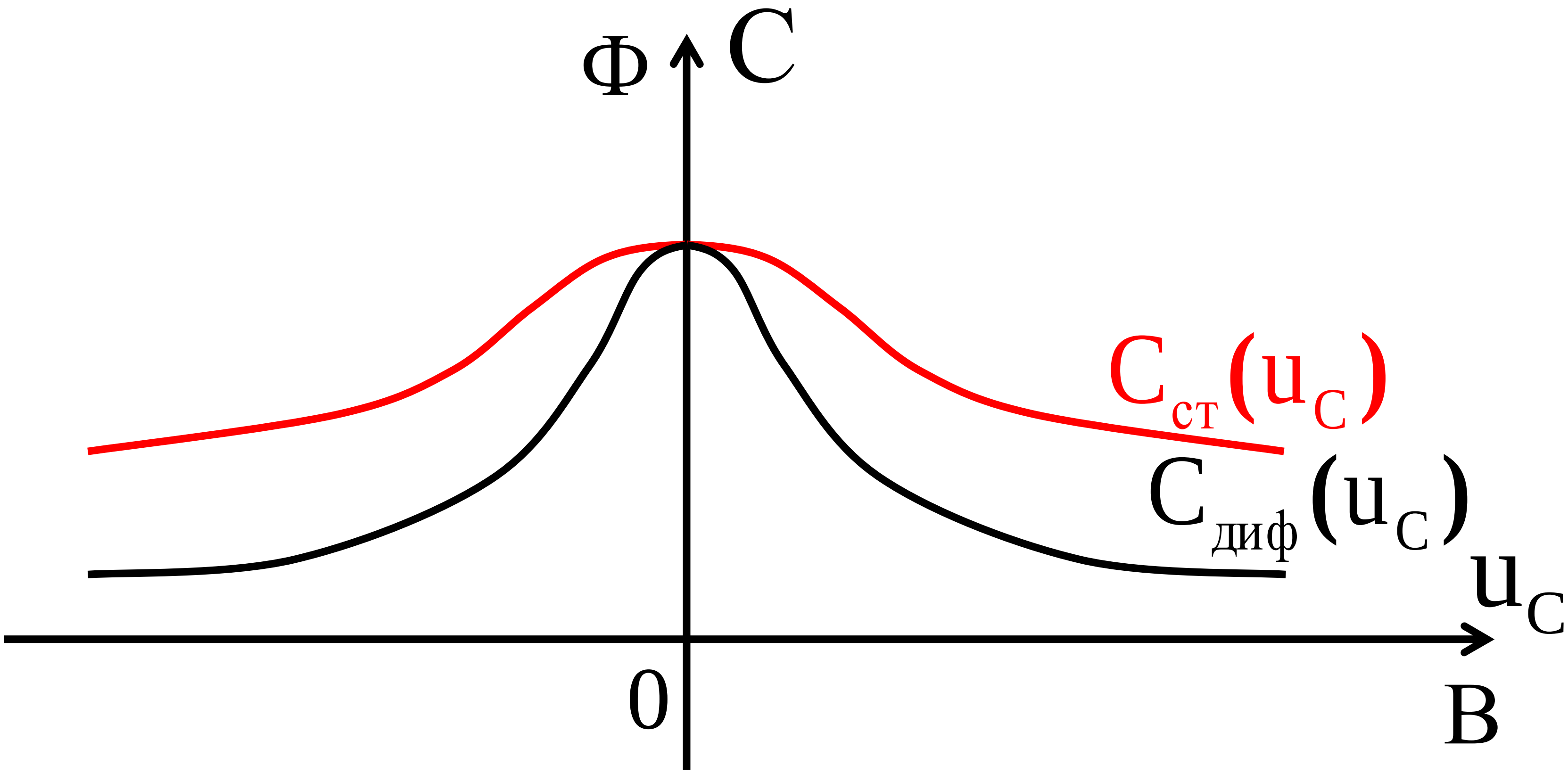
НЕЭ характеризуется:

1. Статической емкостью

$$C_{\text{ст}}(u_C) = {q}/{u_C}, \ \Phi$$

2. Дифференциальной емкостью

$$C_{\text{диф}}(u_C) = \frac{dq}{du_C}, \ \Phi$$



Для линейного емкостного элемента: $C = C_{ст} = C_{диф} = \text{const}$

Ток НЕЭ

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_C} \cdot \frac{du_C}{dt} = C_{диф}(u_C) \cdot \frac{du_C}{dt}, \ A$$

КВХ НЕЭ

$$u_C \approx m_1 q + m_3 q^3 + m_5 q^5 + \ldots$$

где $m_1, m_3, m_5 \ldots$ **- постоянные коэффициенты**

Энергия НЕЭ:

$$W_Э(t_0)=\int_0^{t_0} u_C i_C\,dt=\int_0^{t_0} u_C\frac{dq}{\cancel{dt}}\cancel{dt}=\int_0^{q_0} u_C\,dq\approx$$

$$\approx\frac{m_1 q_0^2}{2}+\frac{m_3 q_0^4}{4}+\frac{m_5 q_0^6}{6}+\ldots,\ Дж$$

где q_0 **- значение заряда в момент времени** $t=t_0$ **, причем** $q(0)=0$

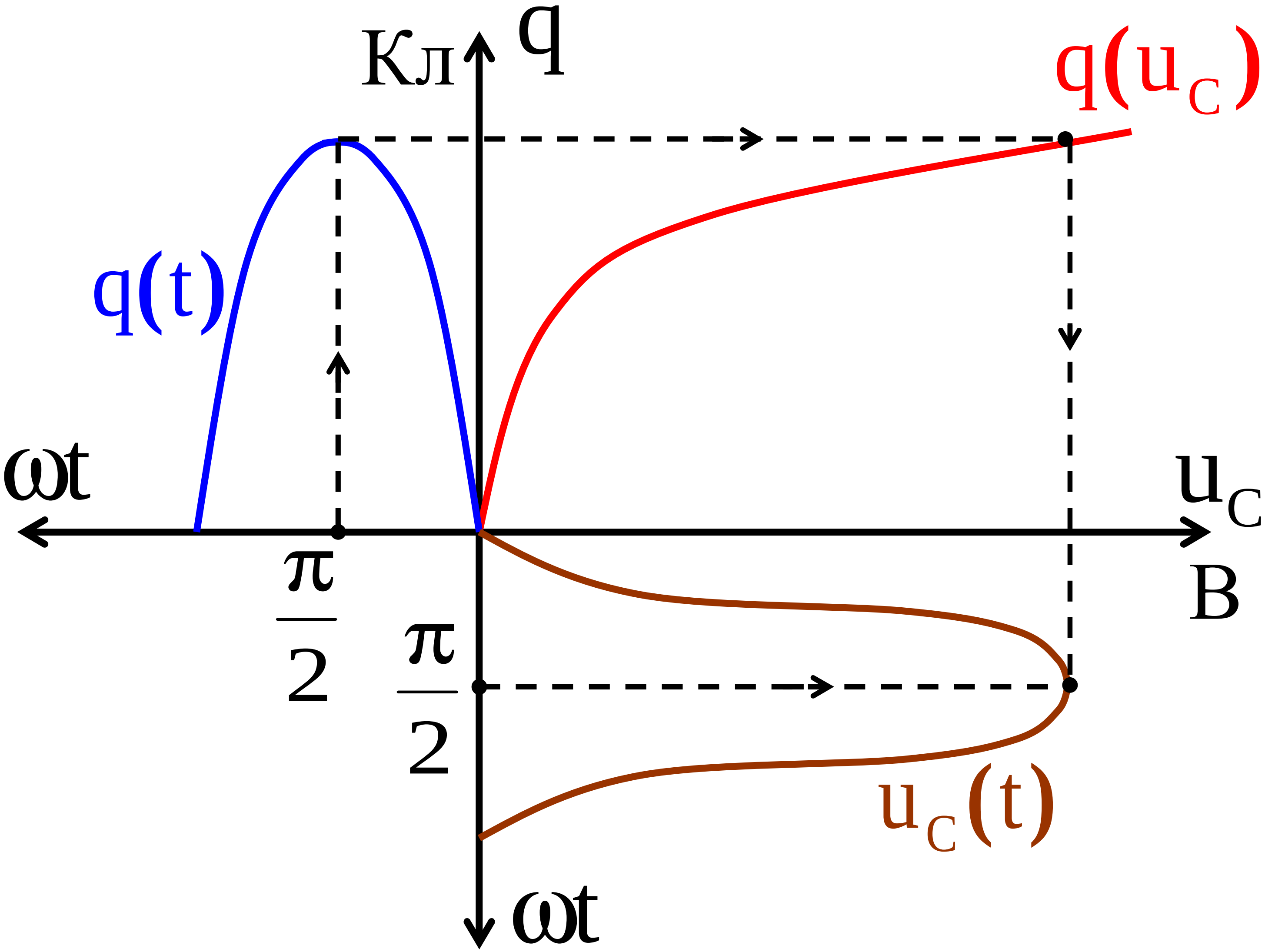
НЕЭ – это безынерционный элемент.

Если $i_C(t) = I_m \mathbf{cos}\,\omega t$,

то

$$q(t) = \int i_C(t)\,dt + \cancelto{0}{A} = \frac{I_m}{\omega}\mathbf{sin}\,\omega t,\ \text{Кл}$$

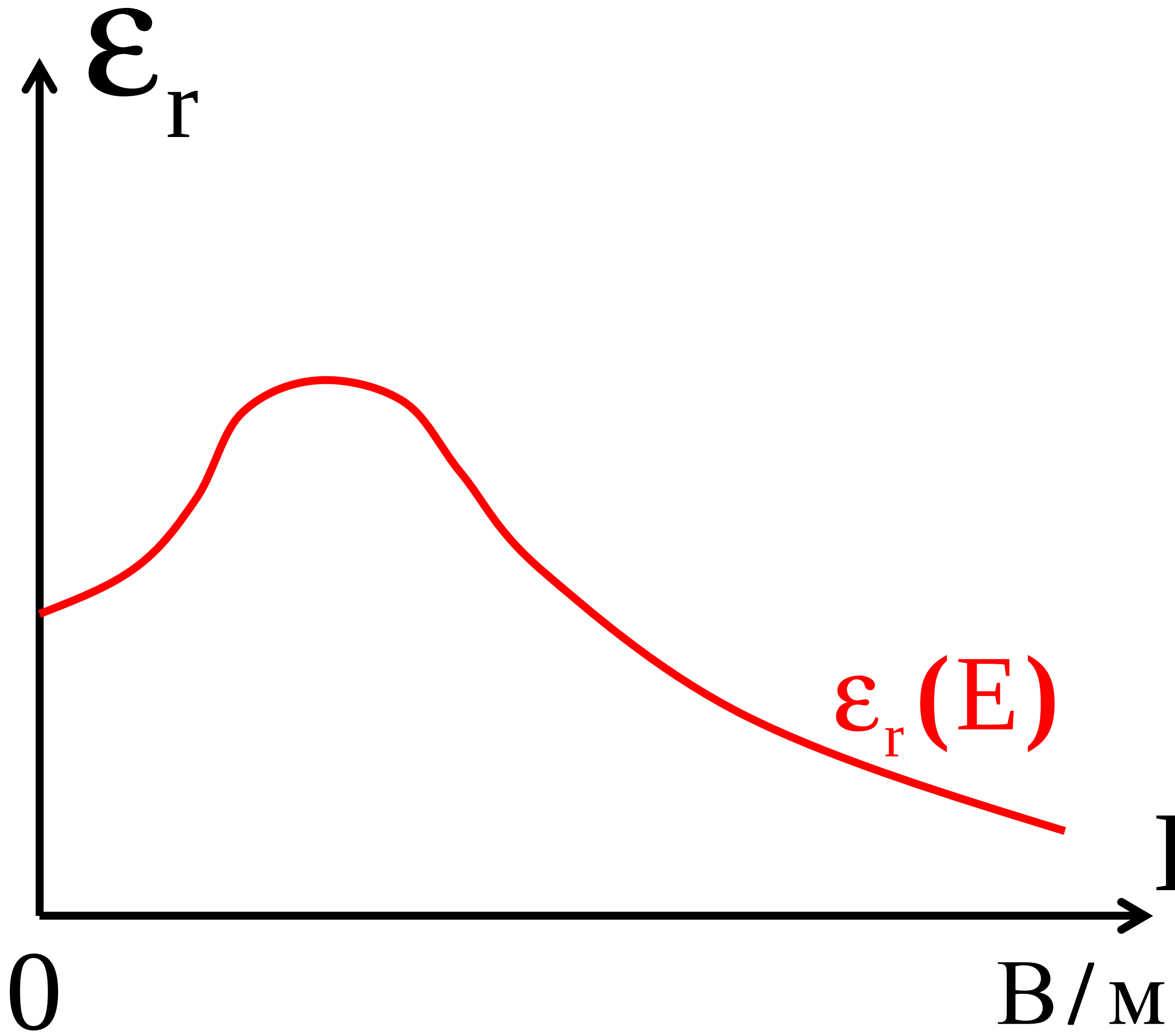
Графически определяем напряжение $u_C(t)$:



При гармоническом токе $i_C(t)$ напряжение $u_C(t)$ содержит нечетные гармоники.

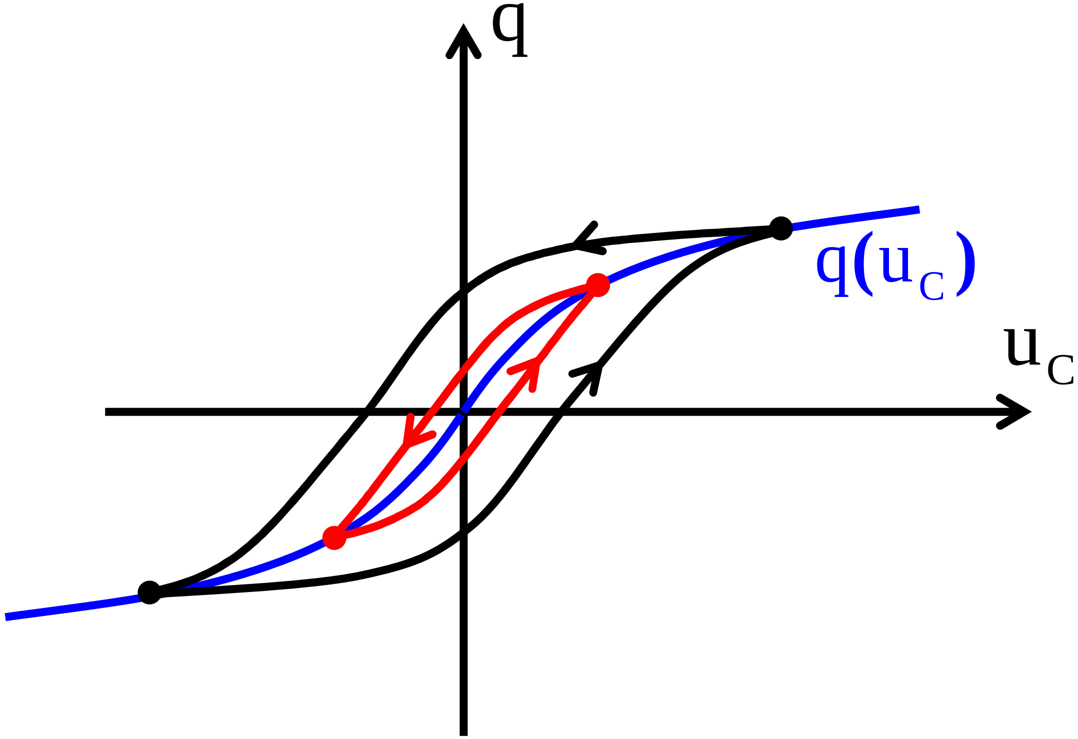
Физически НЕЭ – это вариконды и варикапы

1. **Вариконды** содержат **сегнетодиэлектрики** (титанат бария), у которых относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_r = \varepsilon_a / \varepsilon_0$ нелинейно зависит от напряженности электрического поля **E** ($\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м)

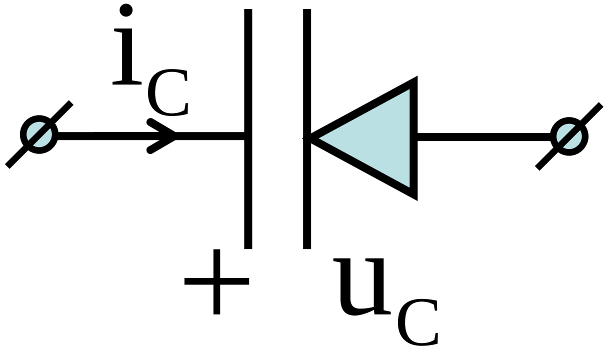


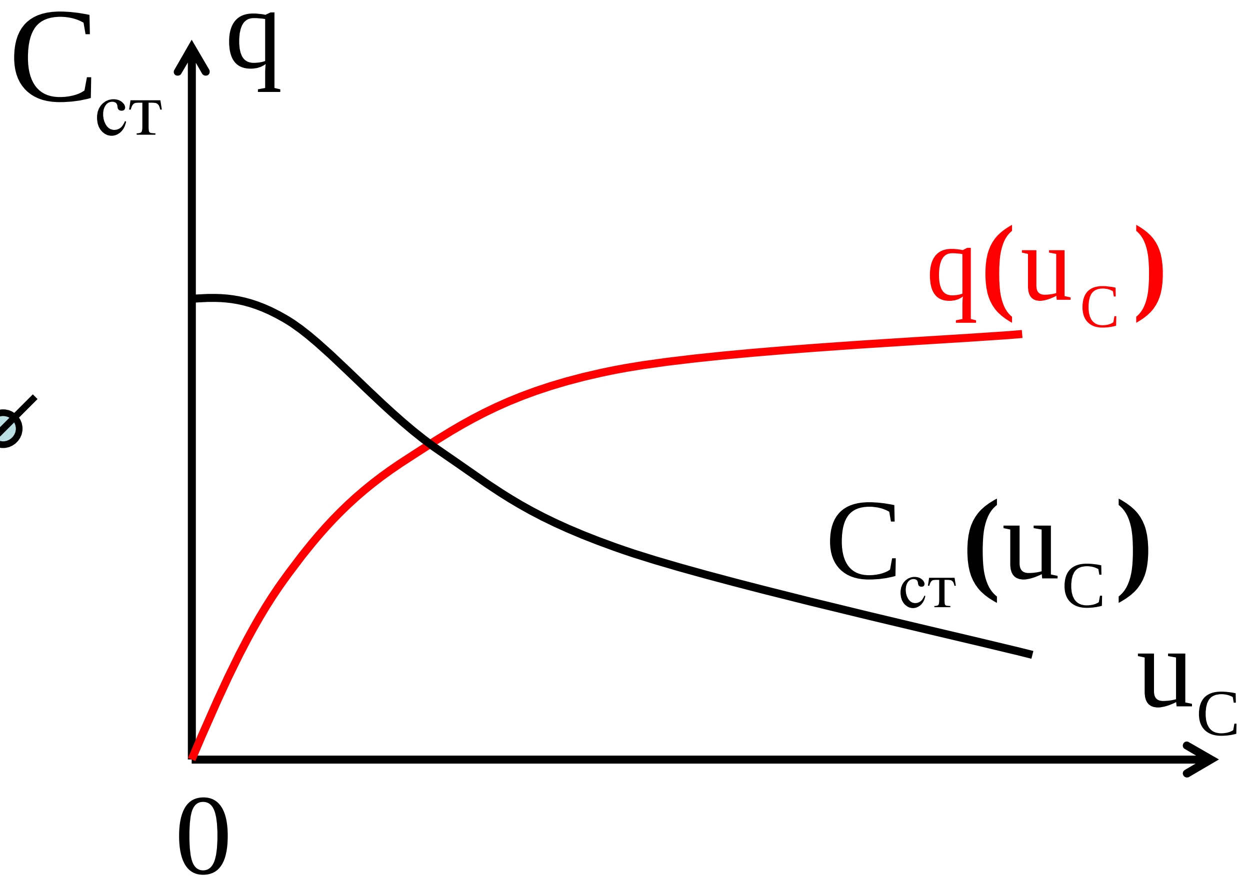
$$E = \frac{u_C}{d}$$

Варіконды при переменном напряжении u_C имеют КВХ $q(u_C)$ в виде соединенных вершин семейства петель гистерезиса:



2. Варикап – это барьерная емкость обратно смещенного $p - n$ перехода специального диода, причем $u_C > 0$





Для расчета цепей с ЛЕЭ и НЕЭ используются графоаналитические методы с применением КВХ $q(u_C)$

- 1. КВХ $q(u_C)$ емкостных элементов складываются между собой согласно законам Кирхгофа: КВХ последовательных НЕЭ складываются вдоль оси u_C, а параллельных НЕЭ – вдоль оси q.

- 2. **КВХ** **$q(u_C)$** **может приближенно заменятся зависимостью:**

$$u_C \approx m_1 q + m_3 q^3 + \dots$$

Тогда при

$$i_C(t) = \sqrt{2}\, I_C \cos(\omega t + \alpha)$$

получаем

$$q(t) = \int i_C(t)dt = \frac{\sqrt{2}\, I_C}{\omega} \sin(\omega t + \alpha),$$

$$u_C \approx m_1 q(t) + m_3 q(t)^3 =$$

$$= \sqrt{2} U_1 \sin(\omega t + \alpha) +$$

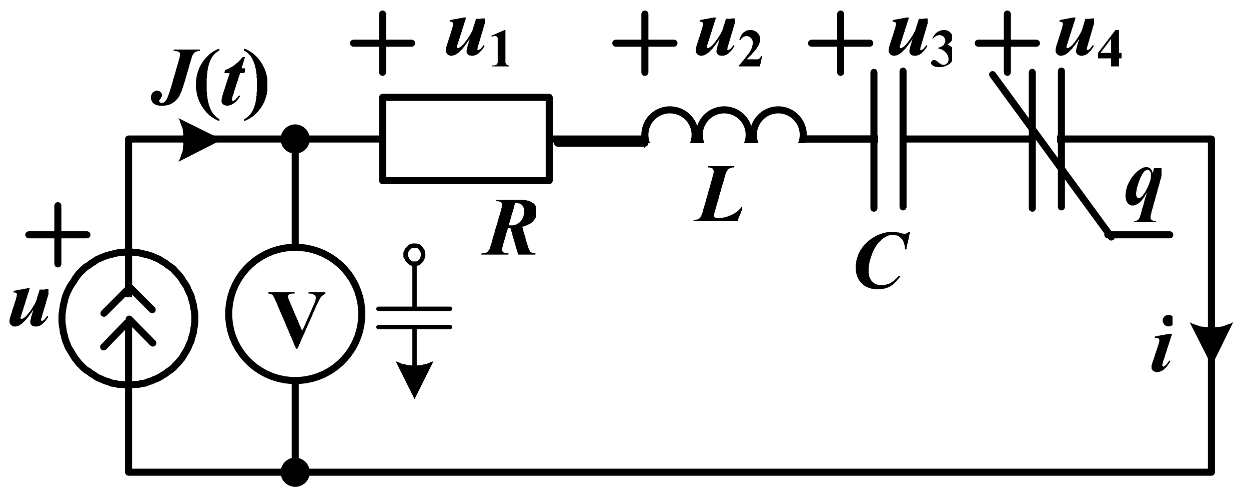
$$+ \sqrt{2} U_3 \sin(3\omega t + 3\alpha), \text{ В}$$

Где:

$$U_1 = \frac{m_1 I_C}{\omega} + \frac{3 m_3 I_C^3}{2\omega^3}; \quad U_3 = -\frac{m_3 I_C^3}{2\omega^3};$$

$$U_C = \sqrt{U_1^2 + U_3^2}; \qquad K_Г = \left| U_3 / U_1 \right|$$

Пример:



Дано: $J(t) = 2\cos 100t$ (А);

***R*=400** (Ом)**;** ***L*=4** (Гн); ***C*=25** (мкФ).

НЭЕ имеет КВХ $u_4 = 10^4 q + 10^8 q^3$ (В).

Определить показание вольтметра $\mathbf{U_V}$ (В).

Примечание:

$$\sin^3 \omega t = 0,75 \sin \omega t - 0,25 \sin 3\omega t.$$

Решение:

$$J(t)=i=\frac{dq}{dt}=\frac{u_1}{R}=\frac{1}{L}\int_0^t u_2 dt=C\frac{du_3}{dt}$$

$$u_1=Ri=800\cos 100t,\ \text{В}$$

$$u_2=L\frac{di}{dt}=-800\sin 100t,\ \text{В}$$

$$u_3=\frac{1}{C}\int_0^t i dt=800\sin 100t,\ \text{В}$$

$$q = \int_0^t i dt = 0,02\sin 100t, \quad \text{Кл}$$

$$u_4 = 10^4 q + 10^8 q^3 =$$

$$= 200\sin 100t + 800\sin^3 100t =$$

$$= 800\sin 100t - 200\sin 300t, \text{ В}$$

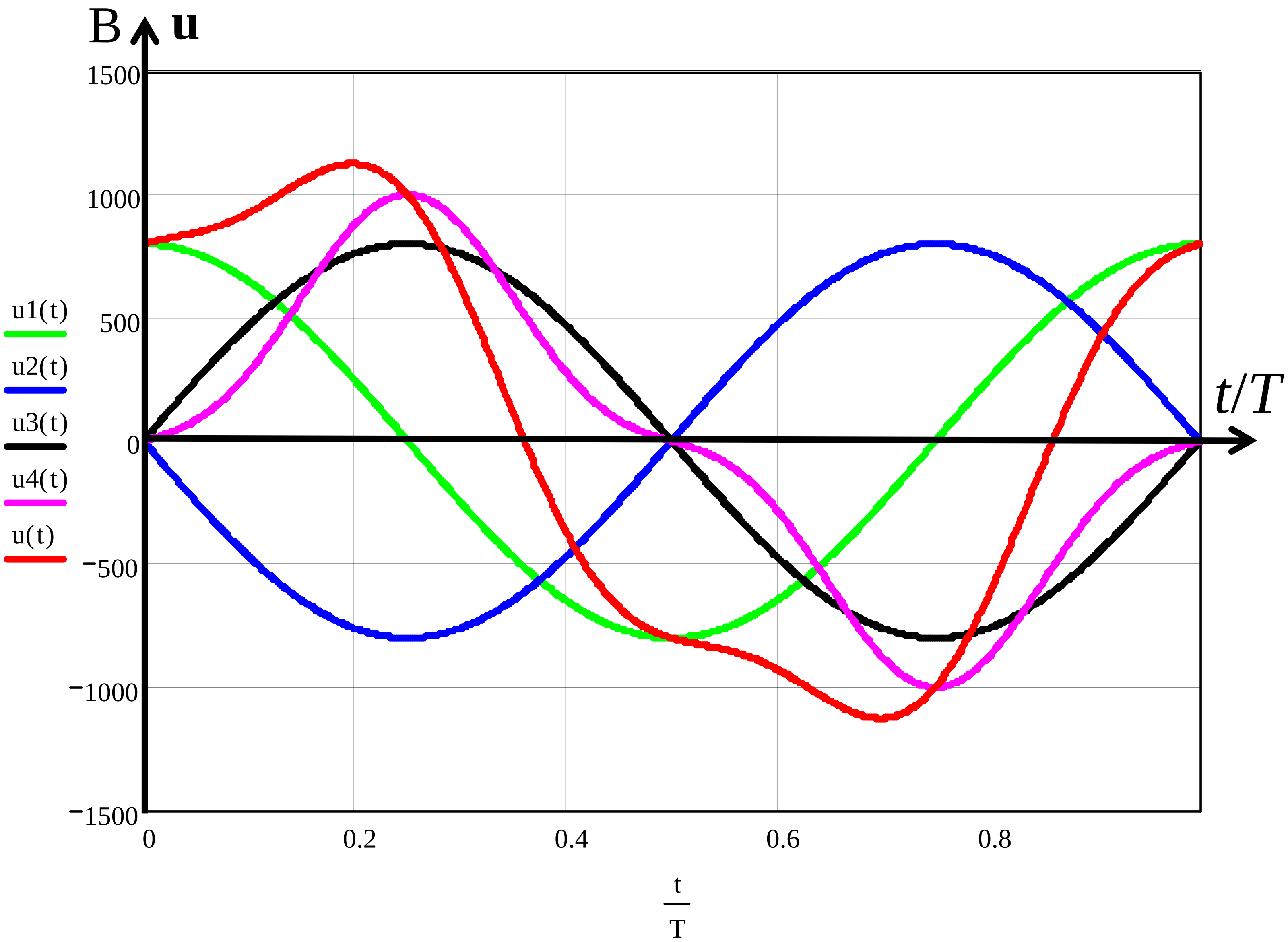
$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 =$$

$$= 800\sin 100t + 800\cos 100t - 200\sin 300t =$$

$$= 800\sqrt{2}\sin(100t + \pi/4) + 200\sin(300t + \pi), \text{ В}$$

Показание вольтметра ЭС системы (действующее значение):

$$U_{\text{V}} = \sqrt{\frac{\left(800\sqrt{2}\right)^2}{2} + \frac{200^2}{2}} \approx 812,4\,(\text{В})$$


B
u
1500
1000
500
0
−500
−1000
−1500
u1(t)
u2(t)
u3(t)
u4(t)
u(t)
t/T
0
0.2
0.4
0.6
0.8
t
T

Метод эквивалентных синусоид

Применяется для приближенного расчета установившегося режима в нелинейных цепях с переменными напряжениями и токами, которые содержат нелинейные элементы и периодические источники с одинаковым периодом T

При этом несинусоидальные напряжения и токи, не содержащие постоянных составляющих (U_0=0; I_0=0):

$$u(t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sqrt{2} U_\kappa \sin(\kappa\omega t + \beta_\kappa + \varphi_\kappa)$$

$$i(t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sqrt{2} I_\kappa \sin(\kappa\omega t + \beta_\kappa)$$

заменяются эквивалентными синусоидами:

$$u(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \beta + \varphi)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta)$$

Где:

$$U = \sqrt{\sum_{к=1}^{\infty} U_к^2} \qquad I = \sqrt{\sum_{к=1}^{\infty} I_к^2} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

активная мощность

$$P = \sum_{к=1}^{\infty} U_к I_к \cos\varphi_к$$

реактивная мощность

$$Q = \sum_{к=1}^{\infty} U_к I_к \sin\varphi_к$$

Активная потребляемая мощность

$$P = UI\cos\varphi, \quad Вт$$

должна остаться **неизменной**.

Поэтому по реактивной мощности **Q**:

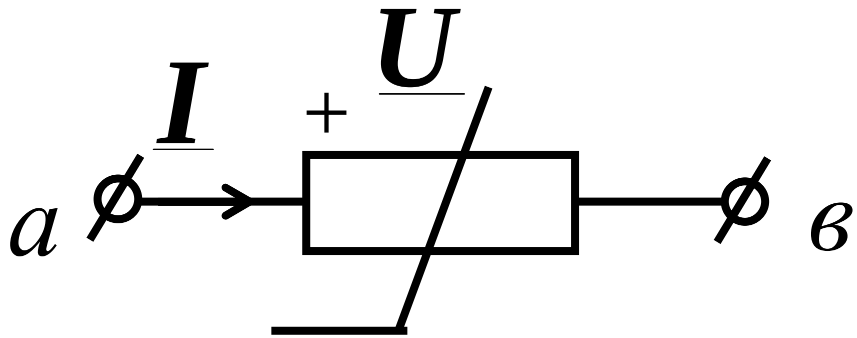
а) если **Q<0** $\qquad \varphi = -\arccos\dfrac{P}{UI}$

б) если **Q>0** $\qquad \varphi = \arccos\dfrac{P}{UI}$

Сущность метода

Несинусоидальные периодические напряжения ***u*(*t*)** и токи ***i*(*t*)** заменяются эквивалентными синусоидами с теми же действующими значениями ***U*** и ***I***, с угловой частотой первой гармоники ***ω*** и таким углом сдвига фаз ***φ***, чтобы активная мощность ***P*** осталась неизменной

Нелинейные элементы задаются вольтамперными ВАХ $\boldsymbol{U(I)}$ и фазоамперными ФАХ $\varphi(\boldsymbol{I})$ характеристиками для действующих значений. Далее применяется символический метод:



Где:

а) комплекс действующего значения напряжения

$$\underline{U} = U(I)e^{j[\beta+\varphi(I)]}$$

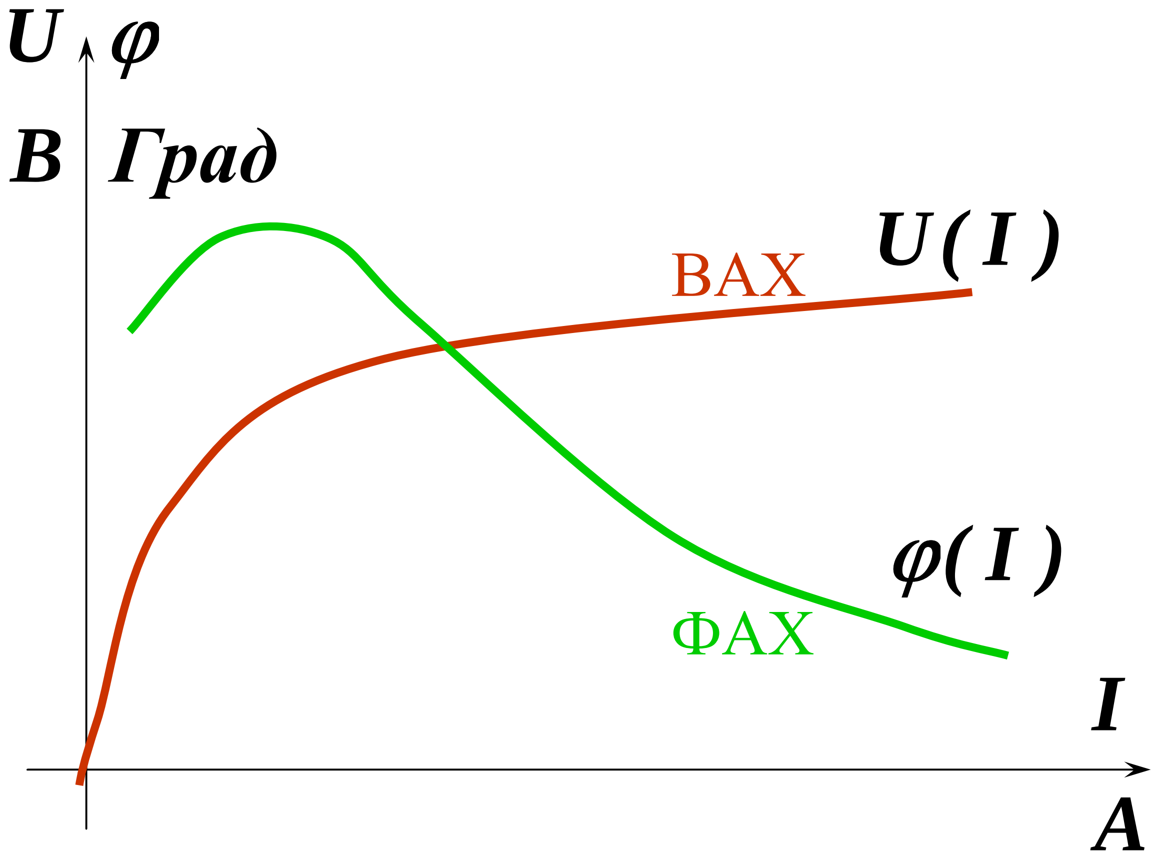
б) комплекс действующего значения тока

$$\underline{I} = Ie^{j\beta}$$

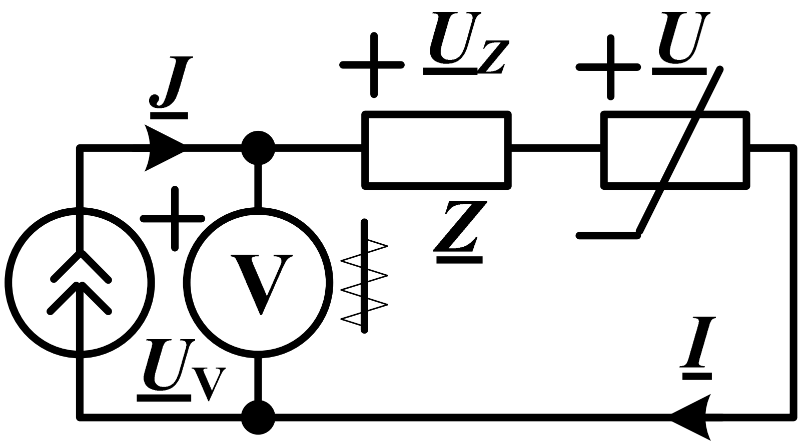
в) потребляемая активная мощность

$$P(I) = U(I) \cdot I \cdot \cos\left[\varphi(I)\right]$$

ВАХ $U(I)$ и ФАХ $\varphi(I)$ нелинейных элементов получают экспериментально или расчетом:



Пример 1:



Дано: $\underline{J} = 2e^{-j90^\circ}$ (А);

$\underline{Z} = 50e^{-j45^\circ}$ (Ом).

НЭ имеет

ВАХ $U(I)=50I^2$ (В)

и ФАХ $\varphi(I)=$
$-45^\circ+45^\circ \cdot I$,

где ток I в амперах.

Определить показание вольтметра $\boldsymbol{U}_{\mathbf{V}}$ (В).

Решение:

$$\underline{I} = Ie^{j\beta} = \underline{J} = 2e^{-j90^\circ}\ (\text{A})$$

$$I = 2\,(\text{A});\ \beta = -90^\circ;\ U = 50I^2 = 200\,(\text{В});$$

$$\varphi = -45^\circ + 45^\circ \cdot I = 45^\circ.$$

$$\underline{U} = Ue^{j(\beta+\varphi)} = 200e^{-j45^\circ}\ (\text{В});$$

$$\underline{U}_Z = \underline{Z} \cdot \underline{I} = 100e^{-j135^\circ}\ (\text{В}).$$

По второму закону Кирхгофа:

$$\underline{U}_{\mathrm{V}} = \underline{U}_Z + \underline{U} = 100e^{-j135^\circ} + 200e^{-j45^\circ} =$$

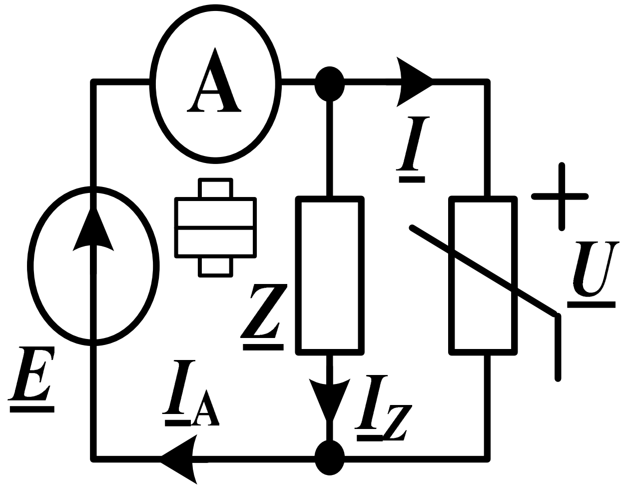
$$= (-70{,}7 - j70{,}7) + (141{,}4 - j141{,}4) =$$

$$= 70{,}7 - j212{,}1 = 223{,}573e^{-j71{,}6^\circ}\ (\text{В}).$$

Показание вольтметра (действующее значение):

$$U_{\mathrm{V}} = 223{,}573\,(\text{В}).$$

Пример 2:



Дано: $\underline{E} = 100e^{j45^\circ}$ (В);

$\underline{Z} = 100e^{j45^\circ}$ (Ом).

НЭ имеет

ВАХ $U(I) = 100I^2$ (В) и

ФАХ $\varphi(I) = -90^\circ + 45^\circ \cdot I$,

где ток I в амперах.

Определить показание амперметра I_A (А).

Решение:

$$\underline{U} = Ue^{j\alpha} = \underline{E} = 100e^{j45^\circ}\ (\text{В})$$

$$U = 100\,(\text{В});\ \alpha = 45^\circ;\ I = \sqrt{U/100} = 1\,(\text{А});$$

$$\varphi = -90^\circ + 45^\circ \cdot I = -45^\circ.$$

$$\underline{I} = Ie^{j(\alpha-\varphi)} = 1e^{j90^\circ}\ (\text{А});$$

$$\underline{I}_Z = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = 1e^{j0^\circ}\ (\text{А}).$$

По второму закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_{\text{A}} = \underline{I}_Z + \underline{I} = 1e^{j0^\circ} + 1e^{j90^\circ} =$$

$$= 1 + j1 = 1,41e^{j45^\circ}\ (\text{A}).$$

Показание амперметра (действующее значение):

$$I_{\text{A}} = 1,41(\text{A}).$$