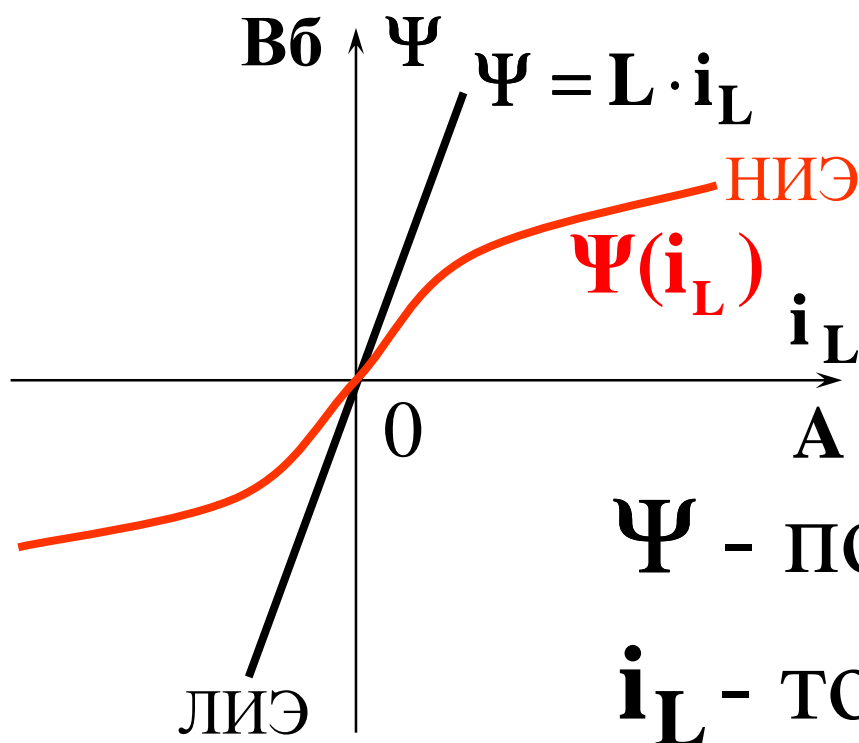


7 лекция

Нелинейные индуктивные элементы (НИЭ)

НИЭ запасают **энергию** в **магнитном поле** и задаются **нелинейной веберамперной** характеристикой **(ВбАХ) $\Psi(i_L)$**

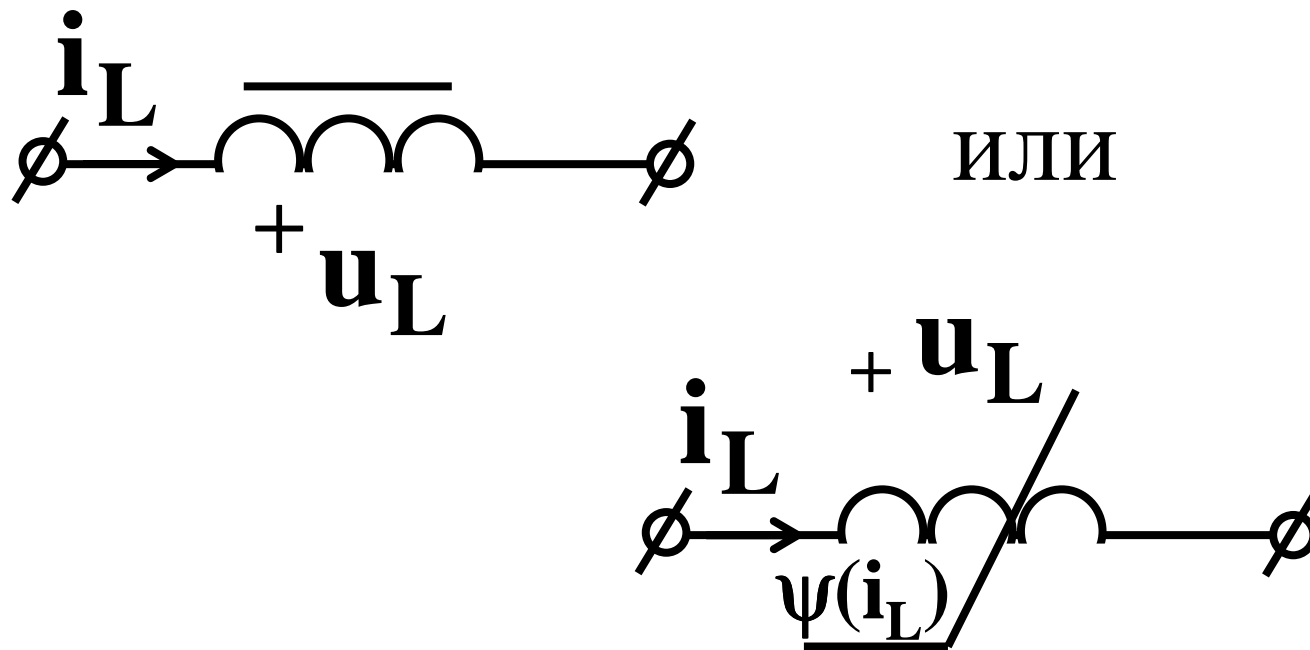


ЛИЭ – линейный индуктивный элемент с $L = \text{const}$

Ψ - потокосцепление, Вб

i_L - ток НИЭ, А

НИЭ обозначаются:



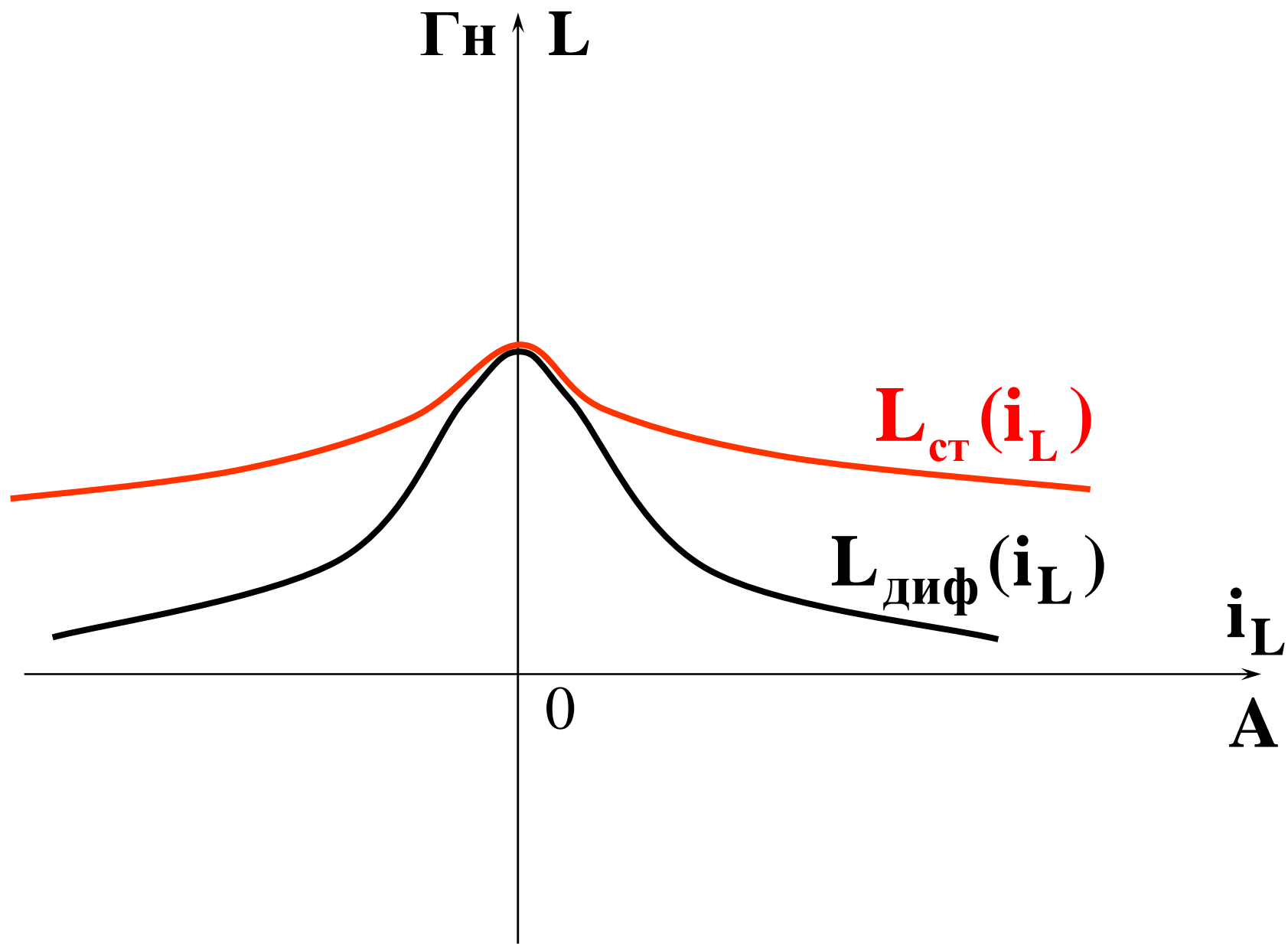
НИЭ характеризуются

а) статической индуктивностью

$$L_{\text{ст}}(i_L) = \Psi / i_L, \quad \Gamma_H$$

б) дифференциальной индуктивностью

$$L_{\text{диф}}(i_L) = d\Psi / di_L, \quad \Gamma_H$$



Для **линейного** индуктивного
элемента (ЛИЭ)

$$L = L_{\text{ст}} = L_{\text{диф}} = \text{const}$$

Напряжение НИЭ:

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi}{di_L} \cdot \frac{di_L}{dt} = L_{\text{диф}}(i_L) \frac{di_L}{dt}, \text{ В}$$

Веберамперная
характеристика (**ВБАХ**) **НИЭ**
может рассчитываться так:

$$i_L \approx K_1 \Psi + K_3 \Psi^3 + K_5 \Psi^5 + \dots$$

где $K_1, K_3, K_5 \dots$ - **ПОСТОЯННЫЕ**
коэффициенты

Энергия магнитного поля НИЭ

В МОМЕНТ $t = t_0$

$$W_M(t_0) = \int_0^{t_0} u_L i_L dt = \int_0^{t_0} \frac{d\Psi}{dt} \cdot i_L dt =$$
$$= \int_0^{\Psi_0} i_L d\Psi = \frac{\kappa_1 \Psi_0^2}{2} + \frac{\kappa_3 \Psi_0^4}{4} + \frac{\kappa_5 \Psi_0^6}{6} + \dots, \text{ Дж}$$

Где:

Ψ_0 - значение потокосцепления в
момент $t = t_0$

$\Psi(0) = 0$ - значение при $t = 0$

НИЭ – это **безынерционный** элемент, т.е.


формы кривых

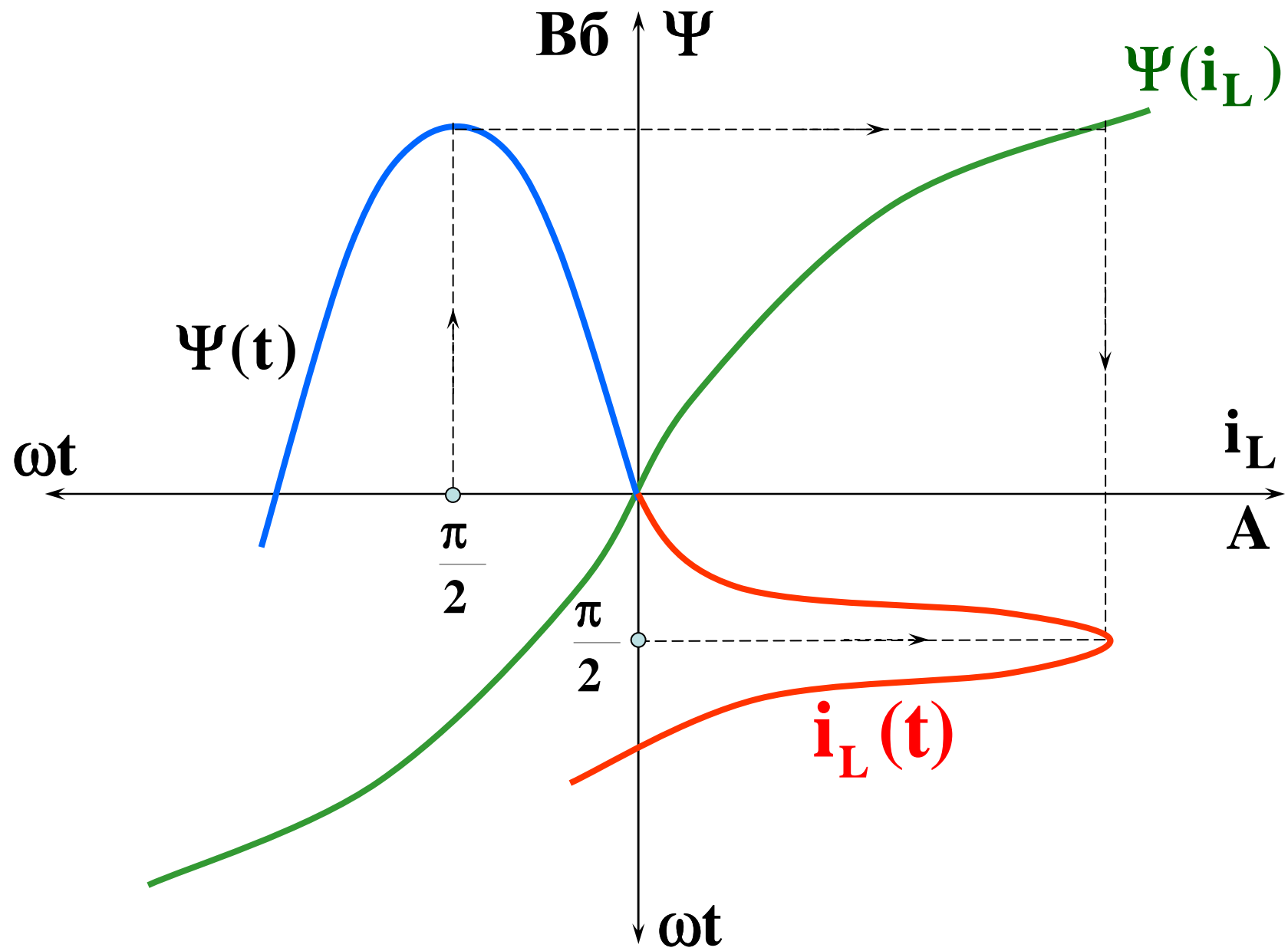
$i_L(t)$ и $u_L(t)$ различны

Если

$$u_L(t) = U_m \cos \omega t,$$

то

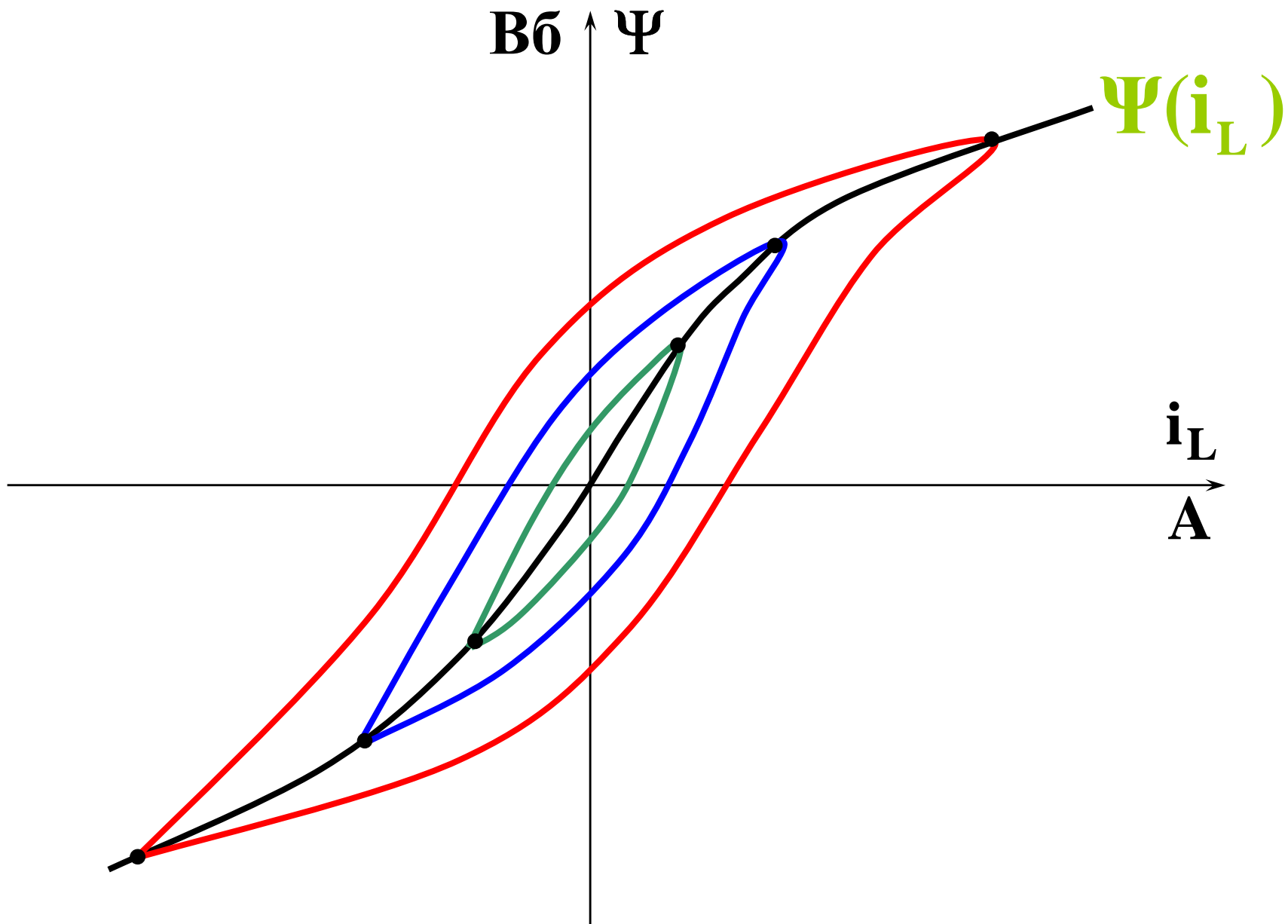
$$\Psi(t) = \int u_L dt + A = \frac{U_m}{\omega} \sin \omega t, \quad \text{Вб}$$




Ток $i_L(t)$ содержит
нечетные гармоники $k = 1, 3, 5 \dots$

Физически **НИЭ** - это катушка с
ферромагнитным магнитопроводом.

ВБАХ $\Psi(i_L)$ - это соединенные
между собой вершины петель
гистерезиса



Законы Кирхгофа для магнитных цепей НИЭ

Магнитопроводы НИЭ образуют магнитные цепи, которые предназначены для **концентрации** и **усиления** магнитных потоков Φ .

Законы **Кирхгофа** используются для расчета магнитных цепей и для определения магнитных потоков Φ и **ВБАХ** $\Psi (i_L)$ **НИЭ**

Магнитные цепи характеризуются:

-средней длиной участка l (м)

-площадью сечения участка S (м²)

-величиной воздушного зазора δ (м)

-магнитной индукцией B (Тл)

-магнитной напряженностью H (А/м)

-магнитным потоком $\Phi = BS$ (Вб)

-числом витков катушки w (в)

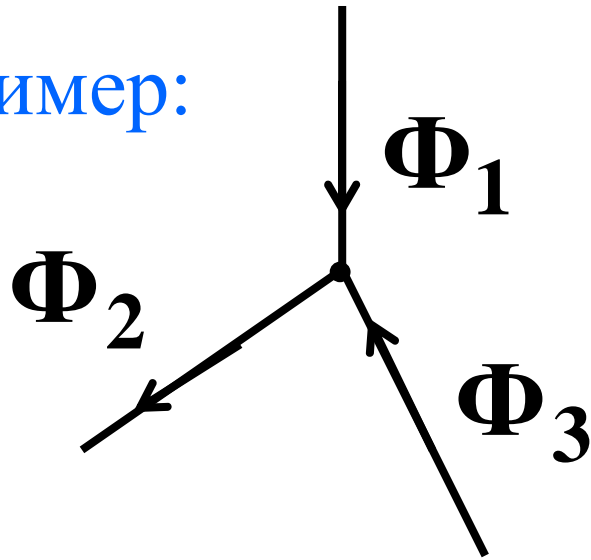
-намагничивающей силой iw (А-в)

1. Первый закон Кирхгофа

$$\sum \pm \Phi_k = 0$$

Для любого **узла** магнитной цепи алгебраическая **сумма** магнитных потоков равна **нулю**, причем магнитные потоки выходящие из узла берутся со знаком **плюс** (“+”), а входящие в узел – со знаком **минус** (“-”)

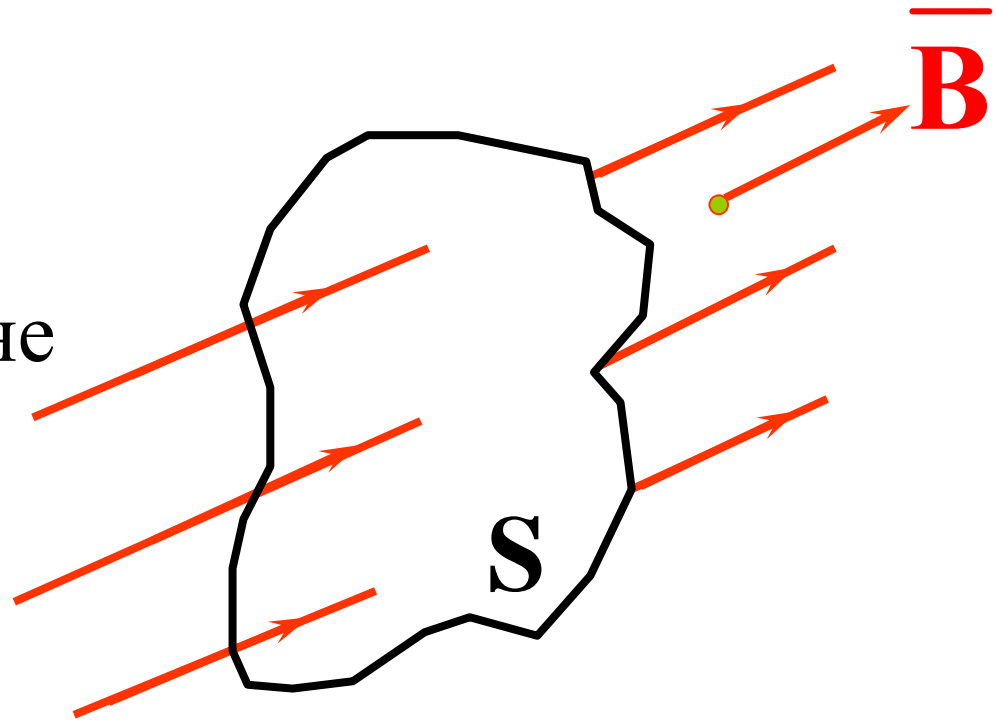
Например:



$$-\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0$$

Физически первый закон **Кирхгофа** основывается на законе **непрерывности** магнитного потока:

$$\oint_S \overline{\mathbf{B}} \, d\overline{\mathbf{S}} = 0$$



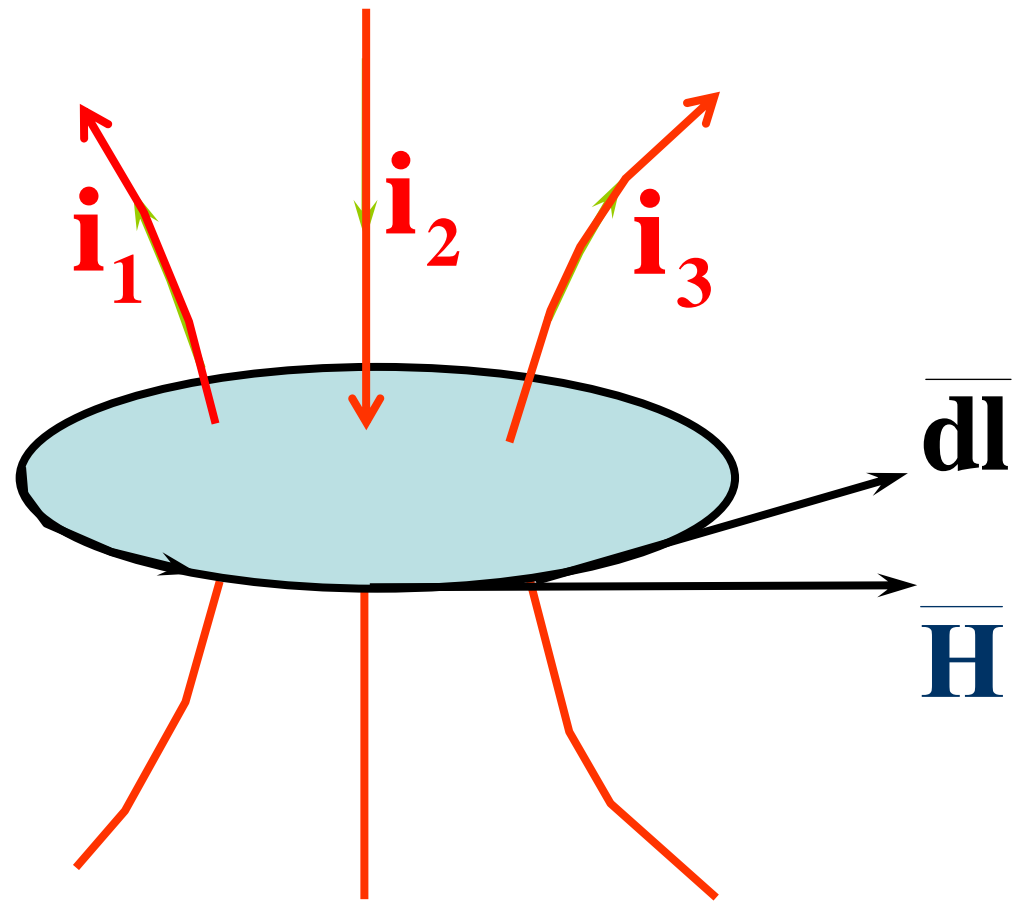
2. Второй закон Кирхгофа

$$\sum \pm i_q w_q = \sum \pm U_{Mk}$$

Для любого **контура** магнитной цепи алгебраическая сумма намагничивающих сил равна алгебраической сумме **магнитных напряжений**, причем со знаком **плюс (+)** записываются те слагаемые, **положительные** направления которых совпадают с направлением **обхода** контура

$$\oint_l \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{d\mathbf{l}} = \sum \pm \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$$

Физически второй закон **Кирхгофа** основывается на законе **полного тока**, причем **знаки** у токов определяются направлением обхода контура l согласно правилу «**буравчика**»



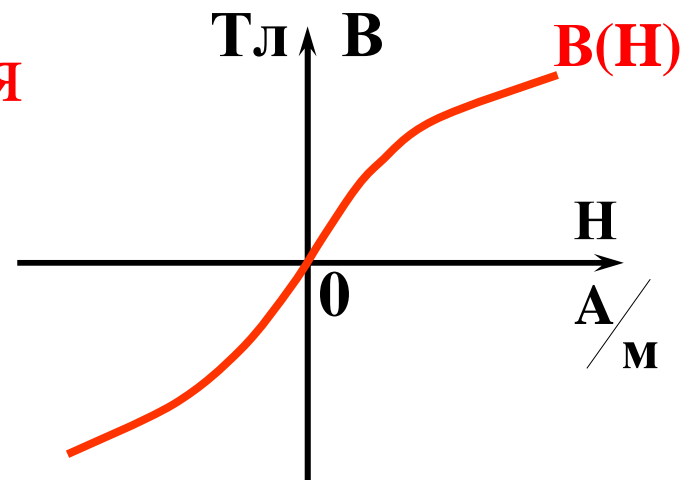
А) В магнитных цепях индукция \bar{B} :

а) $\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$ - для воздуха, где

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ - магнитная постоянная;

б) $\bar{B} = \mu(H) \cdot \bar{H}$ - для магнитопровода, где
 $\mu(H)$ - магнитная проницаемость (Гн/м)

Кривая намагничивания
ферромагнитного
материала
магнитопровода:

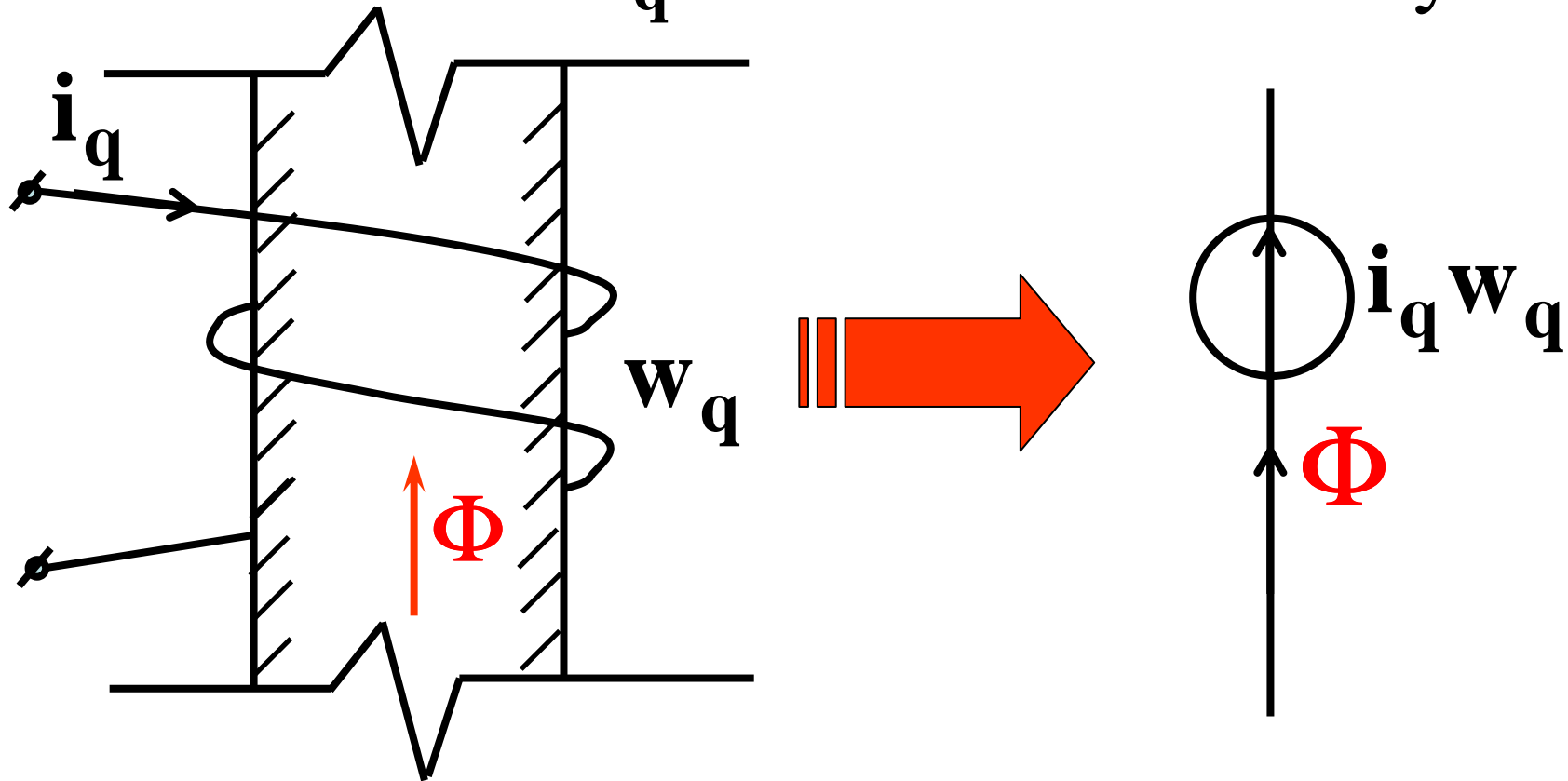


Б) Намагничивающая сила:

$$\dot{i}_q W_q \quad (\text{А-В})$$

\dot{i}_q - ТОК (А)

W_q - ЧИСЛО ВИТКОВ КАТУШКИ

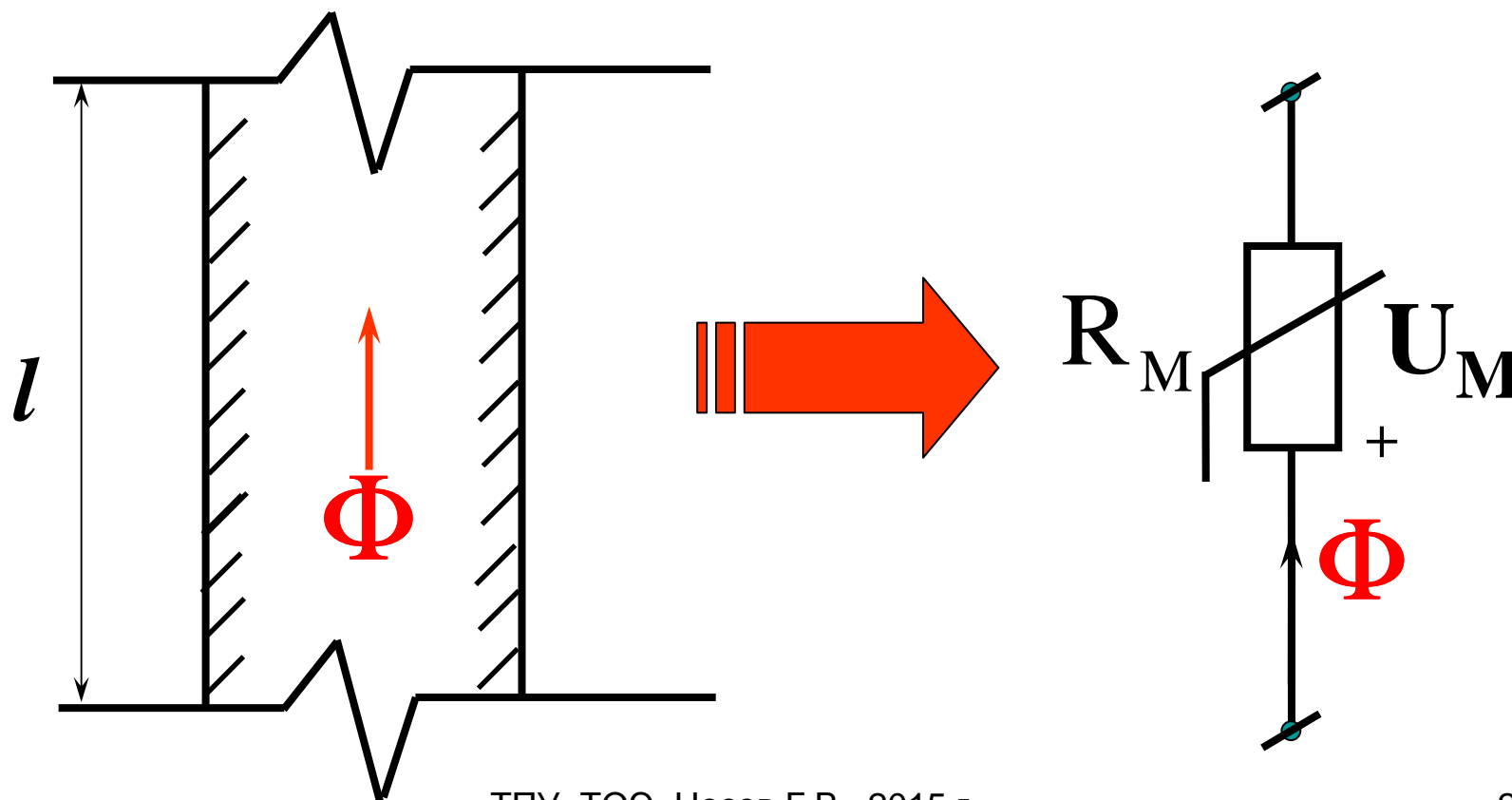


В) Нелинейное магнитное сопротивление участка магнитопровода:

$$R_M = \frac{l}{\mu(H) \cdot S} = \frac{H \cdot l}{B \cdot S}, \quad 1/\Gamma_H$$

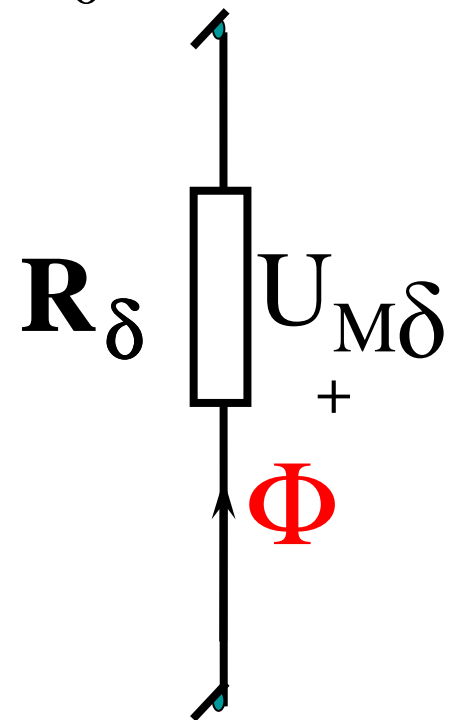
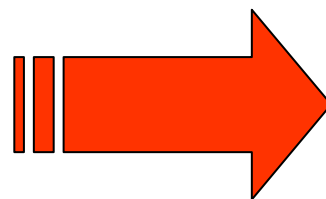
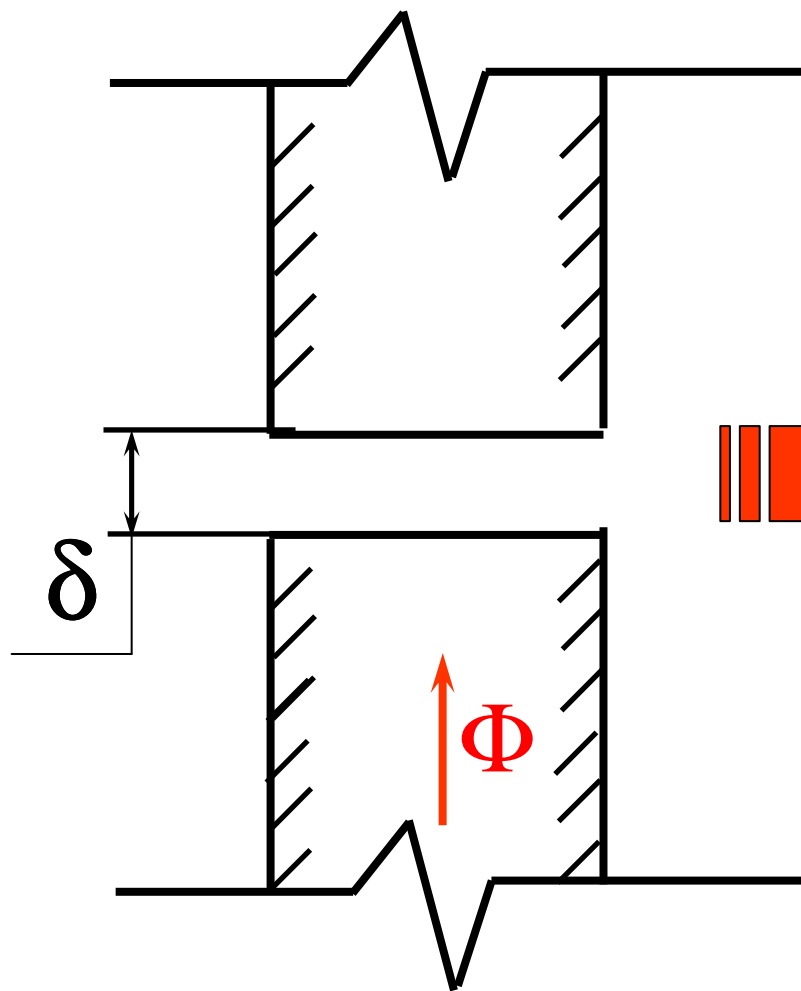
Магнитное напряжение:

$$U_M = R_M \cdot \Phi = H \cdot l, \quad \text{А}$$



Г) Линейное магнитное сопротивление воздушного зазора:

$$R_{\delta} = \frac{\delta}{\mu_0 S}, \quad \mathbf{1/\Gamma H}$$



Магнитное напряжение:

$$U_{M\delta} = R_{\delta} \Phi = \mathbf{B \cdot \delta / \mu_0}, \quad \mathbf{A}$$

Второй закон Кирхгофа

для магнитных цепей:

$$\sum \pm \mathbf{i}_q \mathbf{w}_q = \sum \pm (\mathbf{R}_{Mk} \Phi_k) + \sum \pm (\mathbf{R}_{\delta k} \Phi_k)$$

Аналогия между электрическими и магнитными цепями:

$$\mathbf{i} \rightarrow \Phi$$

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{U}_M$$

$$\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{i} \mathbf{w}$$

Расчет неразветвленной магнитной цепи

Неразветвленная
магнитная цепь
содержит **один**
магнитный поток Φ :

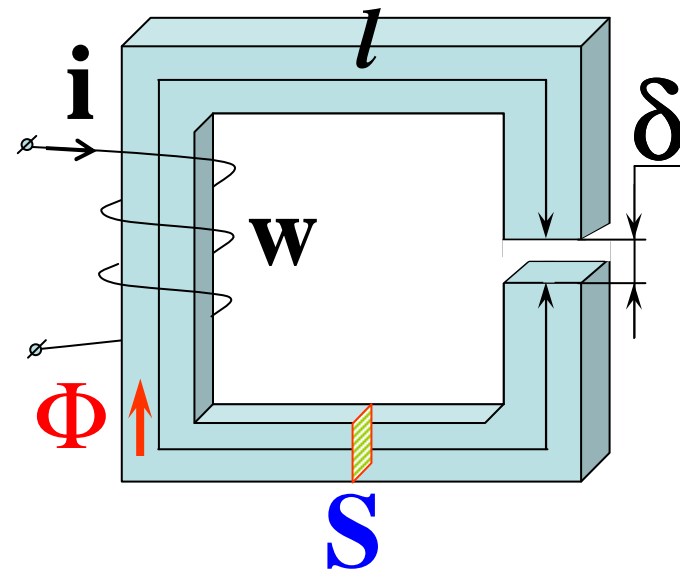
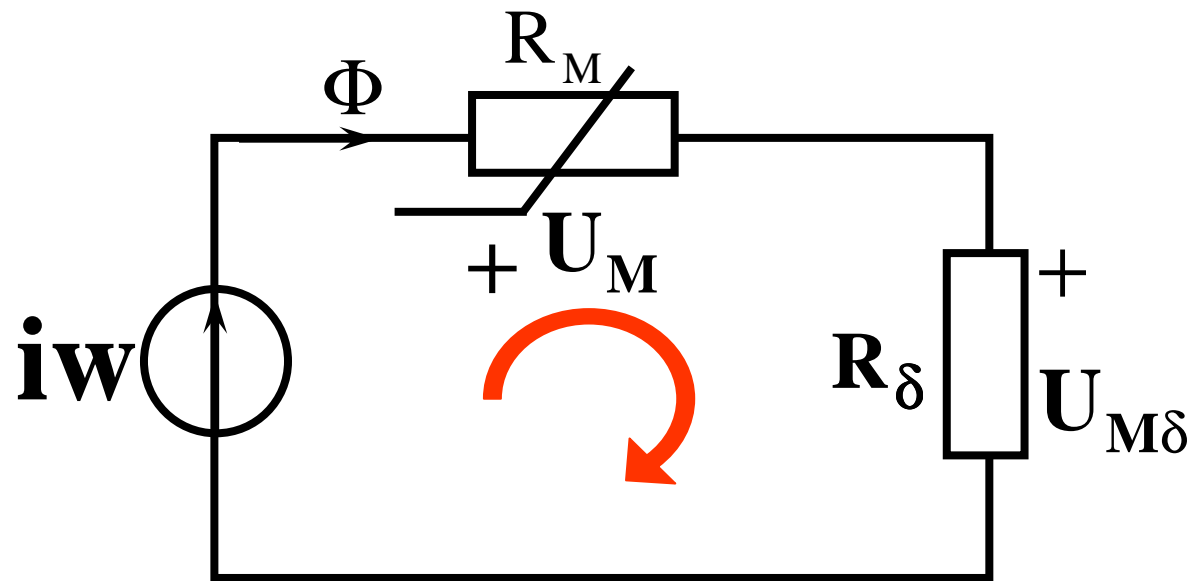


Схема **замещения** магнитной цепи:



По **2** закону **Кирхгофа**:

$$i_w = R_M \Phi + R_\delta \Phi = H \cdot l + \frac{B \cdot \delta}{\mu_0}, \text{ A}$$

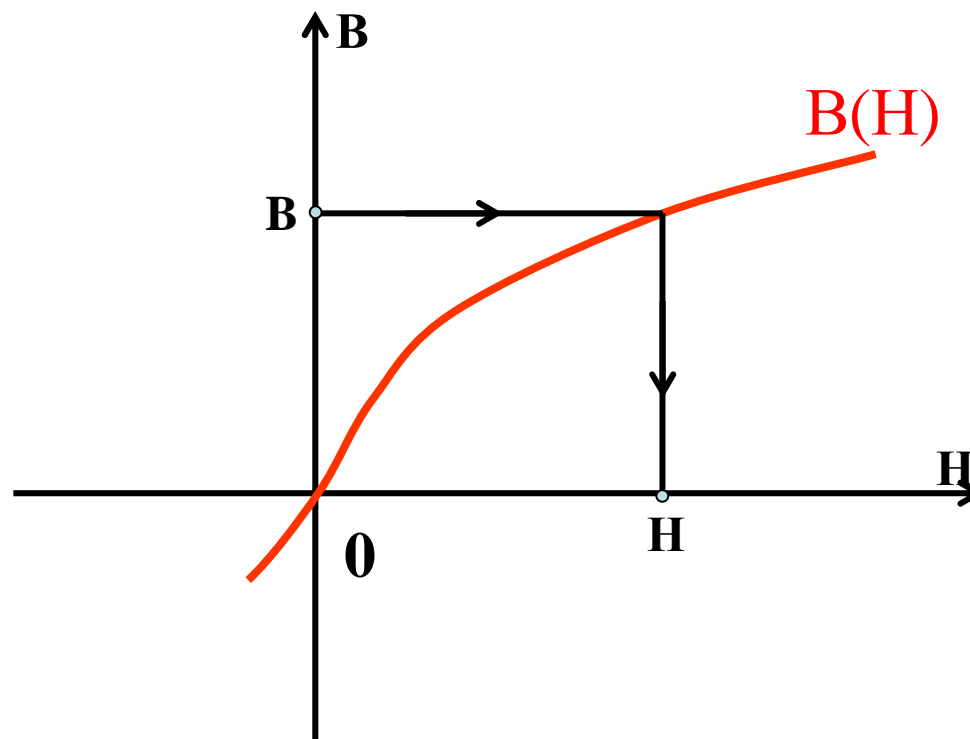
где $\Phi = B \cdot S$, Вб

1. Прямая задача:

известен магнитный поток Φ ,

тогда $B = \Phi / S$ и по $B(H)$

находим H :



В результате:

а) ТОК

$$i = \frac{H \cdot l + B \cdot \delta}{w \mu_0}, \text{ А}$$

б) ПОТОКОСЦЕПЛЕНИЕ

$$\Psi = w \cdot \Phi, \text{ Вб}$$

в) СТАТИЧЕСКАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ

$$L_{\text{СТ}} = \frac{\Psi}{i}, \text{ Гн}$$

г) энергия магнитного поля
в воздушном зазоре

$$W_{\delta} \approx \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot S \cdot \delta, \quad \text{Дж}$$

д) сила, стягивающая зазор

$$F = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot S, \quad \text{Н}$$

2. Обратная задача:

известен ток \dot{i} , тогда из уравнения

$$\dot{i}w = H \cdot l + \frac{B \cdot \delta}{\mu_0}$$

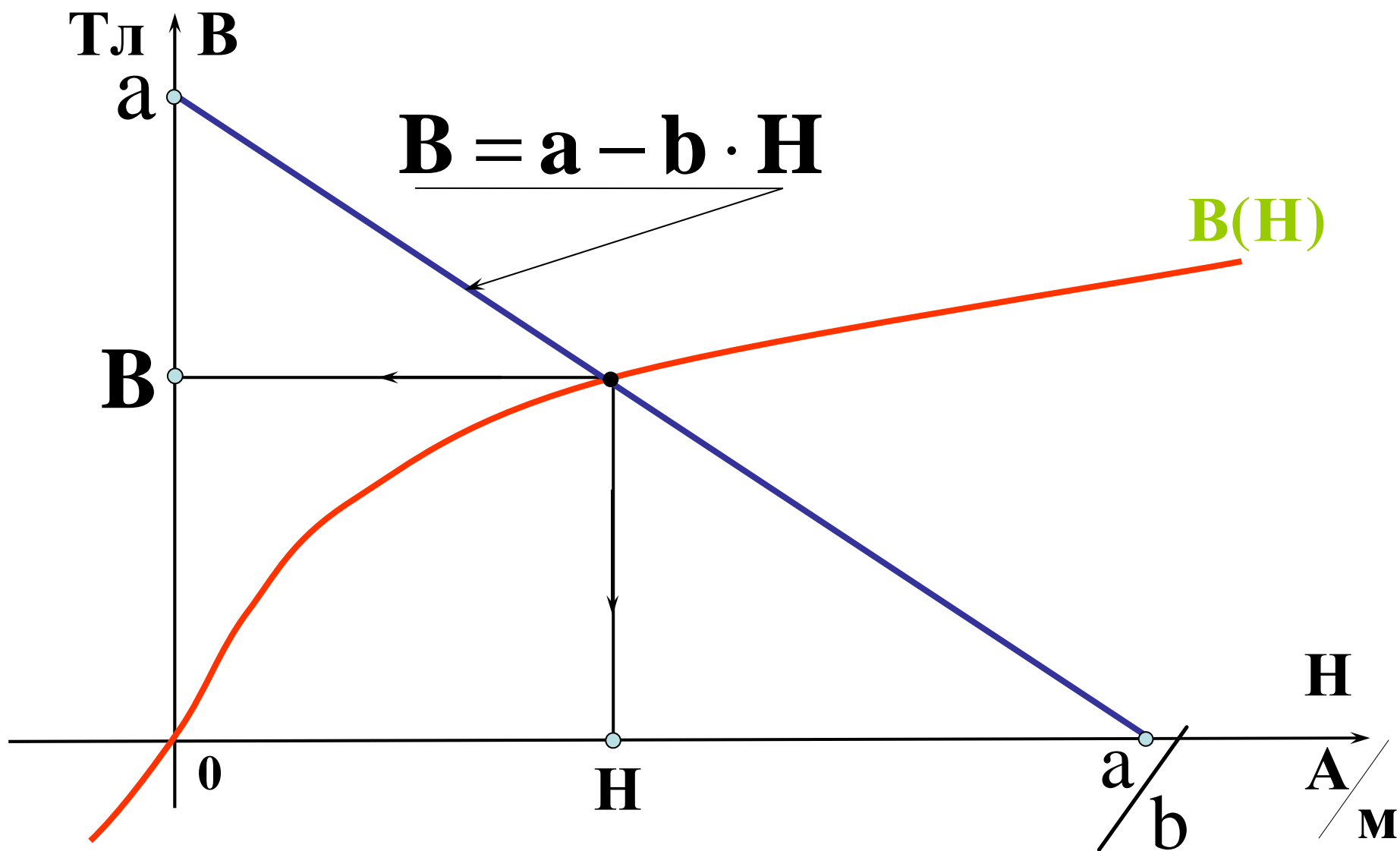
получаем уравнение **прямой** линии

$$B = a - b \cdot H$$

где

$$a = \frac{\mu_0 \dot{i}w}{\delta}, \text{ Тл} \quad b = \frac{\mu_0 \cdot l}{\delta}, \text{ Гн/м}$$

Графически определяем **В** и **Н**:



Для **постоянного магнита** имеем **$i\omega=0$** ,
тогда уравнение **прямой**:

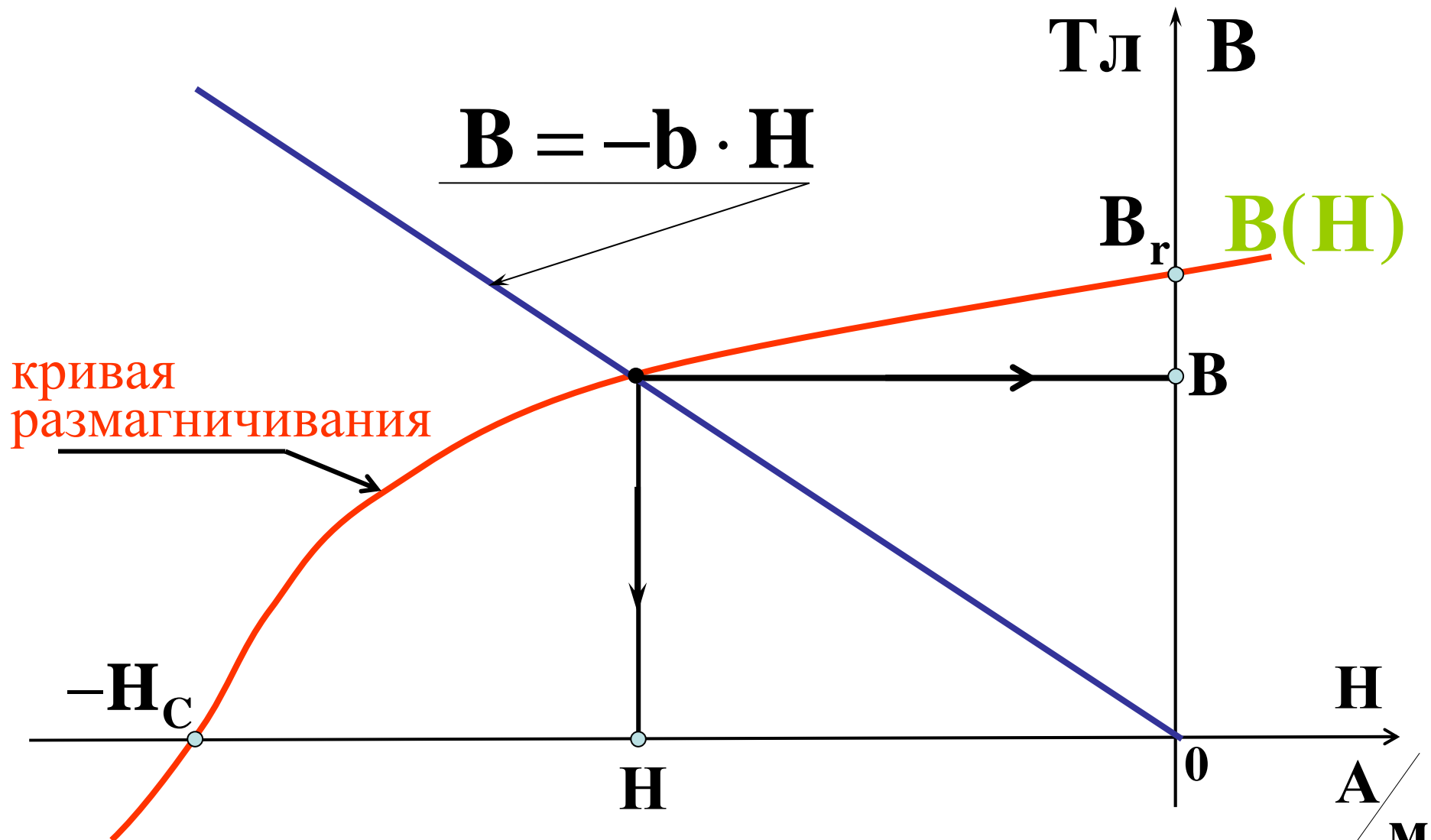
$$\mathbf{B} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{H}$$

где

$$\mathbf{a} = 0,$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mu_0 \cdot l}{\delta}, \quad \text{Гн/м}$$

Графическое решение для постоянного магнита:



Пример:

Дано: $I=5$ (А);

$w_1=1000$ (ВИТКОВ);

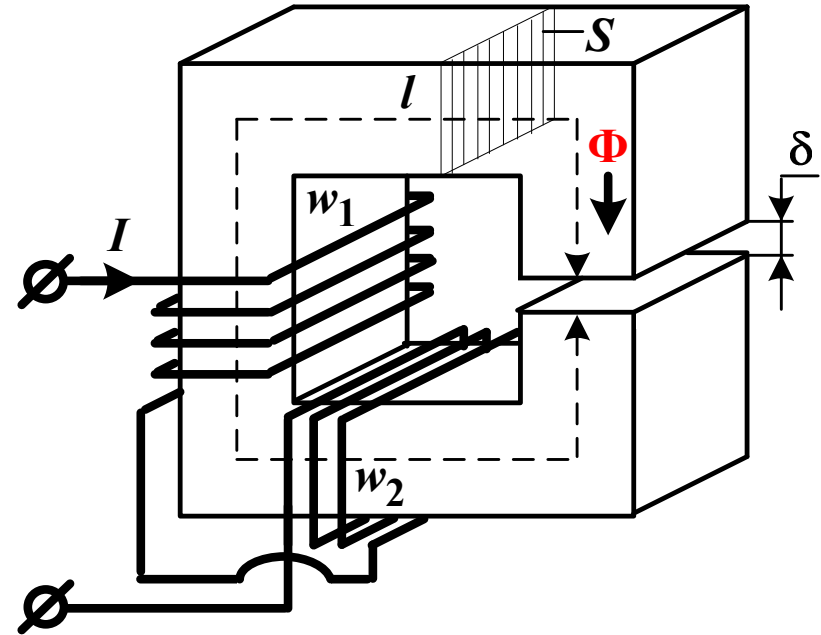
$w_2=600$ (ВИТКОВ);

$\delta=1,256$ (ММ); $l=40$ (СМ);

$S=20$ (СМ²).

Кривая намагничивания магнитопровода при $B>0$
 $H=2500B^2$ (А/М).

Определить магнитный
поток Φ (МВб).



Решение

По **2**-му закону **Кирхгофа**:

$$Iw_1 - Iw_2 = NI + B\delta/\mu_0, \text{ или } B^2 + B = 2.$$

В результате: $B = \mathbf{1}$ (Тл); $\mathbf{-2}$ (Тл).

Принимаем $B = \mathbf{1}$ (Тл),

тогда $\Phi = BS = 1 \cdot 20 \cdot 10^{-4} = \mathbf{2}$ (мВб).

Расчет разветвленной магнитной цепи

Разветвленная магнитная цепь
содержит несколько магнитных
поточков, например: $\delta_1 = \delta_3 = 0$ $w_3 = 0$

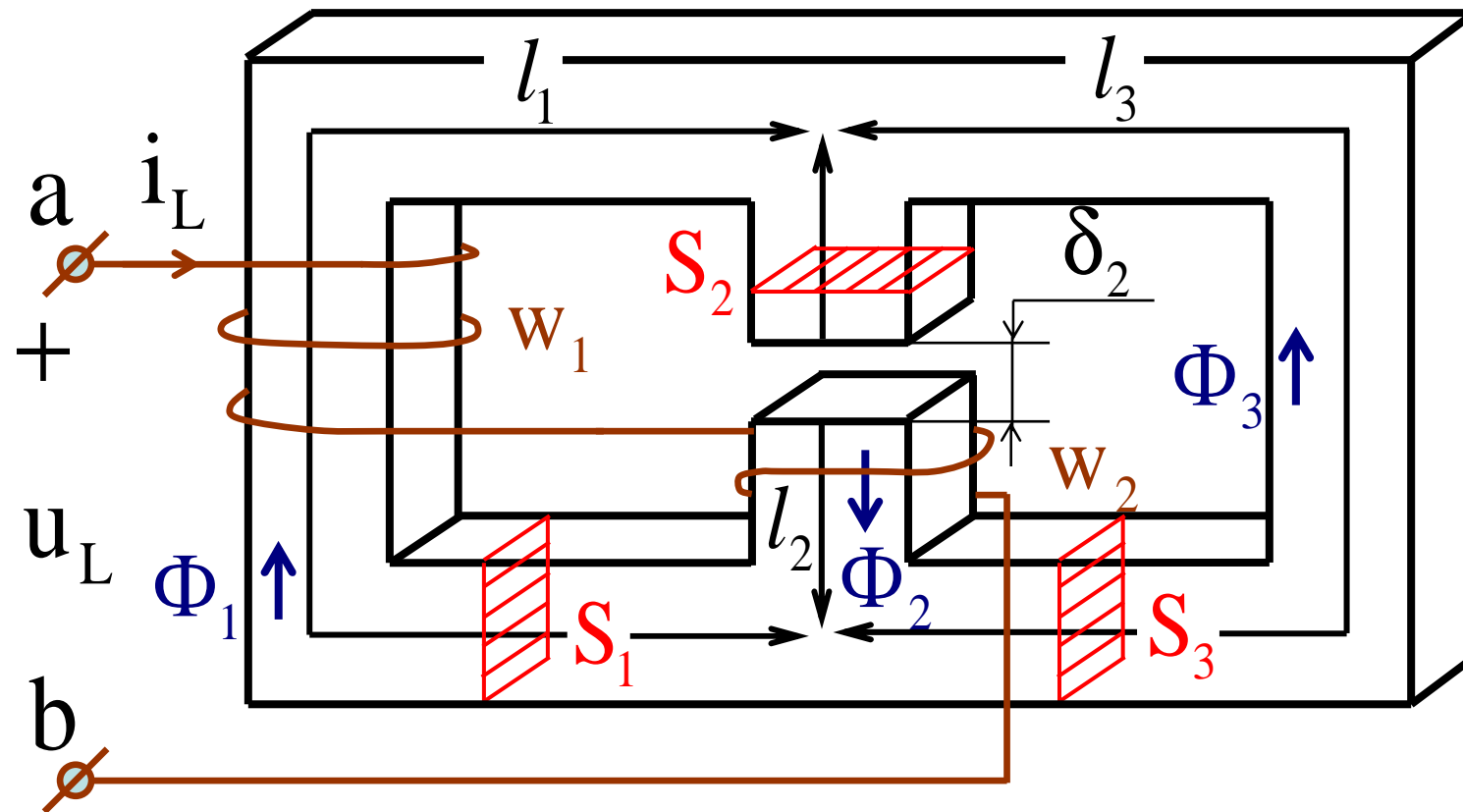
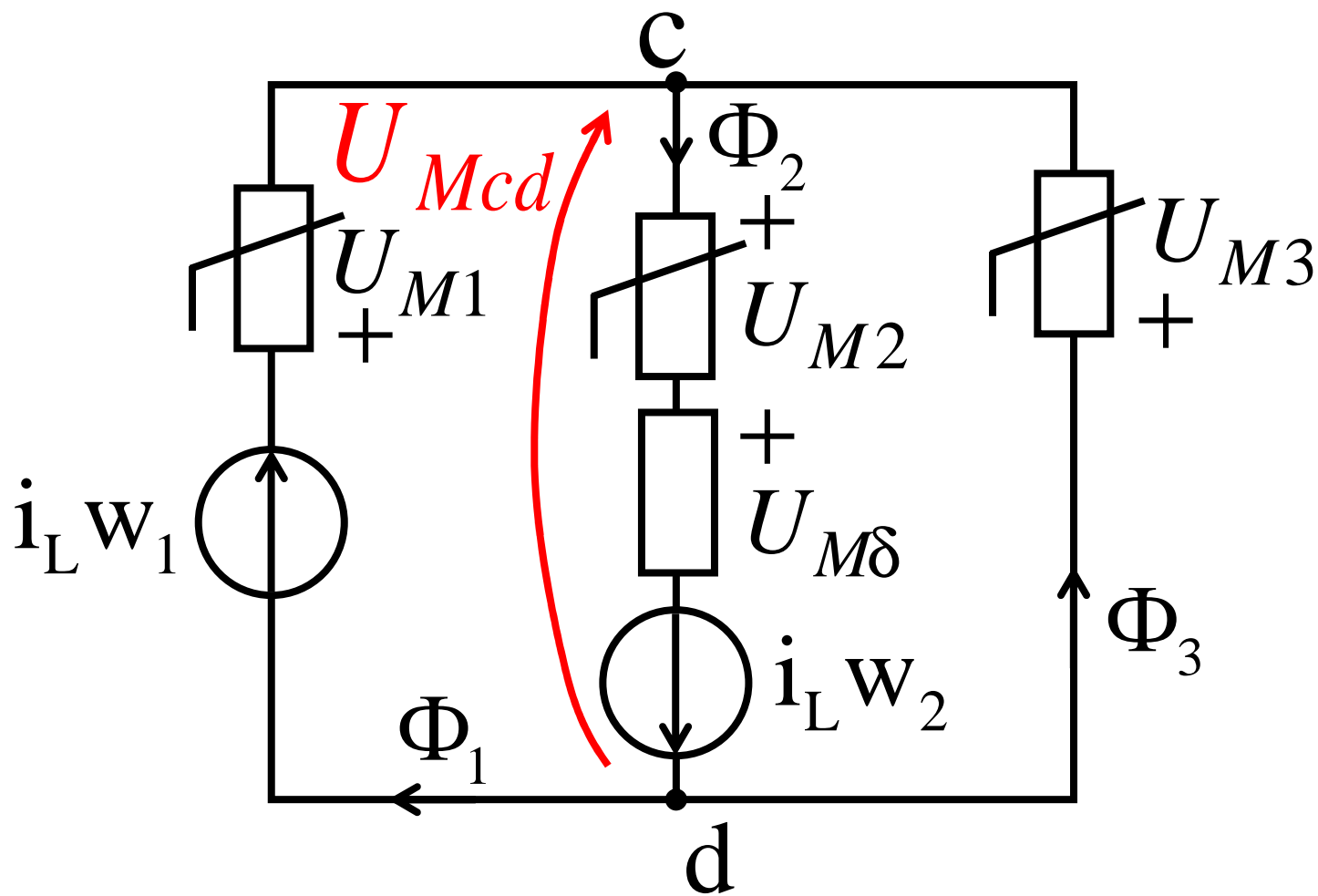


Схема замещения магнитной цепи



Воспользуемся методом **двух** узлов (**с** и **д**) и составим уравнения по законам **Кирхгофа**:

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$$

$$U_{Mcd}(\Phi_1) = i_L w_1 - U_{M1}(\Phi_1)$$

$$U_{Mcd}(\Phi_2) = -i_L w_2 + U_{M2}(\Phi_2) + U_{M\delta}(\Phi_2)$$

$$U_{Mcd}(\Phi_3) = -U_{M3}(\Phi_3)$$

1

Магнитные напряжения:

$$U_{M1}(\Phi_1) = H_1 l_1 \quad U_{M2}(\Phi_2) = H_2 l_2$$

$$U_{M3}(\Phi_3) = H_3 l_3 \quad U_{M\delta}(\Phi_2) = \frac{B_2 \delta_2}{\mu_0}$$

2

Дано: $l_1, l_2, l_3, S_1, S_2, S_3, \delta_2$

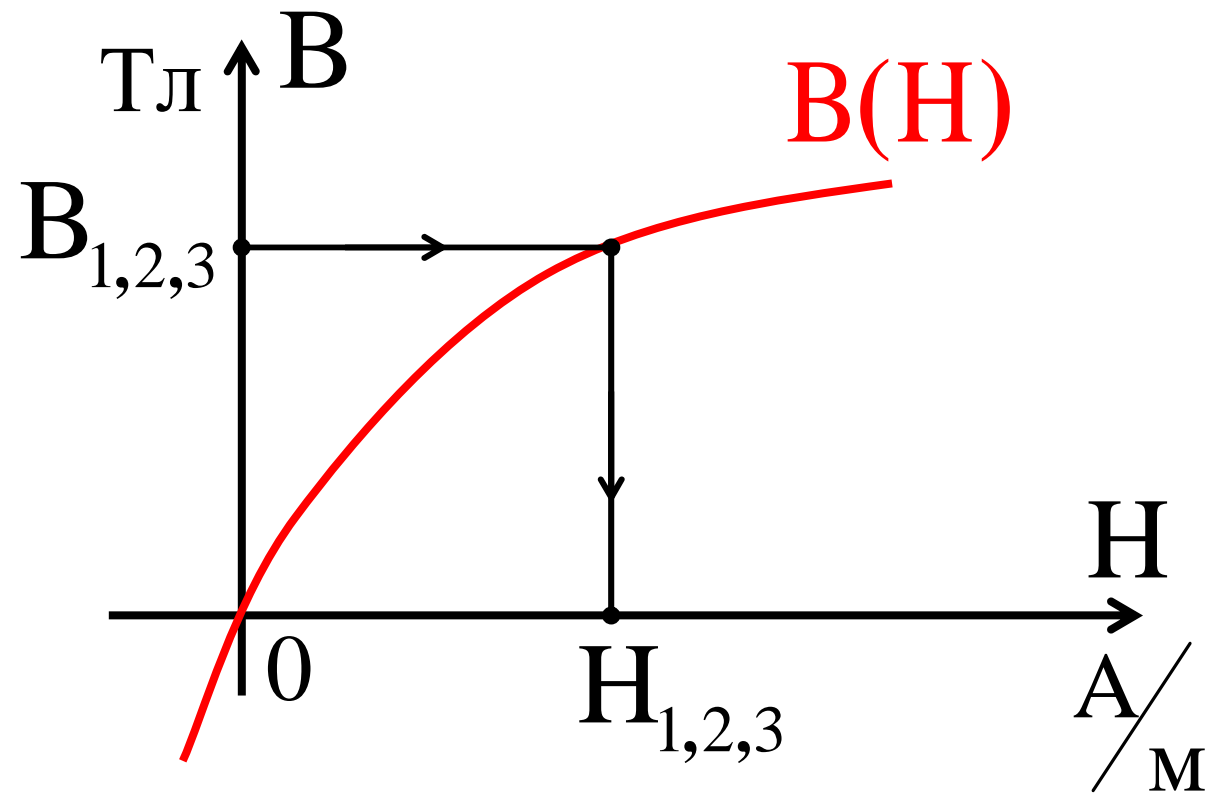
$B(H)$ – кривая намагничивания стали

1. Прямая задача

Известны Φ_1 и Φ_2 ,
тогда $\Phi_3 = \Phi_2 - \Phi_1$ и

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}, \quad B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2}, \quad B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3}$$

По $V(H)$ и $V_{1,2,3}$ находим $H_{1,2,3}$:



По уравнениям ② рассчитываем:

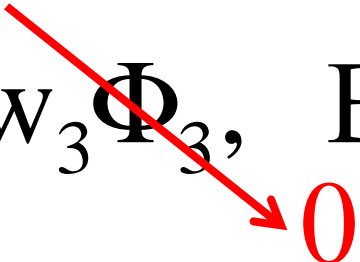
$$U_{M1}(\Phi_1), U_{M2}(\Phi_2), U_{M3}(\Phi_3), U_{M\delta}(\Phi_2)$$

По уравнениям ① определяем:

$$U_{Mcd} = U_{Mcd}(\Phi_3), \quad i_L w_1, \quad i_L w_2$$

При заданном токе i_L находим числа витков w_1 и w_2 , а также вычисляем:

- суммарное
ПОТОКОСЦЕПЛЕНИЕ

$$\Psi = w_1 \Phi_1 + w_2 \Phi_2 + w_3 \Phi_3, \quad \text{Вб}$$


- суммарную статическую
ИНДУКТИВНОСТЬ

$$L_{\text{ст}} = \frac{\Psi}{i_L}, \quad \text{Гн}$$

2. Обратная задача

При заданном токе i_L и числах

ВИТКОВ w_1 и w_2 определяем

н.с. $i_L w_1$ и $i_L w_2$

Рассчитываем уравнения $\textcircled{1}$ и $\textcircled{2}$,

заполняя таблицы 1 и 2

Таблица 1

$B_{1,2,3}, \text{ Тл}$	0	0,6	1	...	2,5
$H_{1,2,3}, \text{ А/м}$	0	250	500	...	$2 \cdot 10^5$
$\Phi_1 = B_1 S_1, \text{ Вб}$					
$\Phi_2 = B_2 S_2, \text{ Вб}$					
$\Phi_3 = B_3 S_3, \text{ Вб}$					

Продолжение таблицы 1

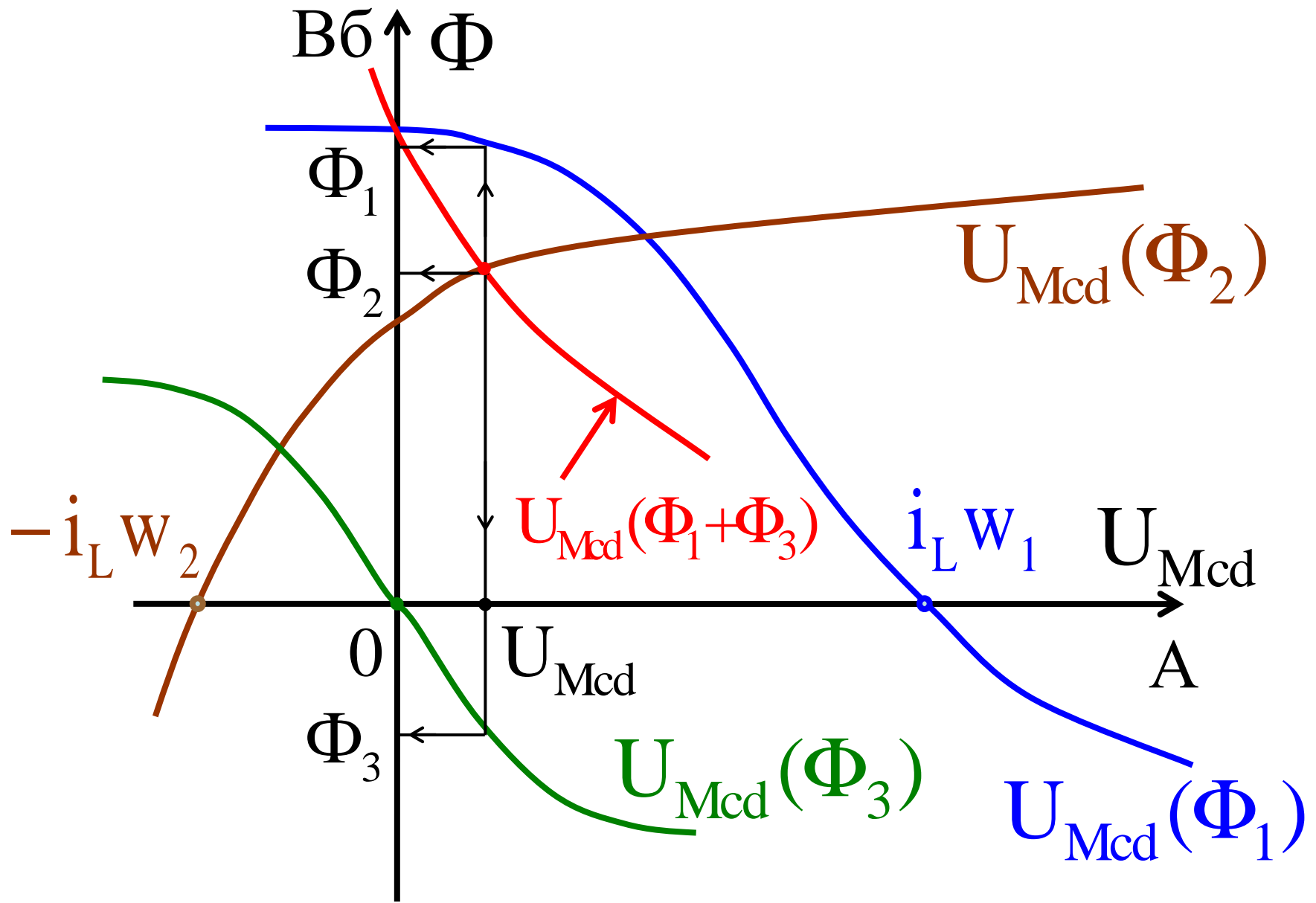
$B_{1,2,3}, \text{ Тл}$	0	0,6	1	...	2,5
$U_{M1}(\Phi_1), \text{ A}$					
$U_{M2}(\Phi_2), \text{ A}$					
$U_{M\delta}(\Phi_2), \text{ A}$					
$U_{M3}(\Phi_3), \text{ A}$					

Таблица 2

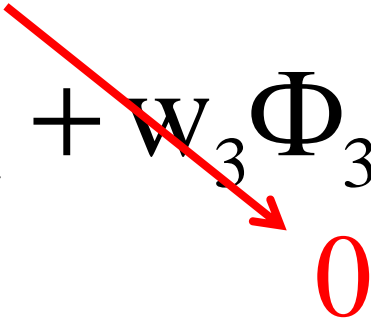
$B_{1,2,3}, \text{ ТЛ}$	0	0,6	1	...	2,5
$U_{\text{Мсд}}(\Phi_1), \text{ А}$					
$U_{\text{Мсд}}(\Phi_2), \text{ А}$					
$U_{\text{Мсд}}(\Phi_3), \text{ А}$					

Строим графики $U_{\text{Мсд}}(\Phi_1)$, $U_{\text{Мсд}}(\Phi_2)$,
 $U_{\text{Мсд}}(\Phi_3)$. Т.к. $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$, то $U_{\text{Мсд}}(\Phi_1)$
и $U_{\text{Мсд}}(\Phi_3)$ складываем вдоль оси Φ и
получаем график $U_{\text{Мсд}}(\Phi_1 + \Phi_3)$.

По точке пересечения $U_{\text{Мсд}}(\Phi_1 + \Phi_3)$ с
 $U_{\text{Мсд}}(\Phi_2)$ определяем Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 и
 $U_{\text{Мсд}}$.



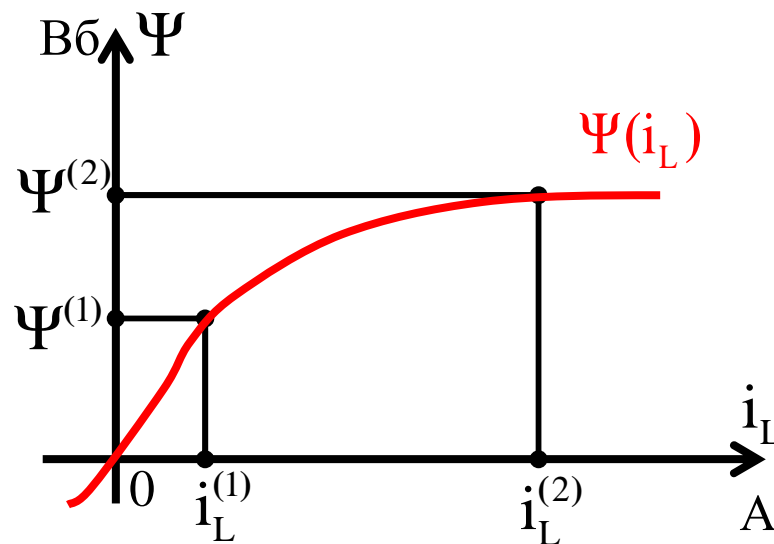
Рассчитываем

$$\Psi = w_1 \Phi_1 + w_2 \Phi_2 + w_3 \Phi_3, \quad \text{Вб}$$


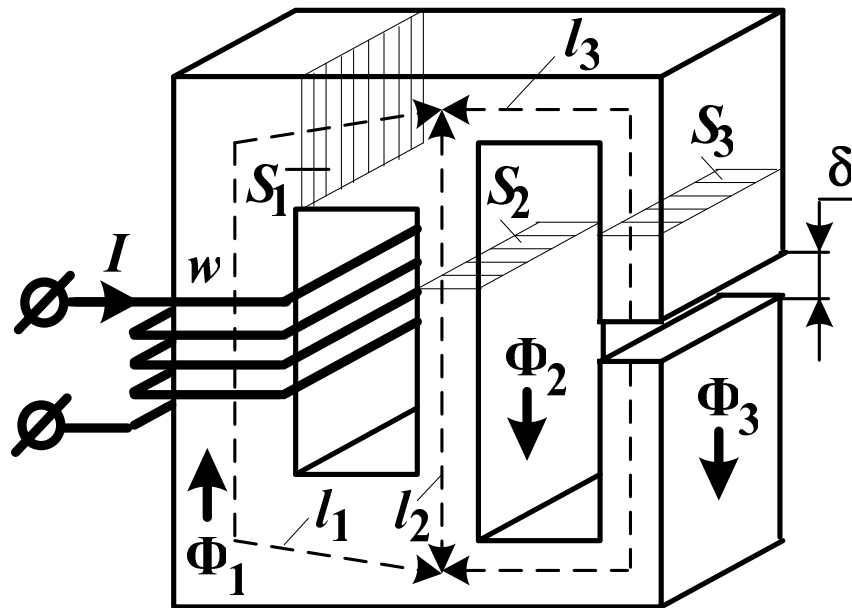
$$L_{\text{ст}} = \frac{\Psi}{\dot{i}_L}, \quad \text{Гн}$$

Если изменить ток \dot{i}_L , то необходимо повторить расчет, начиная с табл. 2, и определить другое значение Ψ .

В результате можно построить ВбАХ $\Psi(\dot{i}_L)$ НИЭ:



Пример:



Дано: $\Phi_3=1$ (мВб);

$l_1=2l_2=l_3=40$ (см);

$\delta=1,256$ (мм);

$S_1=2S_2=2S_3=20$ (см²).

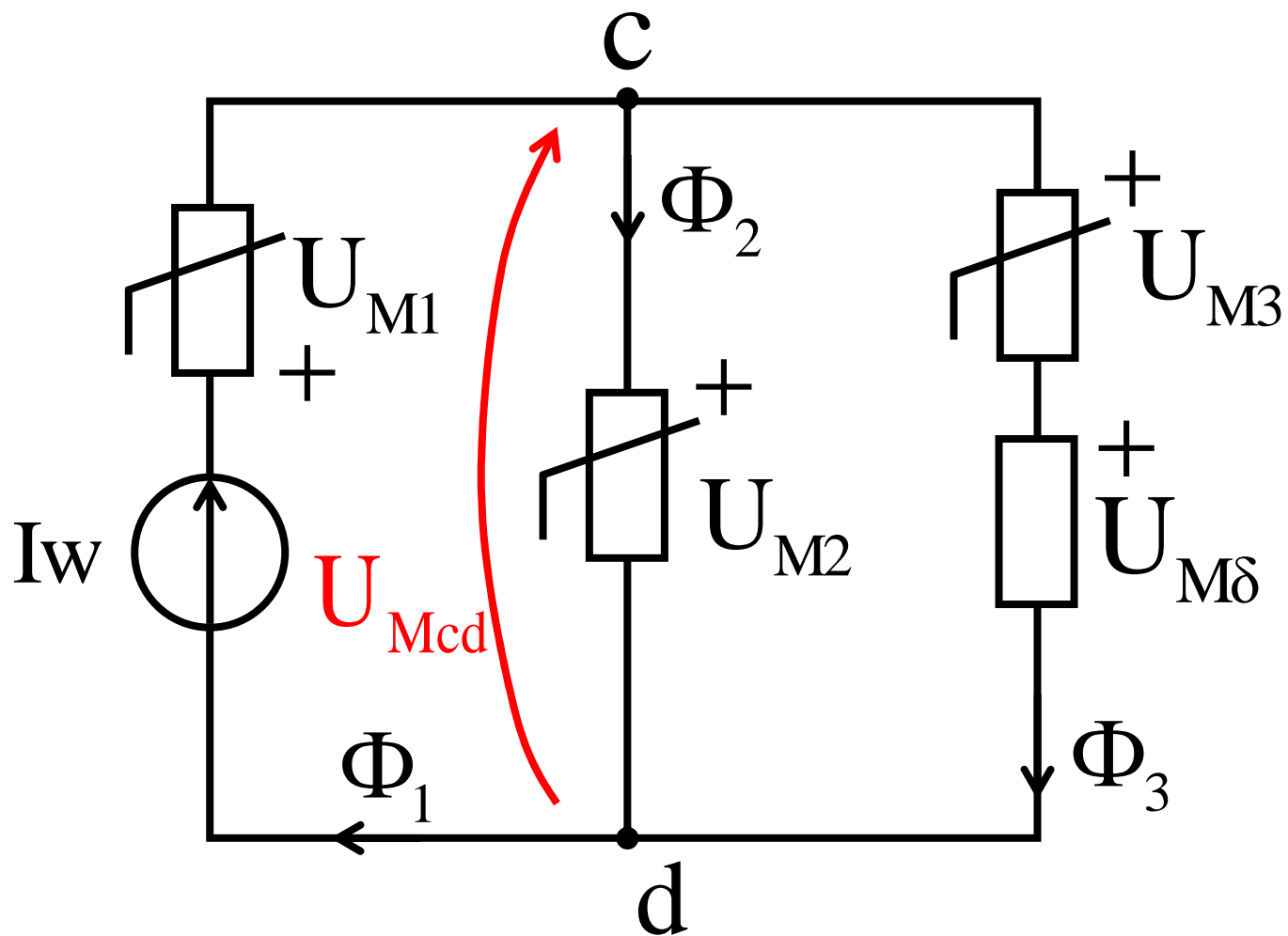
Кривая намагничивания
магнитопровода

$H=10000 \cdot B^2$ (А/м).

Определить н.с.

Iw катушки.

Схема замещения магнитной цепи



Уравнения по законам Кирхгофа

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

$$U_{Mcd} = Iw - U_{M1}$$

$$U_{Mcd} = U_{M2}$$

$$U_{Mcd} = U_{M3} + U_{M\delta}$$

Аналитическое решение:

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ (Тл)};$$

$$H_3 = 10000 \cdot B_3^2 = 10000 \text{ (А / м)};$$

$$\begin{aligned}
 U_{Mcd} &= U_{M3} + U_{M\delta} = H_3 l_3 + \frac{B_3 \delta}{\mu_0} = \\
 &= 10000 \cdot 0,4 + \frac{1 \cdot 1,256 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 5000 \text{ (A)}.
 \end{aligned}$$

Так как $U_{Mcd} = U_{M2} = H_2 l_2$,

тогда $H_2 = \frac{U_{Mcd}}{l_2} = \frac{5000}{0,2} = 25000 \text{ (A / м)}.$

В результате

$$B_2 = \sqrt{\frac{H_2}{10000}} = 1,58 \text{ (Тл)};$$

$$\Phi_2 = B_2 S_2 = 1,58 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 1,58 \text{ (мВб)};$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = 1,58 + 1 = 2,58 \text{ (мВб)};$$

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{2,58 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 1,29 \text{ (Тл)};$$

$$H_1 = 10000 \cdot B_1^2 = 16641 \text{ (A / м)}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} I_w &= U_{Mcd} + U_{M1} = U_{Mcd} + H_1 l_1 = \\ &= 5000 + 16641 \cdot 0,4 = 11656,4 \text{ (A)}. \end{aligned}$$