5 лекция

Переходные и импульсные характеристики

Переходные $h(t)$ и импульсные $K(t)$ характеристики используются для расчета переходных процессов при нулевых начальных условиях и импульсных воздействиях на линейные пассивные цепи

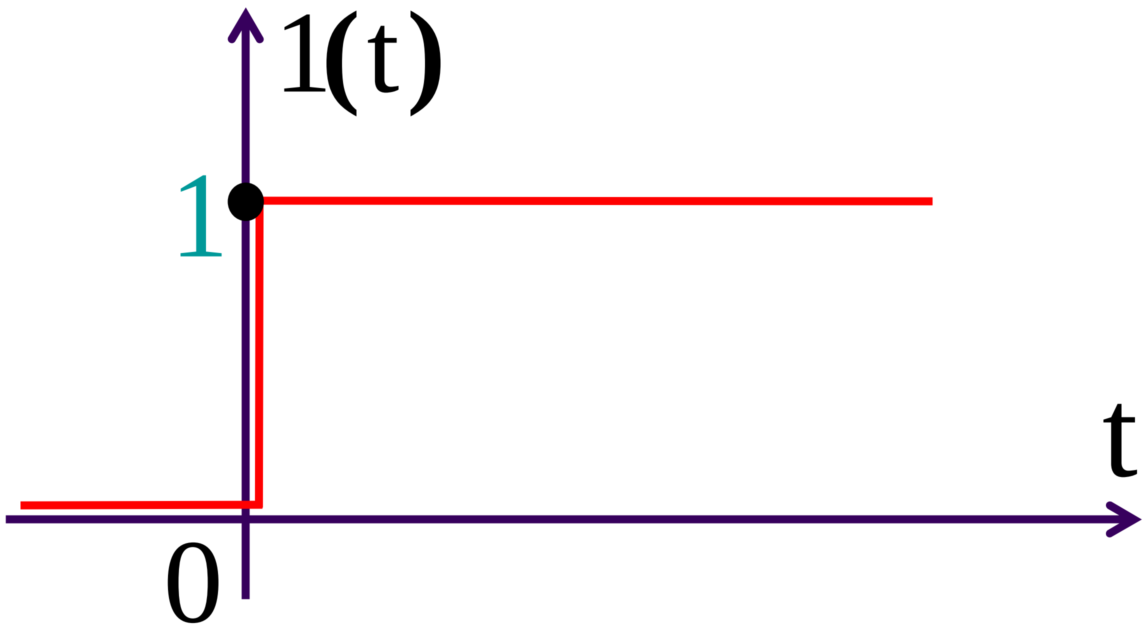
Нулевые начальные условия:
$i_L(0)=0$; $u_C(0)=0$.

Для получения этих характеристик $h(t)$ и $K(t)$ применяются две специальные функции

1. Единичная функция

$$1(t) = \begin{cases} 0 \quad npu \quad t < 0 \\ 1 \quad npu \quad t > 0 \end{cases}$$

$$1(t) \doteq \frac{1}{p}$$

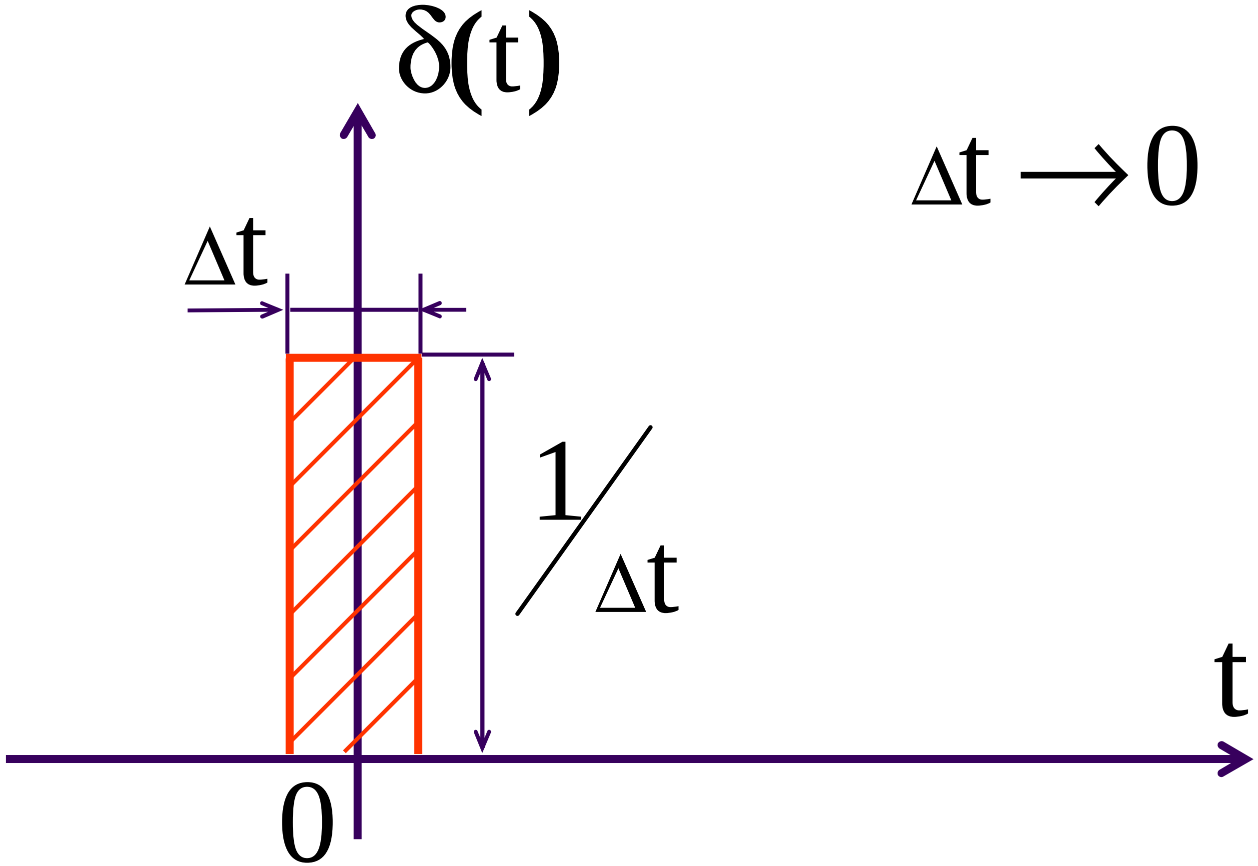


2. Единичный импульс (дельта-функция)

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$$

При этом:

$$\delta(t) \risingdotseq 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad \delta(0) = \infty$$



δ(t)
Δt → 0
Δt
1/Δt
t
0

Переходная характеристика $h(t)$

- это реакция цепи в виде тока или напряжения на единичную возмущающую функцию $1(t)$ источника при нулевых начальных условиях

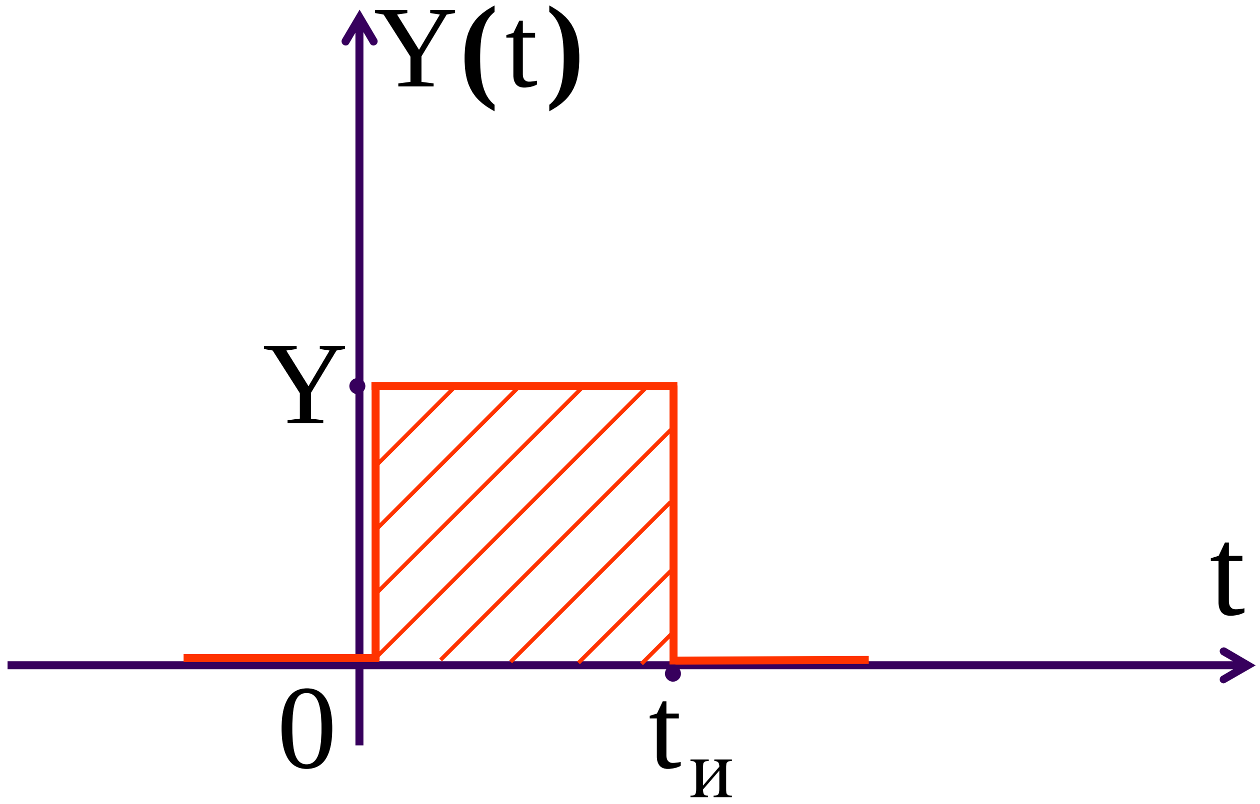
Переходная характеристика h(t)

зависит от времени t, параметров цепи R, L, C и может быть безразмерной , иметь размерность сопротивления или проводимости

Переходные характеристики h(t)

определяются экспериментально или аналитически, например, операторным методом при подключении ЭДС в 1 (В) или источника тока в 1 (А)

Если Y(t) - прямоугольный импульс источника ЭДС или тока:



Тогда $X(t)$ - напряжение или ток

а) $0 < t < t_и$

$$X(t) = Y \cdot h(t)$$

б) $\mathbf{t > t_и}$

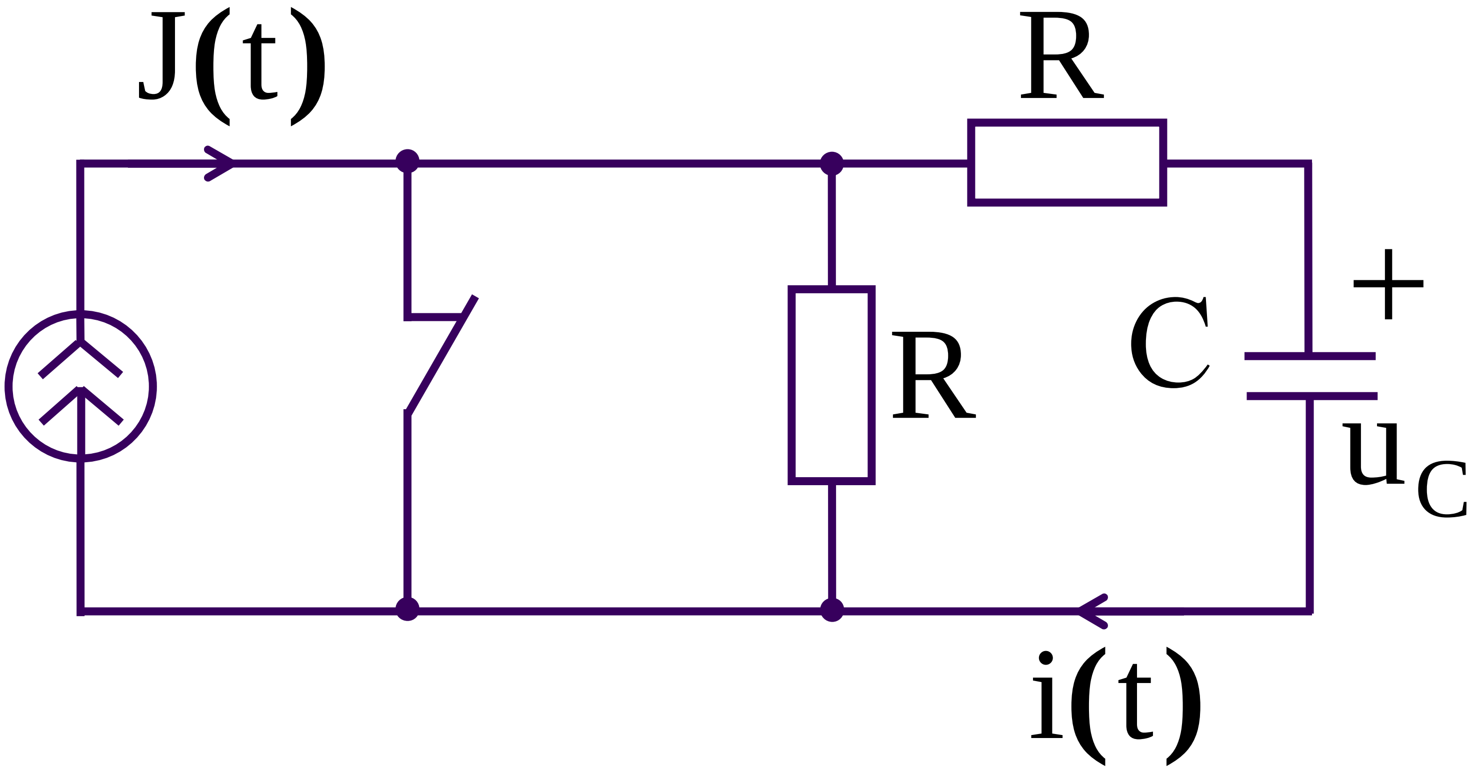
$$X(t) = Y \cdot h(t) - Y \cdot h(t - t_и)$$

$h(t)$ - переходная характеристика

Импульсная характеристика K(t)- это реакция цепи в виде тока или напряжения на единичный возмущающий импульс $\delta(t)$ источника при нулевых начальных условиях, причем:

$$K(t) = h(0) \cdot \delta(t) + \frac{dh(t)}{dt}$$

Пример:



Дано:

$$J(t)=\begin{cases} J & \text{при} \quad 0<t<t_и \\ 0 & \text{при} \quad t>t_и \end{cases}$$

$$R=100\,Ом \qquad C=100\,мкФ$$

$$J=2\,A \qquad t_и=0{,}01\,с$$

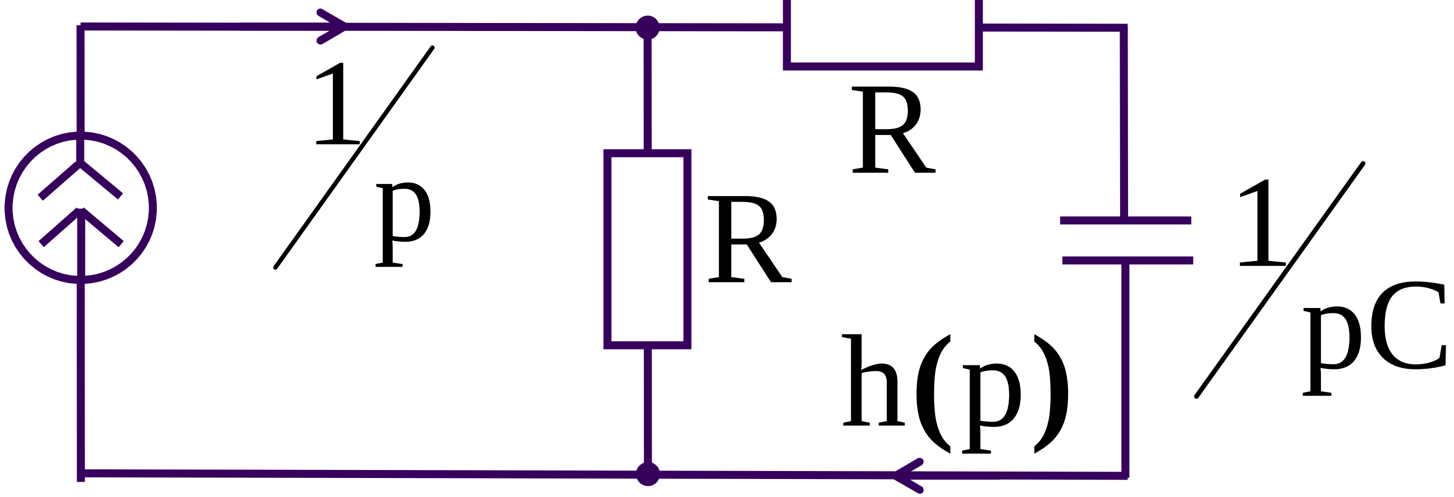
Определить:

$h(t)$, $K(t)$ для $i(t)=?$

1. Для $\mathrm{i(t)}$ найдем $\mathrm{h(t)}$

операторным методом при:

$$u_C(0) = u_C(0-) = 0$$



По правилу разброса

$$h(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{R}{2R + {}^{1}\!/_{pC}} =$$

$$= \frac{RC}{1+2RCp} = \frac{0{,}01}{1+0{,}02p} = \frac{D_1(p)}{B_1(p)}$$

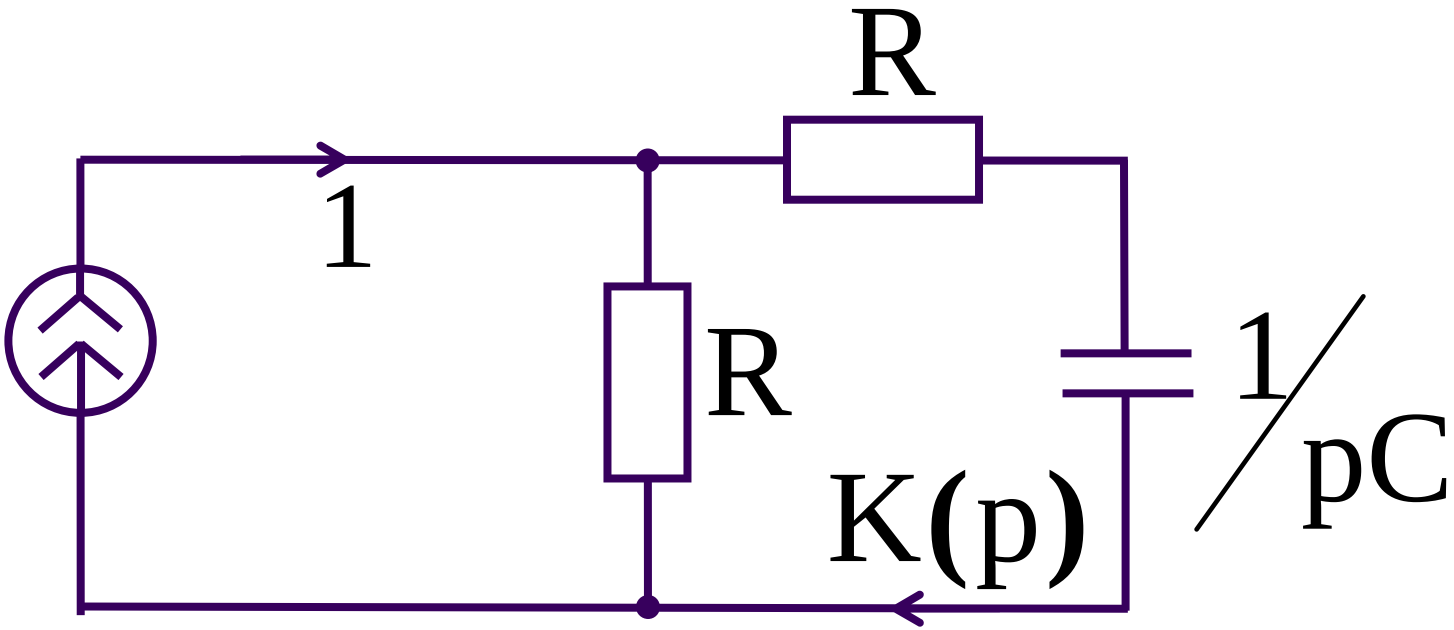
По теореме разложения

$$h(t)=\sum_{k=1}^{n=1}\frac{D_1(p_k)}{B_1'(p_k)}\cdot e^{p_k t}=0,5e^{-50t}\ \text{-}$$

-безразмерная переходная функция

2. Для $i(t)$ найдем $K(t)$

операторным методом:



По правилу разброса

$$K(p) = 1 \cdot \frac{R}{2R + {}^{1}\!/_{pC}} = \frac{RCp}{1 + 2RCp}$$

$$K(p)=\frac{2RCp+1-1}{2(1+2RCp)}=0{,}5-\frac{0{,}5}{1+2RCp}$$

$$K(p)=0{,}5-\frac{0{,}5}{1+0{,}02p}=0{,}5-\frac{D_2(p)}{B_2(p)}$$

По теореме разложения

$$K(t) = 0{,}5 \cdot \delta(t) - \sum_{k=1}^{n=1} \frac{D_2(p_k)}{B_2'(p_k)} \cdot e^{p_k t} =$$

$$= 0{,}5 \cdot \delta(t) - 25e^{-50t}, \ \frac{1}{c}$$

причем

$$K(t) = h(0)\delta(t) + \frac{dh(t)}{dt}$$

3. Определяем ток $\mathbf{i(t)}$

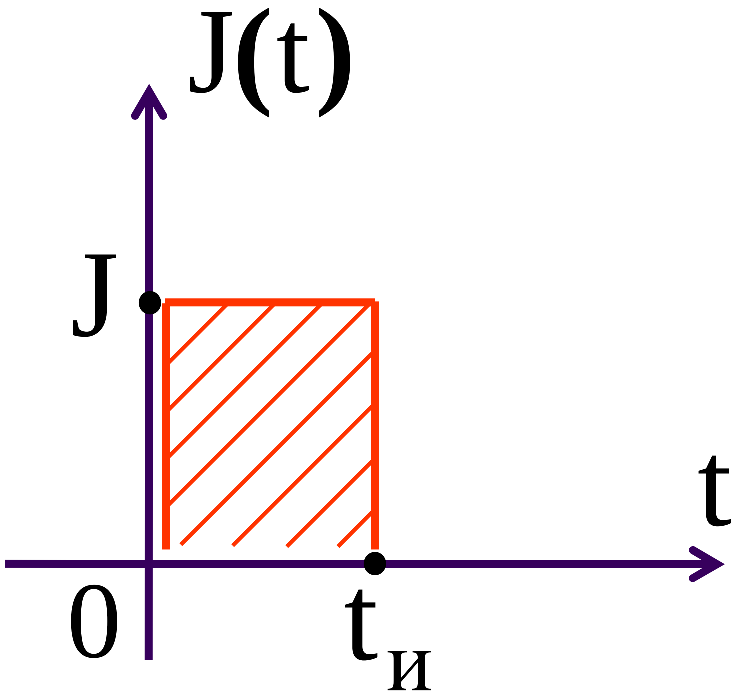
а) на интервале $0 < t < t_и$

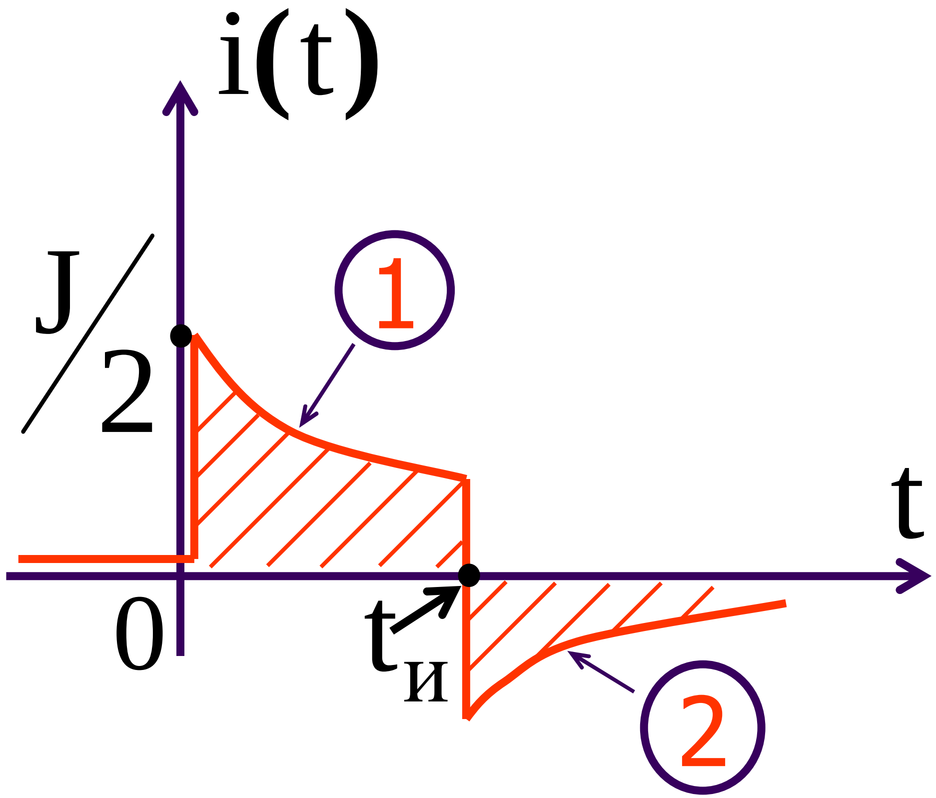
$$\mathbf{i(t)} = J \cdot h\mathbf{(t)} = 1 \cdot e^{-50t}, \text{ A} \qquad 1$$

б) на интервале $t > t_и$

$$\mathbf{i(t)} = J \cdot h\mathbf{(t)} - J \cdot h\mathbf{(t - t_и)} =$$

$$= 1 \cdot e^{-50t} - 1 \cdot e^{-50\mathbf{(t - t_и)}}, \text{ A} \qquad 2$$


J(t)
J
t
0
tи

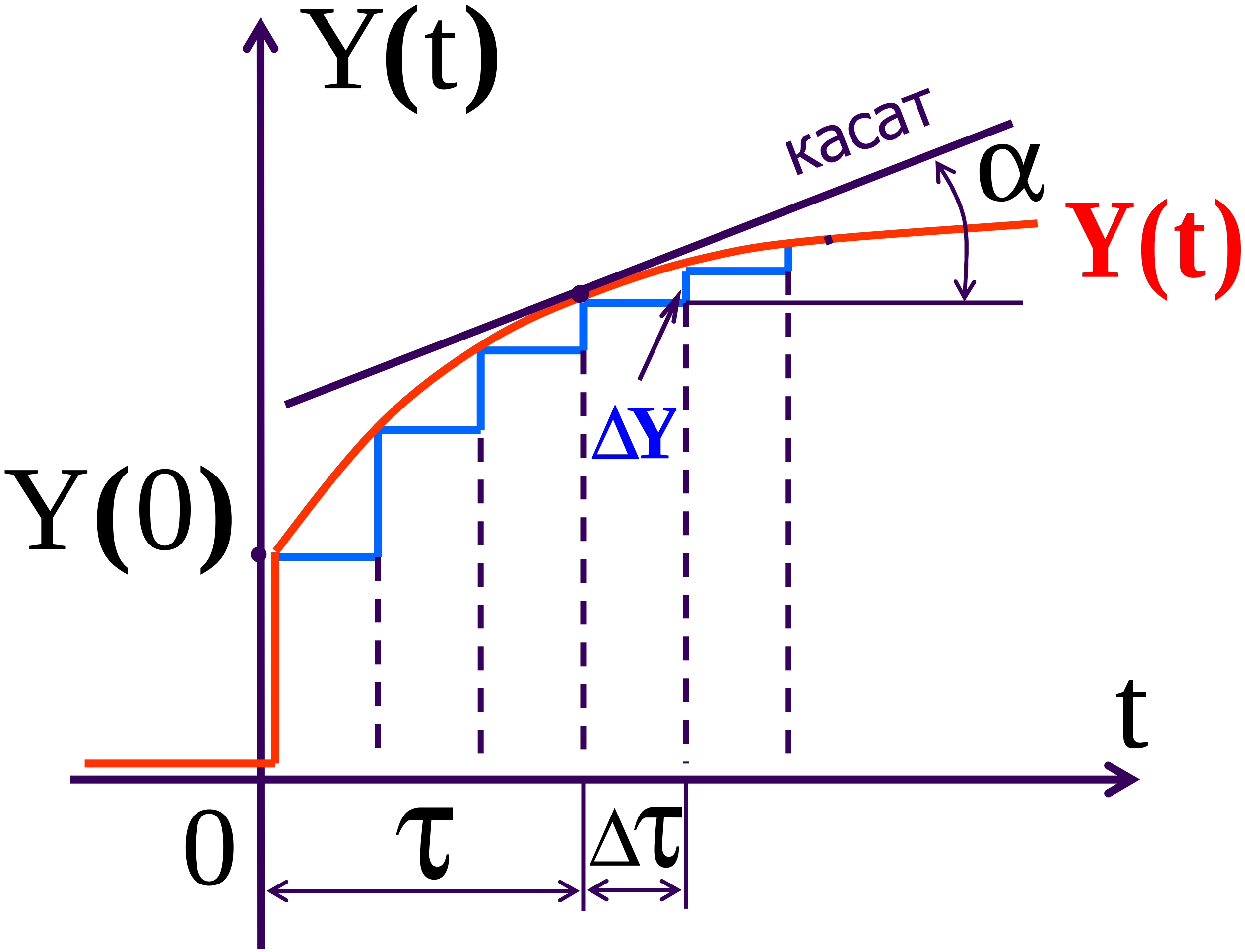

i(t)
J/2
1
t
0
tи
2

Интеграл

Дюамеля

Интеграл Дюамеля используется для расчета переходных процессов в линейных пассивных цепях с нулевыми начальными условиями при воздействии импульса произвольной формы источника электр. энергии

Пусть на такую цепь воздействует импульс источника Y(t) произвольной формы, который заменим ступенчатой функцией



Y(t)
касат
α
Y(t)
ΔY
Y(0)
t
0
τ
Δτ

Тогда ток или напряжение составят:

$$X(t) = Y(0) \cdot h(t) + \sum \Delta X$$

где $\Delta X = \Delta Y \cdot h(t-\tau) =$

$$= (\Delta\tau \cdot tg\alpha) \cdot h(t-\tau) =$$

$$= \Delta\tau \cdot Y'(\tau) \cdot h(t-\tau)$$

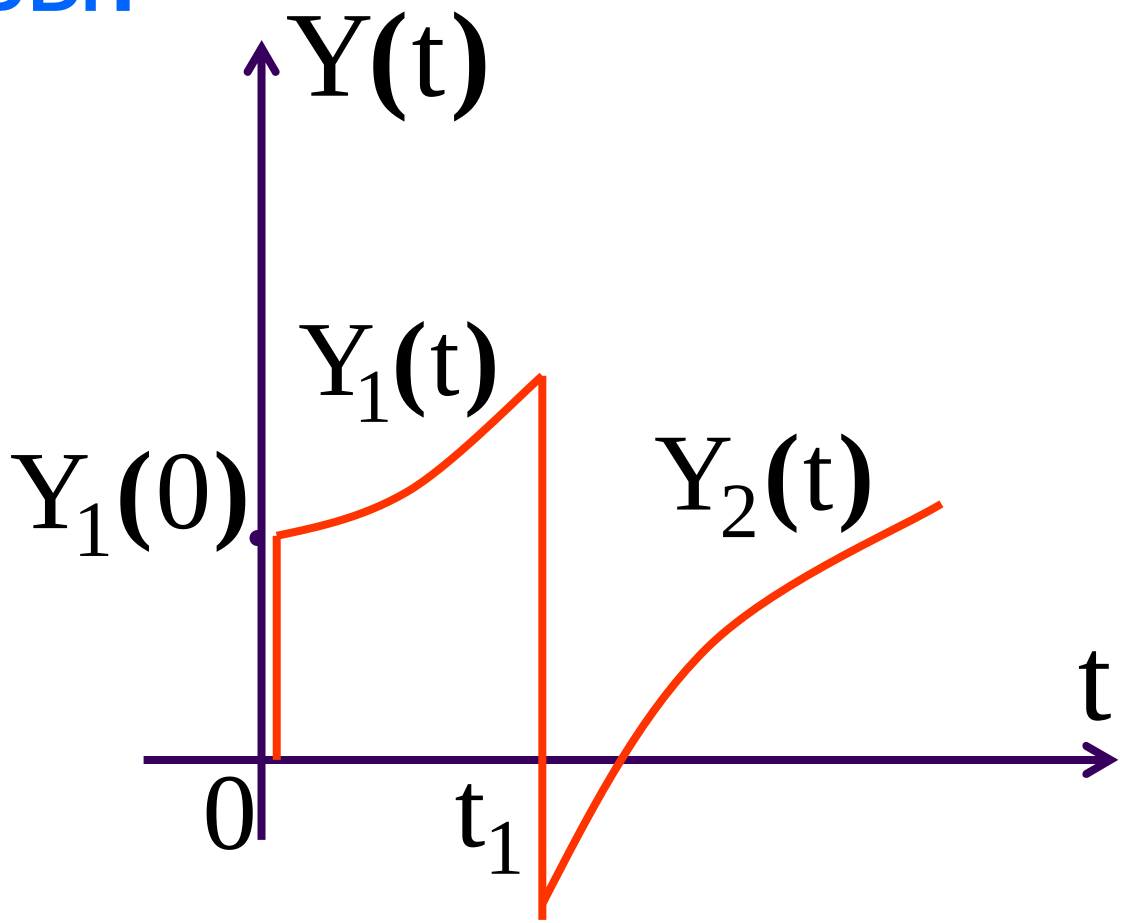
Или $$X(t)=Y(0)\cdot h(t)+\int_0^t Y'(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$$

- интеграл **Дюамеля**

Если $X(t)$ является $i_L(t)$ или $u_C(t)$,

тогда $$X(t)=\int_0^t Y(\tau)\cdot K(t-\tau)d\tau$$

Если импульс источника имеет разрывы:



Тогда интеграл Дюамеля записывается:

а) интервал $0 < t < t_1$

$$X(t) = Y_1(0) \cdot h(t) + \int_0^t Y_1'(\tau) \cdot h(t-\tau)d\tau$$

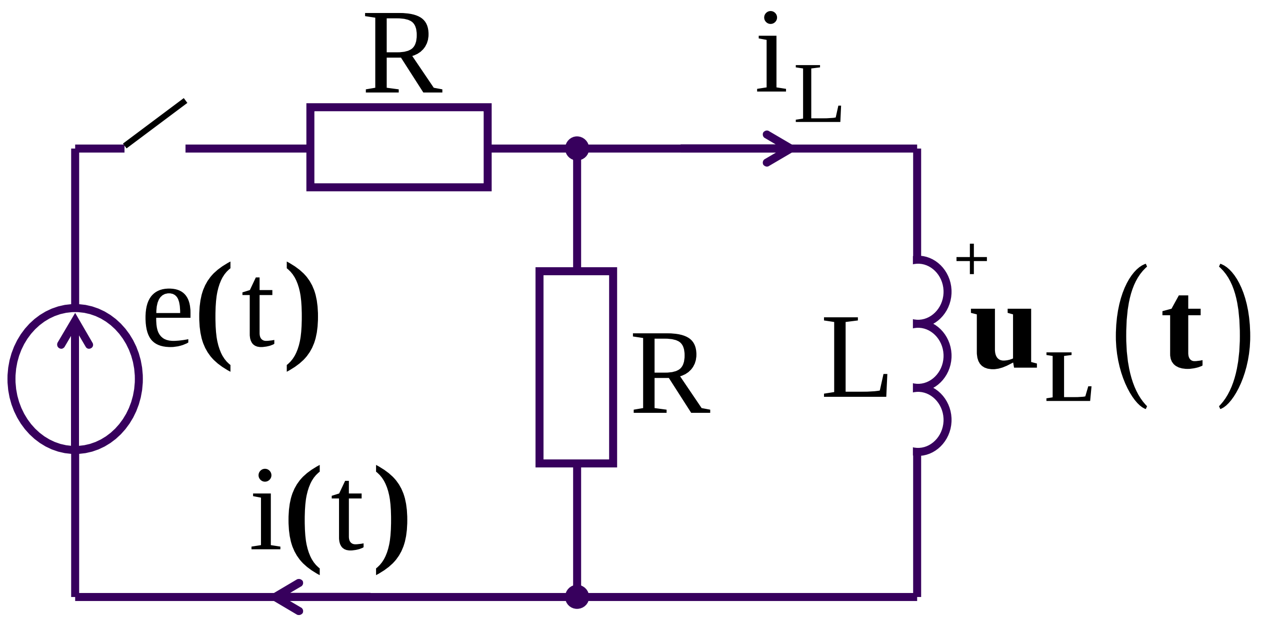
б) интервал $t > t_1$

$$X(t) = Y_1(0) \cdot h(t) + \int_0^{t_1} Y_1'(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau +$$

$$+ \left[Y_2(t_1) - Y_1(t_1) \right] \cdot h(t - t_1) +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} Y_2'(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

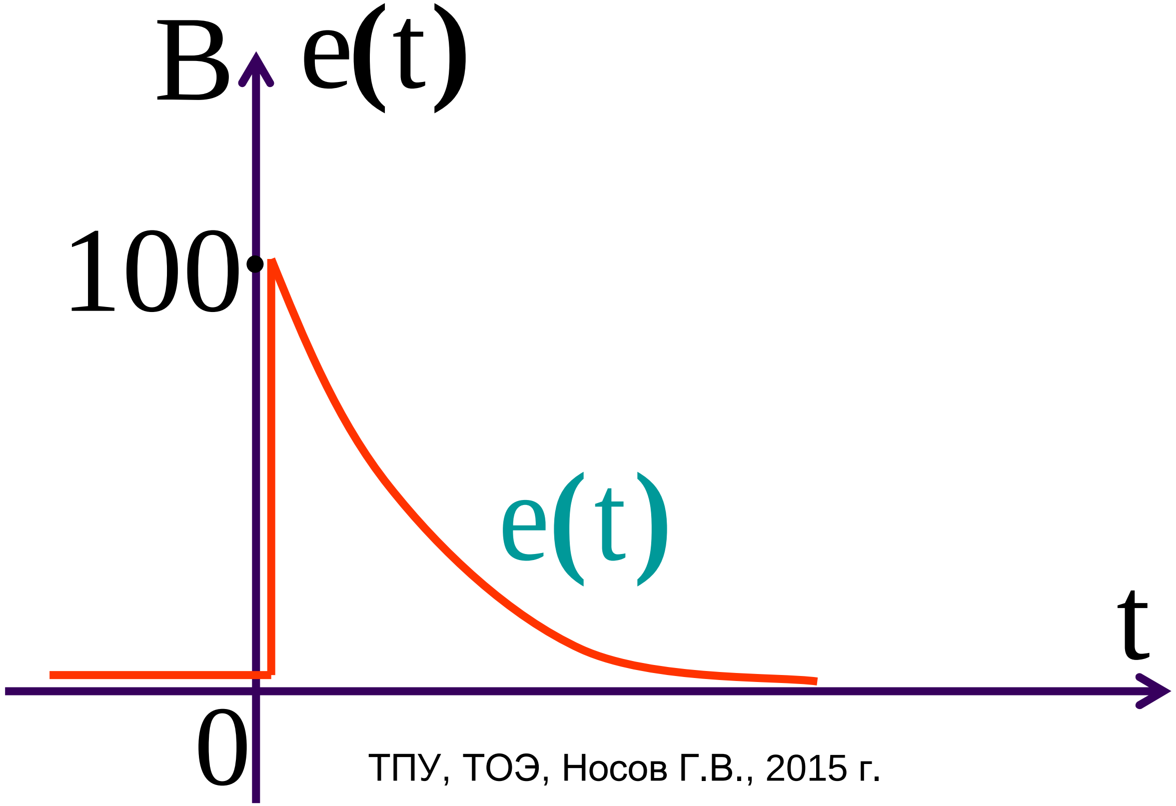
Пример



Дано: $e(t) = 100e^{-200t}$, В

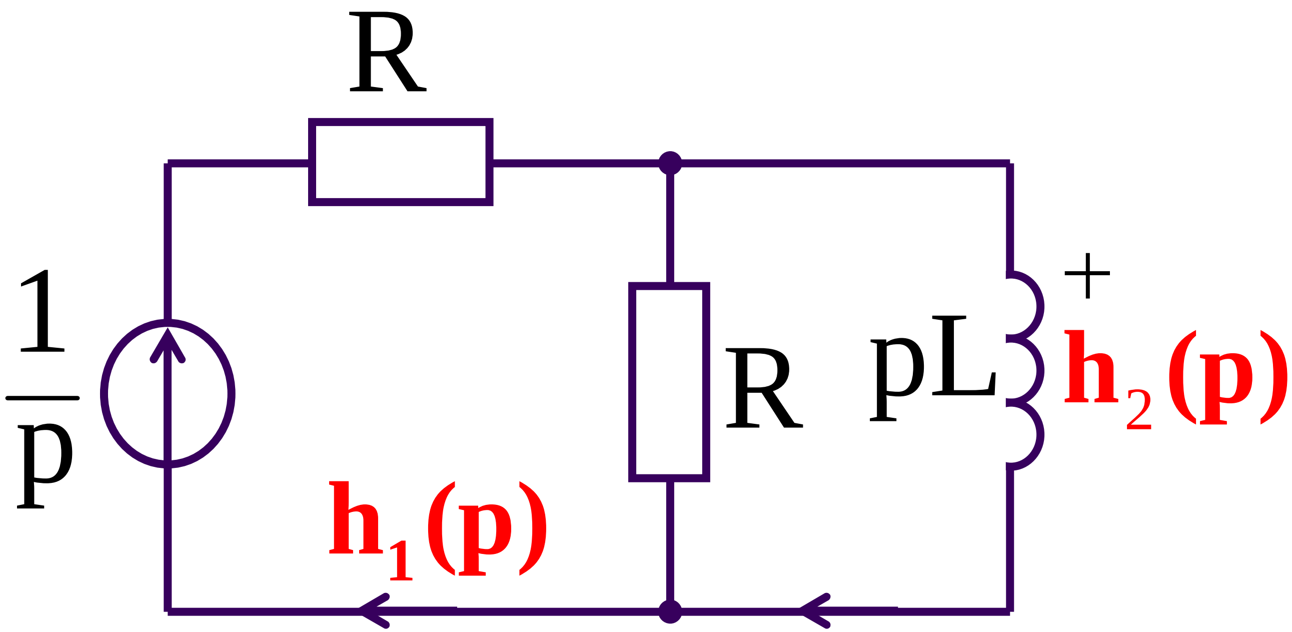
$R = 200$ Ом $\qquad L = 1$ Гн

Определить: $i(t) = ?$ $\quad u_L(t) = ?$



1. Определяем $\mathbf{h_1(t)}$ и $\mathbf{h_2(t)}$ для $\mathbf{i(t)}$ и $\mathbf{u_L(t)}$ операторным методом:

$$i_L(0) = i_L(0-) = 0$$



По закону Ома в операторной форме:

$$h_1(p)=\frac{1/p}{R+\dfrac{RpL}{R+pL}}=$$

$$=\frac{R+pL}{p(R^2+2RLp)}=\frac{D_1(p)}{B_1(p)}$$

По правилу разброса и закону Ома в операторной форме:

$$h_2(p)=h_1(p)\frac{R}{R+pL}pL=$$

$$=\frac{L}{R+2pL}=\frac{D_2(p)}{B_2(p)}$$

По теореме разложения

$$h_1(t) = \sum_{k=1}^{n=2} \frac{D_1(p_k)}{B_1'(p_k)} \cdot e^{p_k t} =$$

$$= \frac{1}{R} - \frac{1}{2R} e^{-\frac{R}{2L}t}, \quad \frac{1}{\text{Ом}}$$

- переходная проводимость

По теореме разложения

$$h_2(t)=\sum_{k=1}^{n=1}\frac{D_2(p_k)}{B_2^{'}(p_k)}\cdot e^{p_k t}=$$

$$=0{,}5e^{-\frac{R}{2L}t}$$

- безразмерная переходная функция

2. Расчет $i(t)$ интегралом

Дюамеля

$$\mathbf{i(t) = e(0)\cdot h_1(t) + \int_0^t e'(\tau)\cdot h_1(t-\tau)d\tau}$$

Где $e(0)=100$ В

$$e'(\tau)=-2\cdot 10^{4}\cdot e^{-200\tau}\ \text{В}/\text{с}$$

$$\mathbf{h_1(t-\tau)=\frac{1}{R}-\frac{1}{2R}e^{-\frac{R}{2L}(t-\tau)}=}$$

$$\mathbf{=0{,}005-0{,}0025e^{-100(t-\tau)}\ ,\ 1/\text{Ом}}$$

Тогда

$$i(t) = 0{,}5 - 0{,}25 \cdot e^{-100t} +$$

$$+\int_0^t \left[-2 \cdot 10^4 \cdot e^{-200\tau}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[0{,}005 - 0{,}0025 \cdot e^{-100(t-\tau)}\right] d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$0{,}5-0{,}25\cdot e^{-100t}-100\int_0^t e^{-200\tau}d\tau+$$

$$+50\cdot e^{-100t}\int_0^t e^{-100\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}5-0{,}25\cdot e^{-100t}+0{,}5\cdot e^{-200\tau}\Big|_{0}^{t}$$

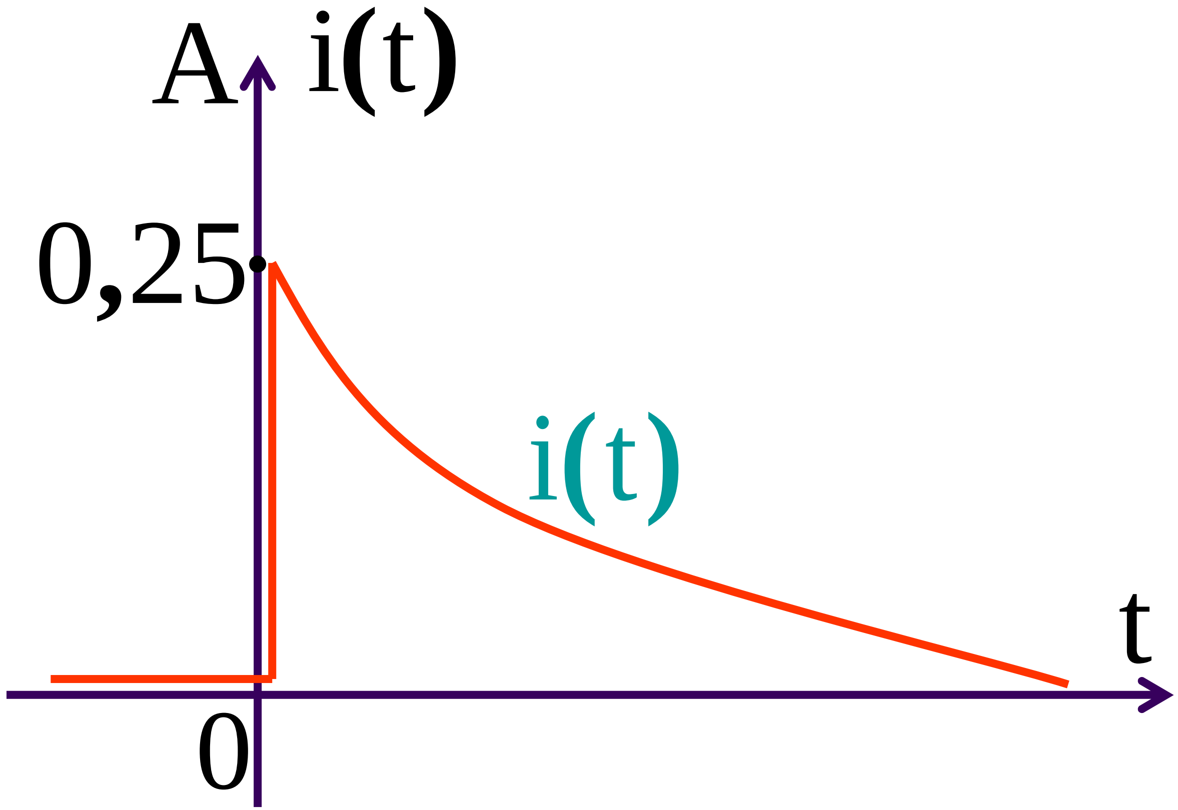
$$-0{,}5\cdot e^{-100t}\cdot e^{-100\tau}\Big|_{0}^{t} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$0{,}5-0{,}25e^{-100t}+0{,}5(e^{-200t}-1)-$$

$$-0{,}5e^{-100t}(e^{-100t}-1)$$

$$\Rightarrow \quad i(t)=0{,}25e^{-100t},\ \ A$$



A
i(t)
0,25
i(t)
t
0

Проверка:

$$\mathbf{i(\infty)=0}$$

$$\mathbf{i(0+)=e(0)/2R=0{,}25A=i(0)}$$

При t=0+: L – разрыв;

C - закоротка

3. Расчет $u_L(t)$ интегралом Дюамеля

$$u_L(t) = e(0)\cdot h_2(t) + \int_0^t e'(\tau)\cdot h_2(t-\tau)d\tau$$

Где $\quad e(0) = 100\ \text{В}$

$$e'(\tau) = -2 \cdot 10^4 \cdot e^{-200\tau}\ \text{В}/\text{с}$$

$$\mathbf{h_2(t\text{-}\tau) = 0{,}5e^{-\frac{R}{2L}(t-\tau)} = 0{,}5e^{-100(t-\tau)}}$$

Тогда

$$u_L(t) = 50e^{-100t} +$$

$$+\int_0^t \left[-2\cdot 10^4 e^{-200\tau}\right]\cdot\left[0{,}5e^{-100(t-\tau)}\right] d\tau$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$50e^{-100t}-10000e^{-100t}\int_0^t e^{-100\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow$$

$$50e^{-100t}+100e^{-100t}\, e^{-100\tau}\Big|_0^t$$

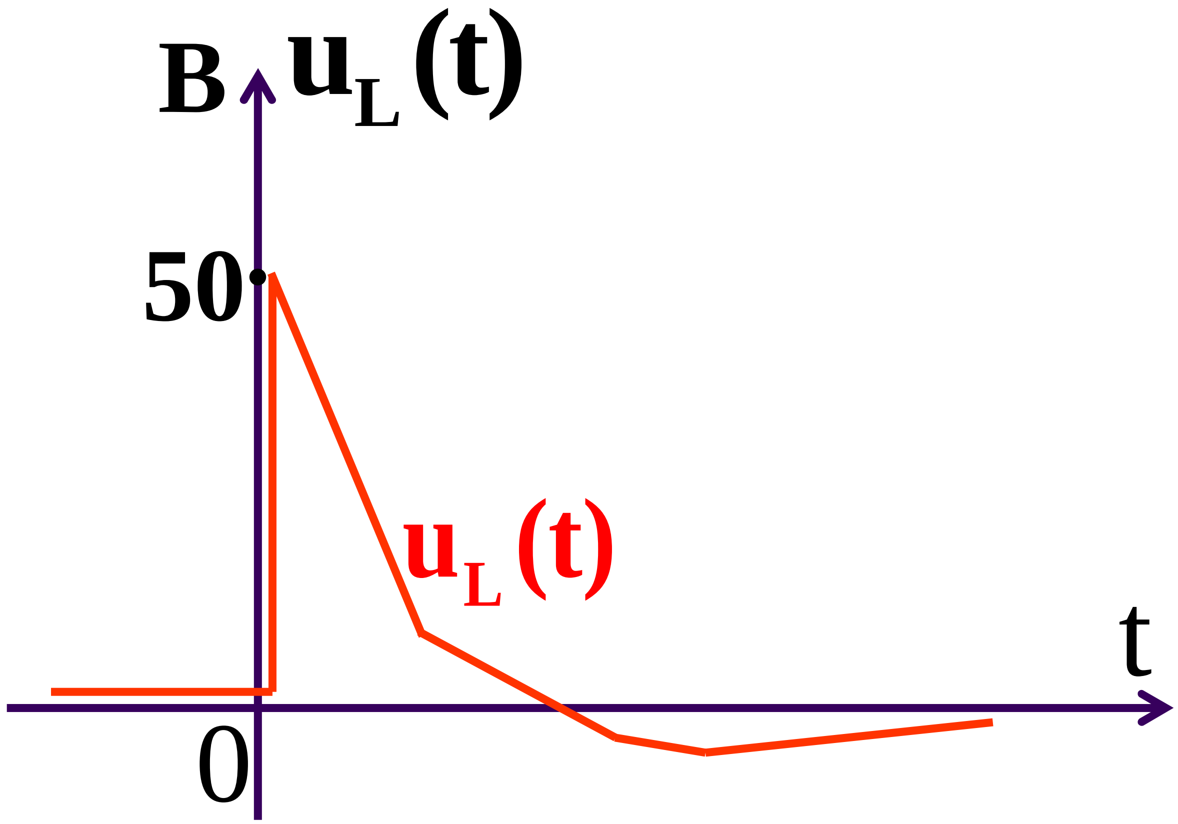
$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$50e^{-100t}+100e^{-100t}(e^{-100t}-1)$$

$$\Rightarrow$$

$$u_L(t)=100e^{-200t}-50e^{-100t},\ \text{В}$$


B
$u_L(t)$
50
$u_L(t)$
t
0

Проверка:

$$\mathbf{u}_{\mathrm{L}}(\infty) = \mathbf{0}$$

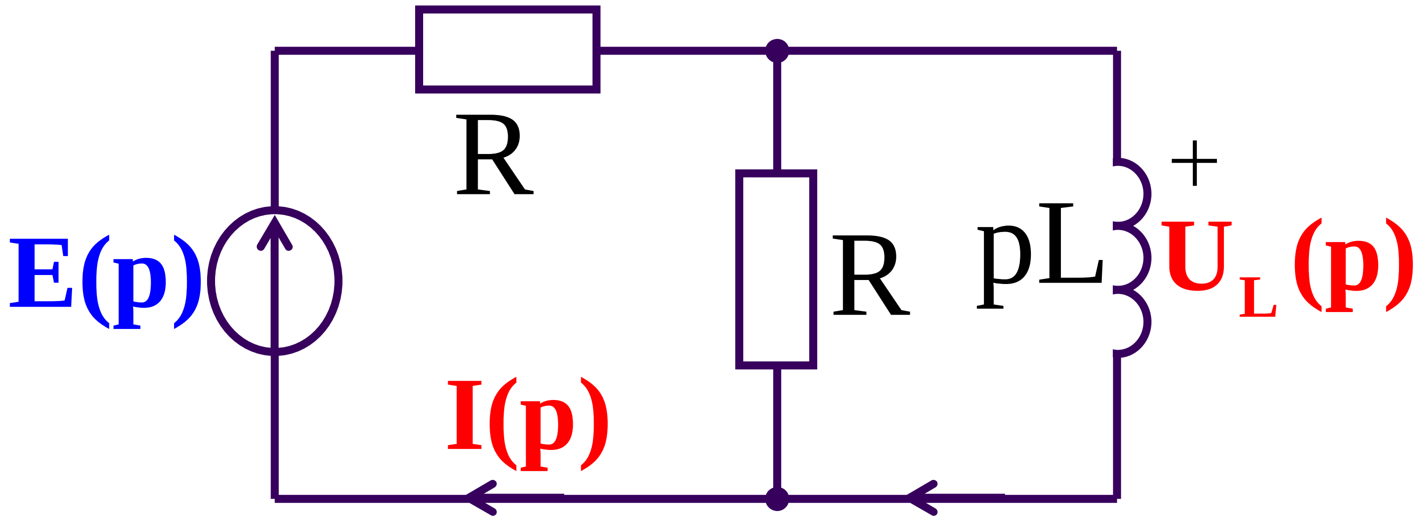
$$\mathbf{u}_{\mathrm{L}}(\mathbf{0+}) = \left[\mathbf{e}(\mathbf{0})/\mathbf{2R}\right]\mathbf{R} = \mathbf{50B} = \mathbf{u}_{\mathrm{L}}(\mathbf{0})$$

При t=0+: L – разрыв;

C - закоротка

Примечание. Можно использовать операторный метод:

$$e(t)=100e^{-200t};\ E(p)=\frac{100}{p+200};\ i_L(0)=i_L(0-)=0$$



По закону Ома в операторной форме:

$$I(p)=\frac{E(p)}{R+\dfrac{RpL}{R+pL}}=\frac{0,25}{100+p}=\frac{D_3(p)}{B_3(p)}$$

По теореме разложения:

$$i(t)=\sum_{k=1}^{n=1}\frac{D_3(p_k)}{B_3^{'}(p_k)}\cdot e^{p_k t}=0,25e^{-100t},\ A$$

По правилу разброса и закону Ома в операторной форме:

$$U_L(p) = I(p)\frac{R}{R+pL}pL = \frac{50p}{(100+p)(200+p)} = \frac{D_4(p)}{B_4(p)}$$

По теореме разложения:

$$u_L(t) = \sum_{k=1}^{n=2}\frac{D_4(p_k)}{B_4'(p_k)}e^{p_k t} = 100e^{-200t} - 50e^{-100t},\ \text{В}$$