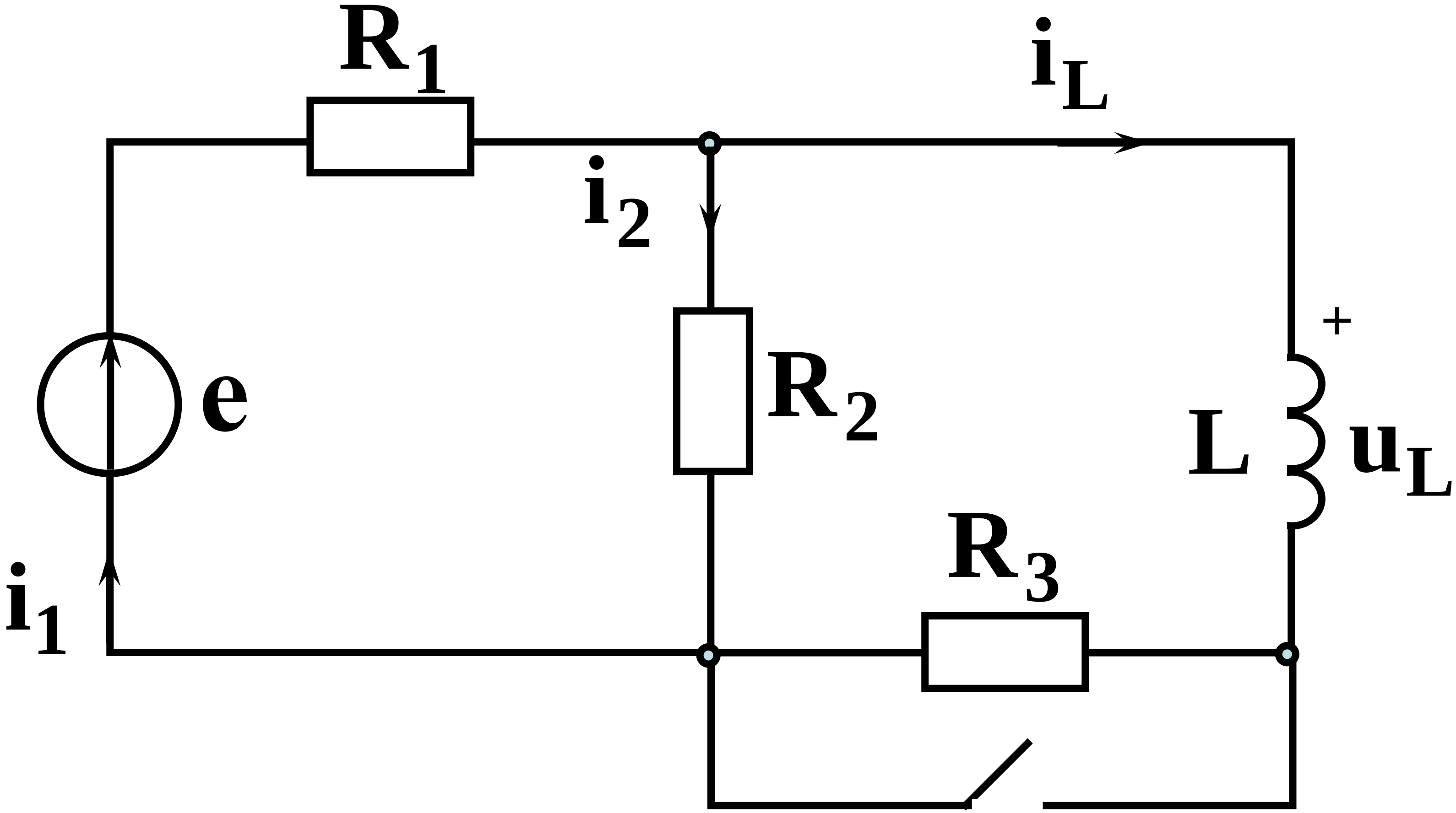
2 лекция

Расчет переходных процессов в цепях 1-го порядка классическим методом

Цепь 1-го порядка **содержит после коммутации одну индуктивность L или одну емкость C и характеризуется линейными дифференциальными уравнениями 1-го порядка с постоянными коэффициентами:**

$$\boxed{a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = F(t)}$$

Пример 1



Дано:

$$e = 100\ \text{В} \qquad R_1 = 100\ \text{Ом}$$

$$L = 1\ \text{Гн} \qquad R_2 = 25\ \text{Ом}$$

$$R_3 = 100\ \text{Ом}$$

Определить: $i_1(t) = ?$

Для схемы после коммутации составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_L & (1) \\ e = R_1 i_1 + u_L & (2) \\ 0 = R_2 i_2 - u_L & (3) \end{cases}$$

причем $$u_L = L\frac{di_L}{dt}$$

Из уравнения 2:

$$i_L = \frac{1}{L}\int (e - R_1 i_1)dt \qquad (4)$$

Из уравнений 3 и 4:

$$i_2 = \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di_L}{dt} = \frac{e - R_1 i_1}{R_2} \qquad (5)$$

Из уравнений 1, 4, 5:

$$i_1 = \frac{e - R_1 i_1}{R_2} + \frac{1}{L}\int (e - R_1 i_1)\,dt \qquad (6)$$

Дифференцируем уравнение 6:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{R_2}\cdot\frac{de}{dt} - \frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{di_1}{dt} + \frac{e}{L} - \frac{R_1}{L} i_1 \qquad (7)$$

Преобразуем уравнение 7 и получаем линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$L\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{di_1}{dt}+R_1 i_1=e+\frac{L}{R_2}\cdot\frac{de}{dt}$$

(8)

Таким образом

$$a_1 = L(1+\frac{R_1}{R_2}) = 5 \ \text{Гн}$$

$$a_0 = R_1 = 100 \ \text{Ом}$$

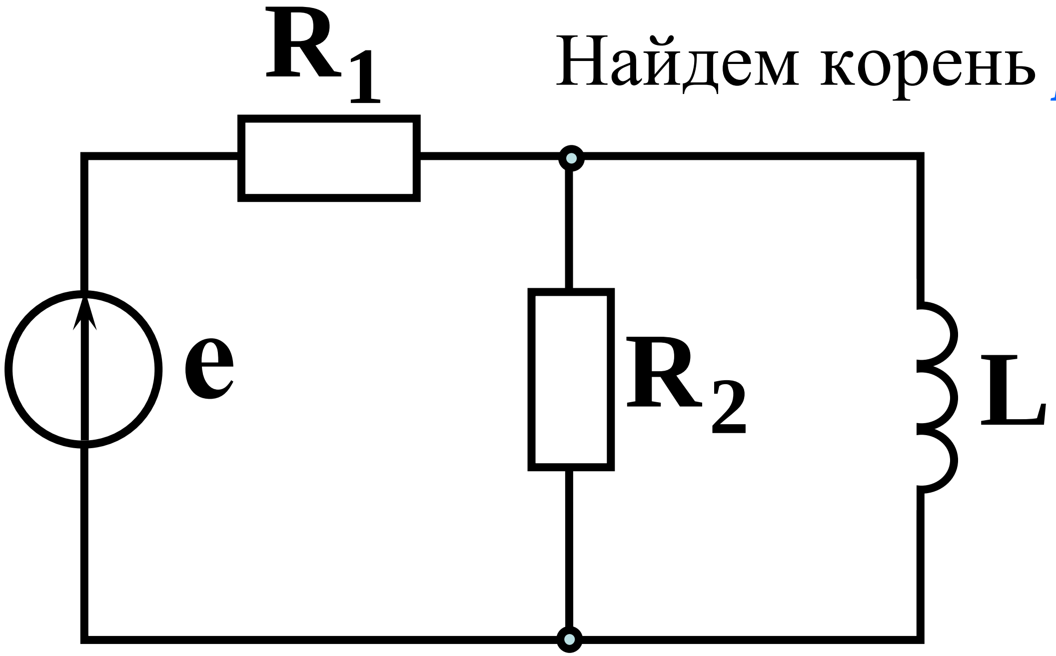
$$F(t) = e + \frac{L}{R_2}\cdot\cancelto{0}{\frac{de}{dt}} = 100 \ \text{В}$$

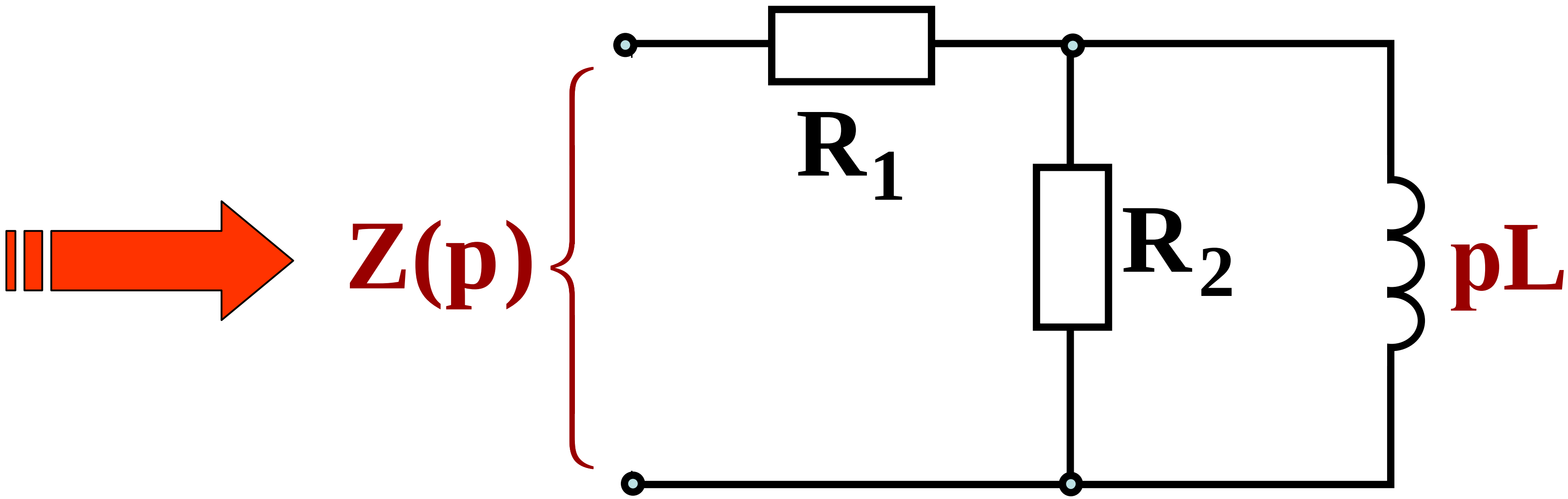
На основании 8 получаем характеристическое уравнение:

$$L\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)p+R_1=0$$

$$p=p_1=-\frac{a_0}{a_1}=-\frac{R_1}{L\left(1+{R_1}/{R_2}\right)}=-\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}=-20\ {1}/{c}$$

Найдем корень p_1 при помощи $Z(p)=0$:





$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 pL}{R_2 + pL} = 0$$

$$p = p_1 = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} = -20 \ {}^{1}\!/\!_{c}$$

Решение уравнения 8:

$$i_1(t) = i_{пр_1}(t) + Ae^{pt}$$

Т.к. $F(t) = e = 100\ В = const,$

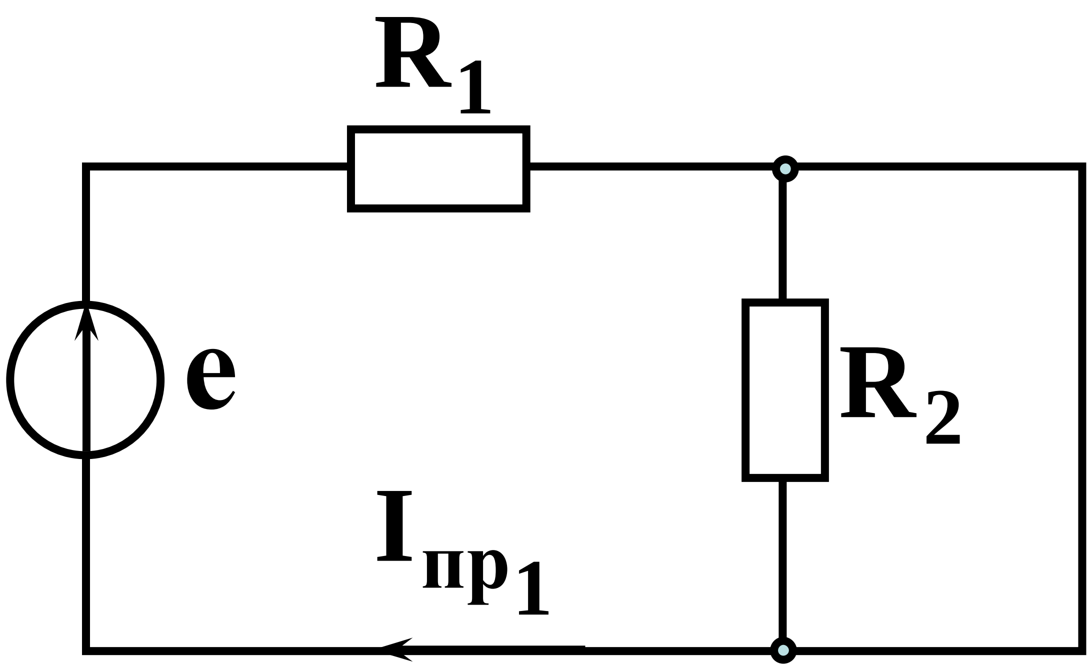
то $i_{пр_1}(t) = I_{пр_1} = const$

Подставим $I_{\text{пр}_1}$ в уравнение 8:

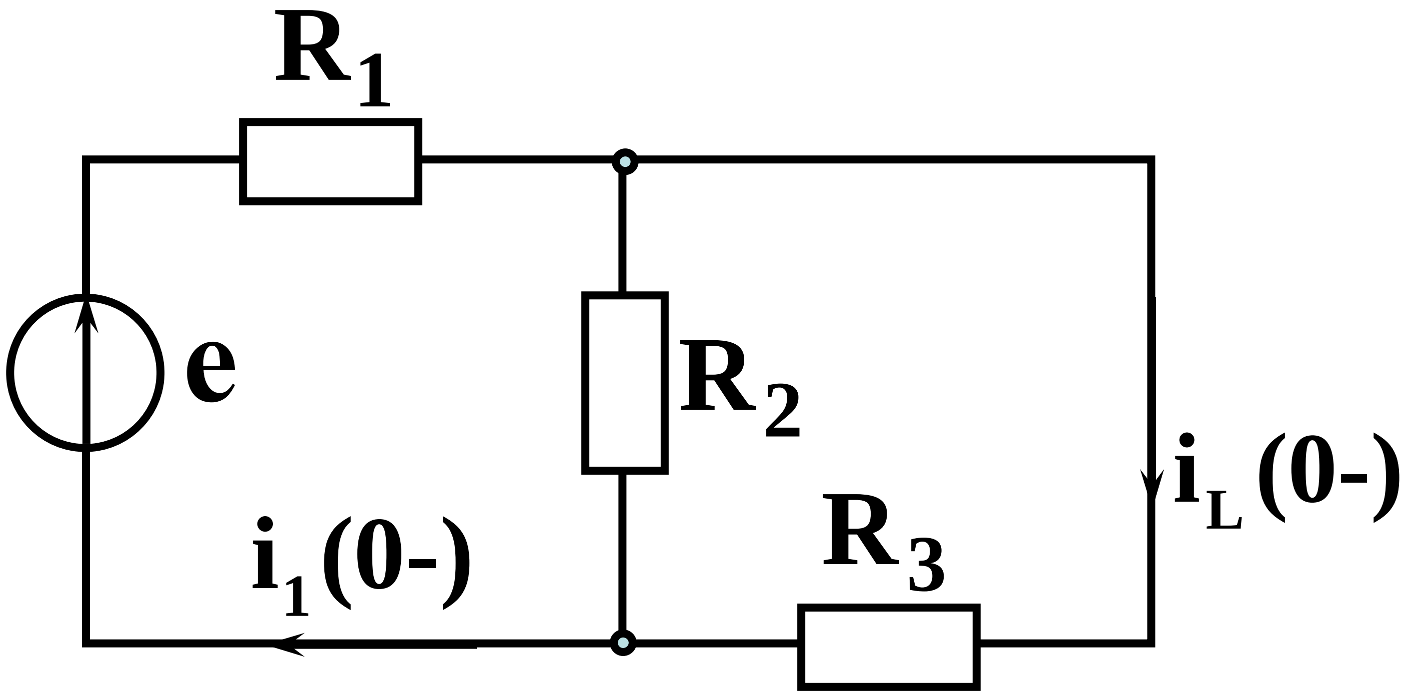
$$L\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\cancelto{0}{\frac{dI_{\text{пр}_1}}{dt}}+R_1 I_{\text{пр}_1}=e+\cancelto{0}{\frac{L}{R_2}\frac{de}{dt}}$$

т.е. $$I_{\text{пр}_1}=\frac{e}{R_1}=1\ \text{A}$$

Однако $I_{пр1}$ можно найти расчетом схемы при $t = \infty$

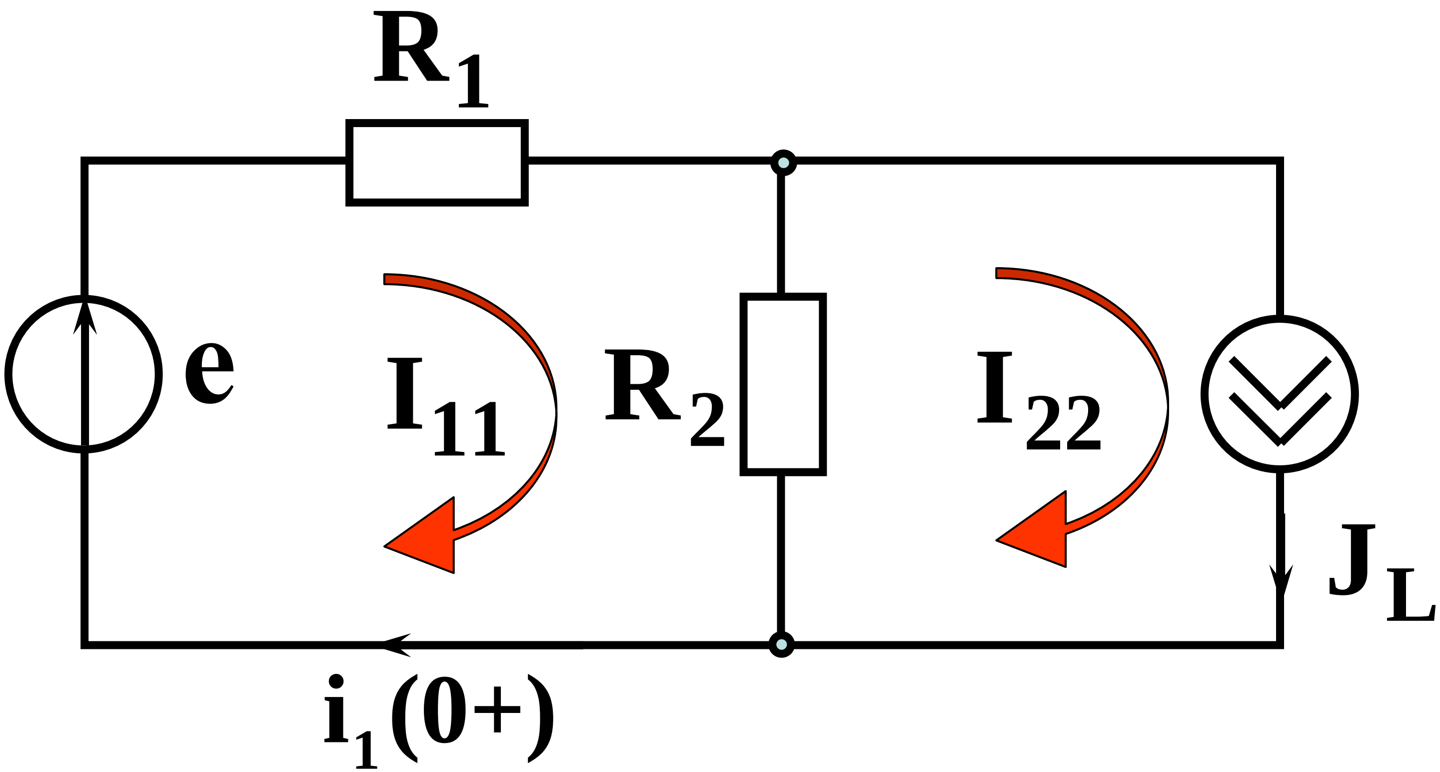


$$I_{пр_1} = \frac{e}{R_1} = 1\ \text{A}$$



$$i_1(0-)=\frac{e}{R_1+\dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}}=0{,}833\ \text{A}$$

$$i_L(0-)=i_1(0-)\frac{R_2}{R_2+R_3}=0{,}167\ \text{A}$$



$$J_L = i_L(0-) = i_L(0+) = 0{,}167\ \text{A}$$

$$I_{22} = J_L \qquad I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22}R_2 = e$$

$$i_1(0+)=I_{11}=\frac{e+J_L R_2}{R_1+R_2}=0{,}833 \ \ \text{А}$$

В результате постоянная интегрирования

$$A = i_1(0+) - I_{пр_1} = -0{,}167 \ \ \text{А}$$

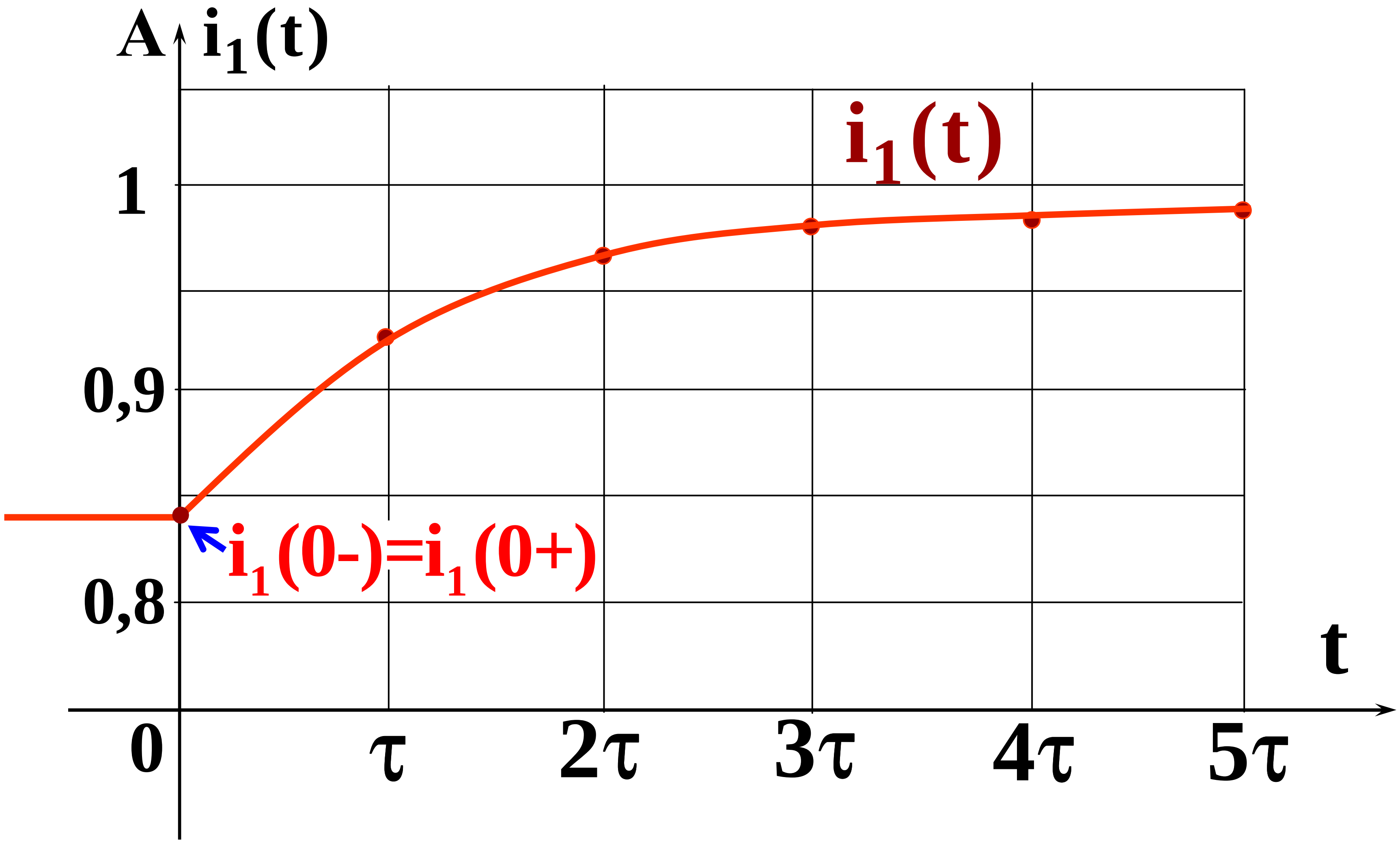
Окончательный результат

$$i_1(t) = 1 - 0{,}167e^{-20t} = 1 - 0{,}167e^{-\frac{t}{\tau}} \ \ \text{А}$$

где $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \ \ \text{с}$ **- постоянная времени**

Расчет удобно вести при помощи таблицы:

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	0.368	0.135	0.05	0.018	0.007
$i_1(t)$	0.833	0.938	0.977	0.992	0.997	0.999



Таким образом длительность переходного процесса равна $t_П = 5\tau$

Порядок расчета классическим методом (без составления дифференциальных уравнений):

1. **Определяются независимые начальные условия (ННУ) при $t=0-$ в схеме до коммутации:**

$$i_L(0-)\ ,\ u_C(0-)$$

2. Определяются зависимые начальные условия (ЗНУ) при $t=0+$ в схеме после коммутации:

$$u_L(0+),\ i_C(0+)$$

и другие напряжения и токи

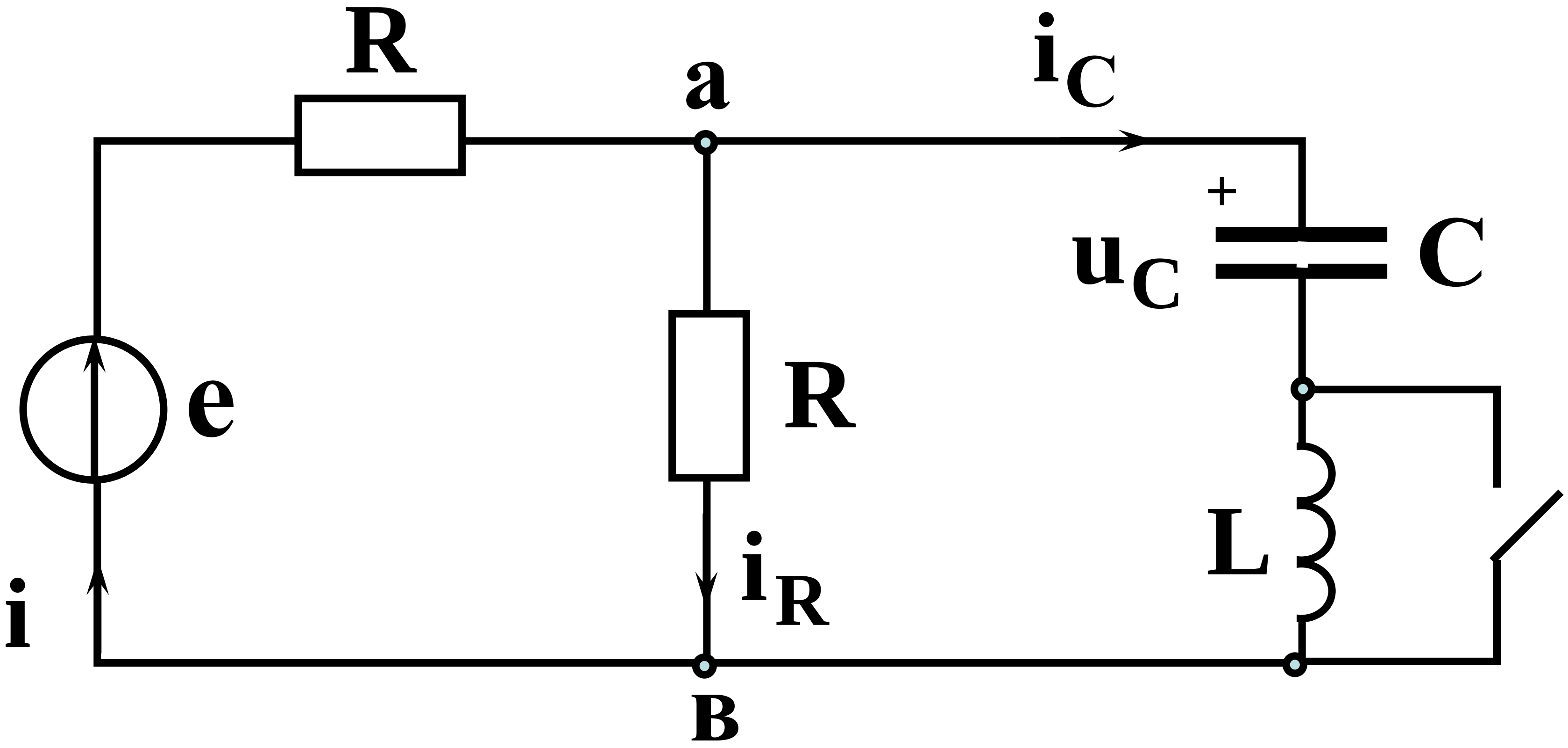
3. Определяются принужденные составляющие в схеме после коммутации при $t = \infty$

4. Определяется корень *p* по $Z(p)=0$ в схеме после коммутации

5. Находятся постоянные интегрирования.

6. Записывается окончательный результат.

Пример 2



Дано:

$$e = 100\sqrt{2}\sin(100t + 45°),\ \ \text{В}$$

$$R = 100\ \ \ \text{Ом}$$

$$L = 1\ \ \ \text{Гн}$$

$$C = 100\ \ \text{мкФ}$$

Определить:

$$i(t) = ?$$

1. Определяем независимые начальные условия: $i_L(0-)=?$ $u_C(0-)=?$

Схема до коммутации, установившийся режим, гармонический источник, символический метод

$$X_L = \omega L = 100 \text{ Ом}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 100 \text{ Ом} \qquad \underline{E} = 100e^{j45^\circ} \text{ В}$$

Т.к. $\underline{Z}_{ab}^{(Д)} = jX_L - jX_C = 0$ **то**

$$\underline{I}^{(Д)} = \underline{I}_C^{(Д)} = \underline{I}_L^{(Д)} = \frac{\underline{E}}{R} = 1e^{j45^\circ} \quad А$$

$$\underline{U}_C^{(Д)} = (-jX_C)\underline{I}_C^{(Д)} = 100e^{-j45^\circ} \quad В$$

В результате

$$i_L^{(Д)} = \sqrt{2}\sin(100t + 45^\circ), \ А$$

$$u_C^{(Д)} = \sqrt{2}\cdot 100\sin(100t - 45^\circ), \ В$$

Тогда

$$i_L(0-) = i_L^{(Д)}(0) = \sqrt{2}\sin 45° = 1\ \text{А}$$

$$u_C(0-) = u_C^{(Д)}(0) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot 100 \sin(-45°) = -100\ \text{В}$$

Причем

$$i(0-) = i_L(0-) = 1\ \text{А}$$

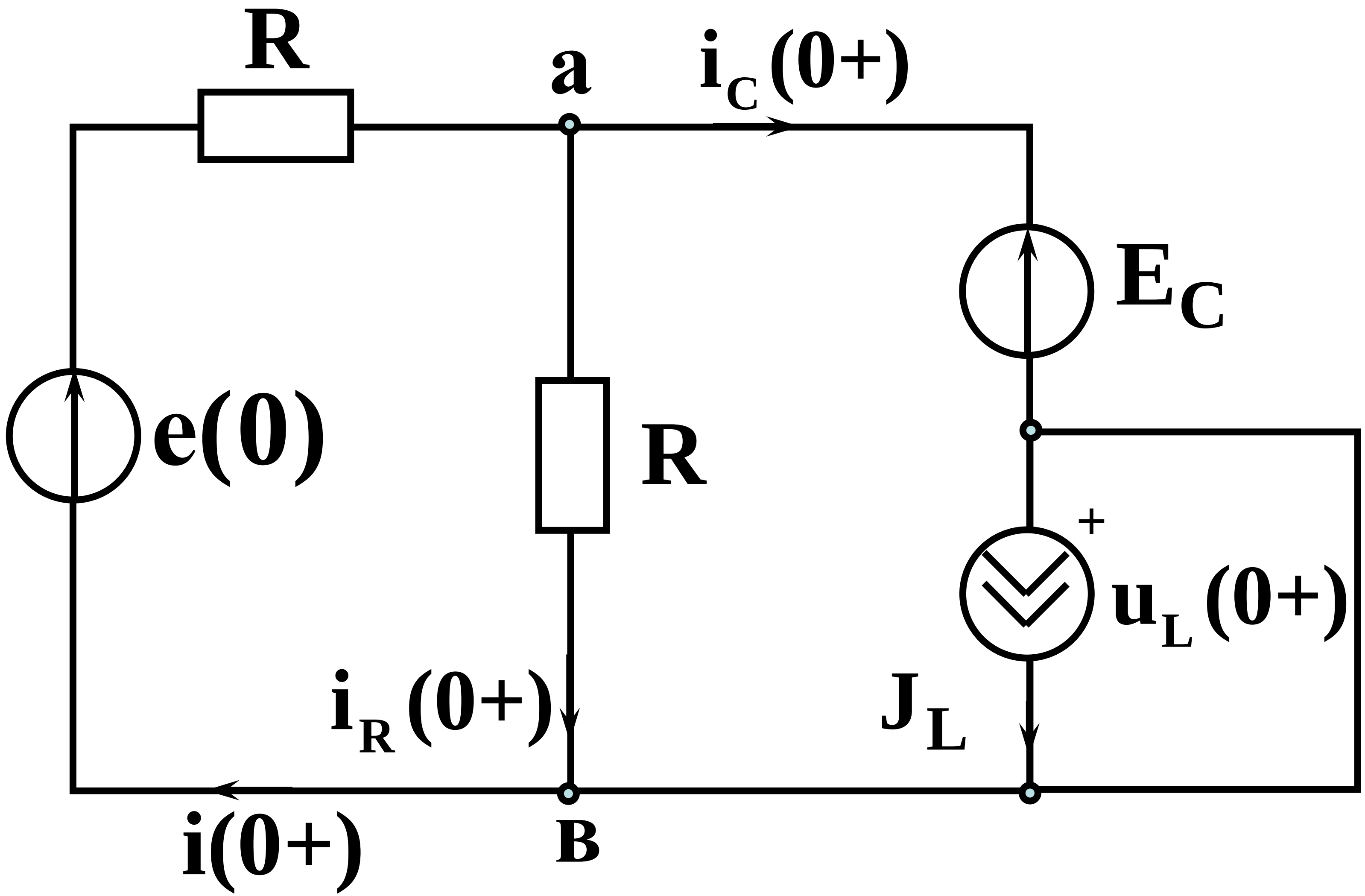
2. Определяем для искомого тока **зависимое** начальное условие: $i(0+)=?$

$$J_L = i_L(0+) = i_L(0-) = 1 \text{ А}$$

$$E_C = u_C(0+) = u_C(0-) = -100 \text{ В}$$

$$e(0) = \sqrt{2} \cdot 100 \sin 45^\circ = 100 \text{ В}$$

Схема после коммутации в момент $t = 0+$:



Т.к. $\quad u_L(0+)=0,$

то $\quad e(0)-E_C=R\cdot i(0+)$

Тогда

$$i(0+)=\frac{e(0)-E_C}{R}=2\ \text{А}$$

3. Определяем принужденную составляющую искомого тока: $i_{пр}(t) = ?$

Схема после коммутации, установившийся режим, гармонический источник, символический метод

Сопротивление относительно ЭДС:

$$\underline{Z}^{(п)} = R + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} = 158e^{-j18,4^\circ} \text{ Ом}$$

Тогда по закону Ома:

$$\underline{I}_{пр} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}^{(п)}} = 0{,}63e^{j63{,}4^\circ} \quad A$$

В результате

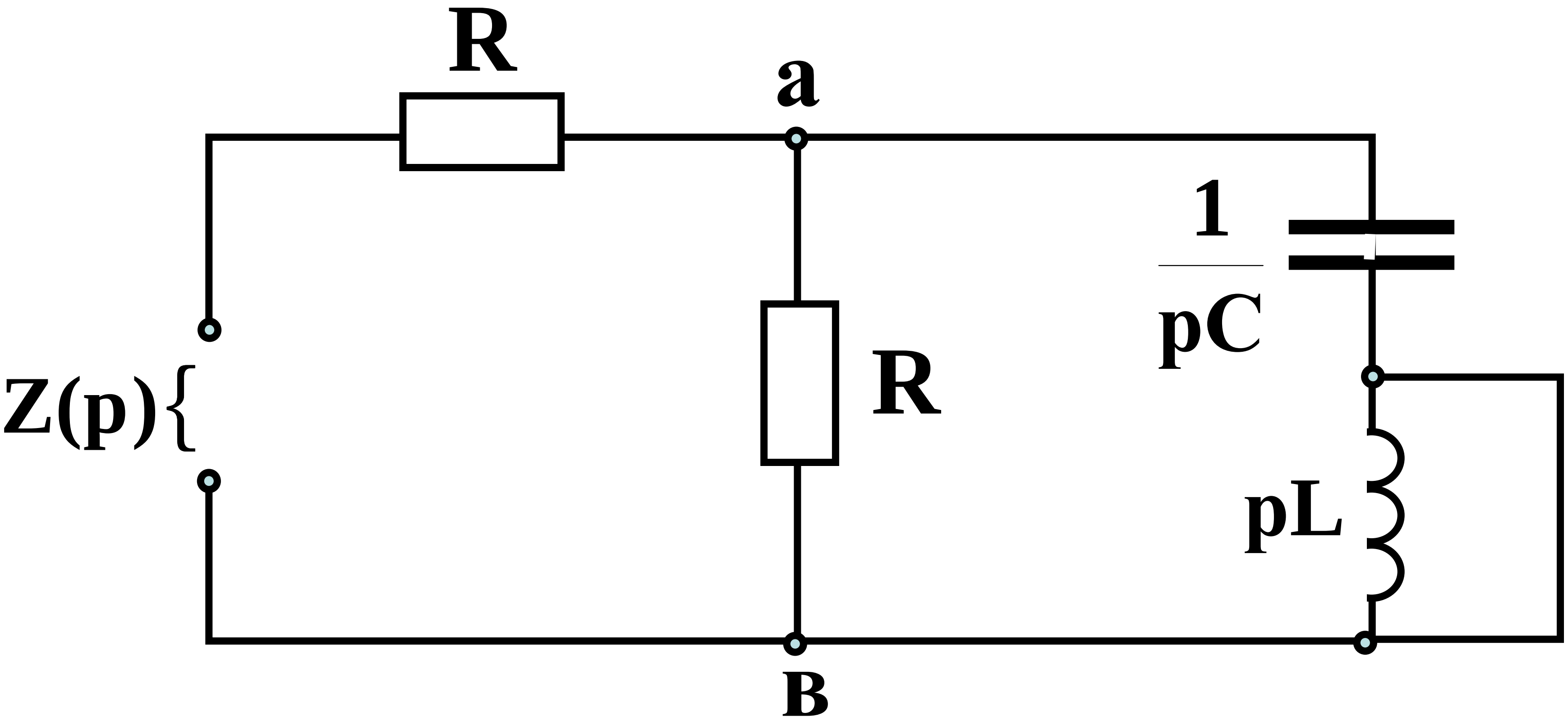
$$i_{пр}(t) = \sqrt{2} \cdot 0{,}63 \sin(100t + 63{,}4^\circ) \quad A$$

причем

$$i_{пр}(0) = \sqrt{2} \cdot 0{,}63 \sin 63{,}4^\circ = 0{,}794 \quad A$$

4. Определяем корень характеристического уравнения: p = ?

Схема после коммутации



$$Z(p) = R + \frac{R\left(\frac{1}{pC}\right)}{R + \frac{1}{pC}} = 0$$

$$p = -\frac{2}{RC} = -200\ \frac{1}{\text{с}}$$

5. Находим постоянную интегрирования:

$$A = i(0+) - i_{пр}(0) = 2 - 0{,}794 = 1{,}206 \;\; (A)$$

6. Окончательный результат

$$i(t) = i_{пр}(t) + i_{св}(t) = i_{пр}(t) + Ae^{pt}$$

или

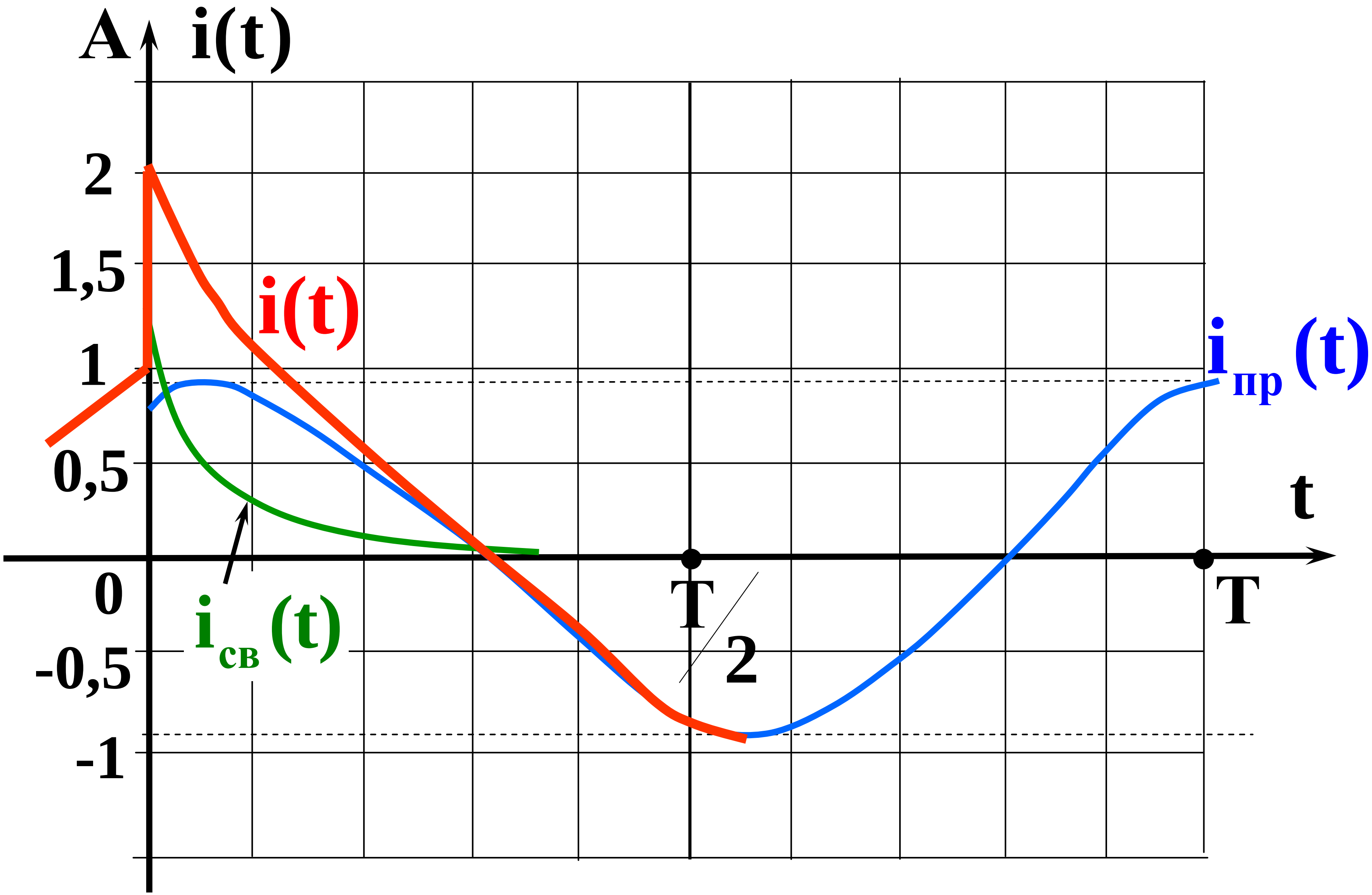
$$i(t)=0{,}63\sqrt{2}\,\sin(100t+63{,}4°)+1{,}206e^{-200t} \;\; (A)$$

Причем

$$\tau = \frac{1}{|p|} = 5 \cdot 10^{-3} (c)$$

$$t_{п} = 5\tau = 2{,}5 \cdot 10^{-2} (c)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 6{,}28 \cdot 10^{-2} (c)$$


A
i(t)
2
1,5
i(t)
1
$i_{пр}(t)$
0,5
t
0
T/2
T
$i_{св}(t)$
-0,5
-1

Расчет переходных процессов в цепях 2-го порядка классическим методом

Цепь 2-го порядка после коммутации содержит:

- L и C, или две L , или две C

Эта цепь характеризуется линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_2\frac{d^2f(t)}{dt^2}+a_1\frac{df(t)}{dt}+a_0f(t)=F(t) \qquad (1)$$

которые имеют решения:

$$f(t)=f_{пр}(t)+f_{св}(t) \qquad (2)$$

Где:

$f(t)$ -напряжение или ток переходного процесса;

a_0, a_1, a_2 -постоянные коэффициенты;

$F(t)$ -функция, определяемая источниками после коммутации;

$f_{пр}$ и $f_{св}$ -принужденная и свободная составляющие.

На основании уравнения 1 записываем характеристическое уравнение:

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \qquad (3)$$

Корни уравнения 3 равны:

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2}}$$

В зависимости от корней возможны следующие виды переходных процессов

1. Если $\frac{a_1^2}{4a_2^2} > \frac{a_0}{a_2}$ **, то корни** $p_{1,2}$

вещественные, отрицательные и разные – это *апериодический* переходный процесс:

$$f_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Где A_1, A_2 **-постоянные интегрирования**

$\tau_1 = |p_1|^{-1}$, $\tau_2 = |p_2|^{-1}$ **- постоянные времени экспонент**

$t_п = 5 \cdot \max(\tau_{1,2})$ **-длительность переходного процесса**

2. Если $\frac{a_1^2}{4a_2^2}=\frac{a_0}{a_2}$ **, то корни** $p_{1,2}$

вещественные, отрицательные и одинаковые – это *критический* переходный процесс:

$$f_{св}(t)=(A_1+A_2t)e^{pt},$$

Где $p=p_1=p_2=-\frac{a_1}{2a_2}\left(1/c\right)$

$t_п\approx 5\left|p\right|^{-1}$ **-длительность переходного процесса**

3. Если $\dfrac{a_1^2}{4a_2^2} < \dfrac{a_0}{a_2}$, то корни $p_{1,2}$

комплексные и сопряженные – это *колебательный* *или* *периодический* переходный процесс:

$$f_{св}(t) = A \cdot e^{-\delta_{св} t} \cos(\omega_{св} t + \alpha),$$

Где

$$p_{1,2} = -\delta_{св} \pm j\omega_{св} \left(1/c\right)$$

A, α **- постоянные интегрирования**

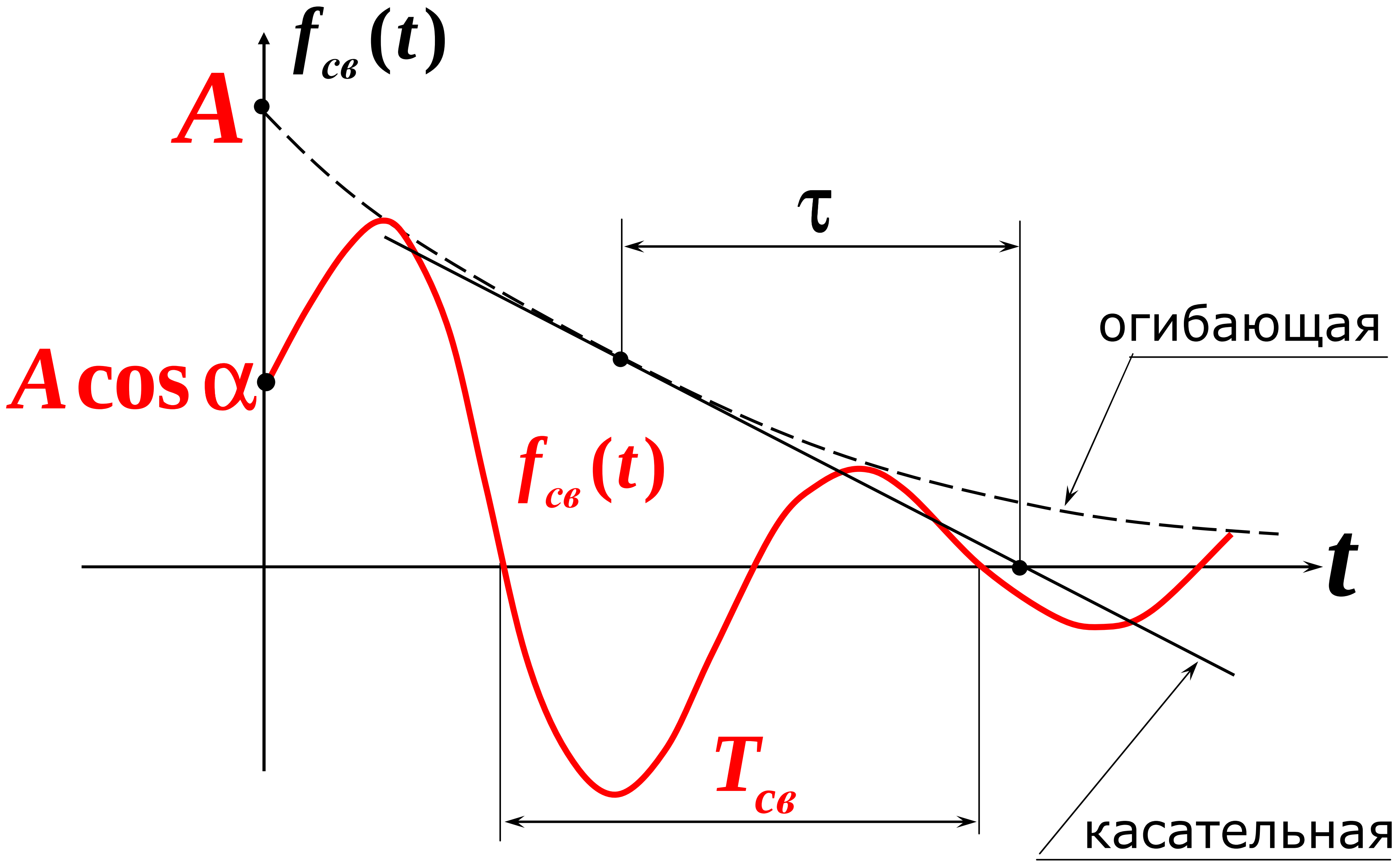
$$\delta_{св} = \frac{a_1}{2a_2} \ \left(1/c\right)$$ - **коэффициент затухания свободных колебаний**

$$\omega_{св} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2} - \frac{a_1^2}{4a_2^2}} \ \left(1/c\right)$$ - **угловая частота свободных колебаний**

$$T_{св} = 2\pi/\omega_{св} \ (c)$$ - **период свободных колебаний**

$$\tau = \delta_{св}^{-1} \ (c)$$ - **постоянная времени огибающей свободных колебаний**

$$t_п = 5\tau \ (c)$$ - **длительность переходного процесса**



$f_{св}(t)$
A
τ
огибающая
A cos α
$f_{св}(t)$
t
$T_{св}$
касательная

Порядок расчета переходных процессов в цепях 2-го порядка с постоянными или периодическими источниками

1. Для искомого напряжения или тока $f(t)$ определяются начальные условия $f(0+)$ и $\left.\dfrac{df(t)}{dt}\right|_{t=0+}$

2. Определяется принужденная составляющая

$$f_{np}(t)$$

3. При помощи $Z(p)=0$ находятся корни характеристического уравнения p_1 и p_2

4. В зависимости от вида корней p_1 и p_2 записывается свободная составляющая $f_{св}(t)$

5. По начальным условиям

$$f(0+) \text{ и } \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0+}$$

находятся постоянные интегрирования

6. Записывается

окончательный результат

$$f(t) = f_{пр}(t) + f_{св}(t)$$