15 лекция

Теорема Умова-Пойнтинга

Эта теорема как **баланс мощностей** выражает **закон сохранения энергии** электромагнитного поля:

$$P_{\text{И}} = P_{\text{Т}} + P_{\text{ЭМ}} + P_{\text{П}} =$$

$$= \int\limits_V \gamma E^2 \cdot dV + \frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial t} + \oint\limits_S \overline{\Pi} \cdot \overline{dS} \text{ , Вт}$$

Мощность источников $P_{\text{И}}$ **в объеме** V**, ограниченного замкнутой поверхностью** S**, равна сумме мощностей в том же объеме** V **:**

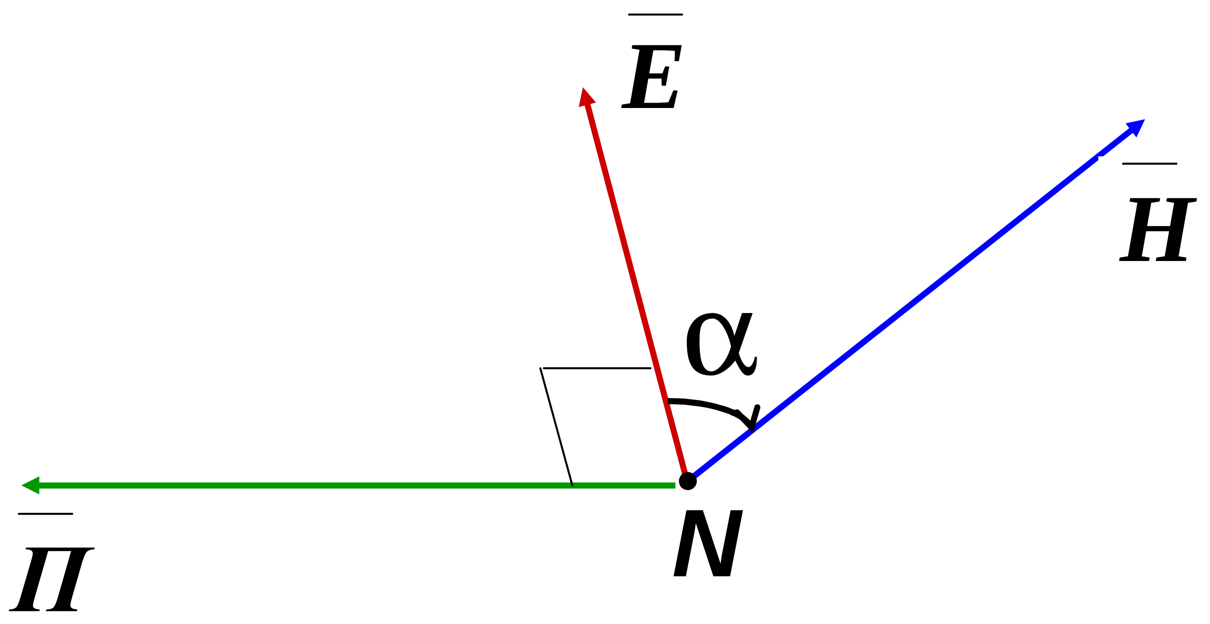
- **мощности** $P_{\text{Т}}$ **тепловых потерь;**
- **мощности** $P_{\text{ЭМ}}$ **изменения энергии электромагнитного поля;**
- **мощности** $P_{\text{П}}$**, выходящей (входящей) через поверхность** S**, которая равна потоку вектора** ***Пойнтинга*** $\overline{\Pi}$ **через эту поверхность.**

Направление вектора **Пойнтинга** соответствует направлению передачи энергии.

Вектор Пойнтинга $\overline{\Pi}$ - как мощность потока энергии на единицу площади (Вт/м^2), перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\overline{E}, \overline{H}$ и образует с ними правовинтовую систему:

$\overline{E}$ вращается к $\overline{H}$ по кратчайшему пути.

- **Например:**



Причем модуль вектора Пойнтинга равен:

$$П = E \cdot H \cdot \sin\alpha \;,\; \text{Вт}/\text{м}^2.$$

Уравнения электростатического поля

Электростатическое поле (ЭСП) -

это частный случай ЭМП, создаваемый совокупностью зарядов, неподвижных в пространстве и неизменных во времени.

Для ЭСП справедливы следующие уравнения:

$$\mathbf{rot}\,\overline{E} = 0$$

$$\mathbf{div}\,\overline{D} = \rho$$

$$\oint_l \overline{E} \cdot \overline{dl} = 0$$

$$\oint_S \overline{D} \cdot \overline{dS} = \sum \pm q$$

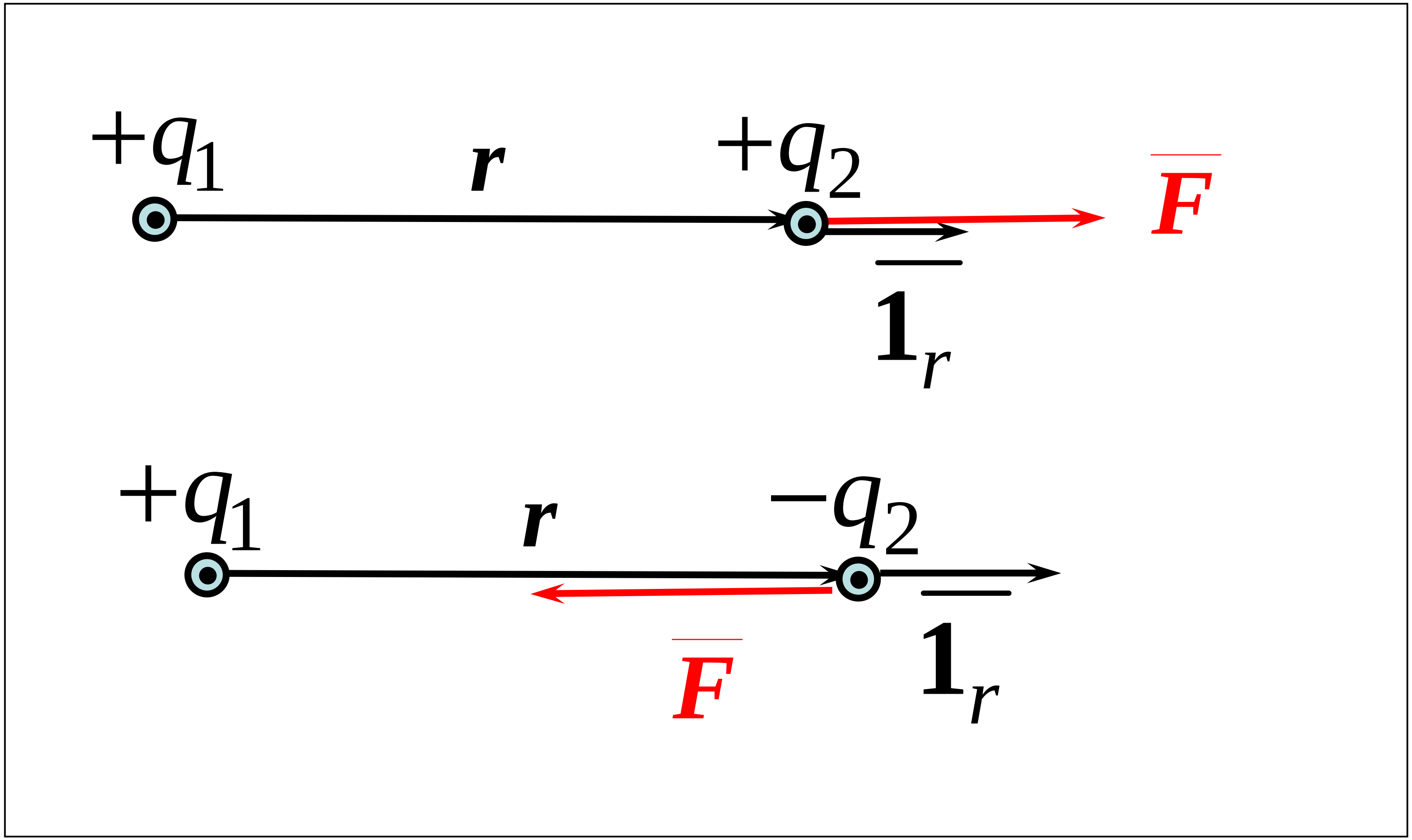
- **ЭСП безвихревое и его истоками являются электрические заряды.**

- **ЭСП проявляется силовым взаимодействием электрических зарядов.**

- Два точечных заряда q_1 и q_2 взаимодействуют с силой:

$$\overline{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_a r^2} \cdot \overline{\mathbf{1}_r}, \ \mathbf{Н}$$

- закон Кулона.


+q1
r
+q2
F
1r
+q1
r
−q2
F
1r

Где:

$\bar{\mathbf{1}}_r$ - единичный вектор, направленный от положительного заряда по прямой, соединяющей заряды, причем при ***F* >0** заряды отталкиваются,

а при ***F* <0** – притягиваются.

Напряженность ЭСП

- это силовая векторная величина, равная

$$\overline{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\overline{F}}{q}, \ \mathbf{В}/\mathbf{м}$$

q - пробный точечный заряд, вносимый в данную точку поля.

Для ЭСП, создаваемого точечным зарядом q_1, напряженность равна

$$\overline{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_a \cdot r^2} \cdot \overline{\mathbf{1}_r}, \ \mathbf{В}/\mathbf{м}$$

Потенциал ЭСП φ -

это скалярная величина, определяемая с точностью до постоянной и характеризуемая следующими уравнениями:

$$\overline{E} = -\mathbf{grad}\,(\varphi)$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}$$

- уравнение **Пуассона**

$$\nabla^2\varphi = 0$$

- уравнение **Лапласа**

$\mathbf{grad}\,(\varphi)$ - векторная величина, равная скорости изменения потенциала и направленная в сторону его наибольшего изменения.

$$\nabla^2\varphi = \mathbf{div}\left[\mathbf{grad}\,(\varphi)\right]$$

- лапласиан, имеющий определенные записи в различных системах координат.

Для ЭСП точечного заряда q_1 имеем

$$\varphi = -\int E dr = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_a \cdot r} + A, \text{ В}$$

где A – постоянная интегрирования.

ЭСП является потенциальным полем, т.к. интеграл

$$\int_A^B \overline{E}\,\overline{dl} = \varphi_A - \varphi_B$$

не зависит от пути интегрирования.

Электростатическое поле графически изображается с помощью силовых и эквипотенциальных линий, которые взаимно перпендикулярны.

Эквипотенциальные линии имеют постоянный потенциал и определяются уравнениями:

$$\varphi_k = \mathrm{const}.$$

Силовые линии или линии напряженности – это такие линии, в каждой точке которой вектор $\overline{E}$ направлен по касательной, поэтому

$$\left[\overline{E}\times\overline{dl}\right]=0\,.$$

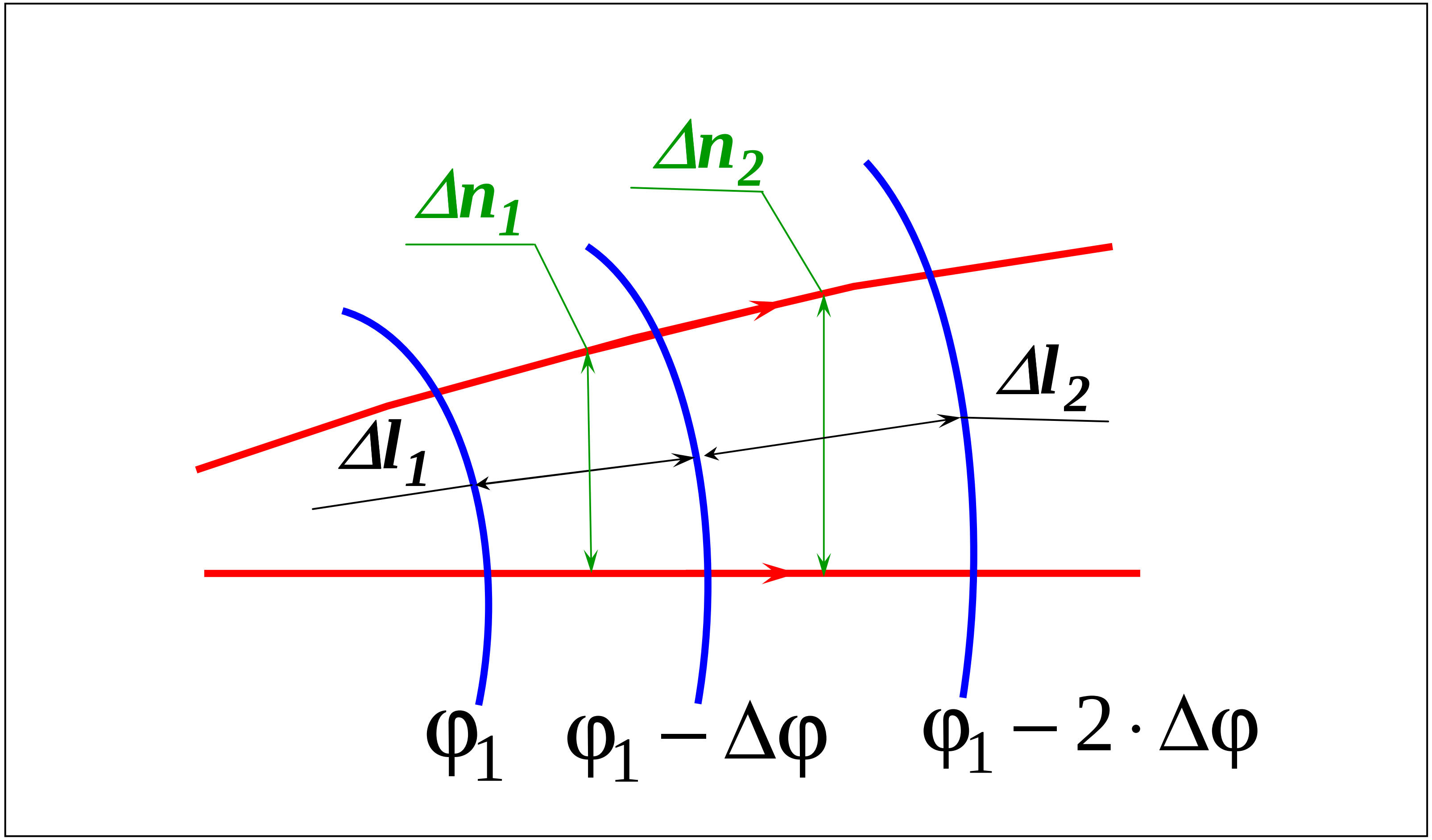
Силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах.

Силовые линии являются линиями постоянной функции потока вектора напряженности.

Построение картины плоскопараллельного поля:

- **разность потенциалов между соседними линиями равного потенциала должна быть одинаковой;**
- **взаимно перпендикулярные силовые линии и линии равного потенциала образуют ячейки, средняя длина которых равна их средней ширине:**

$$\Delta l = \Delta n .$$



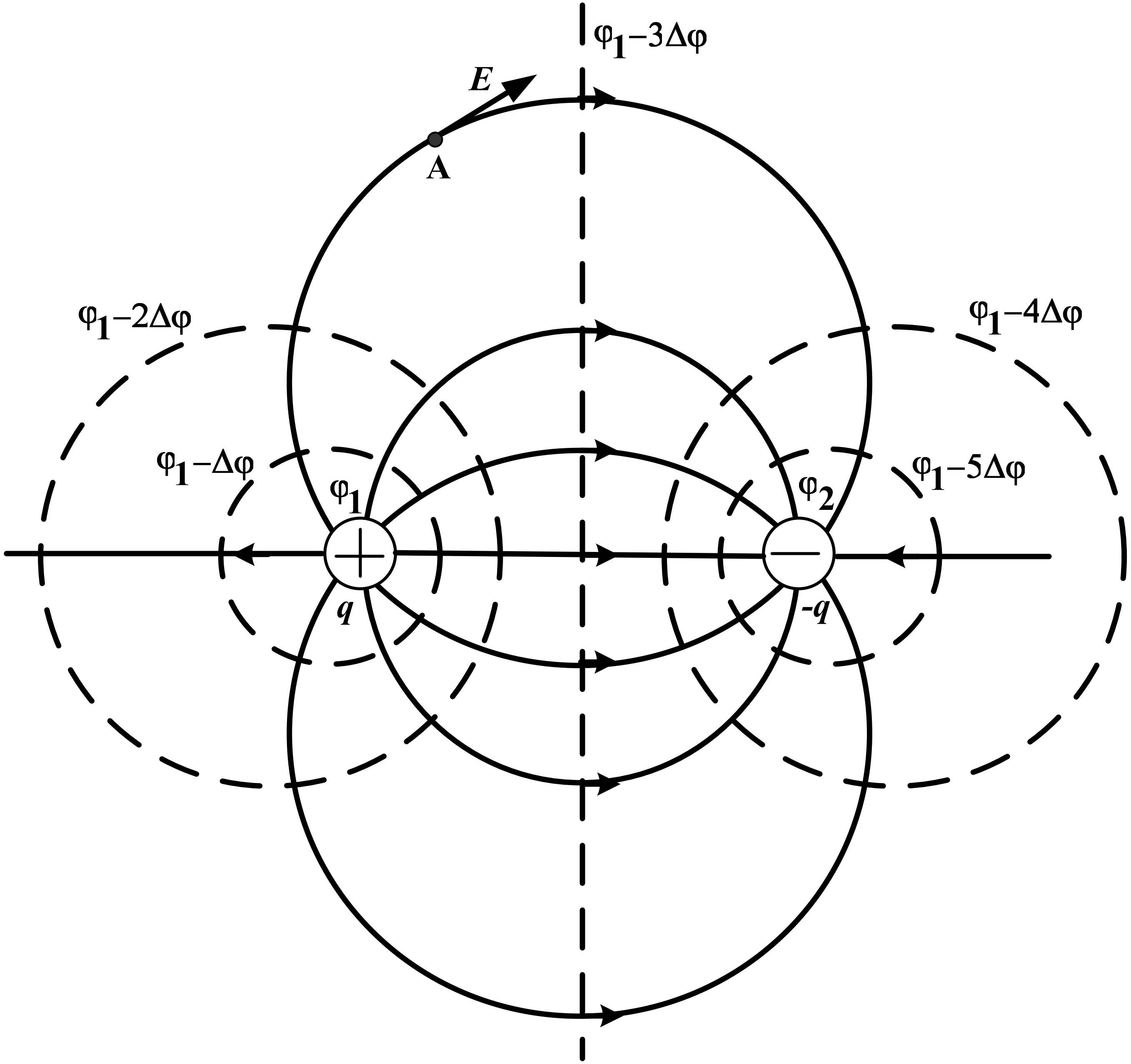
$$\Delta l_1 = \Delta n_1$$

$$\Delta l_2 = \Delta n_2$$

Картина ЭСП двух разноименно заряженных точечных зарядов $+q$ и $-q$:

$N=6$ – число ячеек в трубке;

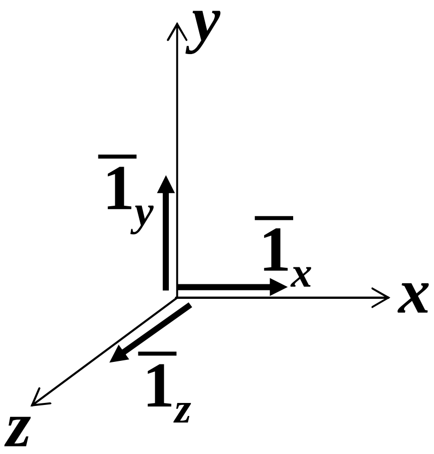
$M=8$ – число трубок



φ1−3Δφ
E
A
φ1−2Δφ
φ1−4Δφ
φ1−Δφ
φ1−5Δφ
φ1
φ2
q
-q

Примечание. **В декартовой системе координат:**

$\bar{1}_x, \bar{1}_y, \bar{1}_z$ **– единичные векторы;**



$$\bar{E} = E_x \cdot \bar{1}_x + E_y \cdot \bar{1}_y + E_z \cdot \bar{1}_z\,;$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}\,;$$

$$\operatorname{rot}\bar{E} = \begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\cdot \bar{1}_x +$$

$$+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\cdot \bar{1}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\cdot \bar{1}_z = 0;$$

$$\overline{D} = \varepsilon_a \overline{E}; \qquad D_{x,y,z} = \varepsilon_a E_{x,y,z};$$

$$\overline{D} = D_x \cdot \overline{1}_x + D_y \cdot \overline{1}_y + D_z \cdot \overline{1}_z;$$

$$\operatorname{div}\overline{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho;$$

$$\overline{E} = -\operatorname{grad}(\varphi) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\overline{1}_x - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\overline{1}_y - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\overline{1}_z;$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Интегральные параметры электростатического поля

а) энергия

$$W_Э = \int\limits_V \frac{\varepsilon_a \cdot E^2}{2} dV, \text{ Дж}$$

Для ЭСП, создаваемого системой проводящих тел с зарядами q_k и потенциалами $\varphi_к$ энергия равна:

$$W_Э = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(q_k \cdot \varphi_k\right) \text{ , Дж}$$

б) сила по координате *x*, действующая на заряженное тело в ЭСП:

$$F_x = \pm \frac{dW_Э}{dx}, \text{ Н}$$

где знак «+» при потенциалах $\varphi_k = \mathrm{const}$, знак «-» при зарядах $q_k = \mathrm{const}$;

в) емкость между двумя телами с зарядами $+q$ и $-q$ и потенциалами φ_1 и φ_2 :

$$\boxed{C = \frac{|q|}{|\varphi_1 - \varphi_2|},\ \text{Ф}}$$

причем $W_\text{э} = \dfrac{Cu^2}{2} = \dfrac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}$, Дж.

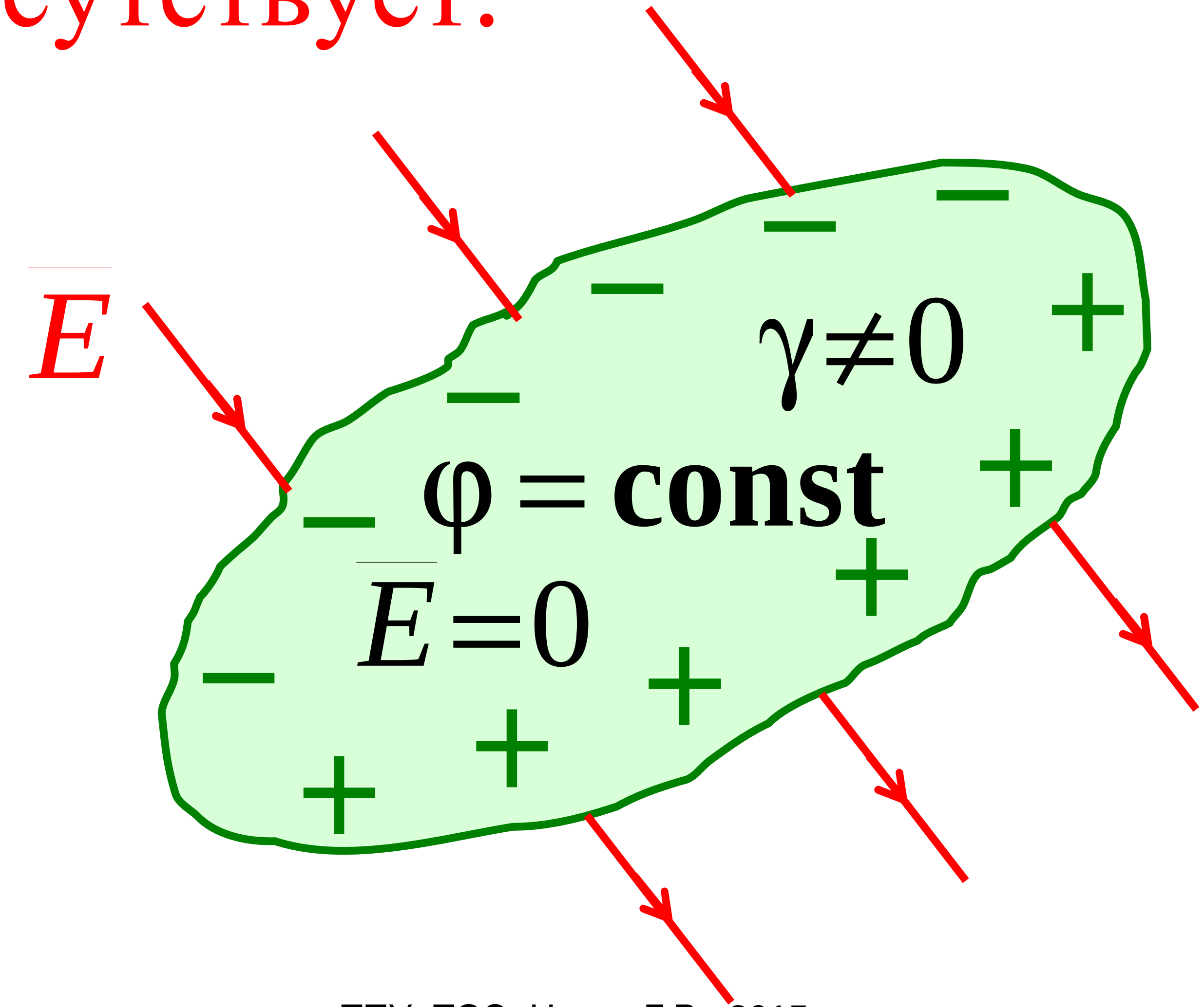
Основными задачами расчета ЭСП являются:

- **определение напряженности $\bar{E}$ для оценки электрической прочности изоляции;**
- **определение емкости C для составления схем замещения.**

Граничные условия электростатического поля

При расчете ЭСП используются граничные условия, которые применяются для определения постоянных интегрирования и параметров поля на границе раздела двух сред.

1. ЭСП внутри проводящего тела отсутствует:

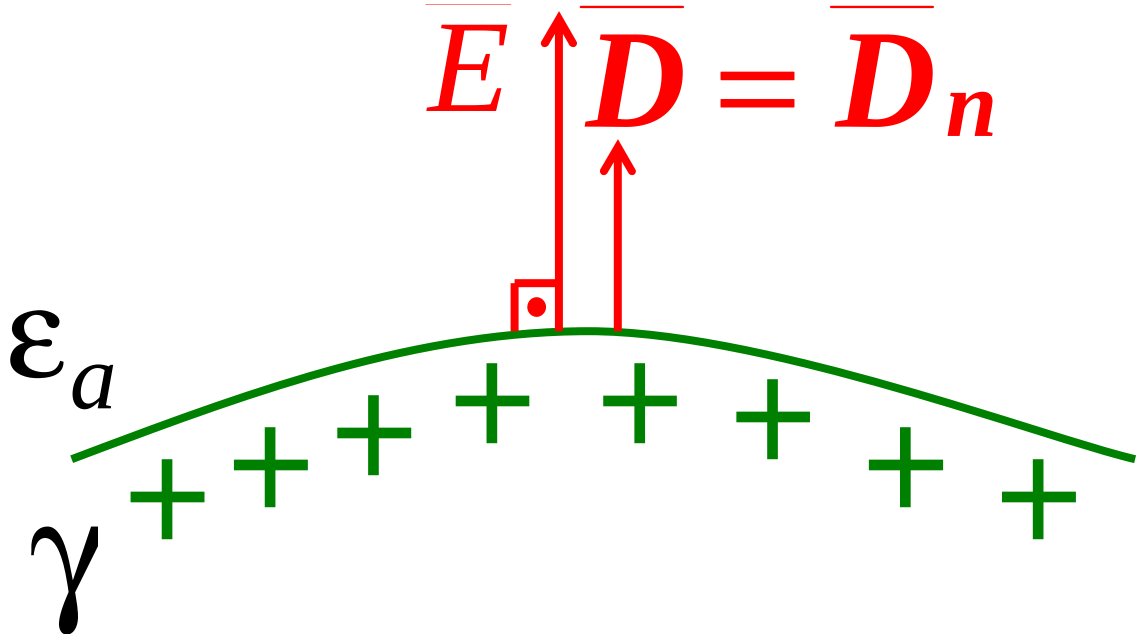


Если бы $\varphi \neq \mathbf{const}$, то возник бы ток в проводнике, который уровнял бы потенциал φ.

Поэтому $\varphi = \mathbf{const}$, тогда в проводнике напряженность

$$\overline{E} = -\mathbf{grad}(\varphi) = 0 .$$

2. На границе раздела проводящего тела и диэлектрика вектора $\overline{\boldsymbol{E}}$ и $\overline{\boldsymbol{D}}$ перпендикулярны к поверхности проводящего тела:



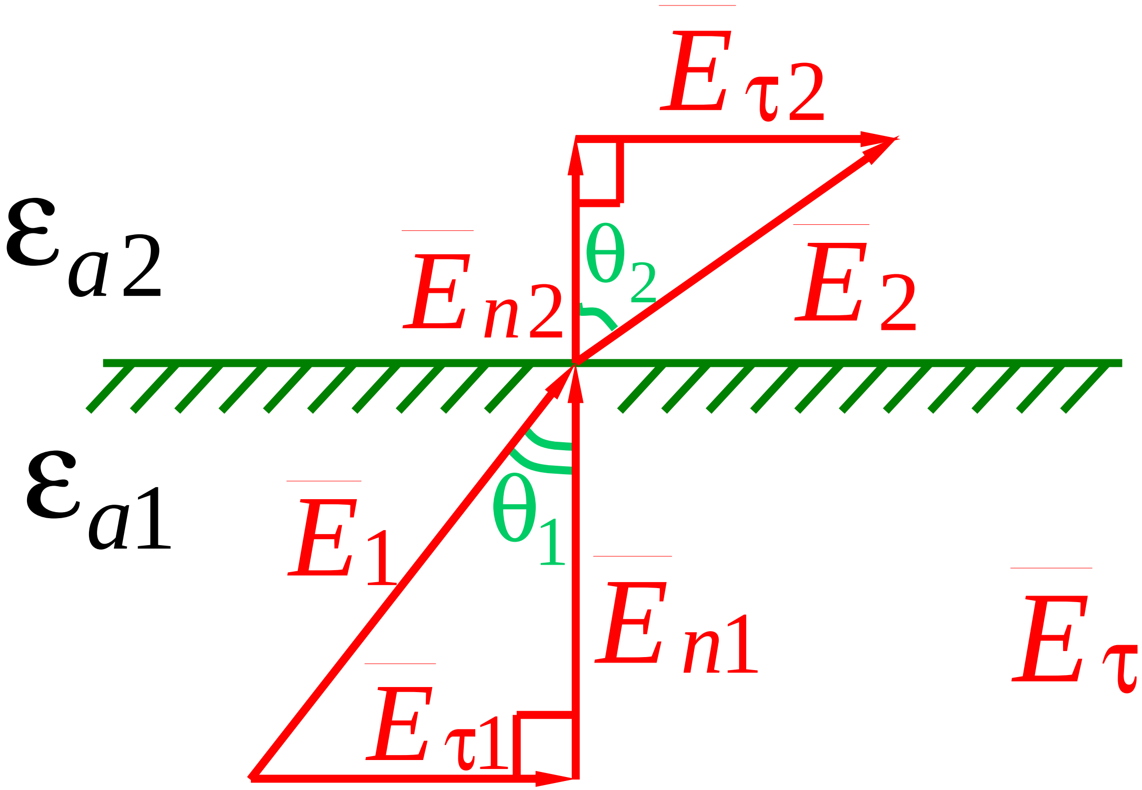
$$\overline{E}_{\tau} = 0$$

$$D = D_n = \sigma_{своб},\ ^{Кл}\!/_{м^2}$$

Поверхностная плотность свободных зарядов на поверхности проводящего тела равна нормальной составляющей вектора электрической индукции: $\sigma_{\text{своб}}=D_n=D$.

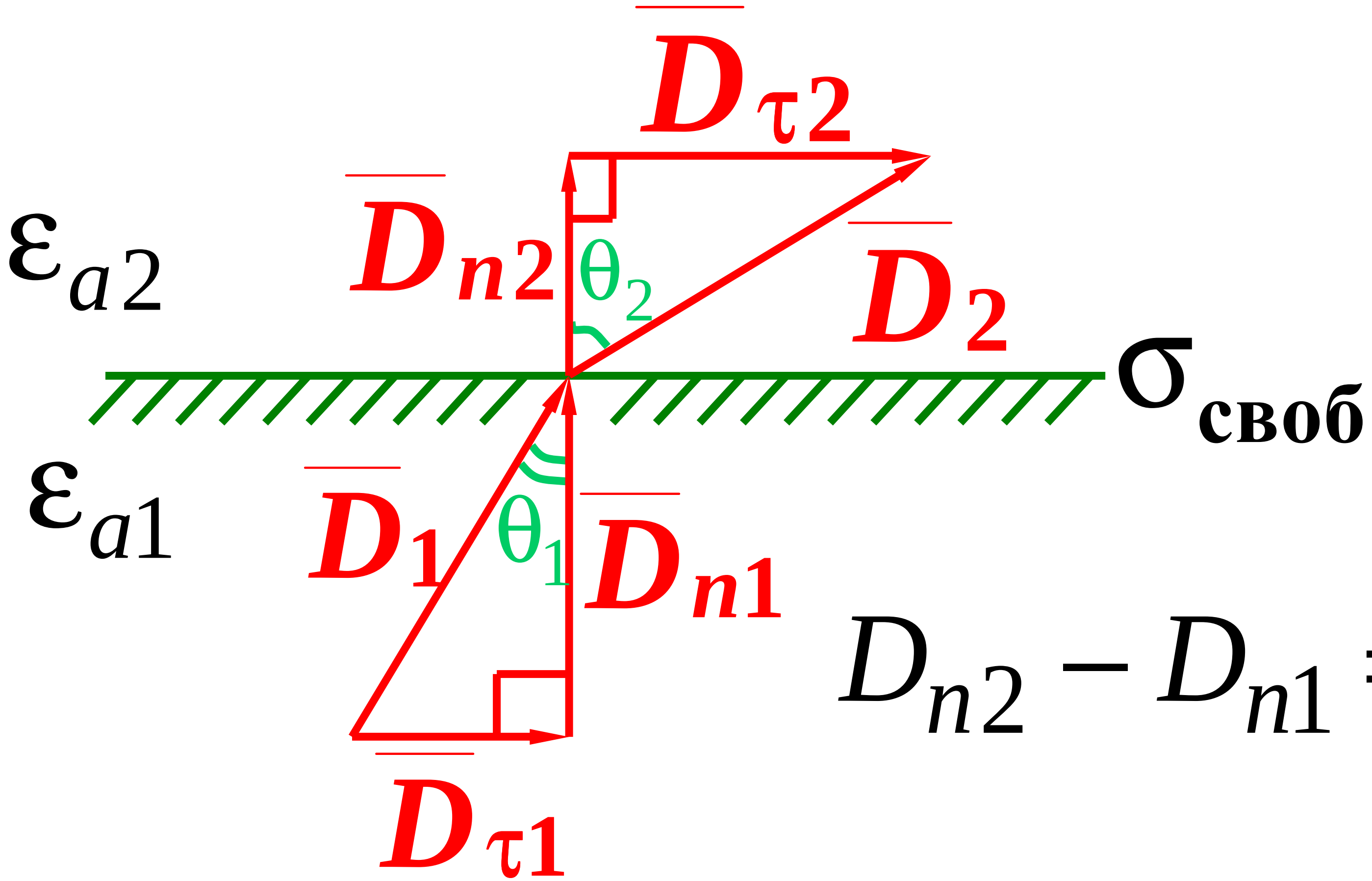
3. На границе раздела двух диэлектриков:

а) равны касательные составляющие напряженности



$$\overline{E}_{\tau 1} = \overline{E}_{\tau 2}$$

б) при отсутствии свободных зарядов равны нормальные составляющие электрической индукции



$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma_{своб}$$

Для углов входа θ_1 и выхода θ_2 векторов при $\sigma_{своб}=0$ выполняется равенство

$$\frac{\mathrm{tg}\,\theta_1}{\mathrm{tg}\,\theta_2} = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}$$

Если $\sigma_{своб} = 0$, то $D_{n1}=D_{n2}=D_n$, тогда поверхностная плотность связанных зарядов на границе двух диэлектриков будет равна разности нормальных составляющих векторов поляризованности:

$$\sigma_{связ}=P_{n1}-P_{n2}\ .$$

В результате при

$P_{n1}=(\varepsilon_{a1}-\varepsilon_0)D_n/\varepsilon_{a1}$; $P_{n2}=(\varepsilon_{a2}-\varepsilon_0)D_n/\varepsilon_{a2}$

получаем:

$$\sigma_{\text{связ}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_{a1} - \varepsilon_{a2})}{\varepsilon_{a1} \cdot \varepsilon_{a2}} \cdot D_n =$$

$$= \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2}} \cdot D_n \quad , \text{Кл}/\text{м}^2 .$$

Если $\varepsilon_{r1}>\varepsilon_{r2}$**, то** $\sigma_{\text{связ}}>0$**,**

иначе $\sigma_{\text{связ}}<0$**.**

4. На границе раздела двух сред

(проводник-диэлектрик,
диэлектрик-диэлектрик)

равны потенциалы:

$$\varphi_1 = \varphi_2 .$$

Электрическое поле постоянного тока

Электрическое поле постоянного тока как частный случай электромагнитного поля будем рассматривать для тока проводимости в однородных и изотропных проводящих средах.

В этих средах удельная проводимость γ (1/Ом·м) постоянна, например, при **20**° С:

для меди $\boldsymbol{\gamma \cong 5{,}8 \cdot 10^{7}}$ 1/Ом·м,

для воды $\boldsymbol{\gamma \cong 0{,}1}$ 1/Ом·м,

для грунта $\boldsymbol{\gamma \cong 0{,}01}$ 1/Ом·м,

для воздуха $\boldsymbol{\gamma \cong 10^{-9} \div 10^{-10}}$ 1/Ом·м,

для полиэтилена $\boldsymbol{\gamma \cong 10^{-14}}$ 1/Ом·м.

Электрический ток проводимости – это упорядоченное движение свободных зарядов под действием электрического поля, характеризующегося напряженностью $\overline{E}$ (В/м).

Электрический ток проводимости измеряется количеством свободных зарядов, проходящих сквозь заданную поверхность за единицу времени:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}, \text{ Кл/с=А}$$

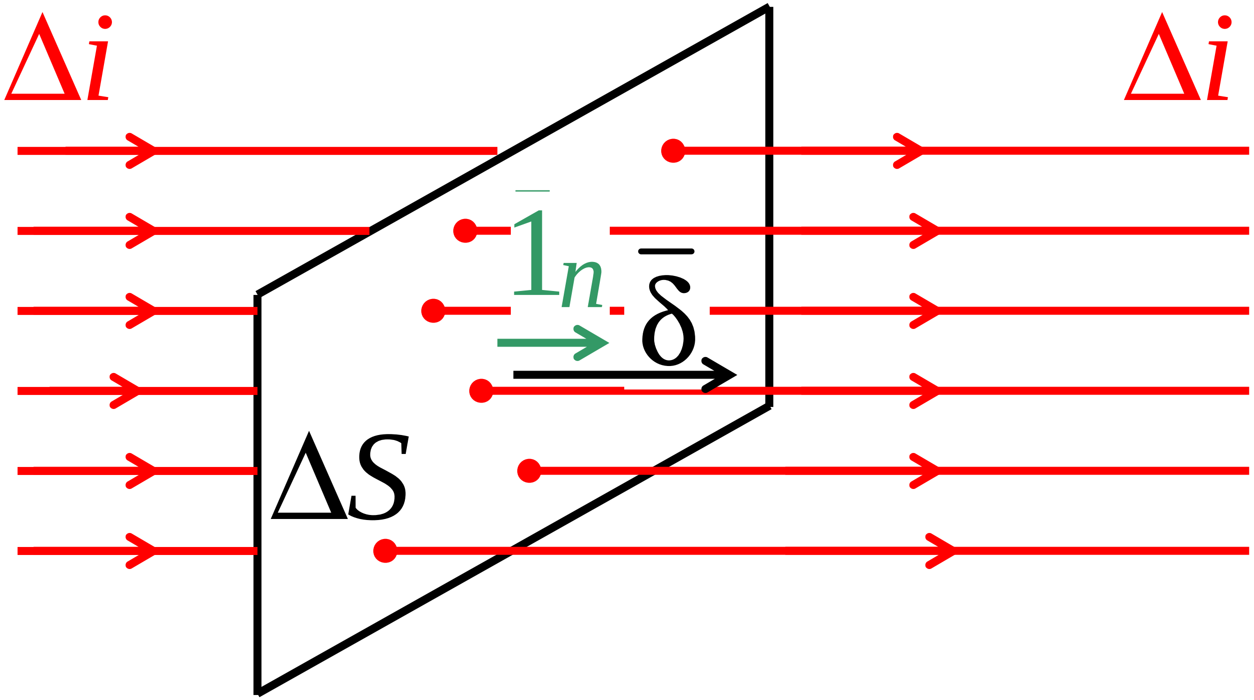
Ток – величина скалярная. Если значение тока не зависит от времени, то такой ток $i=I$ называется постоянным. При этом заряд, проходящий через заданную поверхность равен:

$$q = I \cdot t \quad , \text{Кл}$$

Плотностью тока называют векторную величину $\bar{\delta}$, численно равную

$$\delta = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta S} = \frac{di}{dS}, \quad \mathbf{А}/\mathbf{м}^2$$

Причем $\bar{\delta} = \delta \cdot \bar{1}_n$, где $\bar{1}_n$ - единичный вектор, перпендикулярный площадке ΔS и совпадающий с направлением движения зарядов, образующий ток Δi .



Δi
Δi
$\bar{1}_n$
$\bar{\delta}$
ΔS

Таким образом ток i через некоторую поверхность S равен потоку вектора плотности тока через эту же поверхность:

$$i = \int_S \bar{\delta} \cdot \overline{dS}\,.$$