11 лекция

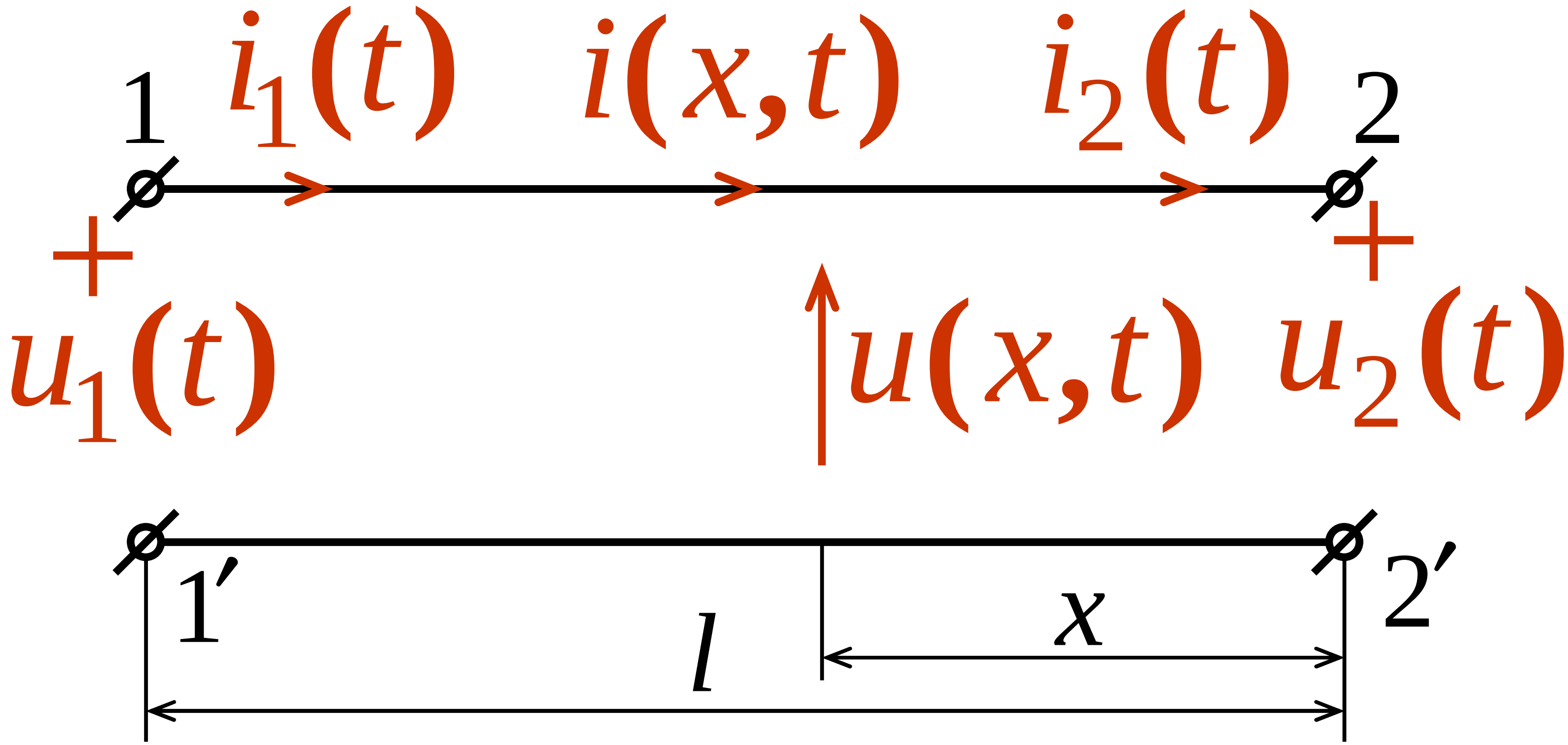
© 2015 Томский политехнический университет, автор Носов Геннадий Васильевич

Электрические цепи с распределенными параметрами

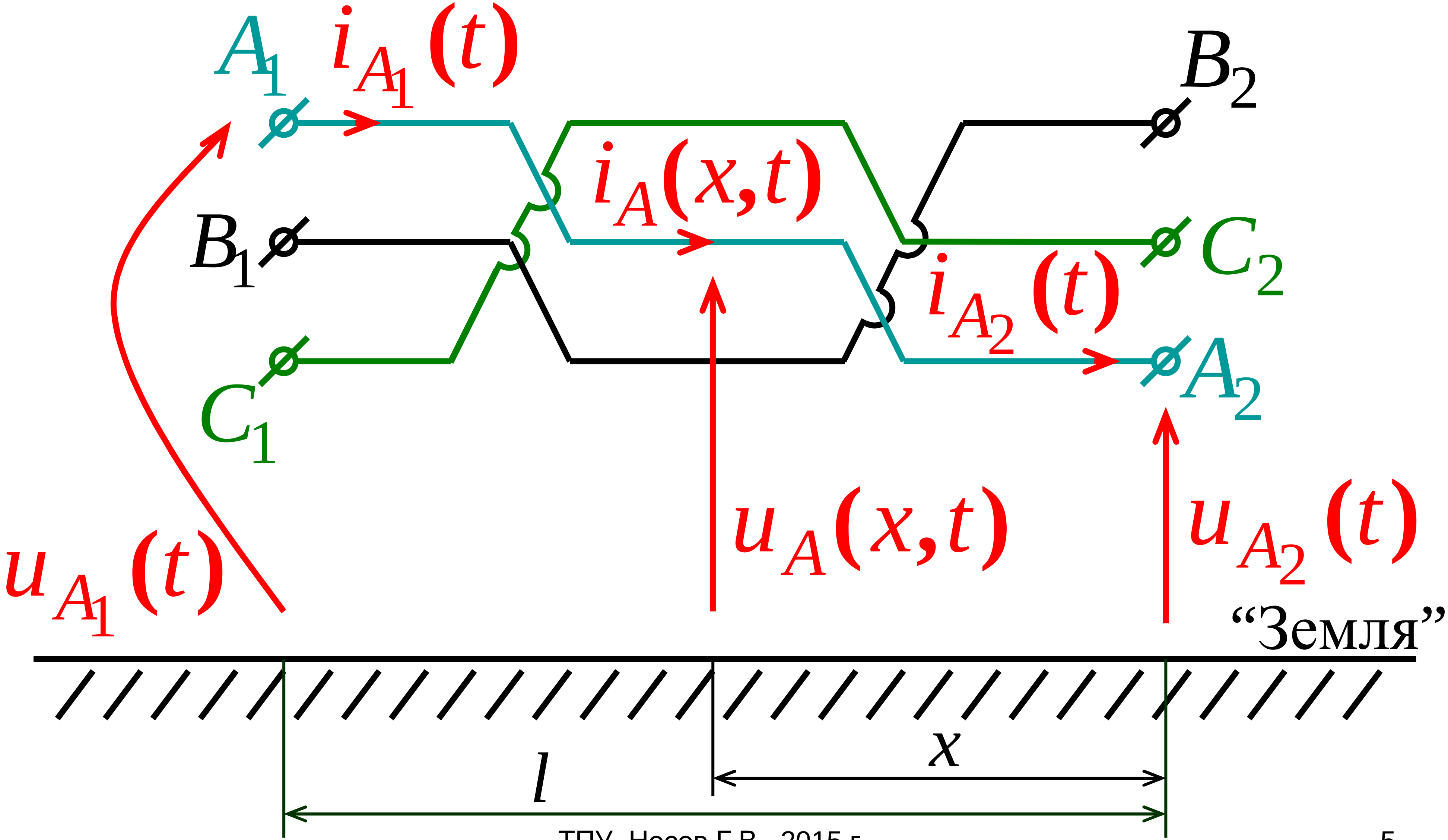
Это такие цепи, длина которых соизмерима с длиной электромагнитной волны, причем напряжения и токи в фиксированные моменты времени изменяются вдоль этих цепей.

Примерами цепей с распределенными параметрами являются:

а) двухпроводная линия (связи)



б) трехфазная транспонированная линия (электропередачи)



Изменение напряжения и тока вдоль линии в функции x обусловлено наличием продольных сопротивлений и поперечных проводимостей

Линии, у которых напряжения и токи заметно изменяются вдоль их длины, называются *длинными линиями*

Так для линий электропередачи

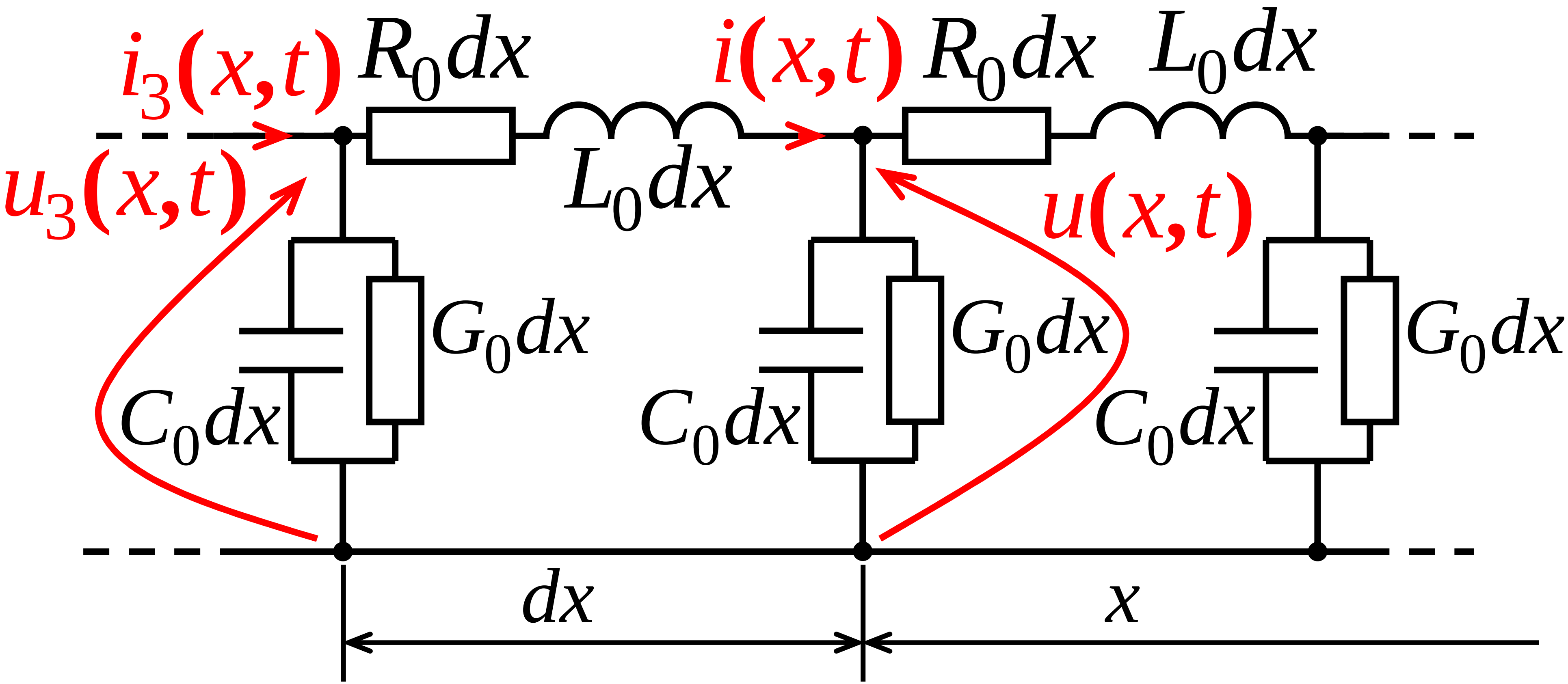
при $\omega = 314$ рад/с (f=50 Гц)

такое изменение заметно при

длине $l > 300$ км – это длинная

линия электропередачи

Б/м участок dx двухпроводной линии или трехфазной линии на одну фазу (в симметричном режиме) может быть представлен так:



$i_3(x,t)$
R_0dx
L_0dx
$i(x,t)$
R_0dx
L_0dx
$u_3(x,t)$
$u(x,t)$
G_0dx
G_0dx
G_0dx
C_0dx
C_0dx
C_0dx
dx
x

Где

$$i_3(x,t) = i(x,t) + \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} dx$$

$$u_3(x,t) = u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx$$

R_0 (Ом/км), L_0 (Гн/км),

G_0(См/км), C_0(Ф/км) –

первичные (удельные)

параметры линий

Ограничимся рассмотрением **однородных** линий, у которых **первичные** параметры **постоянны**.

Для **б/м** участка линии длиной ***dx*** по **законам Кирхгофа** получаем **основные уравнения** в частных производных:

$$\begin{cases} \pm\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R_0\cdot i(x,t) + L_0\cdot\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\ \pm\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G_0\cdot u(x,t) + C_0\cdot\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \end{cases}$$

1

Где:

знак $+$ - при отсчете *x* от конца линии

знак $-$ - при отсчете *x* от начала линии

Решение уравнений 1 при определенных начальных ($t=0$) и граничных условиях ($x=0$, $x=l$) позволяет определить $u(x,t)$ и $i(x,t)$

Установившийся гармонический режим однородной линии

При напряжении

$$u_2(t)=\sqrt{2}\cdot U_2\cdot\mathbf{sin}\left(\omega t+\psi_{U_2}\right)$$

имеем

$$u(x,t)=\sqrt{2}\cdot U(x)\cdot\mathbf{sin}\left[\omega t+\psi_U(x)\right]$$

$$i(x,t)=\sqrt{2}\cdot I(x)\cdot\mathbf{sin}\left[\omega t+\psi_I(x)\right]$$

Тогда для комплексов действующих значений

$$\underline{U}(x) = U(x) \cdot e^{j\psi_U(x)}$$

$$\underline{I}(x) = I(x) \cdot e^{j\psi_I(x)}$$

Из уравнений 1 получаем

2
$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{U}(x)}{dx} = \underline{Z}_0 \cdot \underline{I}(x) \\ \dfrac{d\underline{I}(x)}{dx} = \underline{Y}_0 \cdot \underline{U}(x) \end{cases}$$

Где

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$$ (Ом/км) –

– комплекс продольного сопротивления линии на единицу длины

$$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 \qquad \text{(См/км)} \;–$$

– комплекс поперечной проводимости линии на единицу длины

Решением уравнений 2 при отсчете x от конца линии будут следующие комплексы действующих значений:

а) напряжение

$$\underline{U}(x)=\underline{A}_1\cdot e^{\underline{\gamma}x}+\underline{A}_2\cdot e^{-\underline{\gamma}x}=$$

$$=\underline{U}_2\cdot\mathbf{ch}\,\underline{\gamma}x+\underline{Z}_{\text{в}}\cdot\underline{I}_2\cdot\mathbf{sh}\,\underline{\gamma}x$$

3

б) ток

$$\underline{I}(x)=\frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_{\text{в}}}\cdot e^{\underline{\gamma} x}-\frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_{\text{в}}}\cdot e^{-\underline{\gamma} x}=$$

$$=\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{\text{в}}}\cdot \mathbf{sh}\,\underline{\gamma} x+\underline{I}_2\cdot \mathbf{ch}\,\underline{\gamma} x$$

4

Где:

$$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\psi_1} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_\text{В} \cdot \underline{I}_2}{2}, \ B$$

$$\underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\psi_2} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_\text{В} \cdot \underline{I}_2}{2}, \ B$$

- постоянные интегрирования

$$\underline{Z}_{\text{в}} = Z_{\text{в}} \cdot e^{j\varphi_{\text{в}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}, \ \text{(Ом)} -$$

– волновое сопротивление

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0}\,, \qquad \text{(1/км)} \;–$$

– постоянная распространения (передачи)

α, (Нп/км) – коэффициент затухания (ослабления),

причем

$$\alpha = 1\ \text{Нп/км} = 1\ \text{Непер/км} =$$
$$= \ln[U(x{=}1\ \text{км})/U_2] = \ln(2{,}718) = 1$$

β, (рад/км) – коэффициент фазы

$$\underline{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\psi_{U_2}}, \ \underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\psi_{I_2}}$$

– комплексы действующих значений напряжения и тока в конце линии

Напряжение и ток в линии можно рассматривать как сумму падающей (прямой) и отраженной (обратной) волн

5

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_{\text{п}}(x) + \underline{U}_{\text{отр}}(x) \\ \underline{I}(x) = \underline{I}_{\text{п}}(x) + \underline{I}_{\text{отр}}(x) \end{cases}$$

Где:

$$\underline{U}_{п}(x) = \underline{A}_1 \cdot e^{\underline{\gamma} x}, \quad \underline{I}_{п}(x) = \frac{\underline{U}_{п}(x)}{\underline{Z}_{в}}$$

– комплексы действующих значений падающих волн напряжения и тока

$$\underline{U}_{\text{отр}}(x) = \underline{A}_2 \cdot e^{-\underline{\gamma} x},$$

$$\underline{I}_{\text{отр}}(x) = -\frac{\underline{U}_{\text{отр}}(x)}{\underline{Z}_{\text{в}}}$$

– комплексы действующих значений отраженных волн напряжения и тока

При изменении x от 0 до l по формулам 3 и 4 можно рассчитать

$$\underline{U}(x) = U(x) \cdot e^{j\psi_U(x)}$$

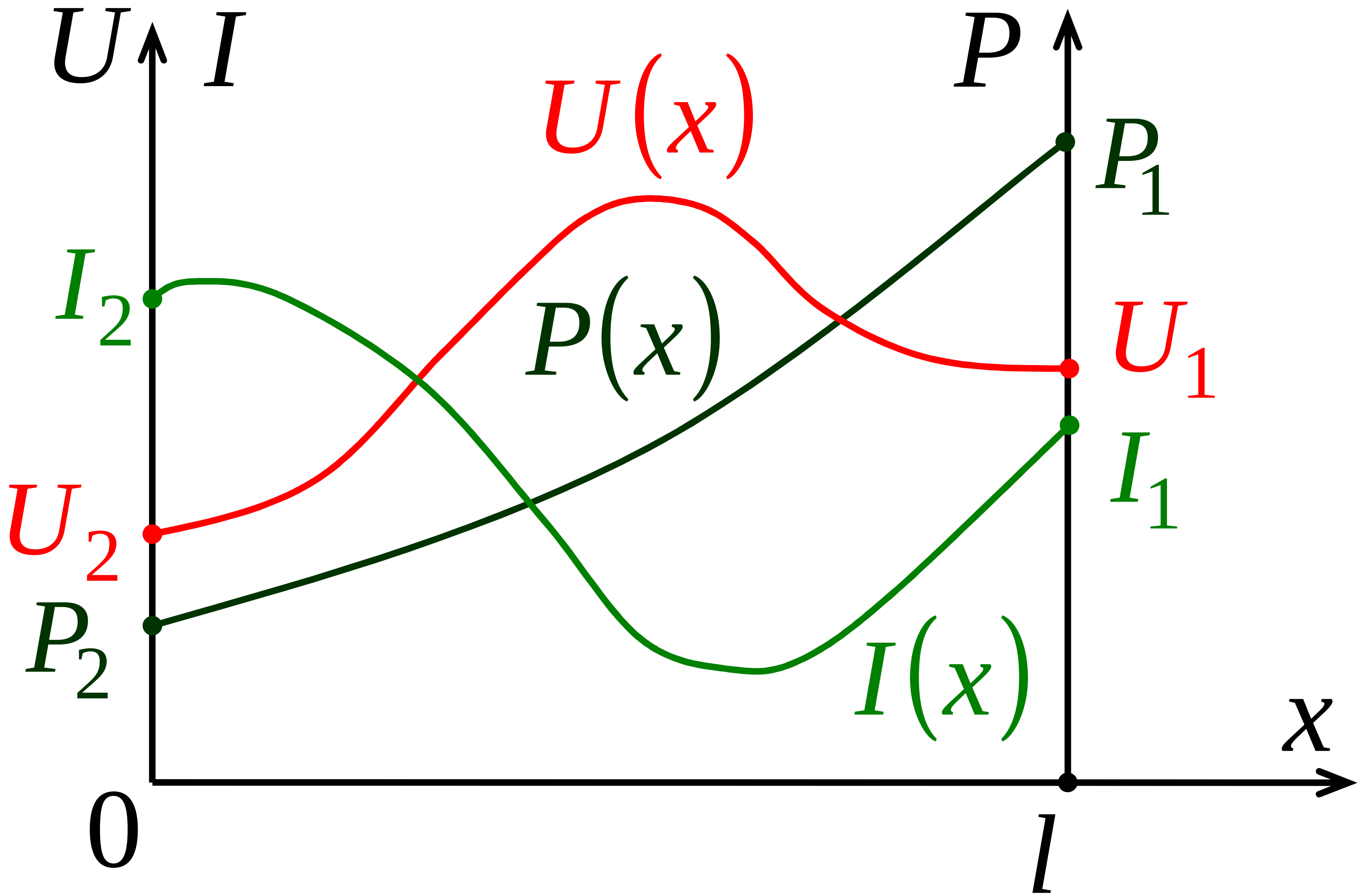
$$\underline{I}(x) = I(x) \cdot e^{j\psi_I(x)}$$

и определить активную мощность

$$\boldsymbol{P}(x)=\boldsymbol{U}(x)\boldsymbol{I}(x)\cos\left[\psi_U(x)-\psi_I(x)\right],\text{Вт}$$

которая монотонно возрастает к началу линии

Графики зависимостей $U(x)$, $I(x)$, $P(x)$ и КПД $\eta = {P_2}/{P_1} < 1$ используются для анализа установившегося режима линий



U
I
P
$U(x)$
P_1
I_2
$P(x)$
U_1
I_1
U_2
P_2
$I(x)$
x
0
l

Примечания:

$$\mathbf{sh}\,\underline{\gamma}x = \frac{e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x}}{2} = B_1 \cdot e^{j\lambda_1}$$

- гиперболический синус

$$\mathbf{ch}\,\underline{\gamma}x = \frac{e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x}}{2} = B_2 \cdot e^{j\lambda_2}$$

- гиперболический косинус

$$e^{\underline{\gamma}x} = e^{(\alpha + j\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x} = B_3 e^{j\lambda_3}$$

$$B_3 = e^{\alpha x} \qquad \lambda_3 = \frac{\beta x \cdot 180}{\pi} \quad \text{(Град)}$$

$$e^{-\underline{\gamma}x} = e^{-(\alpha + j\beta)x} =$$

$$= e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} = B_4 e^{j\lambda_4}$$

$$B_4 = 1 / B_3 \qquad \lambda_4 = -\lambda_3$$

При постоянных напряжениях и токах ($\omega=0$) имеем:

$$\underline{Z}_{\text{в}} = Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}; \quad \underline{\gamma} = \alpha = \sqrt{R_0 \cdot G_0}$$

$$\underline{U}(x) = U(x) \qquad \underline{I}(x) = I(x)$$

$$P(x) = U(x) \cdot I(x)$$

Бегущие волны

При

$$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\psi_1}, \qquad \underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\psi_2}$$

$$\underline{Z}_{\text{в}} = Z_{\text{в}} \cdot e^{j\varphi_{\text{в}}} \quad \text{и} \quad \underline{\gamma} = \alpha + j\beta$$

получаем мгновенные значения:

а) напряжение

$$u(x,t)=u_{\text{п}}(x,t)+u_{\text{отр}}(x,t)=$$

$$=\sqrt{2}\cdot A_1\cdot e^{\alpha x}\cdot\mathbf{sin}(\omega t+\psi_1+\beta x)+$$

$$+\sqrt{2}\cdot A_2\cdot e^{-\alpha x}\cdot\mathbf{sin}(\omega t+\psi_2-\beta x)$$

б) ток

$$i(x,t)=i_{\text{п}}(x,t)+i_{\text{отр}}(x,t)=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{A_1}{Z_{\text{в}}}\cdot e^{\alpha x}\cdot\mathbf{sin}(\omega t+\psi_1-\varphi_{\text{в}}+\beta x)-$$

$$-\sqrt{2}\cdot\frac{A_2}{Z_{\text{в}}}\cdot e^{-\alpha x}\cdot\mathbf{sin}(\omega t+\psi_2-\varphi_{\text{в}}-\beta x)$$

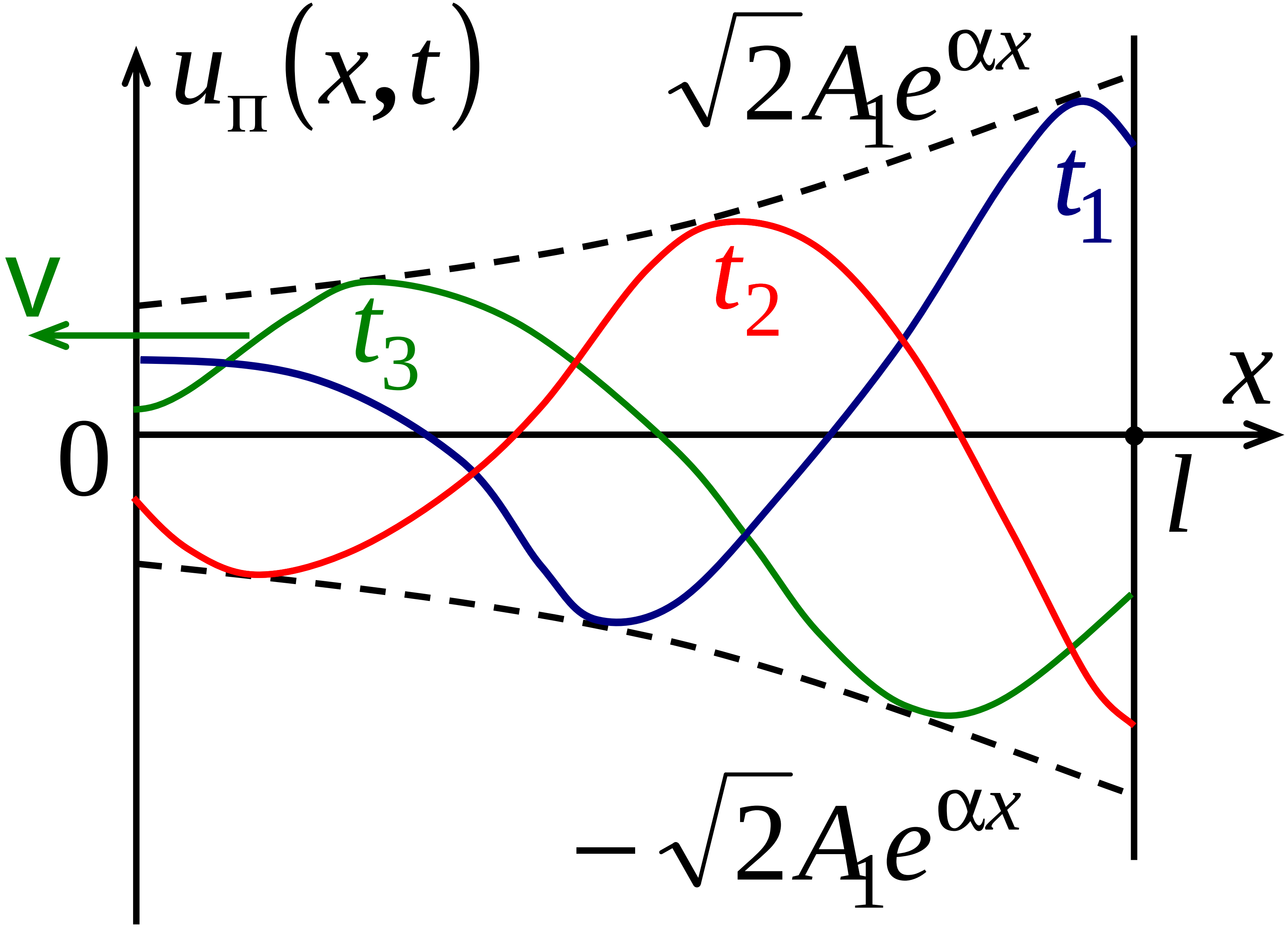
Падающие и отраженные волны можно рассматривать как бегущие волны, затухающие в направлении своего движения

1. Падающую волну напряжения

$$u_{\text{п}}(x,t)=\sqrt{2}\cdot A_1\cdot e^{\alpha x}\cdot$$
$$\cdot\sin\left(\omega t+\psi_1+\beta x\right)$$

рассчитываем для трех

моментов времени $t_1 < t_2 < t_3$


$u_{\text{п}}(x,t)$
$\sqrt{2}A_1e^{\alpha x}$
t_1
t_2
t_3
v
x
0
l
$-\sqrt{2}A_1e^{\alpha x}$

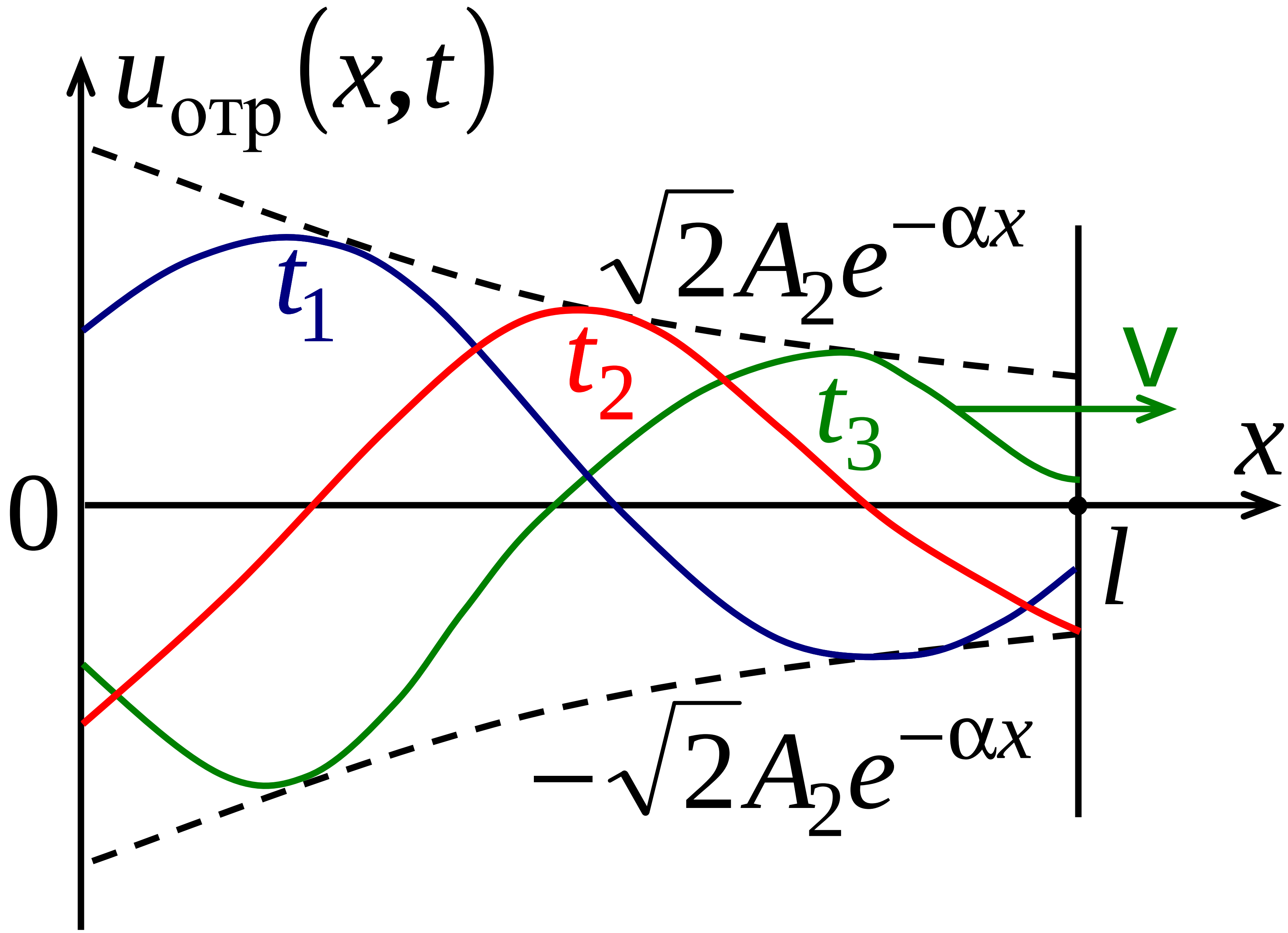
Падающая волна $u_{\text{п}}(x,t)$, постепенно затухая, движется от начала линии к ее концу с некоторой скоростью V

2. Отраженную волну напряжения

$$u_{\text{отр}}(x,t)=\sqrt{2}\cdot A_2\cdot e^{-\alpha x}\cdot$$

$$\cdot\sin(\omega t+\psi_2-\beta x)$$

рассчитываем для трех моментов времени $t_1 < t_2 < t_3$



$u_{\text{отр}}(x,t)$
$\sqrt{2}A_2e^{-\alpha x}$
t_1
t_2
t_3
V
x
0
l
$-\sqrt{2}A_2e^{-\alpha x}$

Отраженная волна, постепенно затухая, движется от конца линии к ее началу с той же скоростью V.

Аналогично можно сказать о падающей и отраженной волнах тока

Падающие волны – это прямые волны, а отраженные волны – это обратные волны

При этом скорость V является *фазовой скоростью* – это скорость перемещения значений волн, фаза которых остается неизменной

Так, если для падающей волны напряжения фаза постоянна

$$\omega t + \psi_1 + \beta x = \mathbf{const}$$

Тогда после дифференцирования

$$\omega + \beta \frac{dx}{dt} = 0$$

или

$$\mathrm{V} = -\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}, \quad \text{км/с}$$

Длина волны λ - это расстояние между ближайшими точками линии, в которых фазы напряжения или тока отличаются на 2π

Так для падающей волны напряжения

$$\left[\omega t+\psi_1+\beta\left(x+\lambda\right)\right]-$$
$$-\left[\omega t+\psi_1+\beta x\right]=2\pi$$

Тогда $\lambda = \dfrac{2\pi}{\beta}$, км

причем

$V \le 3 \cdot 10^5$ км/с и при $\omega = 314$ 1/с

имеем $\lambda \le 6000$ км