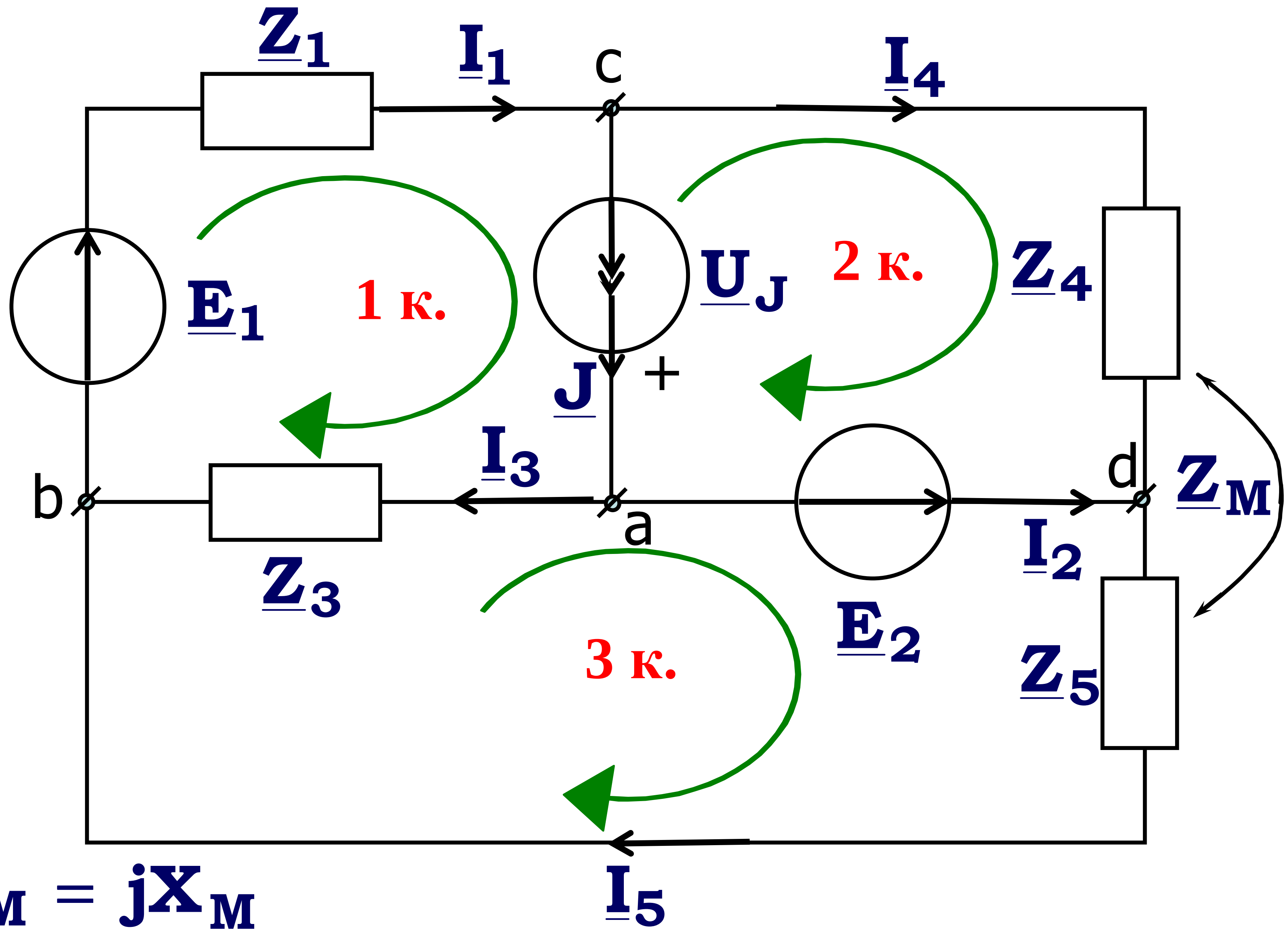
8 ЛЕКЦИЯ

Расчет линейных цепей с взаимной индуктивностью при гармонических токах и напряжениях

Расчет цепей с взаимной индуктивностью осуществляется при помощи законов Кирхгофа или метода контурных токов в комплексной форме, причем через каждый индуктивно связанный элемент должен проходить один свой контурный ток



$\underline{Z}_M = j X_M$

Метод законов Кирхгофа:

$$\text{b:}\quad \underline{I}_1 - \underline{I}_3 - \underline{I}_5 = 0$$

$$\text{a:}\quad \underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{J} = 0$$

$$\text{d:}\quad -\underline{I}_2 - \underline{I}_4 + \underline{I}_5 = 0$$

$$1\ \text{к:}\quad \underline{Z}_1\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_3\,\underline{I}_3 = \underline{E}_1 + \underline{U}_J$$

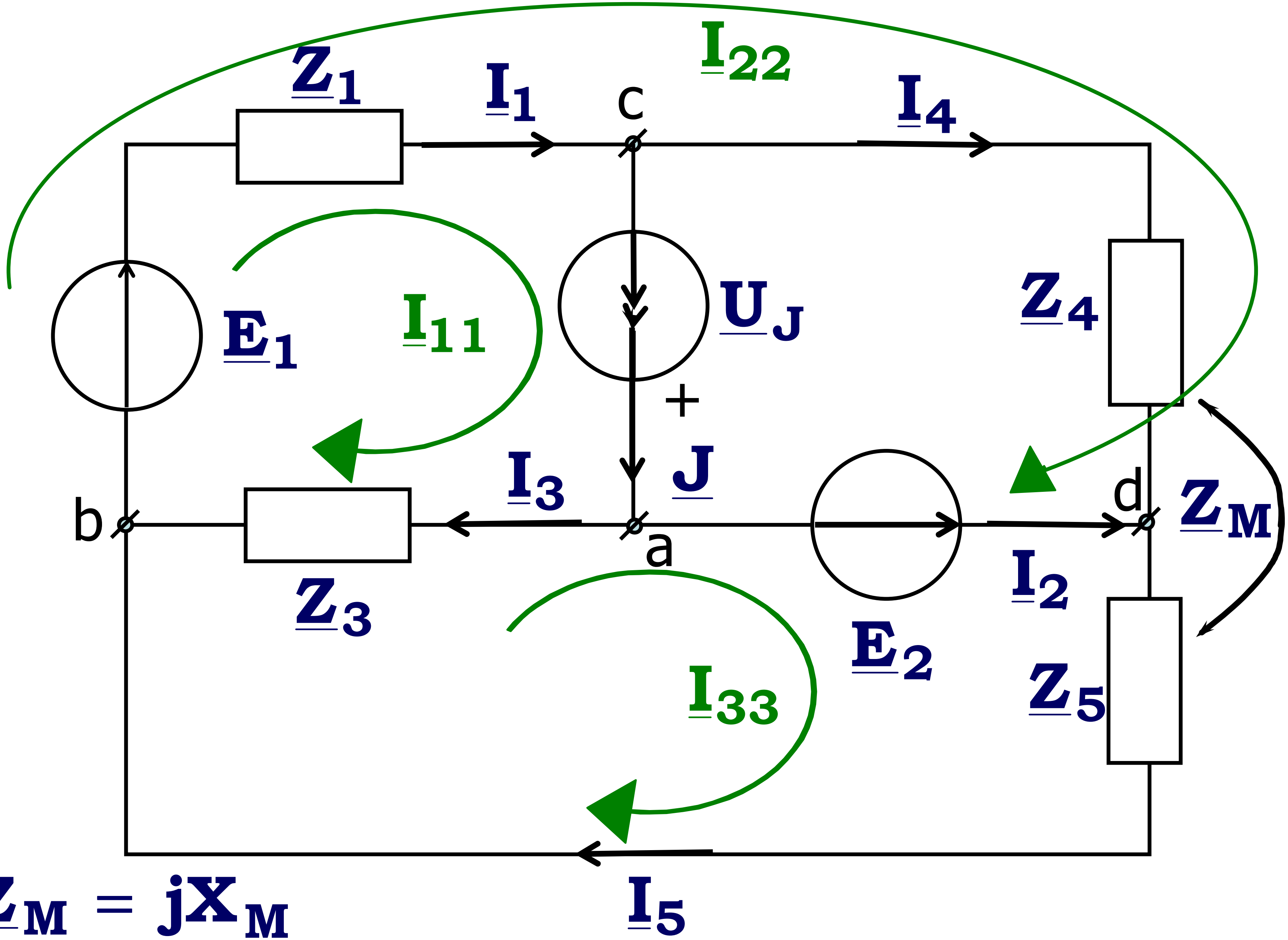
$$2\ \text{к:}\quad (\underline{Z}_4\,\underline{I}_4 \,\underline{\pm}\, \underline{Z}_M\,\underline{I}_5) = -\underline{E}_2 - \underline{U}_J$$

$$3\ \text{к:}\quad -\underline{Z}_3\,\underline{I}_3 + (\underline{Z}_5\,\underline{I}_5 \,\underline{\pm}\, \underline{Z}_M\,\underline{I}_4) = \underline{E}_2$$

Решение уравнений, составленных по законам Кирхгофа, позволяет определить комплексные значения токов и напряжений в рассматриваемой цепи.

Причем

- знак "+" - при согласном включении
- знак "-" - при встречном включении



$$\underline{Z}_M = jX_M$$

Метод контурных токов:

$$\underline{I}_{11} = \underline{J};$$

$$\underline{I}_{22}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) - \underline{I}_{33}\underline{Z}_3 + $$
$$+ \underline{I}_{11}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \pm \underline{I}_{33}\underline{Z}_M = \underline{E}_1 - \underline{E}_2;$$

$$\underline{I}_{33}(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_5) - \underline{I}_{22}\underline{Z}_3 - \underline{I}_{11}\underline{Z}_3 \pm$$
$$\pm \underline{I}_{22}\underline{Z}_M = \underline{E}_2$$

Причем

- знак “+” - при одинаковой ориентации относительно одноименных зажимов индуктивно связанных контурных токов
- знак “-” - при различной ориентации относительно одноименных зажимов индуктивно связанных контурных токов

После определения $\underline{\mathbf{I}}_{22}$ и $\underline{\mathbf{I}}_{33}$ находим:

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = \underline{\mathbf{I}}_{11} + \underline{\mathbf{I}}_{22} \qquad \underline{\mathbf{I}}_4 = \underline{\mathbf{I}}_{22}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_2 = \underline{\mathbf{I}}_{33} - \underline{\mathbf{I}}_{22} \qquad \underline{\mathbf{I}}_5 = \underline{\mathbf{I}}_{33}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_3 = \underline{\mathbf{I}}_{11} + \underline{\mathbf{I}}_{22} - \underline{\mathbf{I}}_{33}$$

$$\underline{\mathbf{U}}_J = -\underline{\mathbf{E}}_1 + \underline{\mathbf{Z}}_1\underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{Z}}_3\underline{\mathbf{I}}_3$$

Баланс мощностей и векторные диаграммы в линейных цепях при гармонических напряжениях и токах

Баланс мощностей рассчитывается для проверки правильности расчетов и заключается в определении следующих величин

Комплекс полной вырабатываемой мощности (для примера):

$$\underline{S}_в = \underline{E}_1\dot{\underline{I}}_1 + \underline{E}_2\dot{\underline{I}}_2 + \underline{U}_J\dot{\underline{J}} =$$

$$= P_B + jQ_B, \quad BA$$

Где: $\mathbf{P_B}$>0 – активная вырабатываемая мощность, Вт

$\mathbf{Q_B}$ – реактивная вырабатываемая мощность, вар

Где:

$$\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j\beta_1} \qquad \underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\beta_2}$$

$$\underline{J} = J \cdot e^{j\beta}$$

-комплексы действующих значений токов;

$$\underline{\dot{I}}_1 = I_1 \cdot e^{j(-\beta_1)} \qquad \underline{\dot{I}}_2 = I_2 \cdot e^{j(-\beta_2)}$$

$$\underline{\dot{J}} = J \cdot e^{j(-\beta)}$$

- сопряженные значения токов.

Активная потребляемая мощность:

$$P_{П} = \sum I_{к}^{2} R_{к} = I_{1}^{2} R_{1} + I_{3}^{2} R_{3} + $$

$$+ I_{4}^{2} R_{4} + I_{5}^{2} R_{5}, \quad Вт$$

Где

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 \qquad \underline{Z}_3 = R_3 - jX_3$$

$$\underline{Z}_4 = R_4 + jX_4 \qquad \underline{Z}_5 = R_5 + jX_5$$

- комплексные сопротивления

Реактивная потребляемая мощность:

$$Q_П = \sum \pm I_к^2 X_к + Q_М = I_1^2 X_1 - I_3^2 X_3 +$$

$$+ I_4^2 X_4 + I_5^2 X_5 + Q_М, \quad вар$$

Реактивная мощность обусловленная взаимной индуктивностью:

$$Q_М = \pm 2X_М I_4 I_5 \cos(\beta_4 - \beta_5), \quad вар$$

Где

- знак $\oplus$ - согласное включение,
- знак $\ominus$ - встречное включение

$$\underline{I}_4 = I_4 e^{j\beta_4}, \qquad \underline{I}_5 = I_5 e^{j\beta_5}$$

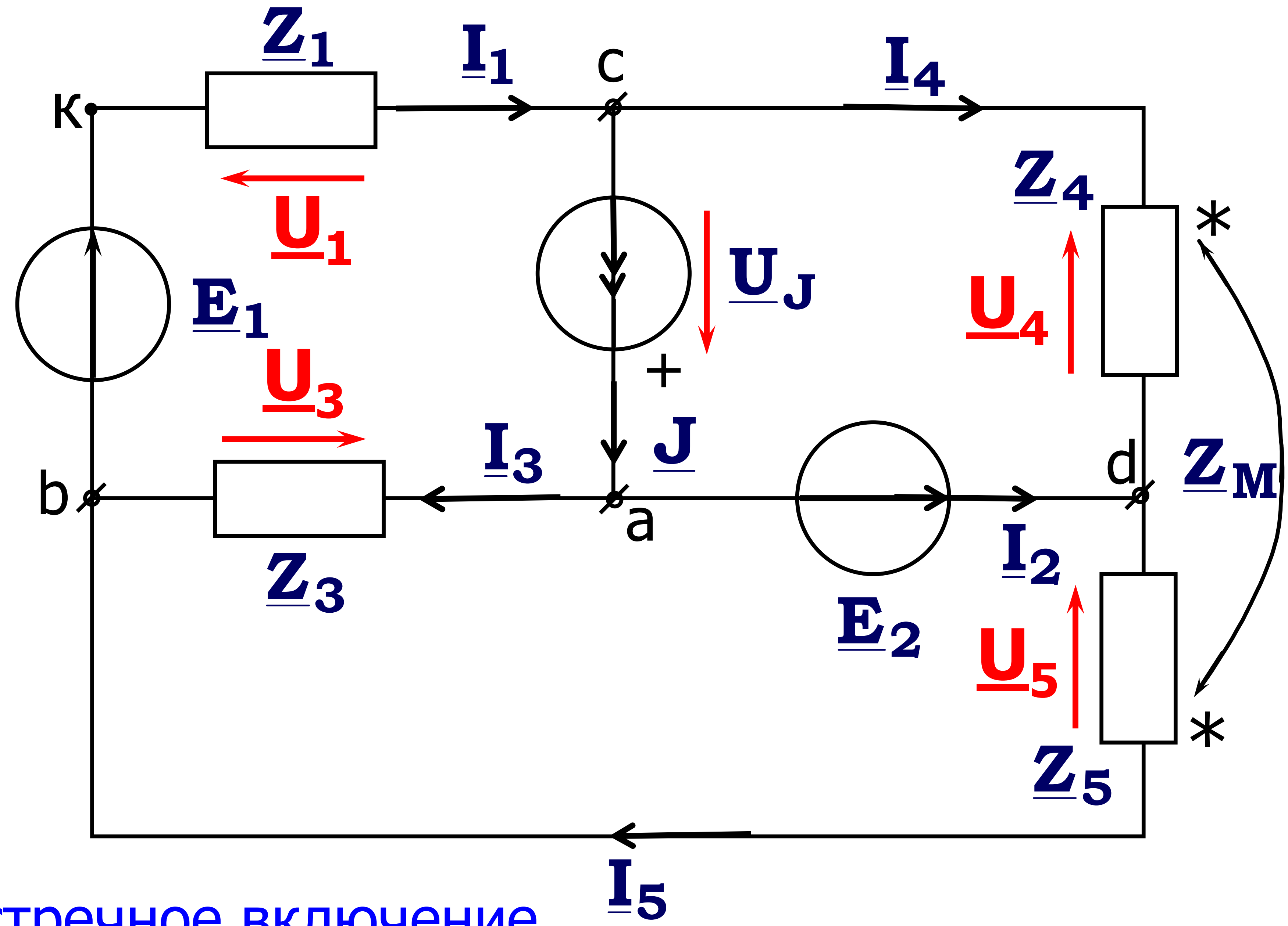
- индуктивно связанные токи

В результате относительные погрешности:

$$\delta_{\mathbf{p}} = \frac{|\mathbf{P_В} - \mathbf{P_П}|}{\mathbf{P_В}} \cdot \mathbf{100} < \mathbf{3\%}$$

$$\delta_{\mathbf{Q}} = \frac{|\mathbf{Q_В} - \mathbf{Q_П}|}{|\mathbf{Q_В}|} \cdot \mathbf{100} < \mathbf{3\%}$$

Векторные диаграммы строятся для графической проверки правильности расчетов, причем построение начинается с лучевой диаграммы токов и затем совмещенной с ней строится топографическая диаграмма напряжений



Встречное включение

Дано:

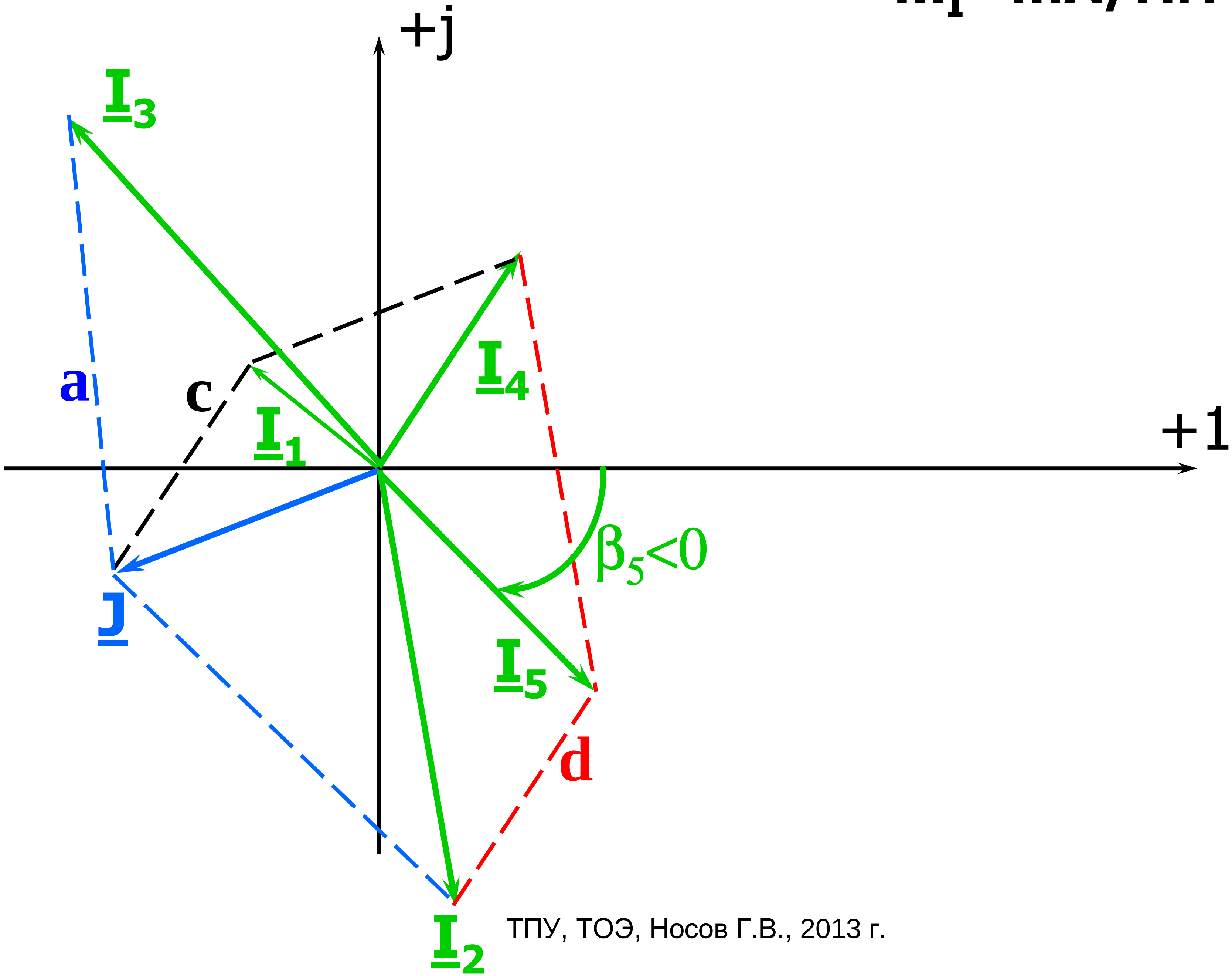
$$\underline{E}_1 , \underline{E}_2 , \underline{J}$$

$$\underline{Z}_1 , \underline{Z}_3 , \underline{Z}_4 , \underline{Z}_5 , \underline{Z}_M$$

$$\underline{U}_J , \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 , \underline{I}_4 , \underline{I}_5$$

1. **Выбираем масштаб тока (m_I=…А/мм) и строим лучевую диаграмму токов: вектора токов направлены из начала координат под своими углами, при этом проверяем первый закон Кирхгофа для узлов рассматриваемой схемы.**

$m_I = \ldots A/мм$



2. Выбираем масштаб напряжения (m_U=…В/мм) и строим в тех же осях топографическую диаграмму напряжений:

а) рассчитываем напряжения

$$\underline{U}_1=\underline{Z}_1\underline{I}_1$$

$$\underline{U}_3=\underline{Z}_3\underline{I}_3$$

$\underline{U}_4=\underline{Z}_4\underline{I}_4-\underline{Z}_M\underline{I}_5$ – **встречное включение**

$\underline{U}_5=\underline{Z}_5\underline{I}_5-\underline{Z}_M\underline{I}_4$ – **встречное включение** б) рассчитываем **комплексные потенциалы** точек схемы:

$\underline{\varphi}_b=0$ – принимаем произвольно;

$\underline{\varphi}_k=\underline{\varphi}_b+\underline{E}_1$;

$\underline{\varphi}_c=\underline{\varphi}_k-\underline{U}_1$;

$\underline{\varphi}_a=\underline{\varphi}_b+\underline{U}_3=\underline{\varphi}_c+\underline{U}_J$ - **проверка**;

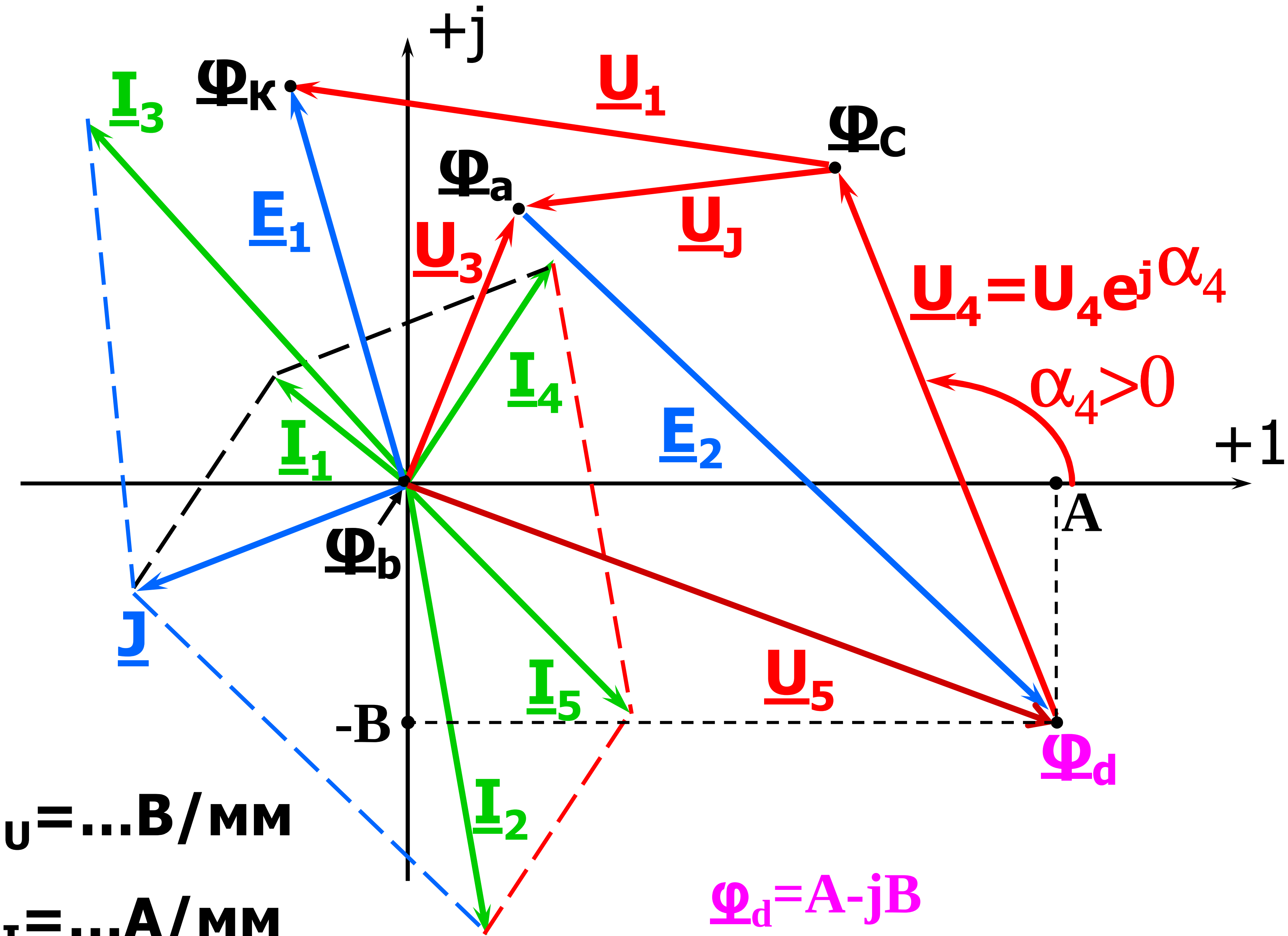
$\underline{\varphi}_d=\underline{\varphi}_c-\underline{U}_4=\underline{\varphi}_a+\underline{E}_2$ - **проверка**;

$\underline{\varphi}_b=\underline{\varphi}_d-\underline{U}_5=0$ - **проверка**

в) в одинаковом по осям (+j и +1) масштабе напряжения m_U на комплексной плоскости размещаем в алгебраической форме комплексные потенциалы точек;

г) согласно схеме между потенциалами точек проводим стрелки напряжений и ЭДС, проверяя их длину и углы;

д) по векторной диаграмме находим показание вольтметра.



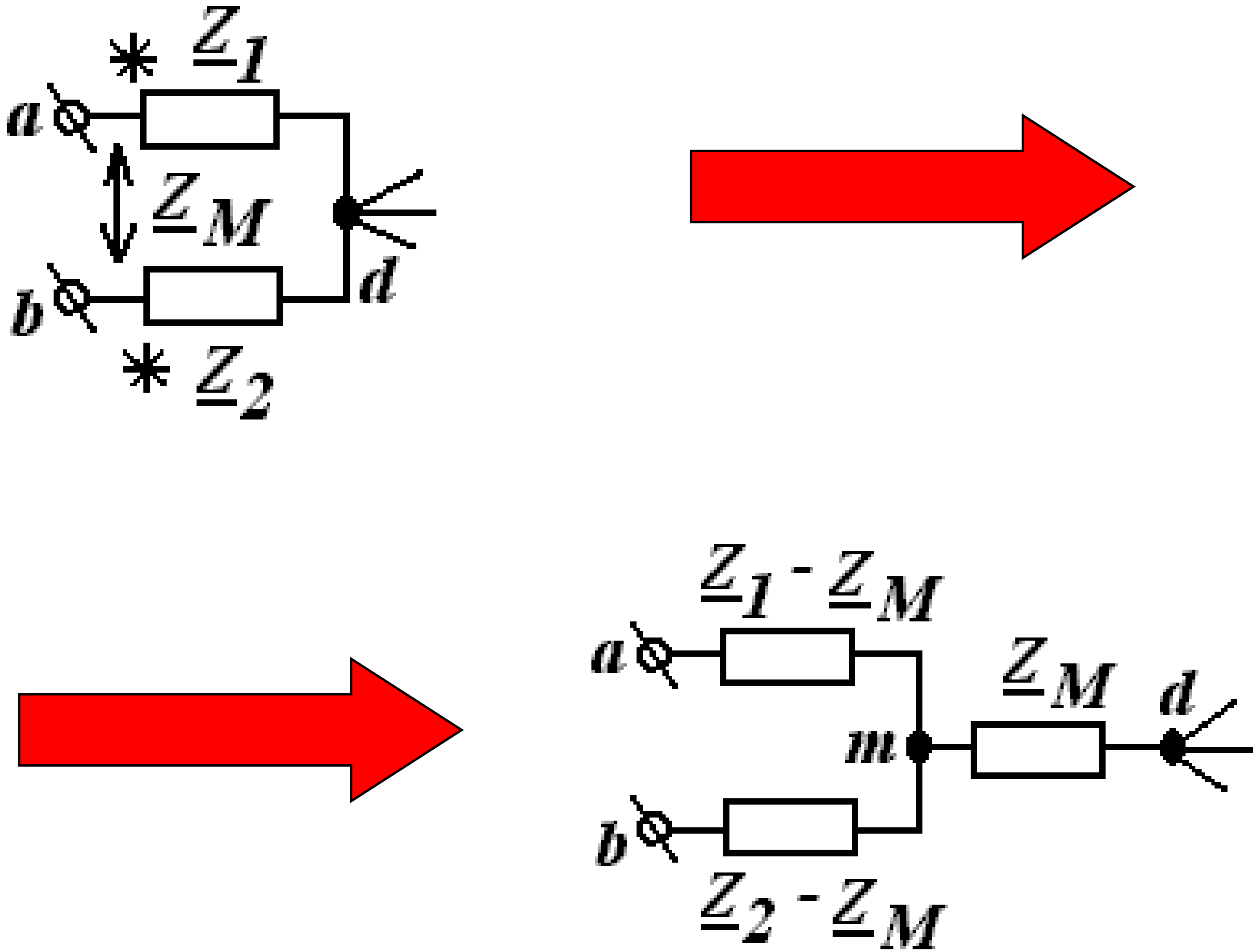
$m_U=\ldots$ В/мм

$m_I=\ldots$ А/мм

Развязка индуктивной связи

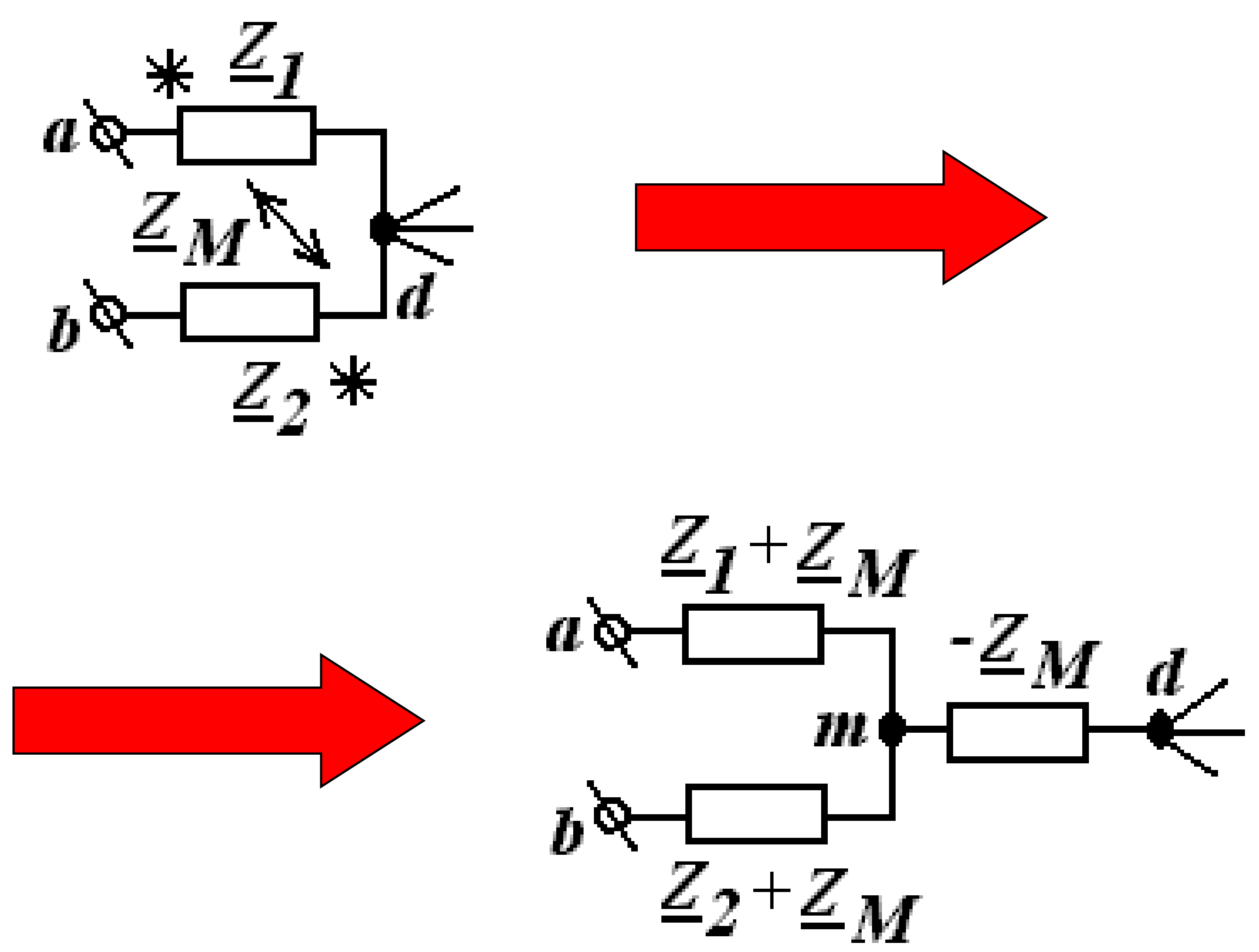
Развязка индуктивной связи применяется для ее исключения с целью **упрощения расчетов** и может быть доказана при помощи **законов Кирхгофа** в комплексной форме

1. Два индуктивно связанных комплексных сопротивления подходят одинаковым образом к общему узлу (d)



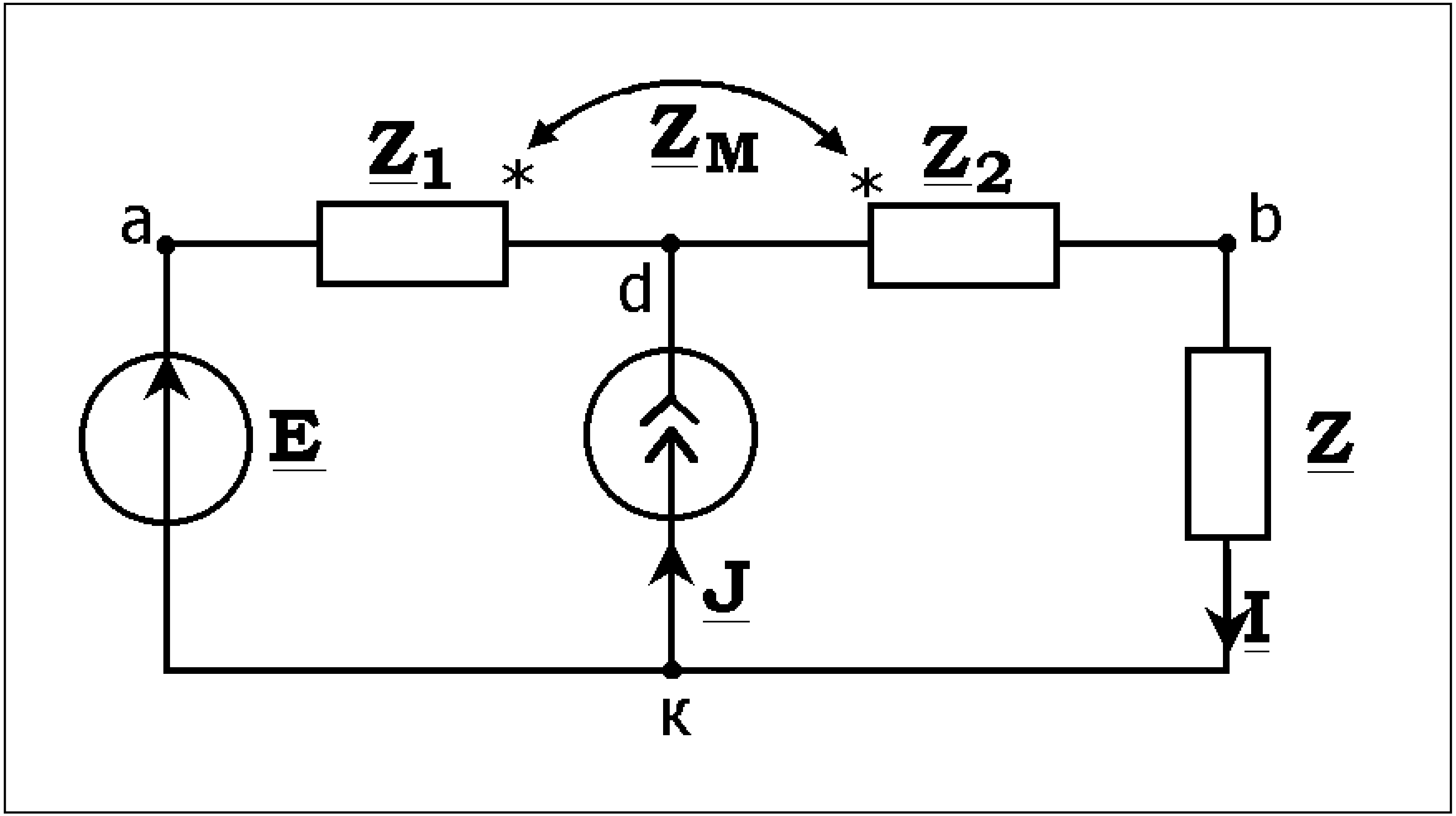
Z1
a
ZM
d
b
Z2
Z1 - ZM
a
ZM
d
m
b
Z2 - ZM

2. Два индуктивно связанных комплексных сопротивления подходят различным образом к общему узлу (d)


a
b
d
$\underline{Z}_1$
$\underline{Z}_2$
$\underline{Z}_M$
a
b
m
d
$\underline{Z}_1+\underline{Z}_M$
$-\underline{Z}_M$
$\underline{Z}_2+\underline{Z}_M$

После развязки индуктивной связи для расчета цепи можно использовать любой известный метод в комплексной форме

Пример



Дано:

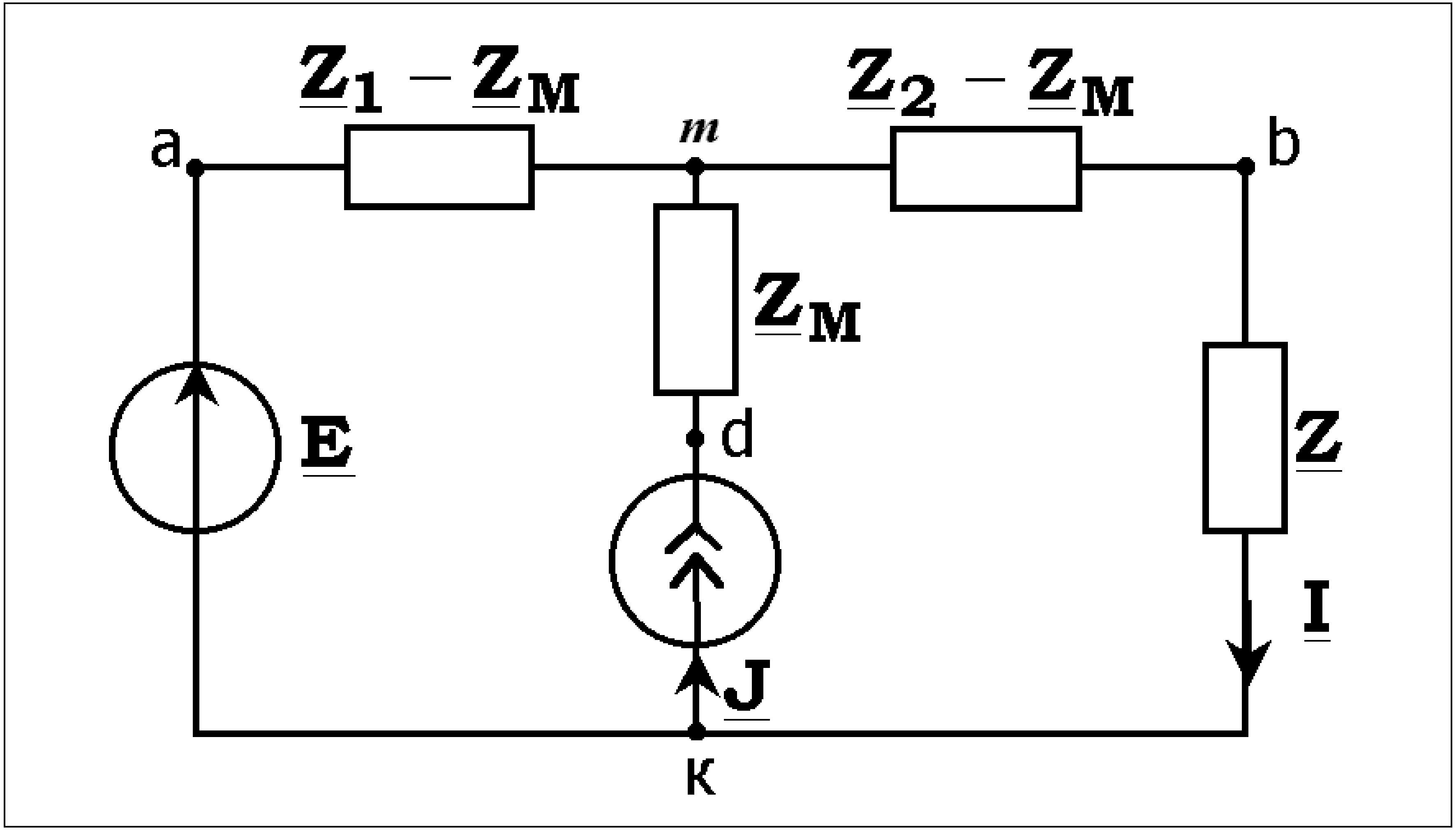
$$\underline{E} = Ee^{j\alpha} \qquad \underline{J} = Je^{j\beta}$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 \qquad \underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$$

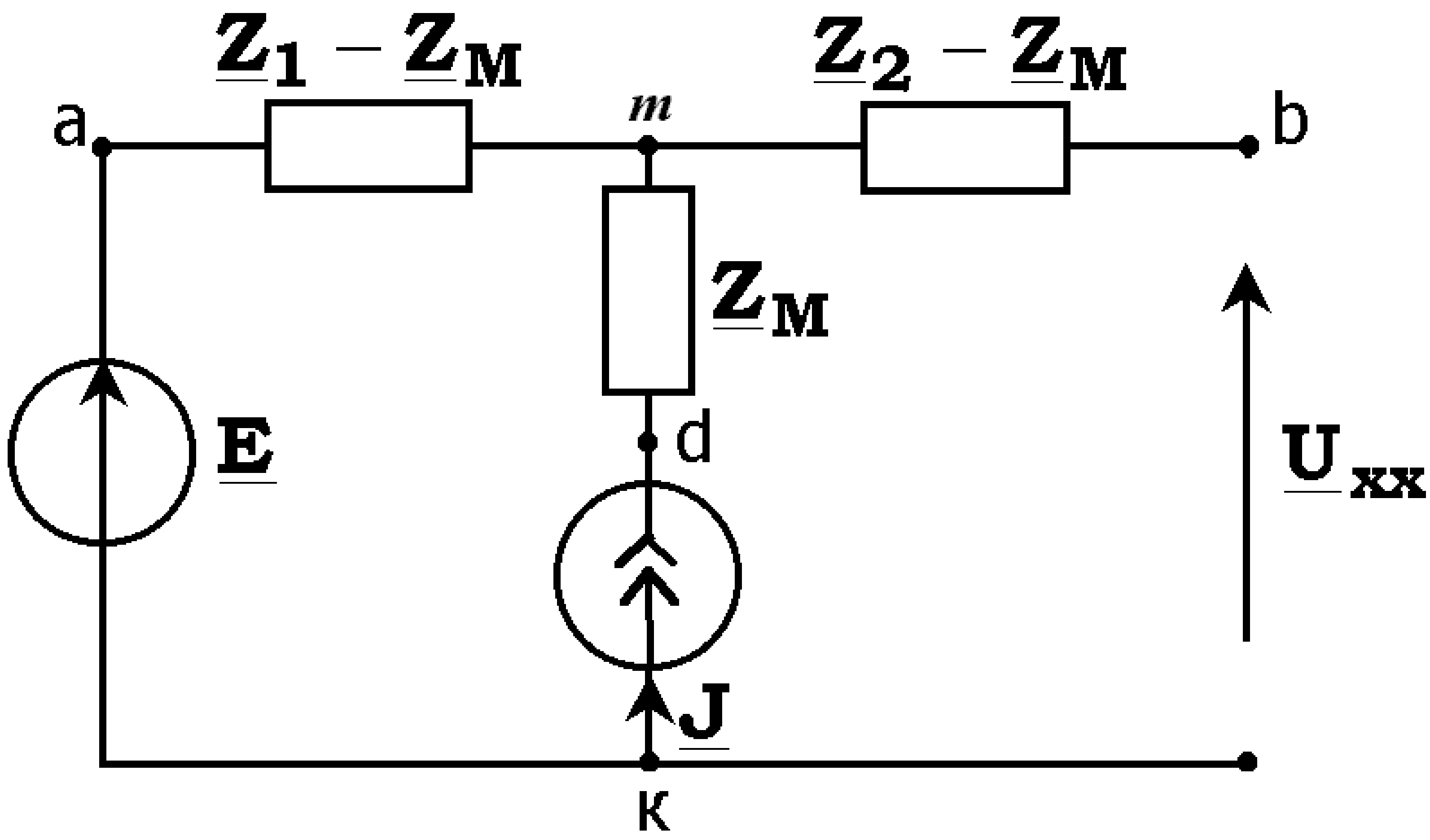
$$\underline{Z} = R + jX \qquad \underline{Z}_M = jX_M$$

Определить: $\underline{I} = ?$

После развязки:



Используем **метод эквивалентного генератора**



$$\underline{E}_{\Gamma} = \underline{U}_{xx} = \underline{E} + \underline{J} \cdot (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M) = E_{\Gamma} e^{j\alpha_{\Gamma}}$$

$$\underline{Z}_{\Gamma} = (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) + (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M) =$$
$$= R_{\Gamma} + jX_{\Gamma} = Z_{\Gamma} e^{j\varphi_{\Gamma}}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_{\Gamma}}{\underline{Z}_{\Gamma} + \underline{Z}} = Ie^{j\lambda}$$

Действующее значение тока:

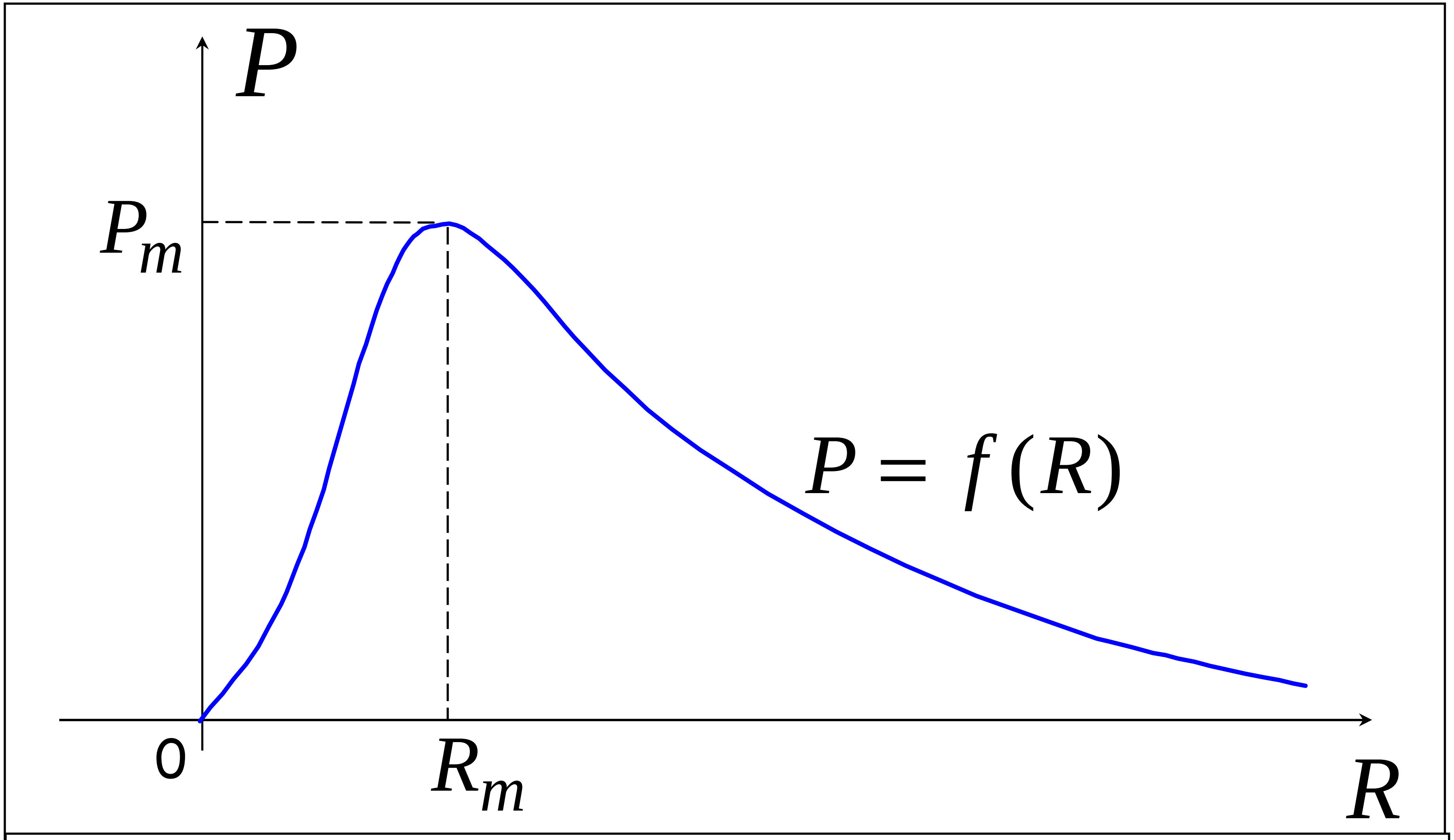
$$I = \frac{E_{\Gamma}}{\sqrt{(R_{\Gamma} + R)^2 + (X_{\Gamma} + X)^2}}$$

Активная мощность нагрузки $\underline{Z}$:

$$P = I^2 R =$$

$$= \frac{E_\Gamma^2 R}{(R_\Gamma + R)^2 + (X_\Gamma + X)^2} =$$

$$= f(R)$$



$$R_m = \sqrt{R_Г^2 + (X_Г + X)^2}; \qquad P_m = \frac{E_Г^2}{2(R_m + R_Г)}$$