5 лекция

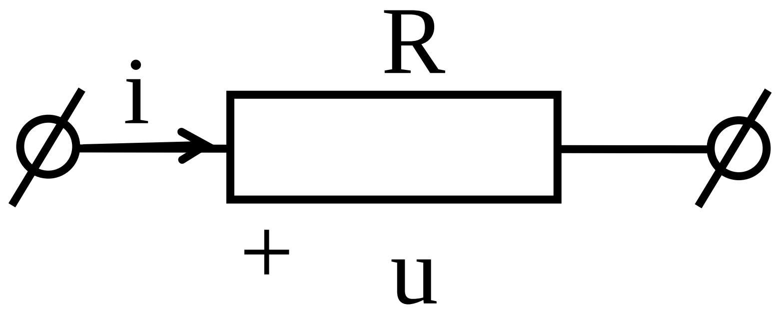
Действующие значения гармонических токов и напряжений

Действующие значения тока и напряжения характеризуют тепловое действие в линейном резистивном элементе с сопротивлением R

При токе и напряжении:

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$$



ПО ЗАКОНУ ДЖОУЛЯ – ЛЕНЦА:

$$\mathbf{W = \int_0^T i^2\, R\, dt = I^2 RT,\ Дж}$$

ПО ЗАКОНУ ОМА:

$$\mathbf{u = R\, i,\ B}$$

$$\mathbf{T = {}^{2\pi}\!/\!_{\omega},\ c}$$ - период

Действующее значение тока

$$\mathbf{I} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = I_m \Big/ \sqrt{2}$$

Действующее значение напряжения

$$\mathbf{U}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt}=U_m/\sqrt{2}$$

Действующее значение гармонического тока i численно равно такому постоянному току I, который за время равное периоду T в том же сопротивлении R выделяет такое же количества тепла W

Действующие значения тока и напряжения не зависят от угловой частоты ω и начальной фазы α

В результате

$$i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \alpha)$$

$$u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \alpha)$$

Символический

метод

Символический метод применяется для расчета линейных цепей с синусоидальными токами и напряжениями.

Этот метод основан на изображении синусоидальных величин комплексными числами.

При этом проекция вращающегося вектора на любой из диаметров окружности является гармонической функцией времени

Следовательно, синусоидальная величина может быть изображена вращающимся вектором длиной F на комплексной плоскости, причем этот вектор записывается в показательной ($Fe^{j\alpha}$), тригонометрической ($F\cos\alpha + jF\sin\alpha$) и алгебраической формах ($a+jb$),

где $j=\sqrt{-1}$ **- мнимая единица**

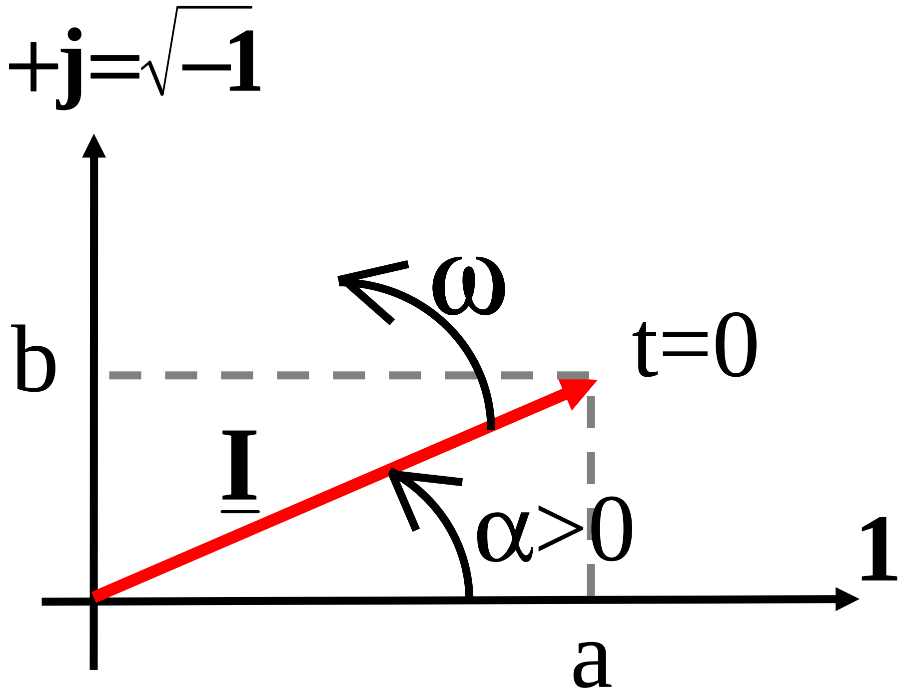
Таким образом:

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \alpha) =$$

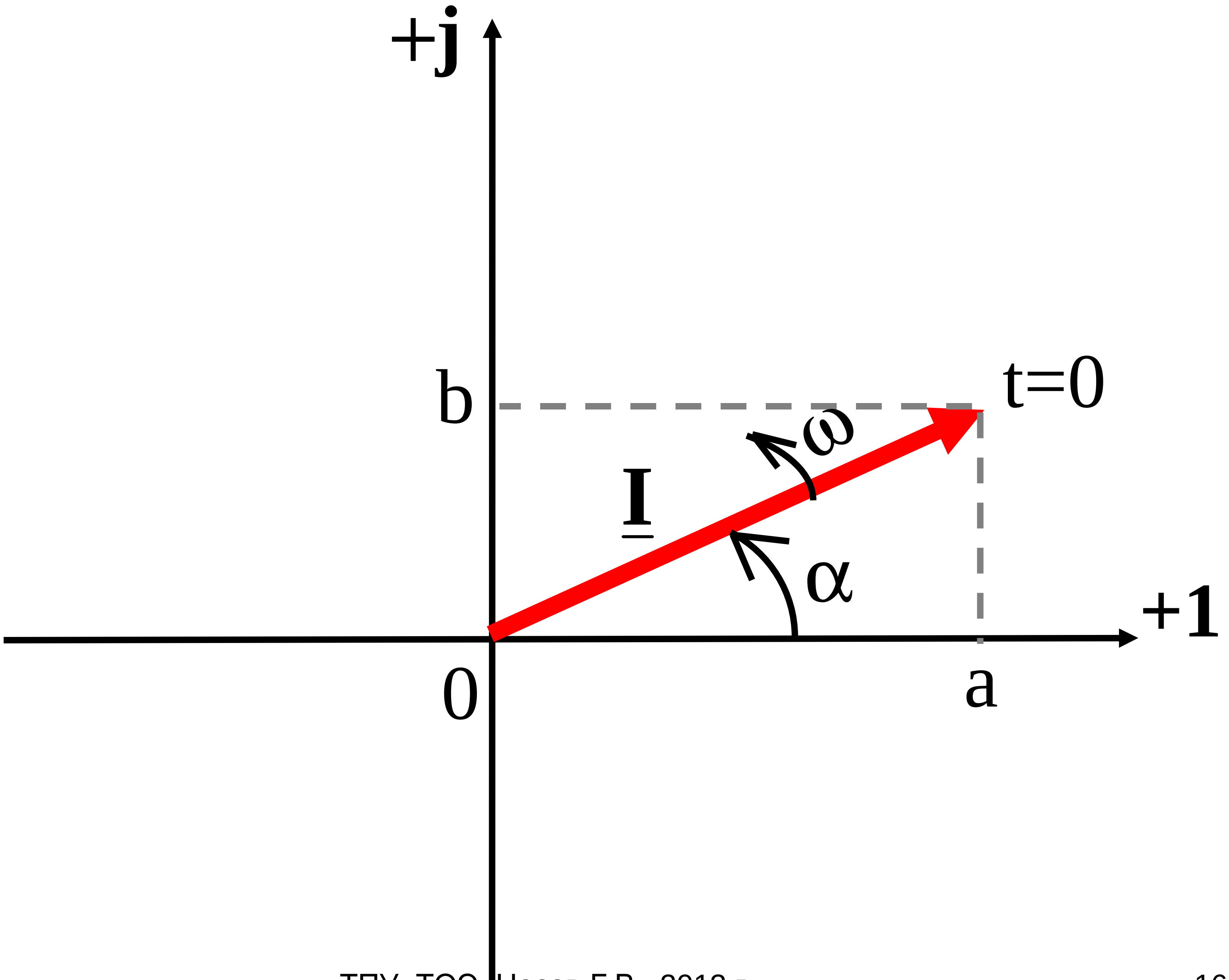
$$= IM[\sqrt{2}\, I e^{j(\omega t+\alpha)}] = IM[\sqrt{2}\, \underline{I}\, e^{j\omega t}] \Rightarrow$$

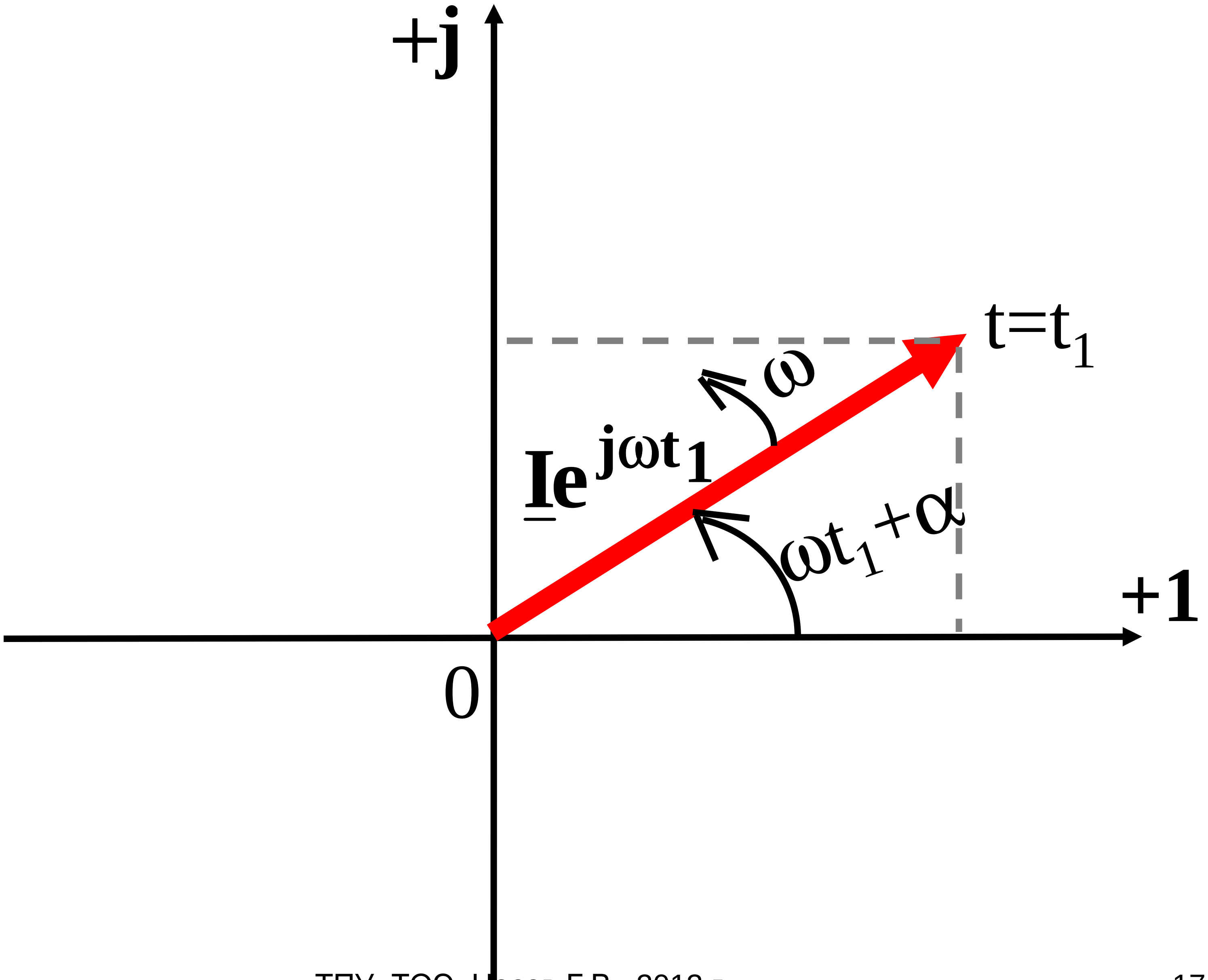
$$\Rightarrow \underline{I} = I\, e^{j\alpha} = I\cos\alpha + jI\sin\alpha = a + jb$$

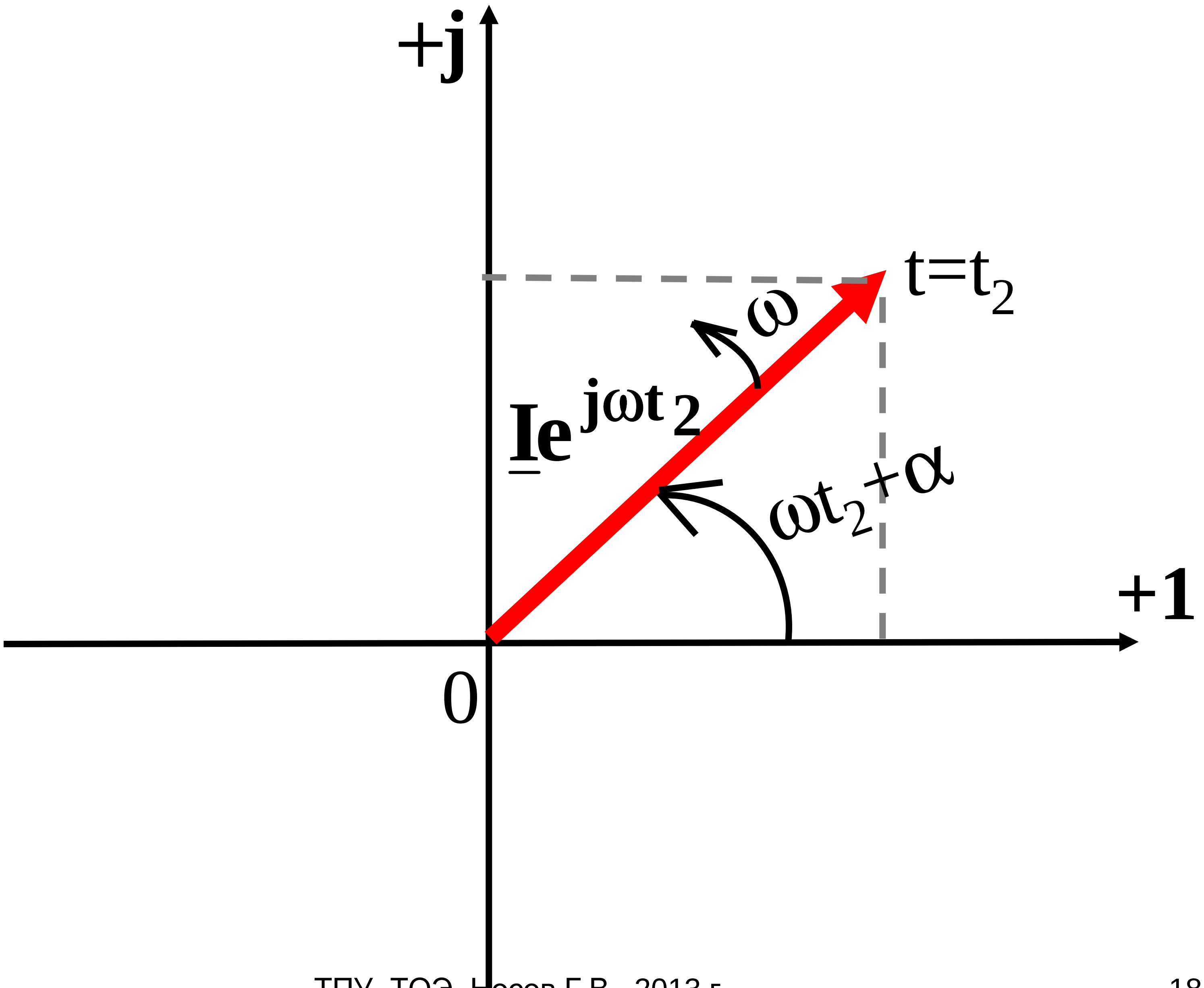
$IM[\sqrt{2}\, I e^{j(\omega t+\alpha)}]$ – мнимая составляющая вращающегося вектора

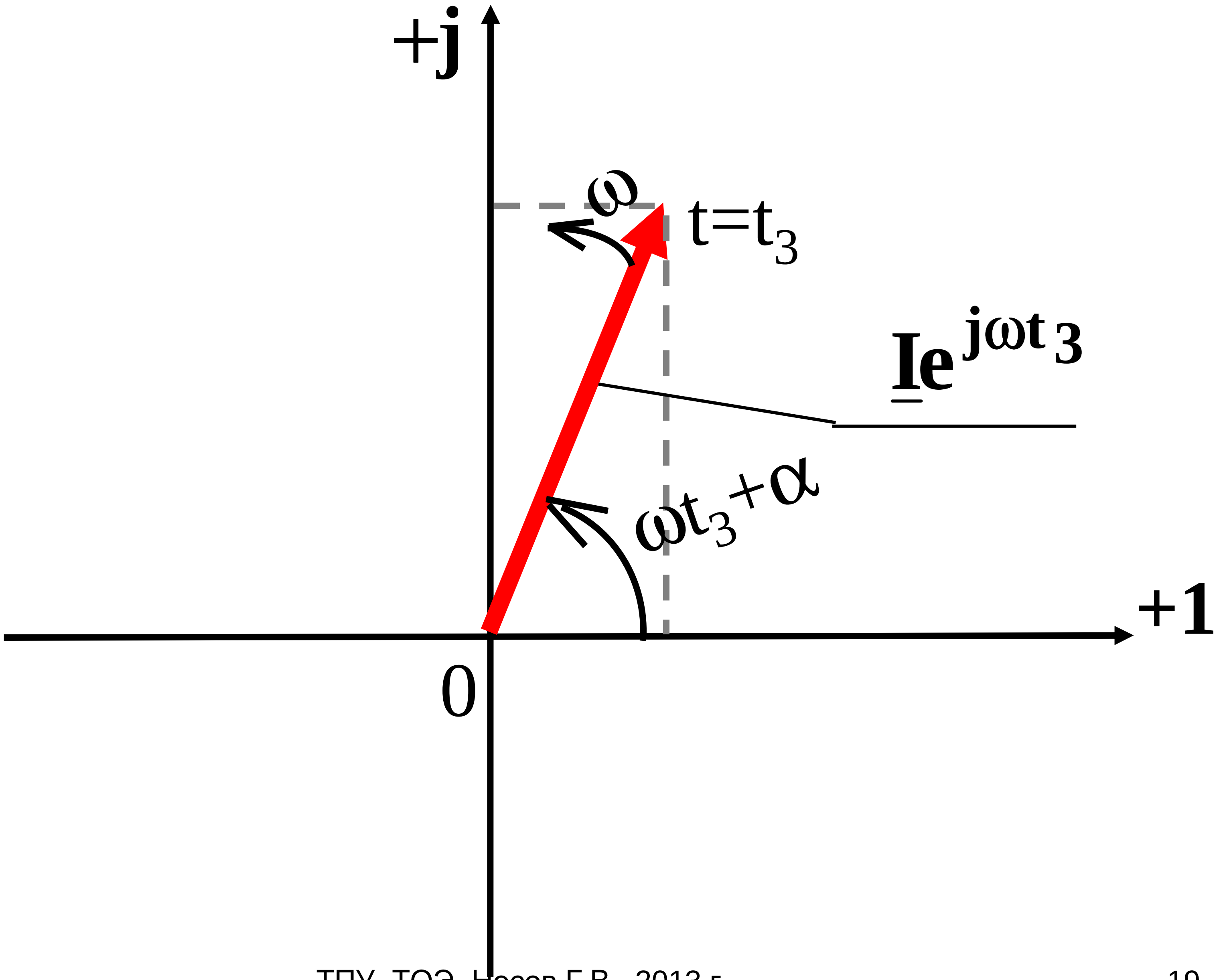


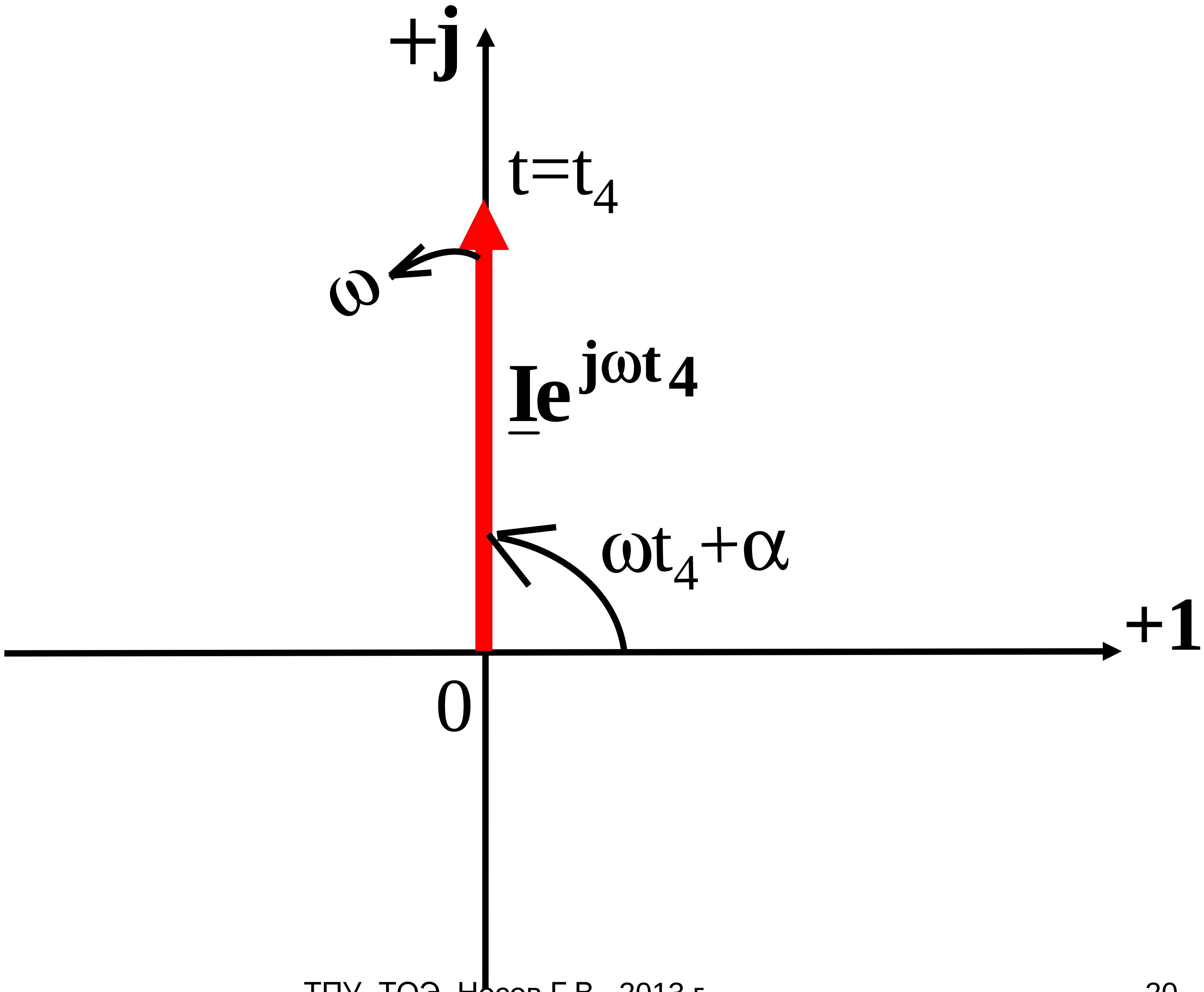
$\underline{I} = Ie^{j\alpha}$ – комплекс действующего значения тока

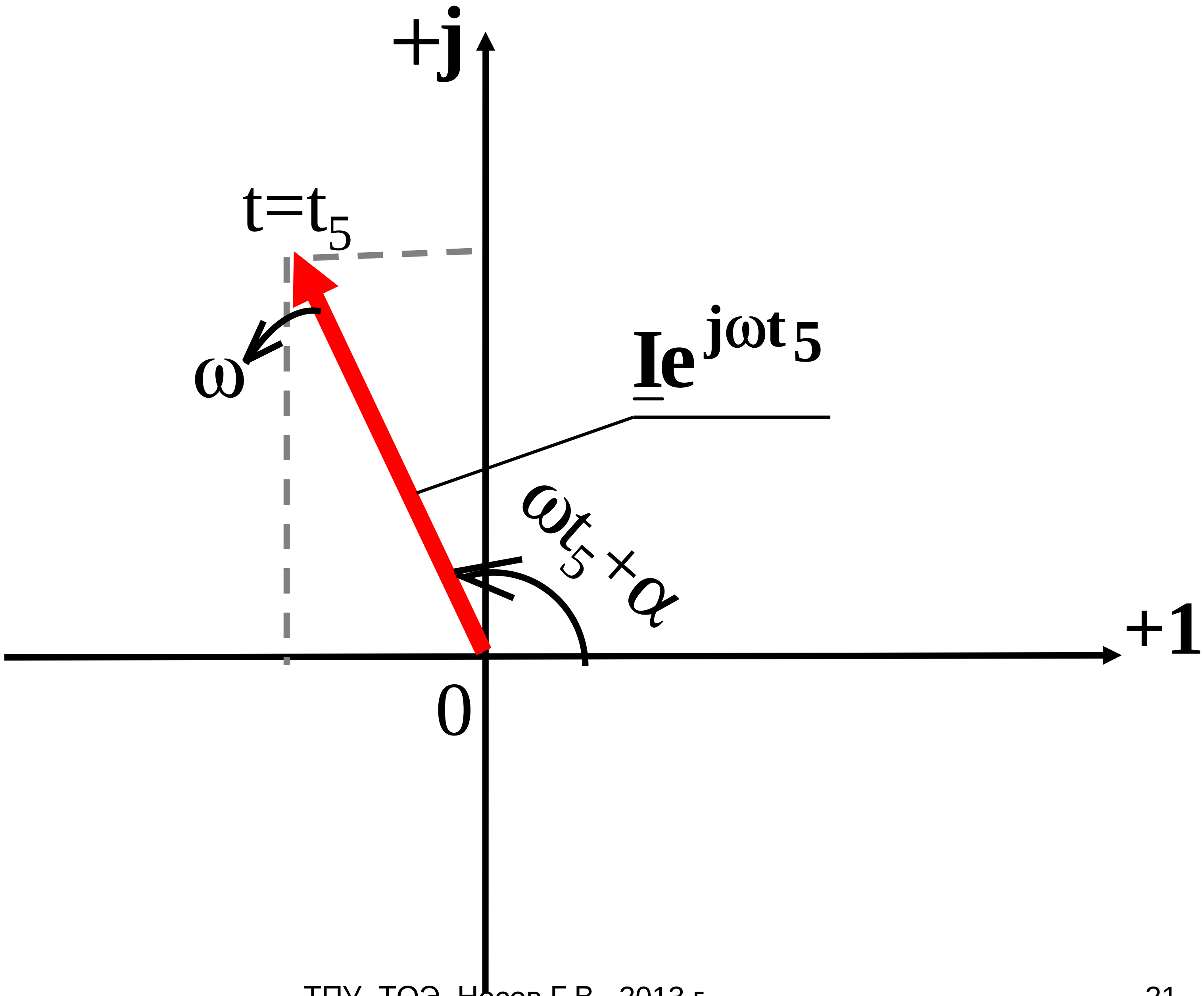

+j
b
t=0
ω
$\underline{\mathbf{I}}$
α
+1
0
a


+j
t=t1
ω
Ie jωt1
ωt1+α
+1
0


+j
t=t2
ω
Iejωt 2
ωt2+α
+1
0


+j
ω
t=t3
Ie jωt 3
ωt3+α
+1
0


+j
t=t4
ω
Ie jωt 4
ωt4+α
+1
0


+j
t=t5
ω
Ie jωt 5
ωt5 +α
+1
0

Синусоидальной величине (току или напряжению) соответствует комплекс ее действующего значения и наоборот.

Например: току

$$i = 2,82 \cdot \sin(\omega t - 30^\circ), \text{ А}$$

соответствует $$\underline{I} = \dot{I} = \frac{2,82}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j30^\circ}$$

При этом, например, комплексу действующего значения напряжения

$$\underline{U} = \dot{U} = 100 \cdot e^{j45^\circ}, \text{В}$$

соответствует синусоидальная функция времени

$$u = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot \sin(\omega t + 45^\circ), \text{В}$$

Действия

с комплексными

числами

Где:

$$\underline{F} = F \cdot e^{j\alpha} = a + jb$$ - **комплексное число**

F - модуль

α - аргумент (фаза)

a - вещественная составляющая

b - мнимая составляющая

1. Переход от алгебраической формы записи к показательной форме

$$\mathbf{a + jb \Rightarrow Fe^{j\alpha}}$$

$$F=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\alpha=(180^o)+\mathrm{arctg}\frac{b}{a}$$

При этом 180 градусов учитывается при a<0

Например:

$$-3+j4=$$

$$=\left[\sqrt{(-3)^2+4^2}\right]\cdot e^{j\left[180^\circ+\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{-3}\right)\right]}=$$

$$=5e^{j\left(180^\circ-53{,}1^\circ\right)}=5e^{j126{,}9^\circ}$$

2. Переход от показательной формы записи к алгебраической форме

$$\mathbf{F}\mathbf{e}^{\mathbf{j}\alpha} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{j}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{a = F\cos\alpha}$$

$$\mathbf{b = F\sin\alpha}$$

Например:

$$4e^{-j120^\circ} =$$

$$= 4\cos\left(-120^\circ\right) + j4\sin\left(-120^\circ\right) =$$

$$= -2 - j3{,}46$$

3. Сложение и вычитание

$$F_1 e^{j\alpha_1} \pm F_2 e^{j\alpha_2} =$$

$$= (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) =$$

$$= (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) =$$

$$= a + jb = Fe^{j\alpha}.$$

Например:

$$5e^{-j30^\circ} - 3e^{j120^\circ} =$$

$$= (4,33 - j2,5) - (-1,5 + j2,6) =$$

$$= 5,83 - j5,1 = 7,74e^{-j41,2^\circ}$$

4. Умножение

$$(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) =$$

$$= F_1 e^{j\alpha_1} \cdot F_2 e^{j\alpha_2} =$$

$$= F_1 F_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} =$$

$$= F e^{j\alpha} = a + jb.$$

Например:

$$\left(-1-j\right)\cdot\left(2-j3\right)=$$

$$=1,41e^{-j135^\circ}\cdot 3,61e^{-j56,3^\circ}=$$

$$=5,09e^{-j191,3^\circ}=-5+j$$

5. Деление

$$\frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{F_1 e^{j\alpha_1}}{F_2 e^{j\alpha_2}} =$$

$$= \frac{F_1}{F_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} =$$

$$= F e^{j\alpha} = a + jb.$$

Например:

$$\frac{3+j4}{4-j3}=\frac{5e^{j53,1^\circ}}{5e^{-j36,9^\circ}}=1e^{j90^\circ}=j1$$

6. Возведение в степень

$$(a_1 + jb_1)^m =$$

$$= (F_1 e^{j\alpha_1})^m =$$

$$= F_1^m e^{jm\alpha_1} =$$

$$= Fe^{j\alpha} = a + jb.$$

Например:

$$\sqrt{-2+j2}=(-2+j2)^{0,5}=$$

$$=\left(2,82e^{j135^\circ}\right)^{0,5}=1,68e^{j67,5^\circ}=$$

$$=0,643+j1,552$$

7. Логарифм

$$\ln(a_1 + jb_1) = \ln(F_1 e^{j\alpha_1}) =$$

$$= \ln(F_1) + j\alpha_{1(\text{рад})} =$$

$$= a + jb = Fe^{j\alpha}$$

Например:

$$\ln(-8+j6)=\ln\left(10e^{j143,1^\circ}\right)=$$

$$=\ln(10)+j\left(143,1^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}\right)=$$

$$=2,3+j2,5=3,397e^{j47,4^\circ}$$

8. Некоторые соотношения

$$\mathbf{j} = \sqrt{-1}$$

$$\mathbf{j}^2 = -1$$

$$1/\mathbf{j} = -\mathbf{j}$$

$$\mathbf{j}^3 = -\mathbf{j}$$

$$\boxed{j = e^{j90^\circ}}$$

$$\boxed{-j = e^{-j90^\circ}}$$

$$\boxed{1 = e^{j0^\circ}}$$

$$\boxed{-1 = e^{j180^\circ}}$$

Действия с синусоидальными величинами

Рассмотрим действия с синусоидальными величинами, имеющими одинаковую угловую частоту ω

1. Сложение

$$f(t) = \sqrt{2}F\sin(\omega t + \alpha) =$$

$$= f_1(t) + f_2(t)$$

$$f_1(t) = \sqrt{2}F_1 \sin(\omega t + \alpha_1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{F}_1 = F_1 e^{j\alpha_1}$$

$$f_2(t) = \sqrt{2}F_2 \sin(\omega t + \alpha_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{F}_2 = F_2 e^{j\alpha_2}$$

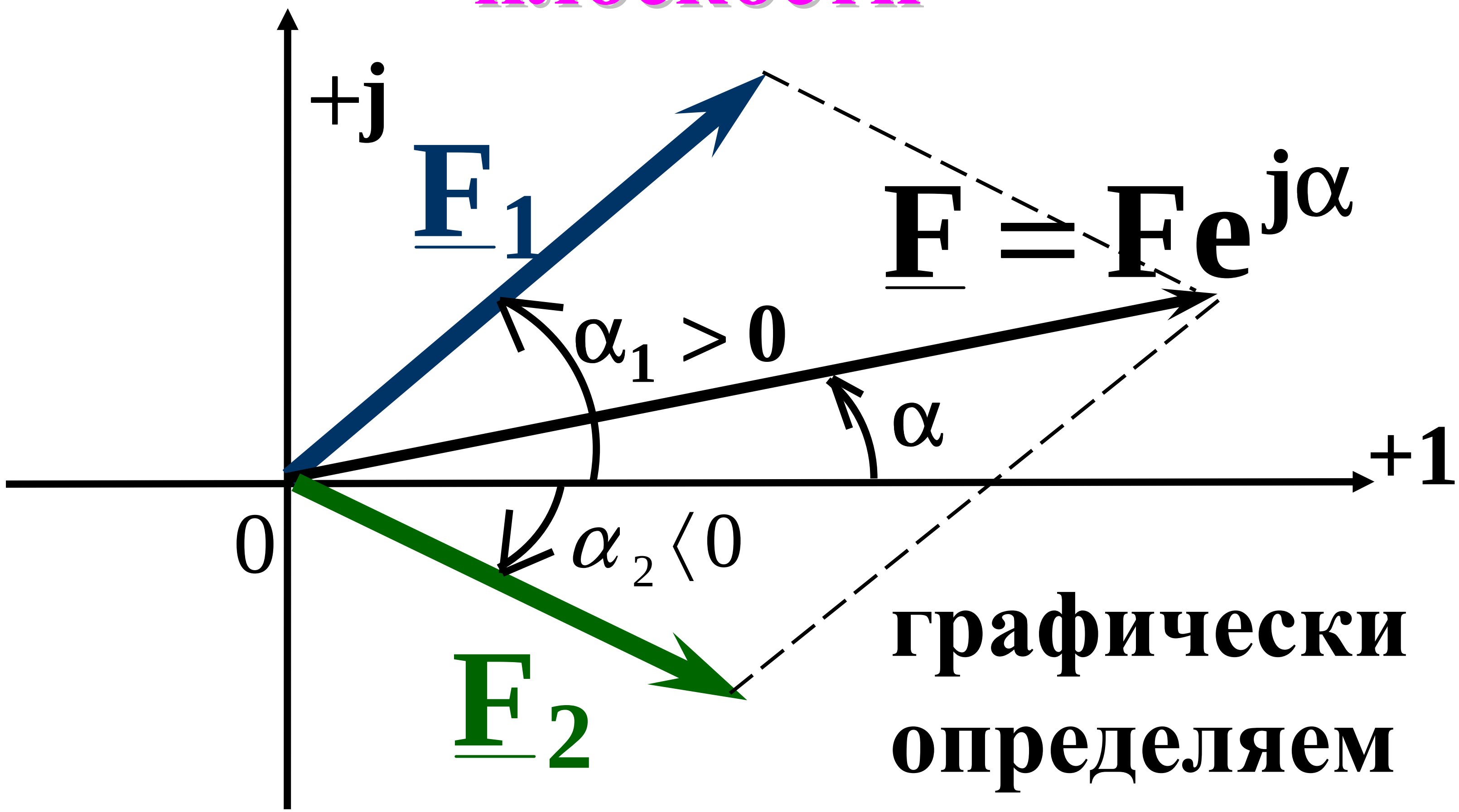
Для определения $\mathbf{F}$ и α используются:

а) комплексные числа

$$F_1 e^{j\alpha_1} + F_2 e^{j\alpha_2} = F e^{j\alpha}$$

$\Rightarrow$ **определяются $\mathbf{F}$ и α**

б) вектора на комплексной плоскости



графически определяем F и α

2. Вычитание

$$f(t)=\sqrt{2}F\sin(\omega t+\alpha)=$$

$$=f_1(t)-f_2(t)$$

$$\mathbf{f_1(t)} \rightarrow \qquad \underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}} = \mathbf{F_1 e^{j\alpha_1}}$$

$$\mathbf{f_2(t)} \rightarrow \qquad \underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}} = \mathbf{F_2 e^{j\alpha_2}}$$

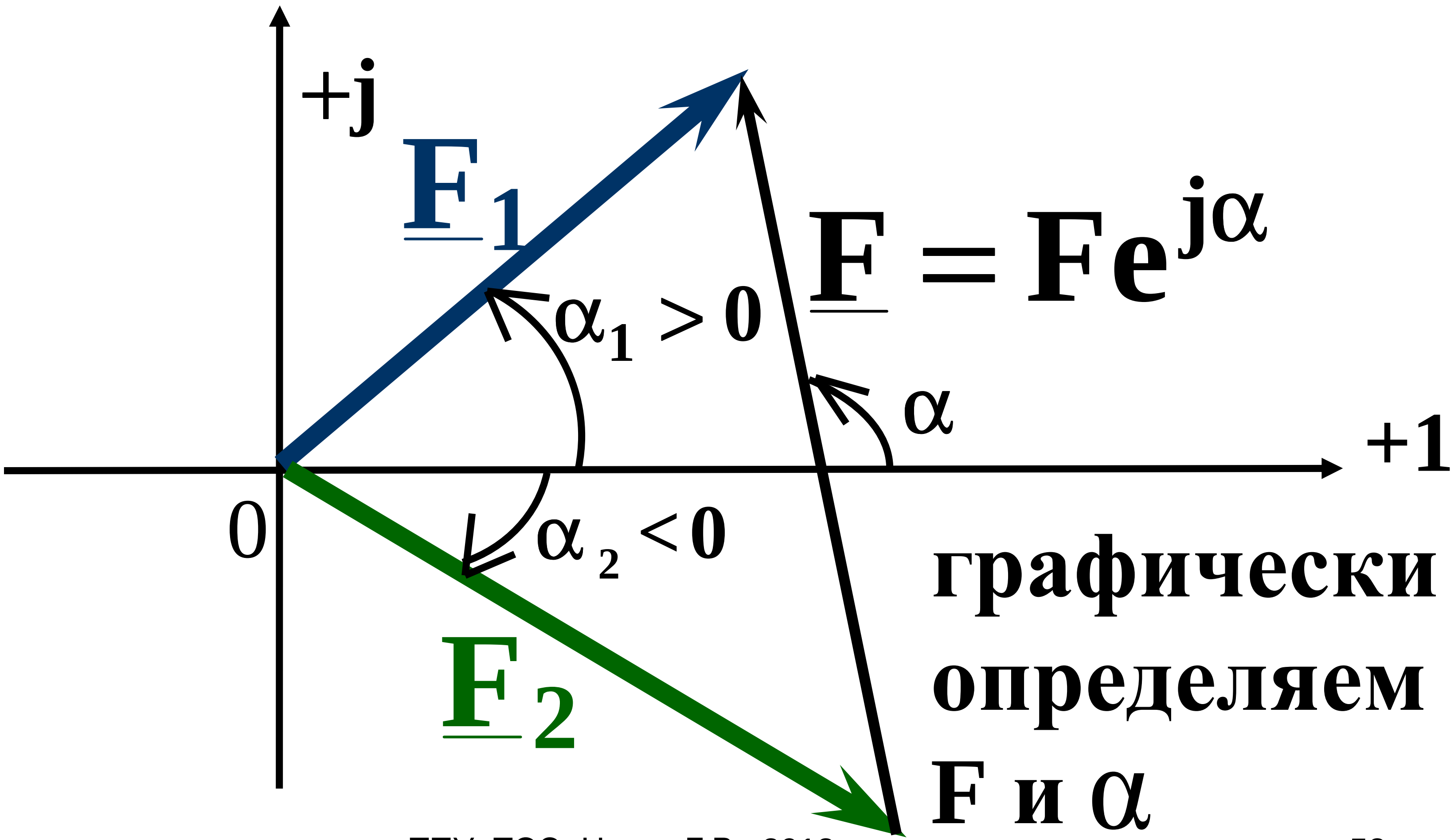
Для определения $\mathbf{F}$ и α используются:

а) комплексные числа

$$\mathbf{F_1 e^{j\alpha_1} - F_2 e^{j\alpha_2} = F e^{j\alpha}}$$

$\Rightarrow$ **определяются $\mathbf{F}$ и α**

б) вектора на комплексной плоскости



графически определяем F и α

3. Дифференцирование

$$f(t) = \sqrt{2}F\sin(\omega t + \alpha) \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{F} = Fe^{j\alpha}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \sqrt{2}\omega F\sin(\omega t + \alpha + 90°) \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega Fe^{j(\alpha+90°)} = j\omega\underline{F}$$

В результате при

$$f(t) \to \underline{F}$$

имеем

$$\frac{df(t)}{dt} \to j\omega\underline{F}$$

Таким образом дифференцированию синусоидальной функции соответствует умножение изображающего ее комплекса на $j\omega$

4. Интегрирование

$$f(t) = \sqrt{2}F\sin(\omega t + \alpha) \to$$

$$\to \underline{F} = Fe^{j\alpha}$$

$$\int f(t)dt = \frac{\sqrt{2}F}{\omega}\sin(\omega t + \alpha - 90°) \to$$

$$\to \frac{F}{\omega}e^{j(\alpha - 90°)} = \frac{\underline{F}}{j\omega}$$

В результате при

$$f(t) \to \underline{F}$$

имеем

$$\int f(t)dt \to \frac{\underline{F}}{j\omega}$$

Таким образом интегрированию синусоидальной функции соответствует деление изображающего ее комплекса на $j\omega$