3 лекция

Свойства линейных цепей

Свойства линейных цепей рассмотрим на примере резистивных цепей с постоянными напряжениями и токами, причем эти свойства могут быть доказаны при помощи законов Ома и Кирхгофа

1. Принцип наложения

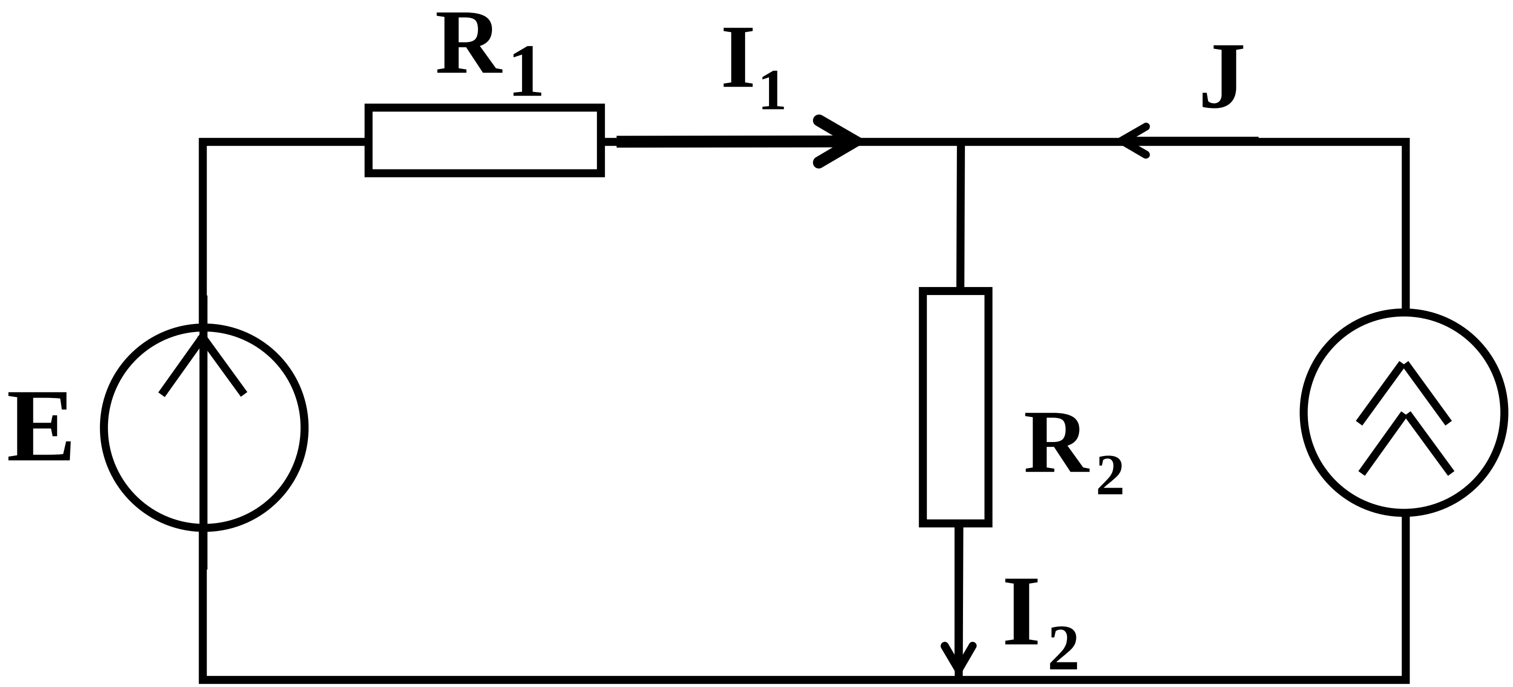
$$\mathbf{I_k = \sum \pm I_k^{(n)}}$$

$$\mathbf{U_k = \sum \pm U_k^{(n)}}$$

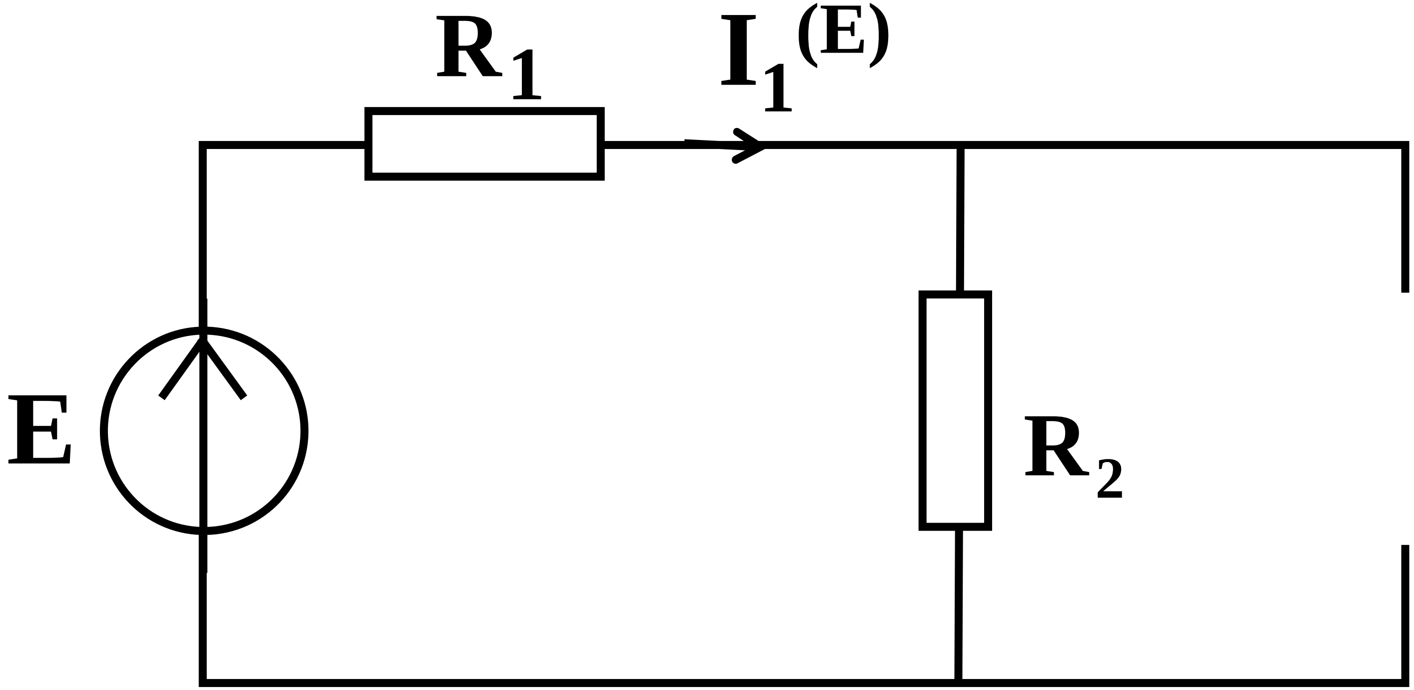
Ток и напряжение в любой ветви можно рассматривать как алгебраическую сумму составляющих от действия каждого источника в отдельности

При этом со знаком “+” пишутся те составляющие, направления которых совпадает с направлением результирующих величин

Например:

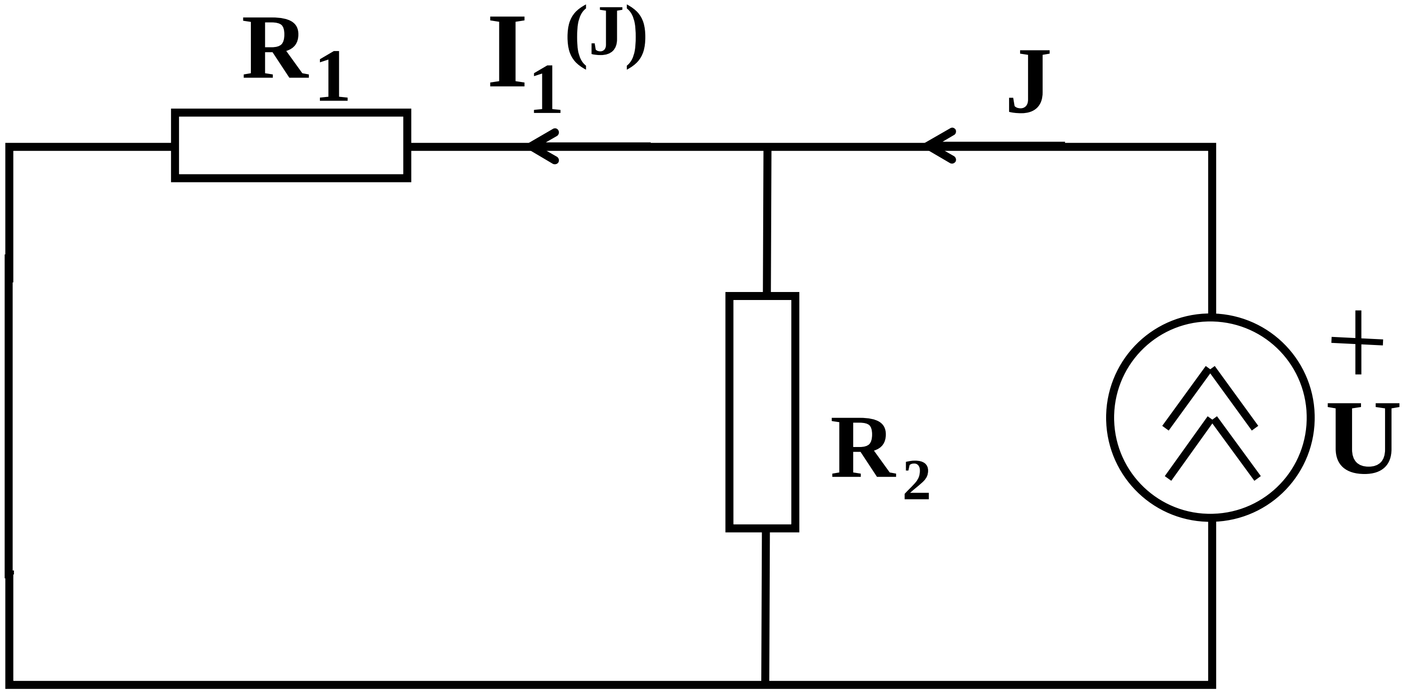


а) подсхема с ЭДС E



По закону Ома: $I_1^{(E)} = E/(R_1 + R_2)$

б) подсхема с источником тока J



По закону Ома: $U=J\cdot R_1R_2/(R_1+R_2)$

$I_1^{(J)}=U/R_1=J\cdot R_2/(R_1+R_2)$

В результате:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1^{(E)} - \mathbf{I}_1^{(J)} =$$

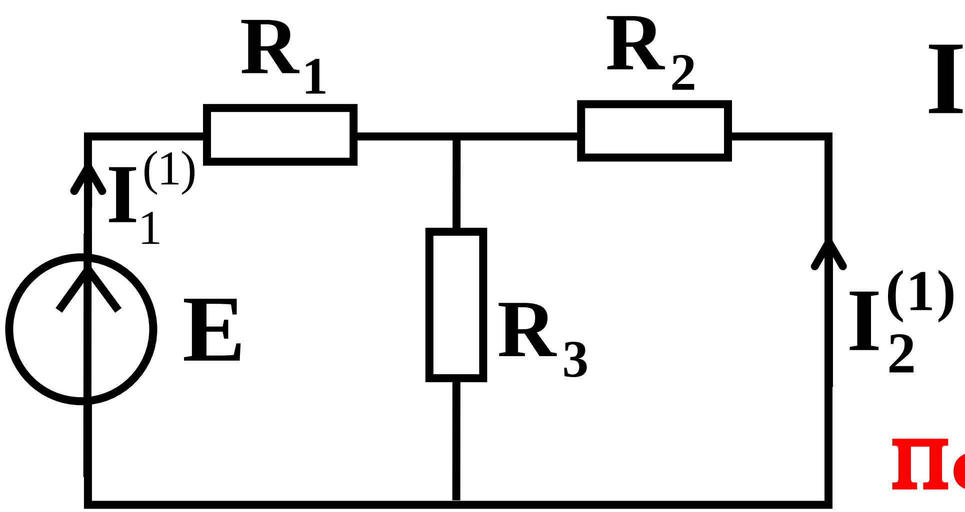
$$= \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2} - \frac{\mathbf{J}\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2}$$

2. Принцип взаимности

$$\boxed{I_n^{(m)} = I_m^{(n)}}$$

Перестановка единственного источника ЭДС из ветви *m* в ветвь *n* создает в ветви *m* ток, равный току в ветви *n* до перестановки источника ЭДС

Например:



По закону Ома

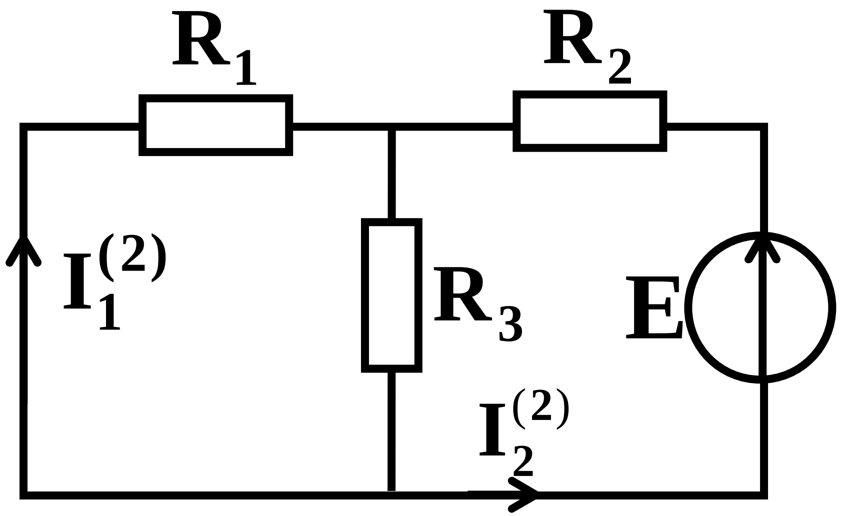
$$I_1^{(1)} = \frac{E}{R_E^{(1)}} = \frac{E}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}};$$

По 2 закону Кирхгофа

$$E = R_1 I_1^{(1)} - R_2 I_2^{(1)};$$

тогда

$$I_2^{(1)} = -\frac{E - R_1 I_1^{(1)}}{R_2} = -\frac{E R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$



По закону Ома

$$I_2^{(2)} = \frac{E}{R_E^{(2)}} = \frac{E}{R_2 + \dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}};$$

По 2 закону Кирхгофа

$$E = R_2 I_2^{(2)} - R_1 I_1^{(2)};$$

тогда

$$I_1^{(2)} = -\frac{E - R_2 I_2^{(2)}}{R_1} = -\frac{E R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Таким образом:

$$\boxed{\mathbf{I}_2^{(1)} = \mathbf{I}_1^{(2)}}$$

т.е. принцип взаимности выполняется

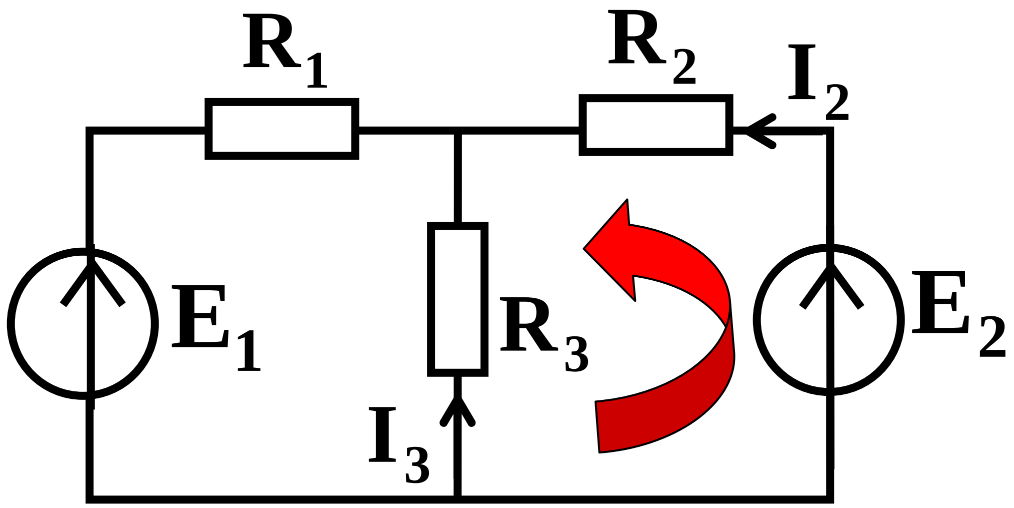
3. Свойство линейности

При изменении в цепи одного параметра (ЭДС E_k, ток источника тока J_k, сопротивление резистивного элемента R_k) между двумя токами (напряжениями) существует линейная зависимость:

$$y=ax+b,$$

где x,y – токи (напряжения); a,b – постоянные коэффициенты.

Например:



$$E_1 = \mathrm{var}$$

По 2 закону Кирхгофа:

$$E_2 = -R_3 I_3 + R_2 I_2$$

тогда

$$I_3 = \frac{R_2}{R_3} I_2 - \frac{E_2}{R_3} = aI_2 + b$$

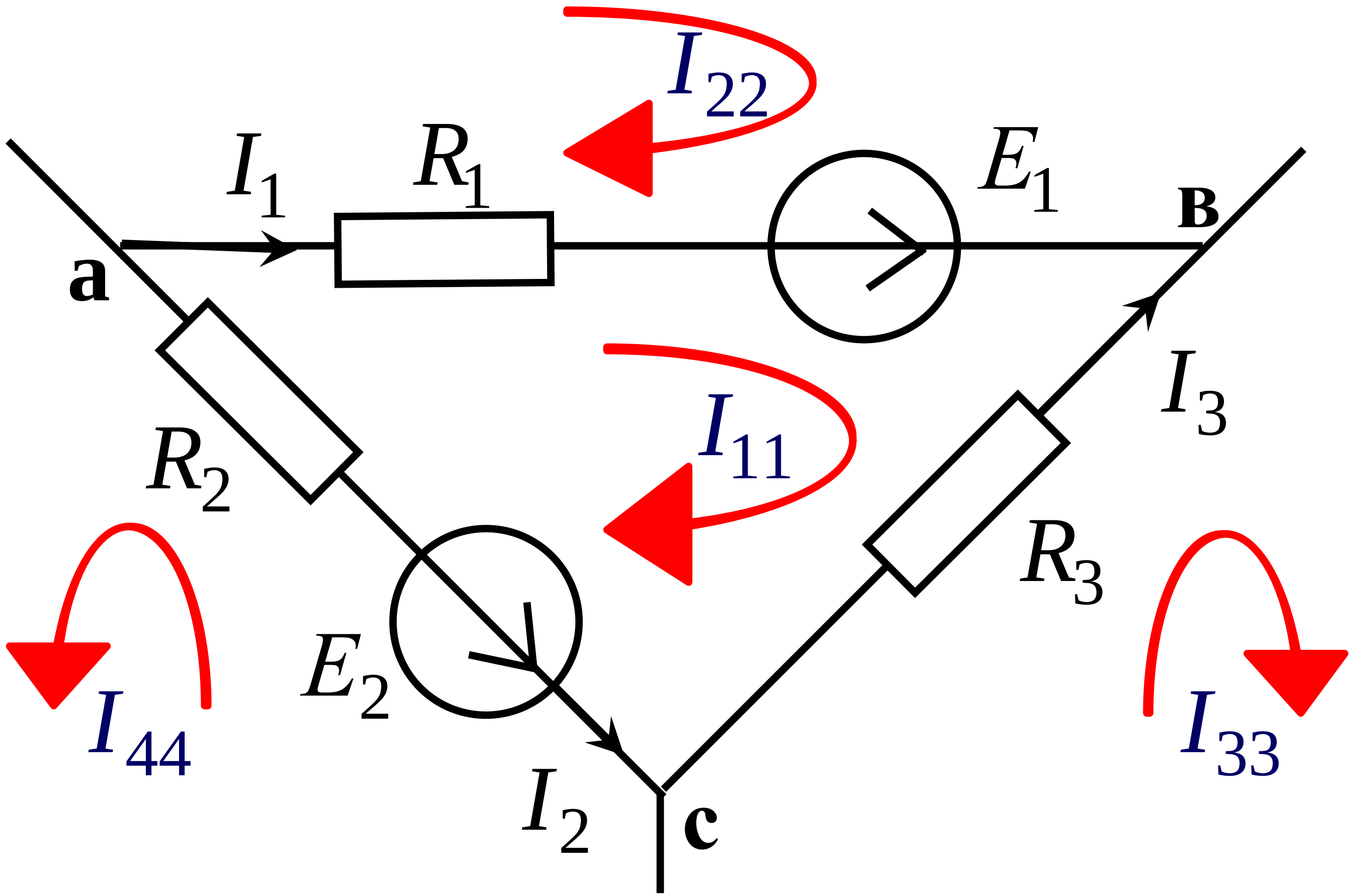
$$a = {R_2}/{R_3}$$

$$b = -{E_2}/{R_3}$$

МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

В расчет вводятся контурные токи – это фиктивные токи, которые замыкаются в независимых замкнутых контурах, отличающихся друг от друга наличием хотя бы одной новой ветви

Например:



$$I_{11}, I_{22}, I_{33}, I_{44} -$$

контурные токи

$$I_1 = I_{11} - I_{22}$$

$$I_2 = -I_{11} - I_{44} \quad -$$

$$I_3 = I_{33} - I_{11}$$

токи ветвей контура

По второму закону Кирхгофа:

$$R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_2 I_2 = E_1 - E_2$$

или

$$R_1(I_{11} - I_{22}) - R_3(I_{33} - I_{11}) -$$
$$- R_2(-I_{11} - I_{44}) = E_1 - E_2$$

Тогда

$$(R_1 + R_2 + R_3)I_{11} - R_1 I_{22} -$$

$$- R_3 I_{33} + R_2 I_{44} = E_1 - E_2$$

или

$$\boxed{R_{кк} I_{кк} + \sum \pm R_{кm} I_{mm} = E_{кк}}$$

$R_{кк}$ – **суммарное сопротивление *к*-контура**

$I_{кк}$ – **контурный ток *к*-контура**

R_{km} – **общее сопротивление между *к*-контуром и *m* -контуром**

I_{mm} – **соседний контурный ток *m*-контура**

E_{kk} – **суммарная ЭДС *к*-контура**

Правило для *к*-контура с током $I_{кк}$:

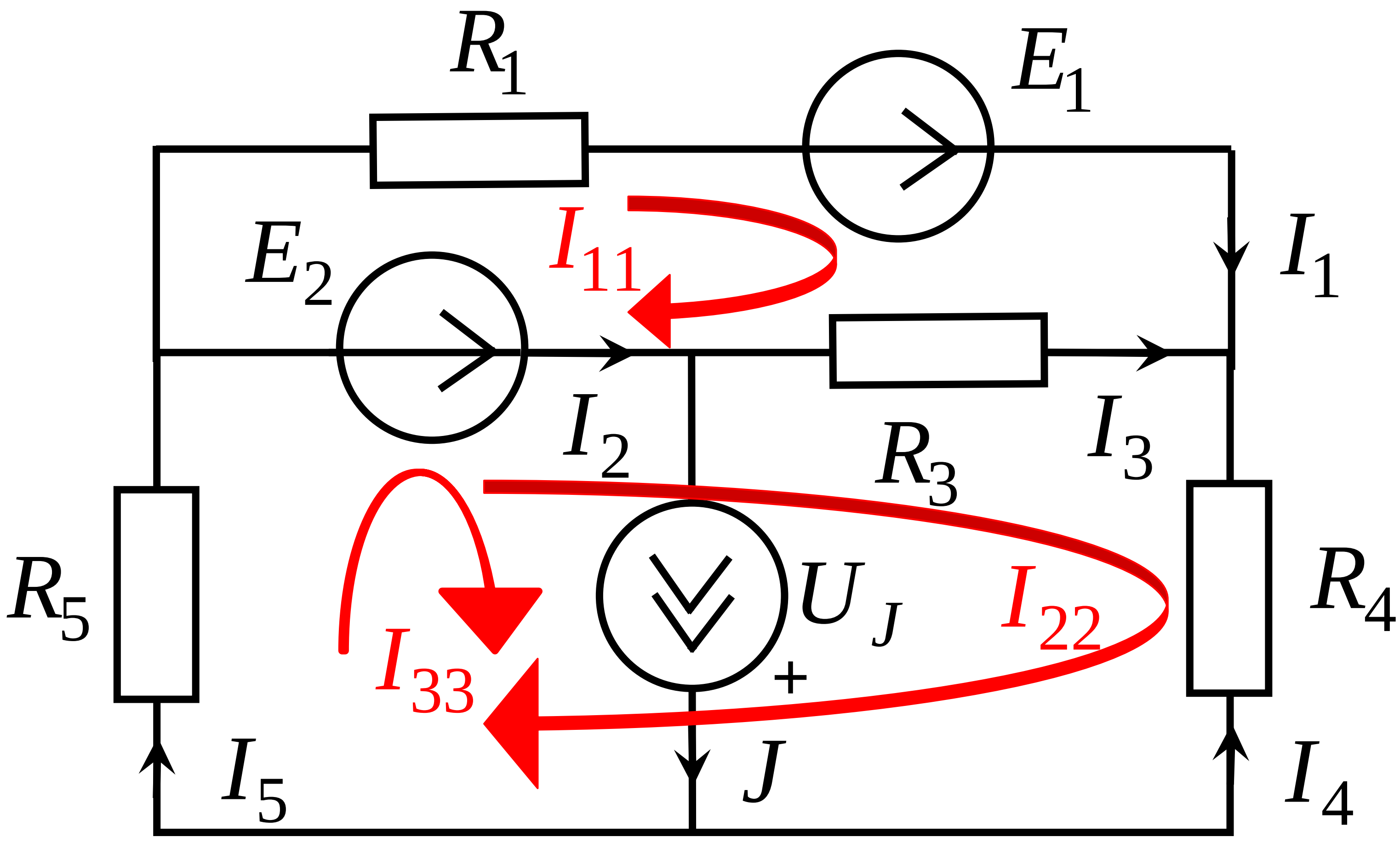
Контурный ток ($I_{кк}$) рассматриваемого *к*-контура умножается на сумму сопротивлений ($R_{кк}$) своего контура, причем перед этим произведением ставится знак “+”.

Соседний контурный ток (I_{mm}) умножается на общее сопротивление (R_{km}) соседнего (m) и рассматриваемого (k) контуров, причем перед этим произведением ставится знак “+” если направления этих контурных токов (I_{kk} и I_{mm}) в общем сопротивлении (R_{km}) совпадают между собой и ставится знак “-” если направления их не совпадают .

В правой части уравнения записывается алгебраическая сумма ЭДС ($E_{кк}$) рассматриваемого контура, причем со знаком “+” берутся те ЭДС, направления которых совпадают с направлением рассматриваемого ($I_{кк}$) контурного тока.

Для контура с источником тока контурное уравнение не составляется, так как контурный ток этого контура известен и равен току источника тока, причем через источник тока должен проходить только этот один уже известный контурный ток.

Пример



$n_у = 4$	$n_в = 6$	$n_i = 5$

Число контурных токов:

$$n_{кт} = n_в - n_у + 1 = 3$$

Число контурных уравнений:

$$n_{ку} = n_i - n_у + 1 = 2$$

$$I_{33} = J$$

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)I_{11} - R_3 I_{22} - 0 \cdot I_{33} = E_1 - E_2 \\ -R_3 I_{11} + (R_5 + R_3 + R_4)I_{22} + R_5 I_{33} = E_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (R_1+R_3) & (-R_3) \\ (-R_3) & (R_5+R_3+R_4) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 - E_2 \\ E_2 - R_5 J \end{pmatrix}$$

матрица симметрична относительно главной диагонали

$$I_1 = I_{11} \qquad I_2 = I_{22} + I_{33} - I_{11}$$

$$I_3 = I_{22} - I_{11} \qquad I_4 = -I_{22}$$

$$I_5 = I_{22} + I_{33}$$

$$U_J = R_4 I_4 - R_3 I_3$$ **-по 2 закону Кирхгофа**

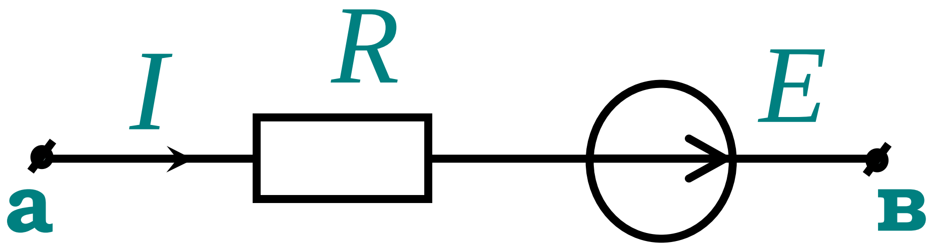
Таким образом по методу контурных токов необходимо решить значительно меньше уравнений по сравнению с методом законов Кирхгофа: $n_{ку}<n_{в}$

МЕТОД УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

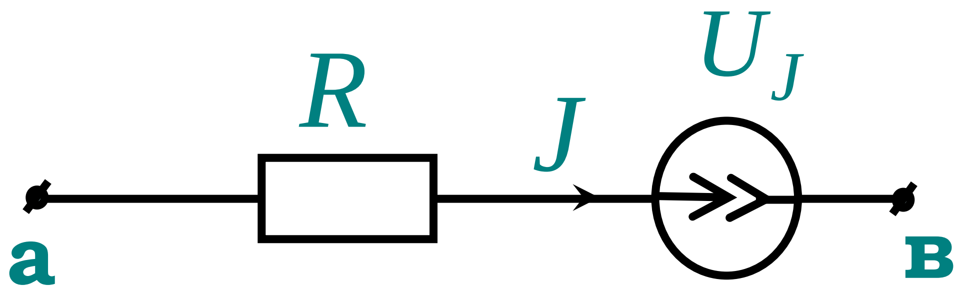
Метод узловых потенциалов используется для расчета сложных схем замещения.

Расчетные уравнения данного метода могут быть доказаны при помощи **1 закона Кирхгофа** и **обобщенного закона Ома**.

Обобщенный закон Ома:



$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_в + E}{R}$$

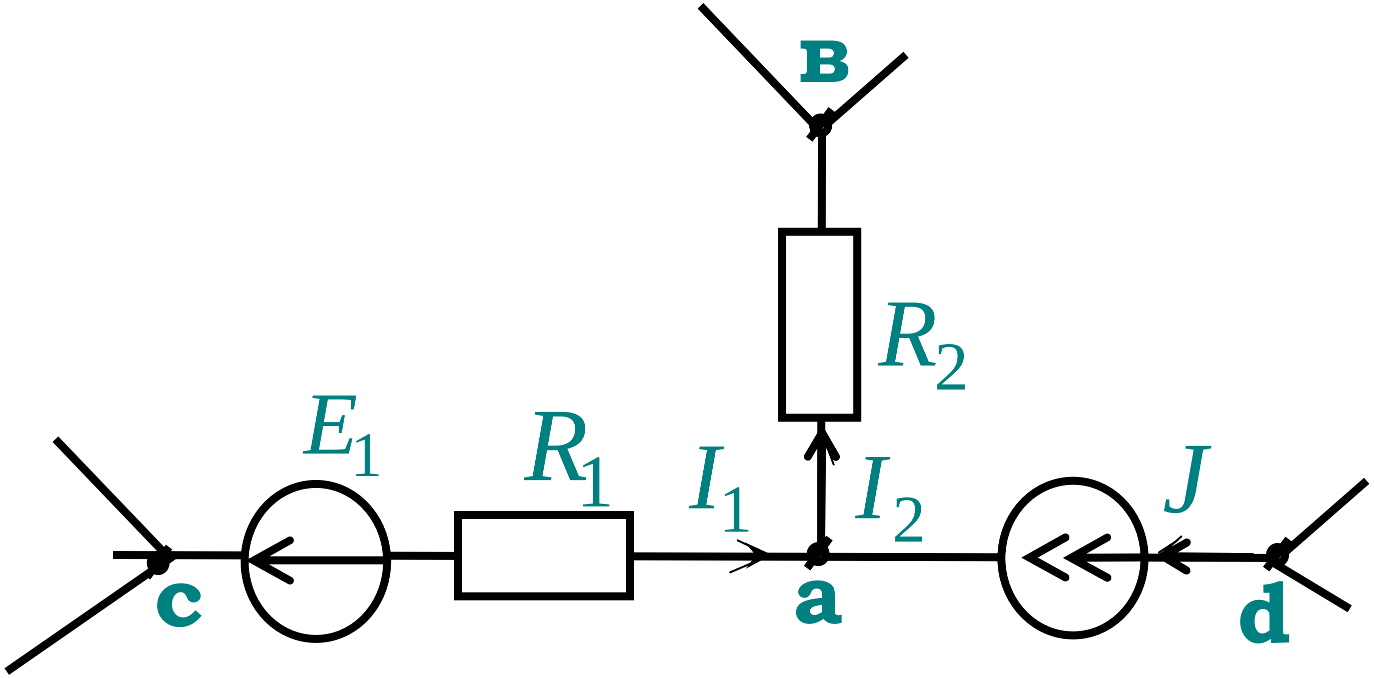


$$U_J = \varphi_в - \varphi_a + RJ$$

Получим расчетное уравнение

метода узловых потенциалов

для узла “a” некоторой схемы:


в
R_2
E_1
R_1
I_1
I_2
J
c
a
d

По обобщенному закону Ома:

$$\boxed{I_1 = (\varphi_c - \varphi_a - E_1) \cdot g_1}$$

$$\boxed{I_2 = (\varphi_a - \varphi_в) \cdot g_2}$$

где $g_1 = {}^1\!/_{R_1}$ $\quad g_2 = {}^1\!/_{R_2}$

- проводимости ветвей

По 1 закону Кирхгофа для узла a:

$$\boxed{-I_1 + I_2 - J = 0}$$

или

$$\boxed{-(\varphi_c - \varphi_a - E_1)\cdot g_1 + (\varphi_a - \varphi_в)\cdot g_2 = J}$$

Тогда

$$\boxed{(g_1+g_2)\cdot\varphi_a-g_2\varphi_в-g_1\varphi_c=-E_1g_1+J}$$

Т.е. в общем виде для *к*- узла:

$$\boxed{g_{кк}\cdot\varphi_к-\sum g_{mк}\cdot\varphi_m=I_к^{(y)}}$$

$g_{кк}$ – **сумма проводимостей ветвей, подходящих к *к* - узлу;**

$\varphi_к$ – **потенциал *к* - узла;**

φ_m – **потенциал соседнего *m* - узла;**

g_{mk} – **проводимость ветви, соединяющей** ***к*** **- и** ***m*** **- узлы;**

$$\boxed{I_{к}^{(y)} = \sum \pm E_q g_q + \sum \pm J_q}$$

- узловой ток ***к*** **- узла.**

Правило для *к*-узла с потенциалом $\varphi_к$:

Потенциал (φ_k) рассматриваемого *к*-узла умножается на сумму проводимостей (g_{kk}) ветвей, подходящих к этому *к*-узлу, причем перед этим произведением всегда ставится знак “+” и проводимость ветви с источником тока равна нулю.

Потенциал (φ_m) соседнего m-узла умножается на проводимость (g_{mk}) ветви, соединяющей рассматриваемый k-узел с m-узлом, причем перед этим произведением всегда ставится знак “-” .

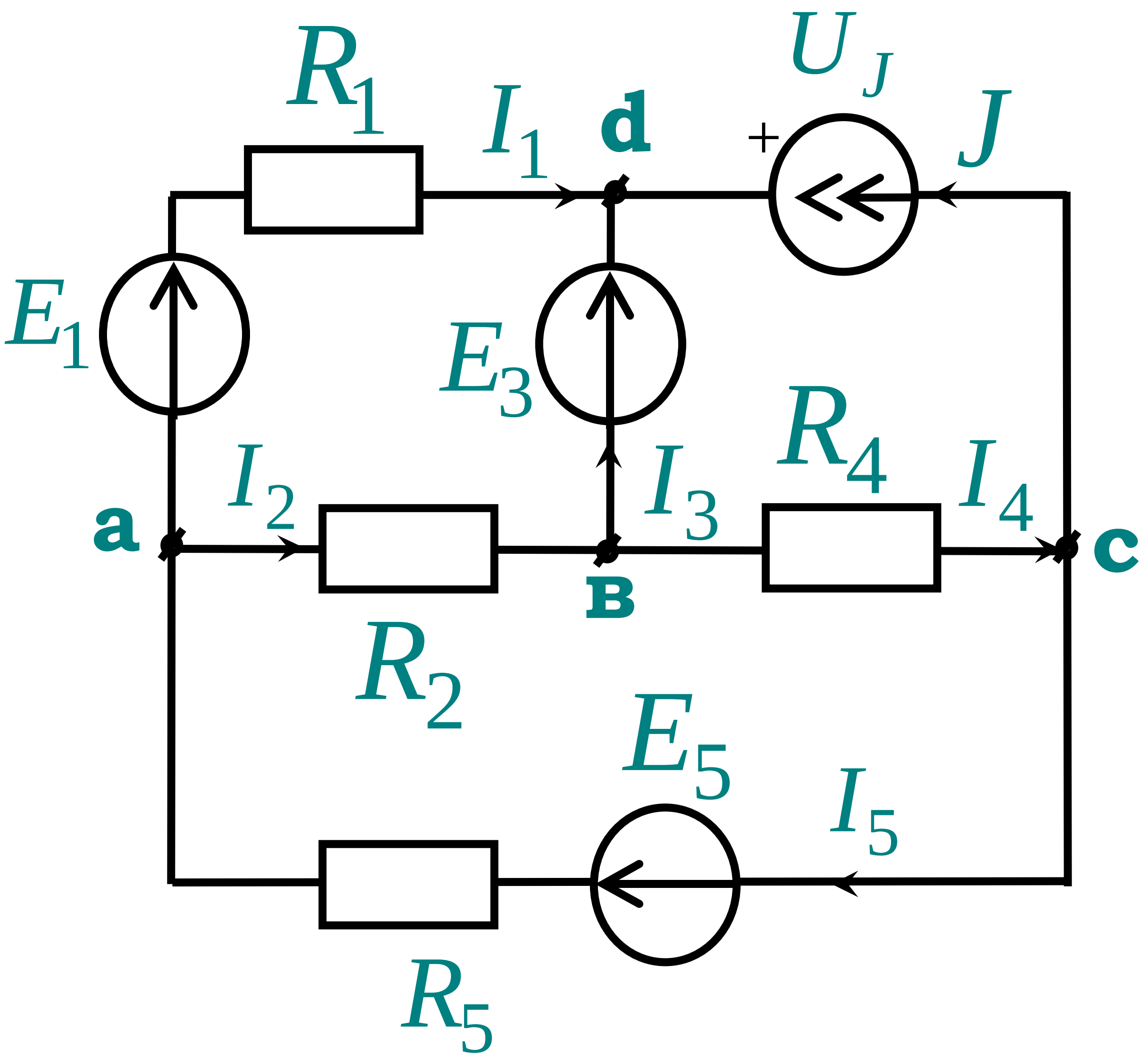
В правой части уравнения записывается узловой ток $I_k^{(y)}$ рассматриваемого *к*-узла, равный алгебраической сумме подходящих к этому *к*-узлу токов источников тока (J_q) и произведений подходящих к этому *к*-узлу ЭДС (E_q) на проводимости (g_q) своих ветвей.

В узловом токе со знаком “+” берутся те слагаемые, у которых источники тока (J_q) и ЭДС (E_q) направлены в рассматриваемый *к*-узел.

Потенциал одного из узлов принимается равным нулю, причем за такой узел берется узел, соединенный с корпусом или “землей”, или один из узлов, к которому подходит ветвь с нулевым сопротивлением и ЭДС.

Таким образом для схемы с $n_у$ узлами по методу узловых потенциалов составляется система, содержащая не более $n_1 = n_у - 1$ уравнений, из решения которых определяются потенциалы узлов, а затем по обобщенному закону Ома рассчитываются токи и напряжения в ветвях схемы .

Пример



$$
\begin{cases}
\varphi_{в} = 0 \qquad \varphi_d = E_3 \\
(g_1 + g_2 + g_5) \cdot \varphi_a - g_1 \varphi_d - g_5 \varphi_c = -E_1 g_1 + E_5 g_5 \\
-g_5 \varphi_a + (g_4 + g_5) \cdot \varphi_c = -E_5 g_5 - J
\end{cases}
$$

$$\begin{bmatrix} (g_1+g_2+g_5) & (-g_5) \\ (-g_5) & (g_4+g_5) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -E_1 g_1 + E_5 g_5 + E_3 g_1 \\ -E_5 g_5 - J \end{bmatrix}$$

$$I_1 = (\varphi_a - \varphi_d + E_1) \cdot g_1$$

$$I_2 = (\varphi_a - \varphi_в) \cdot g_2$$

$$I_3 = -I_1 - J \qquad U_J = \varphi_d - \varphi_c$$

$$I_4 = (\varphi_в - \varphi_c) \cdot g_4$$

$$I_5 = (\varphi_c - \varphi_a + E_5) \cdot g_5$$

Таким образом по методу узловых потенциалов необходимо решить значительно меньше уравнений по сравнению с методом законов Кирхгофа .