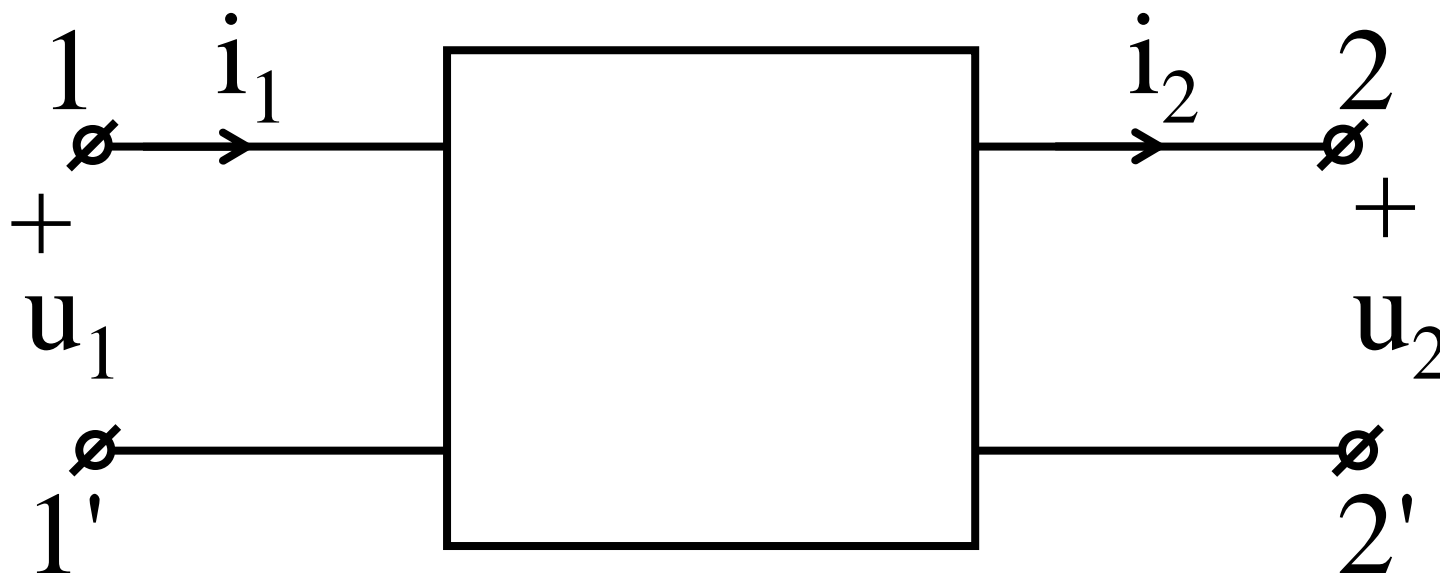


18 лекция

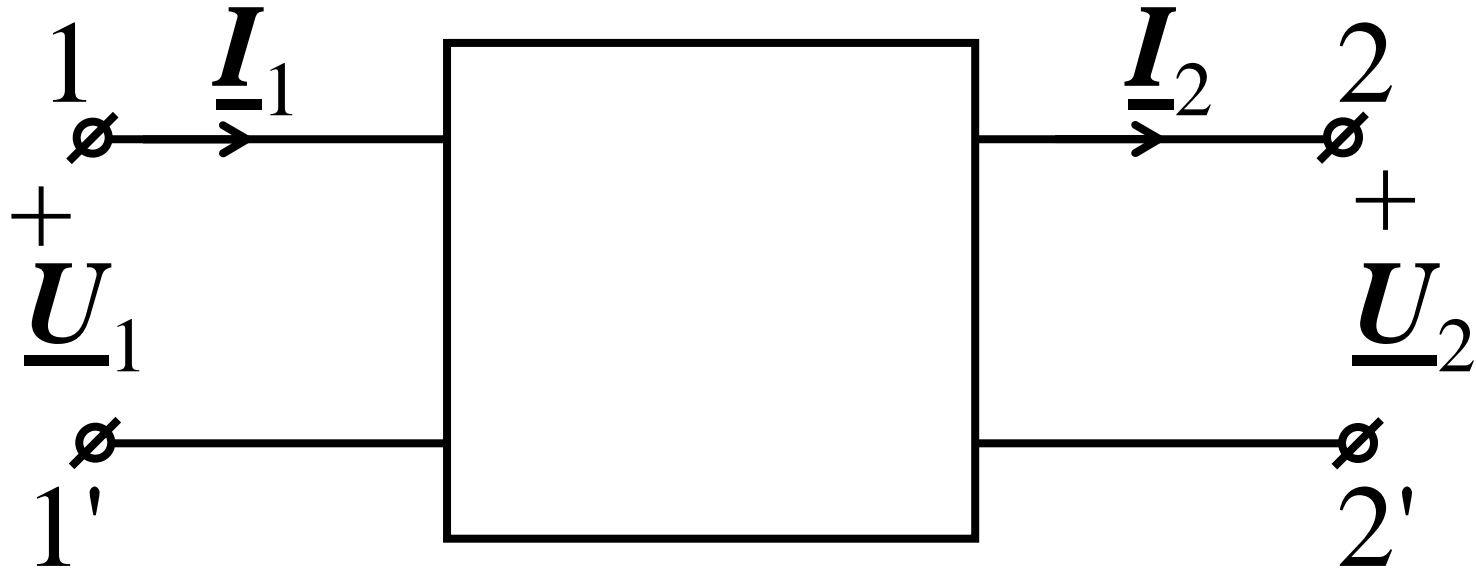
Четырехполюсники в линейном режиме



Четырехполюсники – это цепи, имеющие два входных (1, 1') и два выходных (2, 2') зажима

Пассивные четырехполюсники, удовлетворяющие **принципу взаимности**, называют **обратимыми** (линии связи, трансформатор, электрический фильтр).

Четырехполюсники с нелинейными элементами, а также все **активные** четырехполюсники, (с независимыми и зависимыми **источниками**) – **необратимые**. Это электронные генераторы, усилители, активные фильтры.



В линейном режиме у **пассивных
обратимых четырехполюсников комплексы
гармонических входных и выходных
напряжений и токов связаны следующими
линейными зависимостями:**

1. Уравнения типа А:

$$\begin{cases} \dot{\underline{U}}_1 = \underline{A}_{11} \dot{\underline{U}}_2 + \underline{A}_{12} \dot{\underline{I}}_2 \\ \dot{\underline{I}}_1 = \underline{A}_{21} \dot{\underline{U}}_2 + \underline{A}_{22} \dot{\underline{I}}_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{U}}_1 \\ \dot{\underline{I}}_1 \end{pmatrix} = (\underline{A}) \begin{pmatrix} \dot{\underline{U}}_2 \\ \dot{\underline{I}}_2 \end{pmatrix}; (\underline{A}) = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix},$$

причем $\underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{21} \underline{A}_{12} = 1$

2. Уравнения типа Y :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{I}}_1 = \underline{Y}_{11} \dot{\mathbf{U}}_1 + \underline{Y}_{12} \dot{\mathbf{U}}_2 \\ \dot{\mathbf{I}}_2 = \underline{Y}_{21} \dot{\mathbf{U}}_1 + \underline{Y}_{22} \dot{\mathbf{U}}_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{I}}_1 \\ \dot{\mathbf{I}}_2 \end{pmatrix} = (\underline{\mathbf{Y}}) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}}_1 \\ \dot{\mathbf{U}}_2 \end{pmatrix}; \quad (\underline{\mathbf{Y}}) = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix},$$

причем $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$;

$$\underline{Y}_{11} = \underline{A}_{22} / \underline{A}_{12}; \quad \underline{Y}_{12} = -1 / \underline{A}_{12}; \quad \underline{Y}_{21} = 1 / \underline{A}_{12}; \quad \underline{Y}_{22} = -\underline{A}_{11} / \underline{A}_{12}$$

3. Уравнения типа Z :

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{Z}_{11} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \underline{Z}_{21} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{22} \dot{I}_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = (\underline{Z}) \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}; \quad (\underline{Z}) = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix},$$

причем $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21};$

$$\underline{Z}_{11} = \underline{A}_{11} / \underline{A}_{21}; \quad \underline{Z}_{12} = -1 / \underline{A}_{21}; \quad \underline{Z}_{21} = 1 / \underline{A}_{21}; \quad \underline{Z}_{22} = -\underline{A}_{22} / \underline{A}_{21}$$

4. Уравнения типа H :

$$\begin{cases} \dot{\underline{U}}_1 = \underline{H}_{11} \dot{\underline{I}}_1 + \underline{H}_{12} \dot{\underline{U}}_2 \\ \dot{\underline{I}}_2 = \underline{H}_{21} \dot{\underline{I}}_1 + \underline{H}_{22} \dot{\underline{U}}_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{U}}_1 \\ \dot{\underline{I}}_2 \end{pmatrix} = (\underline{H}) \begin{pmatrix} \dot{\underline{I}}_1 \\ \dot{\underline{U}}_2 \end{pmatrix}; \quad (\underline{H}) = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix},$$

причем $\underline{H}_{12} = \underline{H}_{21}$;

$$\underline{H}_{11} = \underline{A}_{12} / \underline{A}_{22}; \quad \underline{H}_{12} = 1 / \underline{A}_{22}; \quad \underline{H}_{21} = 1 / \underline{A}_{22}; \quad \underline{H}_{22} = -\underline{A}_{21} / \underline{A}_{22}$$

5. Уравнения типа \underline{G} :

$$\begin{cases} \dot{\underline{I}}_1 = \underline{G}_{11} \dot{\underline{U}}_1 + \underline{G}_{12} \dot{\underline{I}}_2 \\ \dot{\underline{U}}_2 = \underline{G}_{21} \dot{\underline{U}}_1 + \underline{G}_{22} \dot{\underline{I}}_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{I}}_1 \\ \dot{\underline{U}}_2 \end{pmatrix} = (\underline{G}) \begin{pmatrix} \dot{\underline{U}}_1 \\ \dot{\underline{I}}_2 \end{pmatrix}; (\underline{G}) = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} \end{pmatrix},$$

причем $\underline{G}_{21} = \underline{G}_{12};$

$$\underline{G}_{11} = \underline{A}_{21} / \underline{A}_{11}; \underline{G}_{12} = 1 / \underline{A}_{11}; \underline{G}_{21} = 1 / \underline{A}_{11}; \underline{G}_{22} = -\underline{A}_{12} / \underline{A}_{11}$$

6. Уравнения типа \underline{B} :

$$\begin{cases} \dot{\underline{U}}_2 = \underline{B}_{11}\dot{\underline{U}}_1 + \underline{B}_{12}\dot{\underline{I}}_1 \\ \dot{\underline{I}}_2 = \underline{B}_{21}\dot{\underline{U}}_1 + \underline{B}_{22}\dot{\underline{I}}_1 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{U}}_2 \\ \dot{\underline{I}}_2 \end{pmatrix} = (\underline{B}) \begin{pmatrix} \dot{\underline{U}}_1 \\ \dot{\underline{I}}_1 \end{pmatrix}; \quad (\underline{B}) = \begin{pmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{pmatrix},$$

причем $\underline{B}_{11}\underline{B}_{22} - \underline{B}_{21}\underline{B}_{12} = 1;$

$$\underline{B}_{11} = \underline{A}_{22}; \quad \underline{B}_{12} = -\underline{A}_{12}; \quad \underline{B}_{21} = -\underline{A}_{21}; \quad \underline{B}_{22} = \underline{A}_{11}$$

Комплексные коэффициенты
(A), (B), (Y), (Z), (H), (G) –
определяются внутренней
структурой
четырехполюсника,
параметрами его элементов и
частотой сигнала

Ограничимся подробным рассмотрением уравнений типа **A**:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2 = \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{cases}$$

причем комплексные коэффициенты **\underline{A}_{11} , \underline{A}_{12}** (Ом), **\underline{A}_{21}** (1/Ом), **\underline{A}_{22}** **ПОСТОЯННЫ.**

Коэффициенты \underline{A}_{11} , \underline{A}_{12} , \underline{A}_{21} , \underline{A}_{22}
можно определить при помощи
расчета или эксперимента,
используя режимы холостого хода
($\underline{I}_2=0$) и короткого замыкания ($\underline{U}_2=0$)

При **прямом** включении (со стороны входа) для параметров **A** имеем:

$$\underline{A}_{11} = \underline{U}_1^{(xx)} / \underline{U}_2^{(xx)} \quad \underline{A}_{21} = \underline{I}_1^{(xx)} / \underline{U}_2^{(xx)}$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{U}_1^{(kз)} / \underline{I}_2^{(kз)} \quad \underline{A}_{22} = \underline{I}_1^{(kз)} / \underline{I}_2^{(kз)}$$

где $\underline{I}_2^{(xx)} = 0$; $\underline{U}_2^{(kз)} = 0$.

В режимах **холостого хода** ($I_{2x}=0$)
и **короткого замыкания** ($U_{2k}=0$)

**ВХОДНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ПРЯМОМ
ВКЛЮЧЕНИИ СООТВЕТСТВЕННО РАВНЫ:**

$$\underline{Z}_{1x} = \underline{A}_{11} / \underline{A}_{21} = \underline{U}_{1x} / \underline{I}_{1x} ;$$

$$\underline{Z}_{1k} = \underline{A}_{12} / \underline{A}_{22} = \underline{U}_{1k} / \underline{I}_{1k} .$$

**При обратном включении в режимах
хх ($\underline{I}_{1x} = 0$) и кз ($\underline{U}_{1k} = 0$) имеем:**

$$\underline{Z}_{2x} = \underline{U}_{2x} / \underline{I}_{2x} = \underline{A}_{22} / \underline{A}_{21} ;$$

$$\underline{Z}_{2k} = \underline{U}_{2k} / \underline{I}_{2k} = \underline{A}_{12} / \underline{A}_{11} .$$

Решая уравнения, получаем:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2k}}}; \quad \underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \underline{Z}_{2k};$$

$$\underline{A}_{21} = \underline{A}_{11} / \underline{Z}_{1x}; \quad \underline{A}_{22} = \underline{A}_{11} \underline{Z}_{2x} / \underline{Z}_{1x}.$$

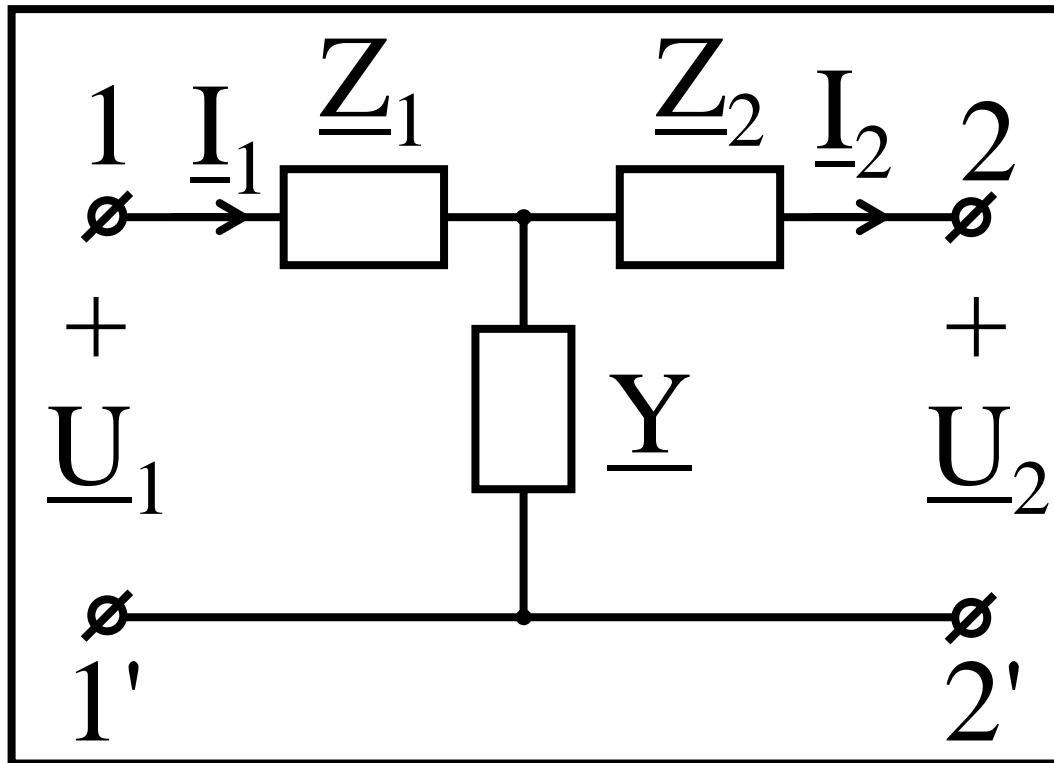
При этом:

$$\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{1k}} = \frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{2k}}.$$

Пассивный четырехполюсник может
быть представлен
“Т – образной” и “П – образной”
схемами:

а) “Г – образная” схема

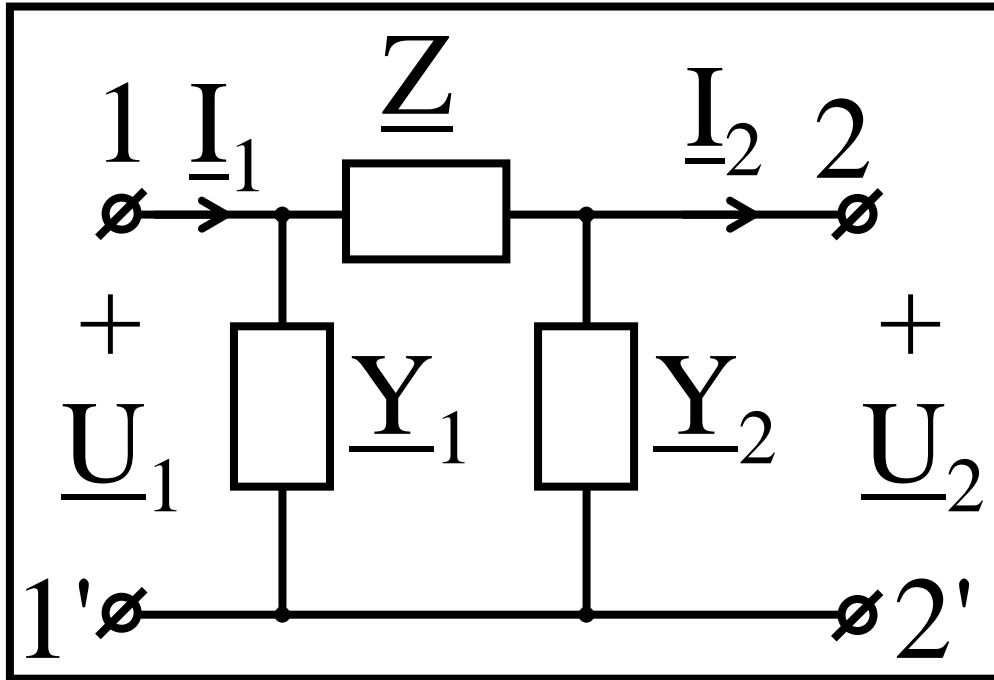
$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Y} \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 \cdot \underline{Y}$$



$$\underline{A}_{21} = \underline{Y}$$

$$\underline{A}_{22} = 1 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Y}$$

б) “П – образная” схема



$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Y}_2 \cdot \underline{Z}$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}$$

$$\underline{A}_{21} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_2 \cdot \underline{Z}$$

$$\underline{A}_{22} = 1 + \underline{Y}_1 \cdot \underline{Z}$$

Для **пассивного симметричного** четырехполюсника нет разницы между входными и выходными зажимами, причем

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}, \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 \text{ (“Т”- схема), } \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 \\ \text{ (“П”- схема)}$$

Комплекс **входного** сопротивления
четырёхполюсника равен

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$$

Или

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot \underline{I}_2}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot \underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_H + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_H + \underline{A}_{22}}$$

Где

$$\underline{Z}_H = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \quad - \text{ КОМПЛЕКС}$$

ВЫХОДНОГО сопротивления
или комплекс сопротивления
нагрузки

Для четырехполюсников могут быть следующие режимы:

$$a) \underline{Z}_{вх} = 0 \quad \text{при} \quad \underline{Z}_н = -\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}$$

б) $\underline{Z}_{вх} = \infty$ при $\underline{Z}_H = -\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}$

в) $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_H$ при

$$\underline{Z}_H = \frac{\underline{A}_{11} - \underline{A}_{22}}{2\underline{A}_{21}} \pm \sqrt{\frac{(\underline{A}_{11} - \underline{A}_{22})^2}{4\underline{A}_{21}^2} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}$$

Для **симметричного пассивного** четырехполюсника при $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ вводится понятие режима **согласованной** нагрузки, когда

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_н = \underline{Z}_с = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}$$

где $\underline{Z}_с$ – **характеристическое сопротивление**

В этом режиме используется
постоянная передачи

$$\underline{\Gamma} = a + jb = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \\ = \ln \left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}} \right)$$

Где:

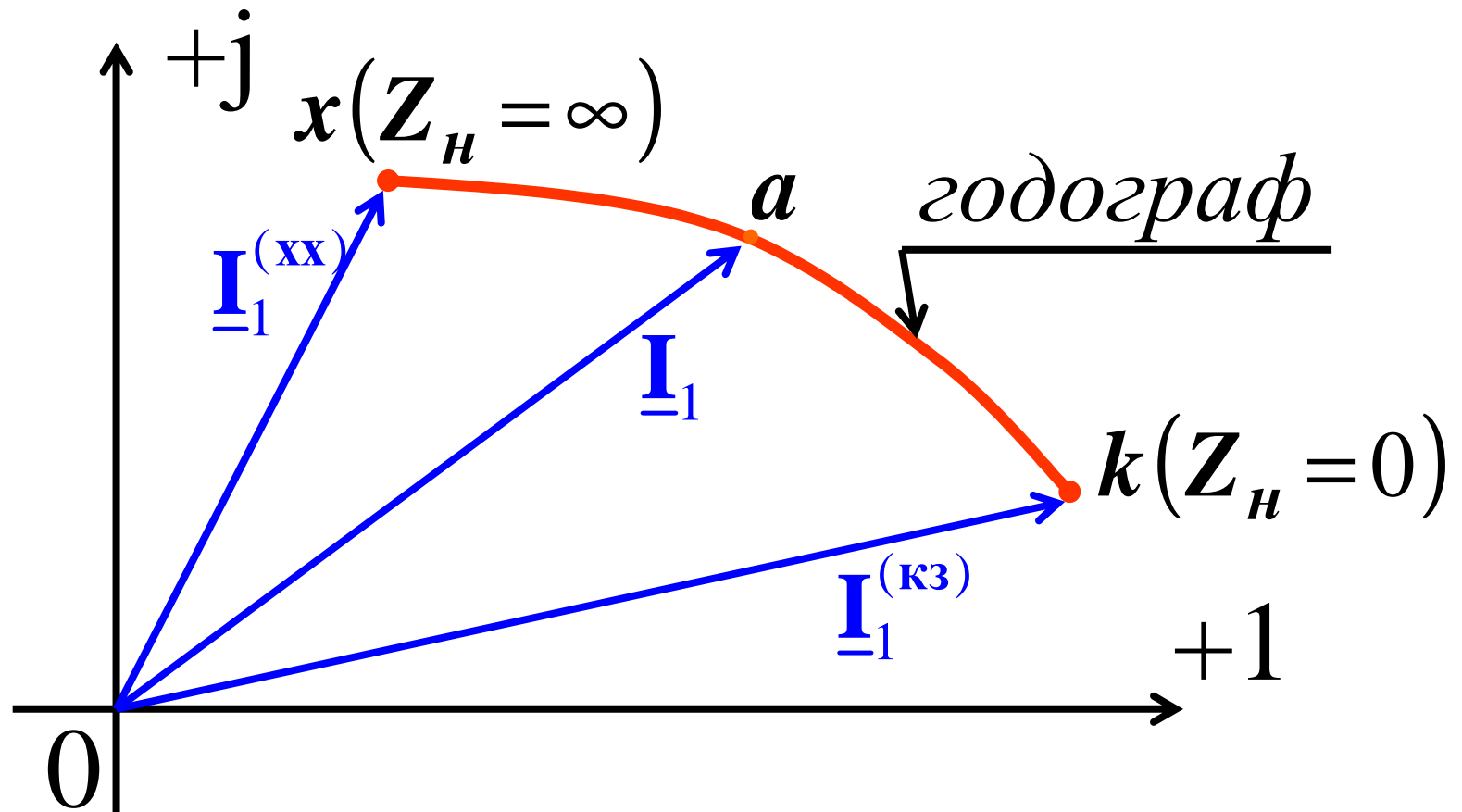
$$a = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2} \quad - \text{коэффициент затухания, Нп (непер);}$$

$$b = \arg(\underline{U}_1) - \arg(\underline{U}_2) = \arg(\underline{I}_1) - \arg(\underline{I}_2)$$

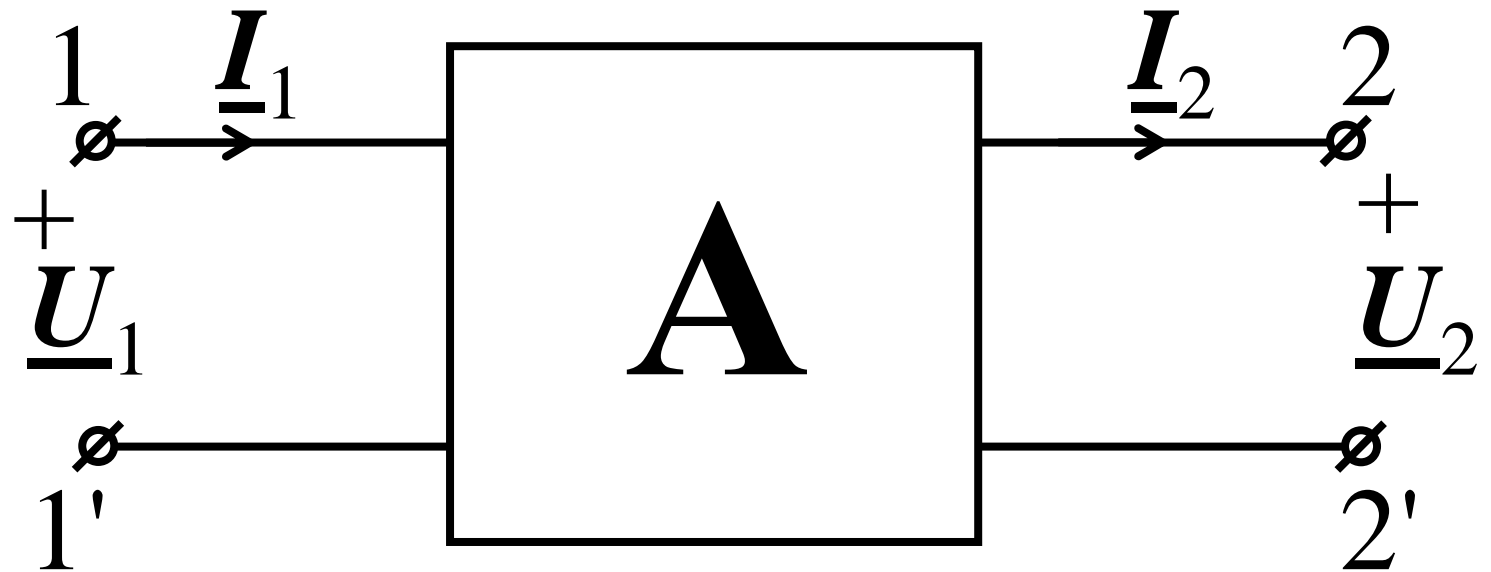
- коэффициент фазы, радиан

При изменении модуля
сопротивления нагрузки $Z_H = 0 \div \infty$
и $\varphi_H = \text{const}$ годограф тока \underline{I}_1
представляет собой дугу
окружности (круговая диаграмма)

Например:

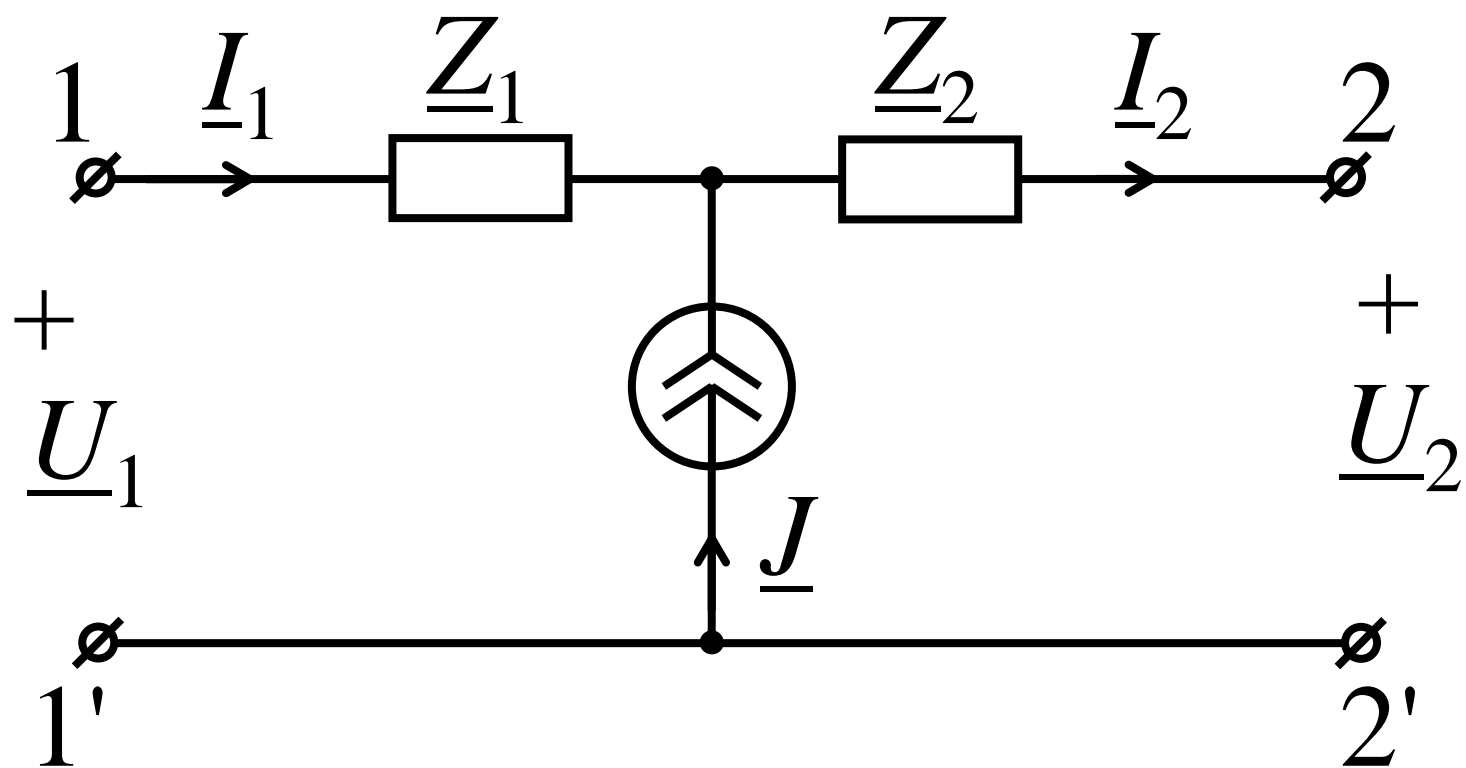


Активные четырехполюсники
характеризуются теми же
уравнениями типа **A** , но с
дополнительными слагаемыми
M и **N**



$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot \underline{I}_2 + \underline{M} \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot \underline{I}_2 + \underline{N} \end{cases}$$

Например:



По законам Кирхгофа получаем:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 - \underline{J}$$

Тогда

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z}_1 \cdot (\underline{I}_2 - \underline{J}) + \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 =$$

$$= \underline{U}_2 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \cdot \underline{I}_2 - \underline{Z}_1 \cdot \underline{J}$$

$$\underline{I}_1 = 0 \cdot \underline{U}_2 + \underline{I}_2 - \underline{J}$$

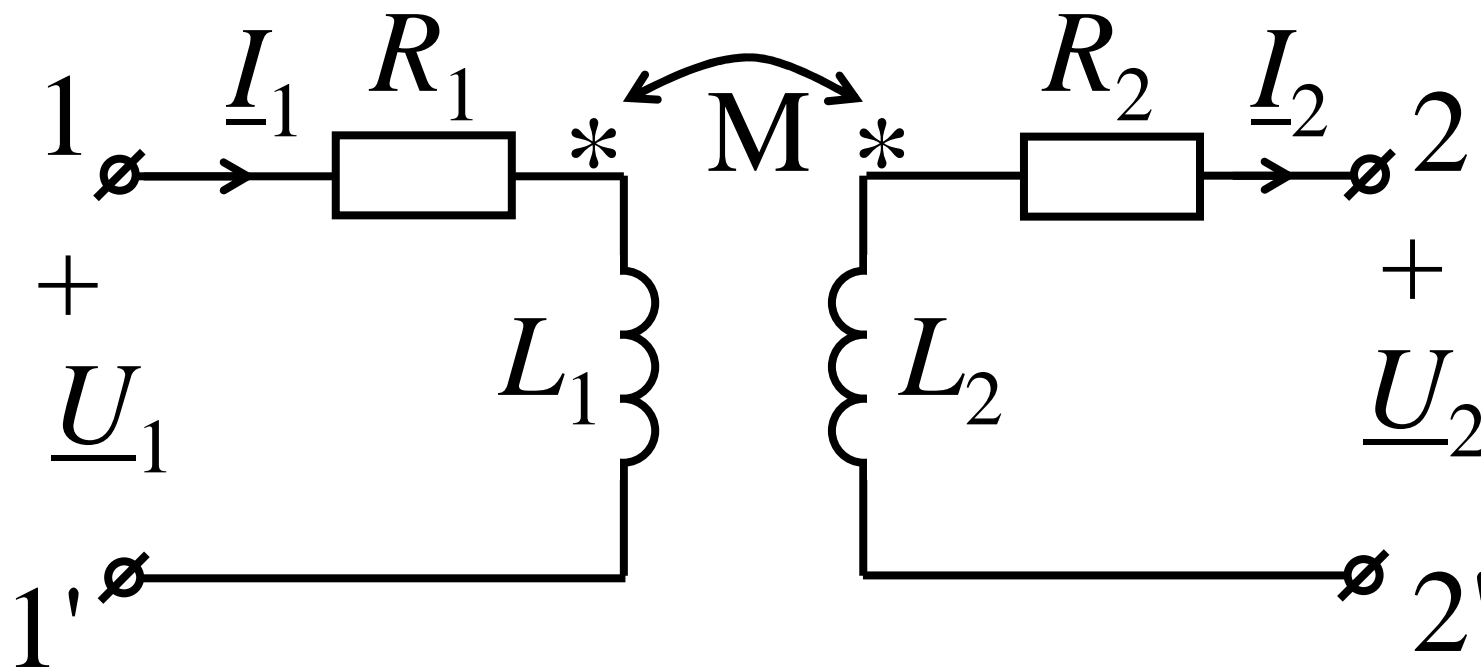
T.e.

$$\underline{A}_{11} = 1 \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

$$\underline{A}_{21} = 0 \quad \underline{A}_{22} = 1$$

$$\underline{M} = -\underline{Z}_1 \cdot \underline{J} \quad \underline{N} = -\underline{J}$$

Пример:



$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 \quad \underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$$

$$\underline{Z}_M = j\omega M$$

По 2 закону Кирхгофа

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 - \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_2$$

$$0 = \underline{U}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 - \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_1$$

Тогда при

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2}{\underline{Z}_M}$$

получаем уравнения типа **A**

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_M} \cdot \underline{U}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_M} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_M} \cdot \underline{U}_2 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_M} \cdot \underline{I}_2 \end{array} \right.$$

Таким образом

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_M} \quad \underline{A}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_M}$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_M} \quad \underline{A}_{22} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_M}$$

Если $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}$, то

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}^2 - \underline{Z}_M^2}$$

$$\underline{\Gamma} = a + jb = \ln \left(\frac{\underline{Z} + \underline{Z}_c}{\underline{Z}_M} \right)$$