16 лекция

Негармонические периодические напряжения и токи

Негармонические периодические напряжения и токи как функции времени f(t) с периодом T могут быть представлены в виде тригонометрического ряда Фурье

Ряд Фурье:

$$f(t) = A_0 + \sum_{к=1}^{\infty} B_к \sin к\omega t + \sum_{к=1}^{\infty} C_к \cos к\omega t =$$

$$= A_0 + \sum_{к=1}^{\infty} A_{mк} \sin(к\omega t + \Psi_к)$$

Где

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt}$$

- постоянная составляющая

$$B_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt$$

- амплитуда синусной составляющей *k* - гармоники

$$\boxed{C_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt}$$

- амплитуда косинусной составляющей *k* - гармоники

$$\boxed{A_{mk} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}}$$

- амплитудное значение *k* - гармоники

Причем

$$A_{mk} = \left| B_k + jC_k \right|$$

$$\boxed{\Psi_к = (\pm 180°) + \mathrm{arctg}\frac{C_к}{B_к}}$$

- начальная фаза *k* –гармоники, причем 180 градусов учитывается при B_k<0

Причем

$$\psi_k = \arg\left(B_k + jC_k\right)$$

$$\boxed{к = 1,2,3 \ldots \infty}$$

- порядковый номер гармоники

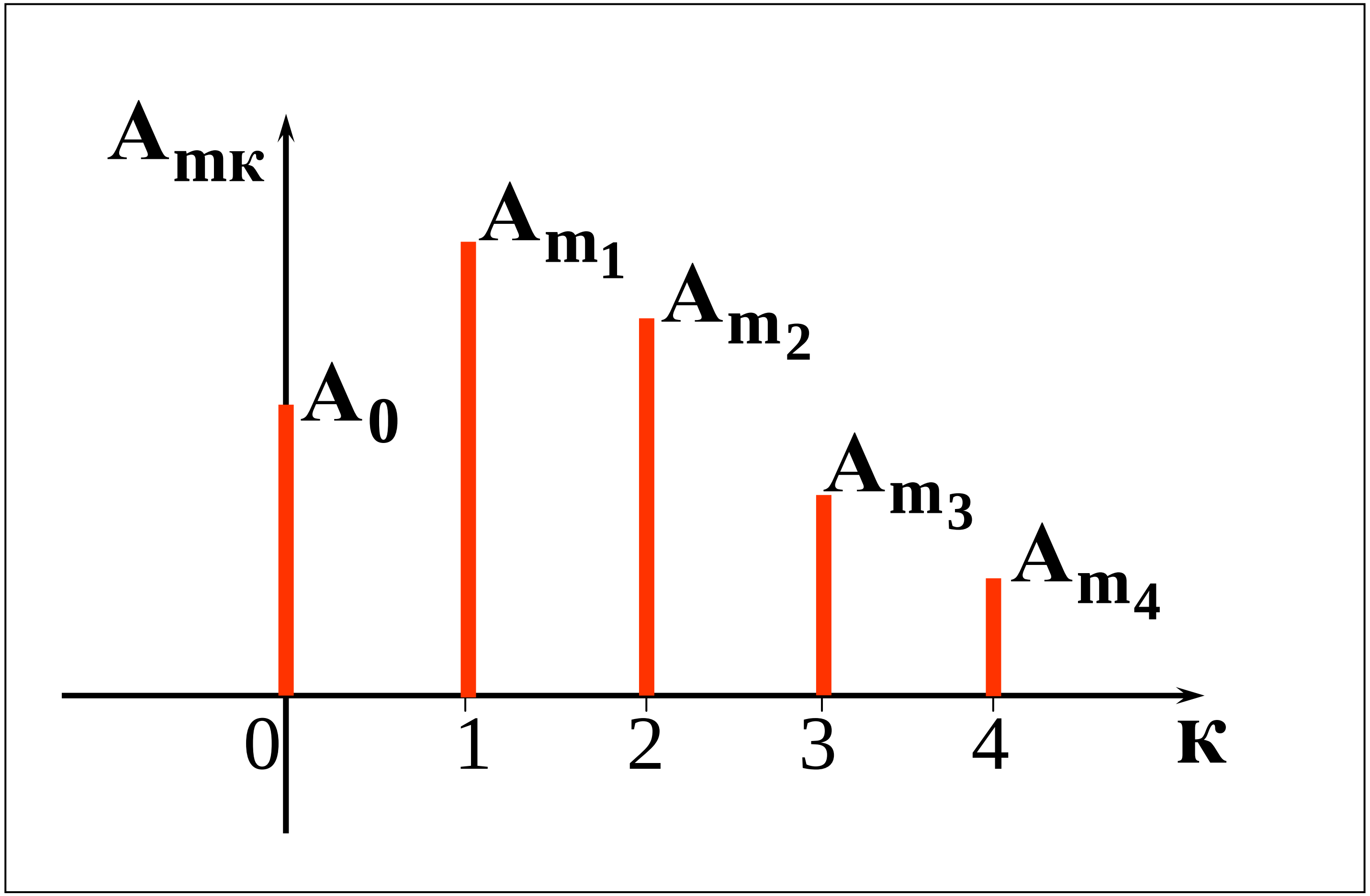
$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \ {}^{1}\!/_{c}}$$

- угловая частота ***первой*** (основной) гармоники

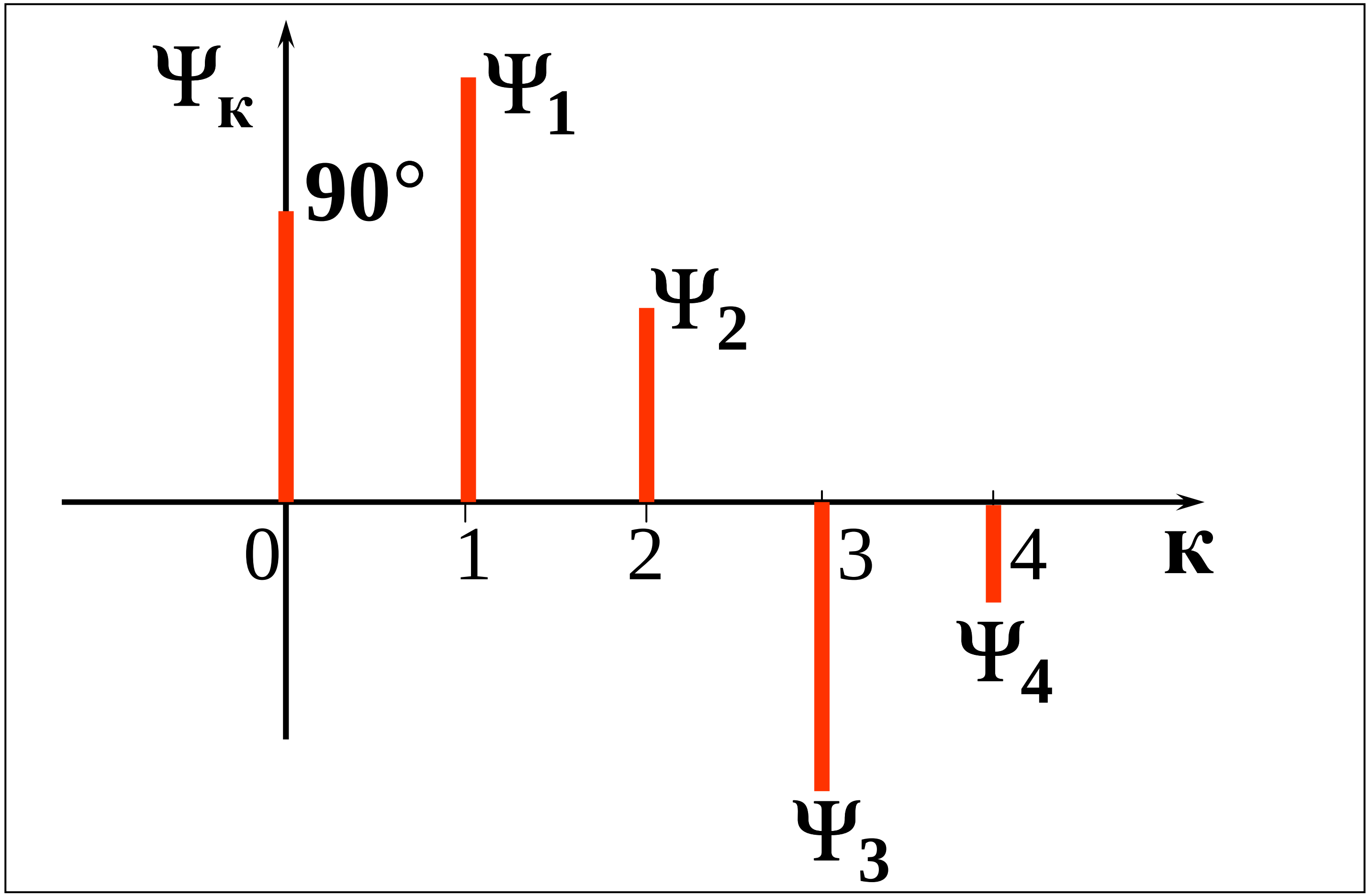
Гармонический состав f(t) можно задать при помощи дискретных спектров амплитуд и фаз, причем разложение в ряд Фурье f(t) может осуществляться аналитически, приближенно по специальным формулам и при помощи ЭВМ

После разложения f(t) в ряд Фурье учитываются постоянная составляющая и несколько наибольших по амплитуде гармоник, а остальные гармоники отбрасываются

а) спектр амплитуд



б) спектр фаз



Пример

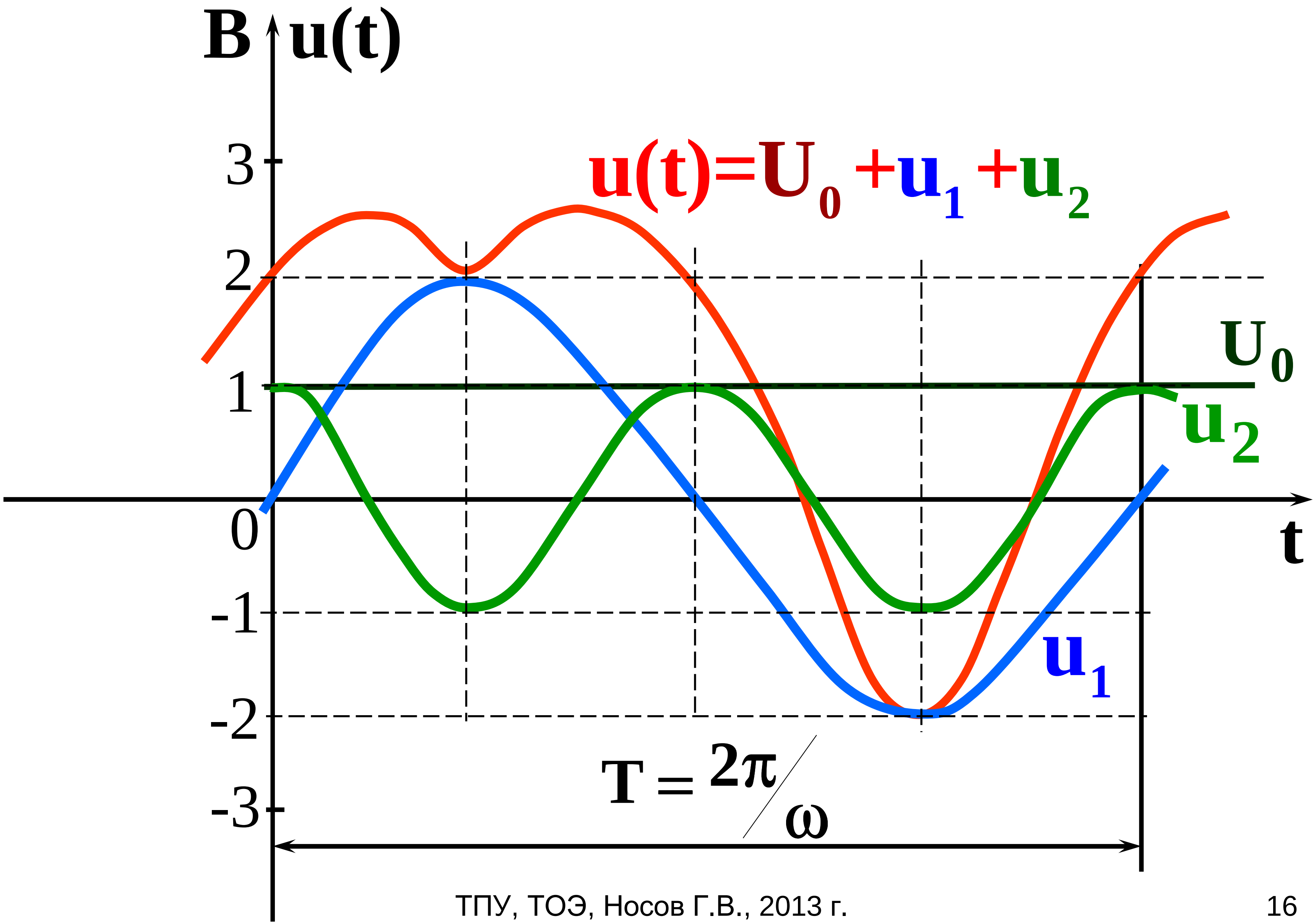
$$u(t)=1+2\sin\omega t+1\sin(2\omega t+90°),\ \text{В}$$

где $U_0=1\ \text{В}$ $\Psi_0=90°$

$U_{m_1}=2\ \text{В}$ $\Psi_1=0$

$U_{m_2}=1\ \text{В}$ $\Psi_2=90°$

$U_0 = 1$ $\quad u_1 = 2\sin\omega t$ $\quad u_2 = 1\sin(2\omega t + 90°)$



Значения негармонических периодических напряжений и токов

Представленных в виде

$$f(t) = A_0 + A_{m1}\sin(\omega t + \Psi_1) +$$

$$+ A_{m2}\sin(2\omega t + \Psi_2) + \ldots$$

1. Среднее за период значение

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt}$$

- это постоянная составляющая

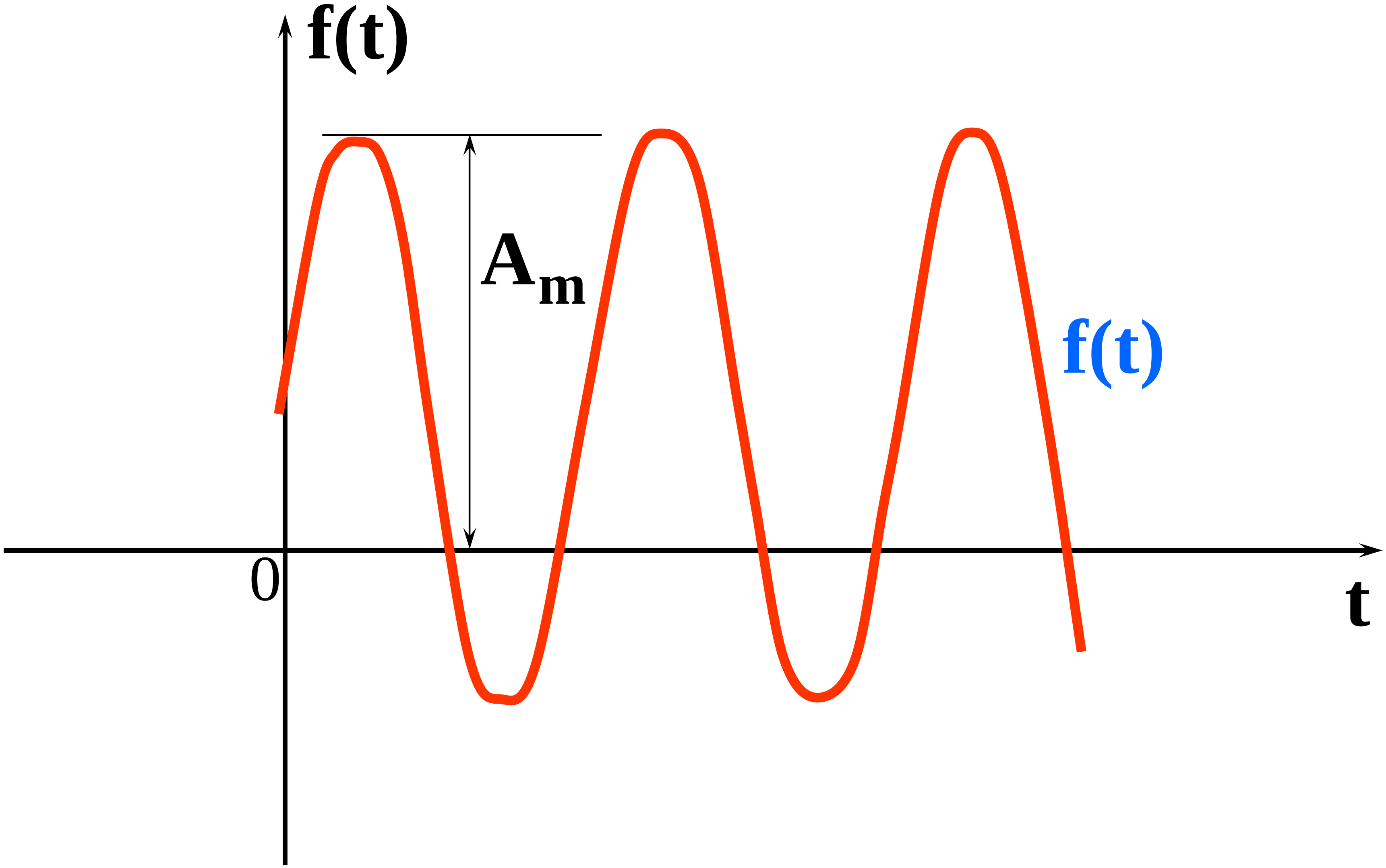
2. Среднее по модулю значение

$$\boxed{A_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T \left|f(t)\right| dt}$$

3. Максимальное значение

$$\boxed{A_m}$$

- это наибольшее по модулю значение f(t)


f(t)
A
m
f(t)
0
t

4. Действующее значение

$$\boxed{A}$$

- это среднеквадратичное значение f(t) за период Т

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt} = \sqrt{A_0^2 + \frac{A_{m1}^2}{2} + \frac{A_{m2}^2}{2} + \ldots} =$$

$$= \sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \ldots}$$

Где

$$A_1 = \frac{A_{m1}}{\sqrt{2}}, \qquad A_2 = \frac{A_{m2}}{\sqrt{2}} \ldots$$

- действующие значения отдельных гармоник

Например:

$$i(t) = 6 + 8\sqrt{2}\sin(\omega t + 30°) +$$

$$+7,07\sin(3\omega t - 60°),\ \text{А}$$

$$I = \sqrt{6^2 + 8^2 + \frac{7,07^2}{2}} = 11,18\ \text{А}$$

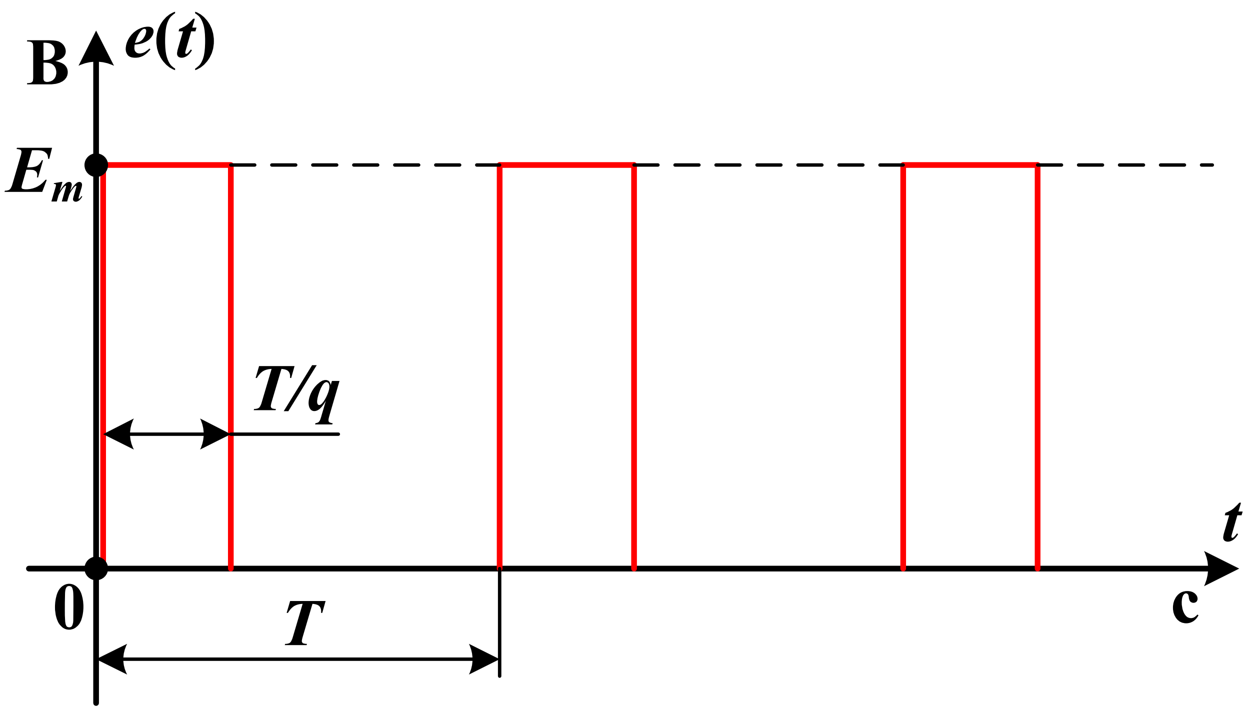
$$u(t) = 3 + 4\sqrt{2}\,\sin(\omega t + 90^\circ),\ \text{В}$$

$$\text{U} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ \text{В}$$

Действующие значения тока (I) и напряжения (U) характеризуют тепловую мощность в сопротивлении R:

$$\boxed{P = I^2 R = \frac{U^2}{R}, \text{Вт}}$$

Пример 1



E_m – **максимальное значение ЭДС;**
q>1 – **скважность.**

$$A_0 = E_0 = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)dt = \frac{E_m}{q};$$

$$A_{cp} = E_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T \left|e(t)\right| dt = \frac{E_m}{q};$$

$$A_m = E_m;$$

$$A = E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[e(t)\right]^2 dt} = \frac{E_m}{\sqrt{q}}.$$

Коэффициенты ряда Фурье: $E_0 = E_m/q;$

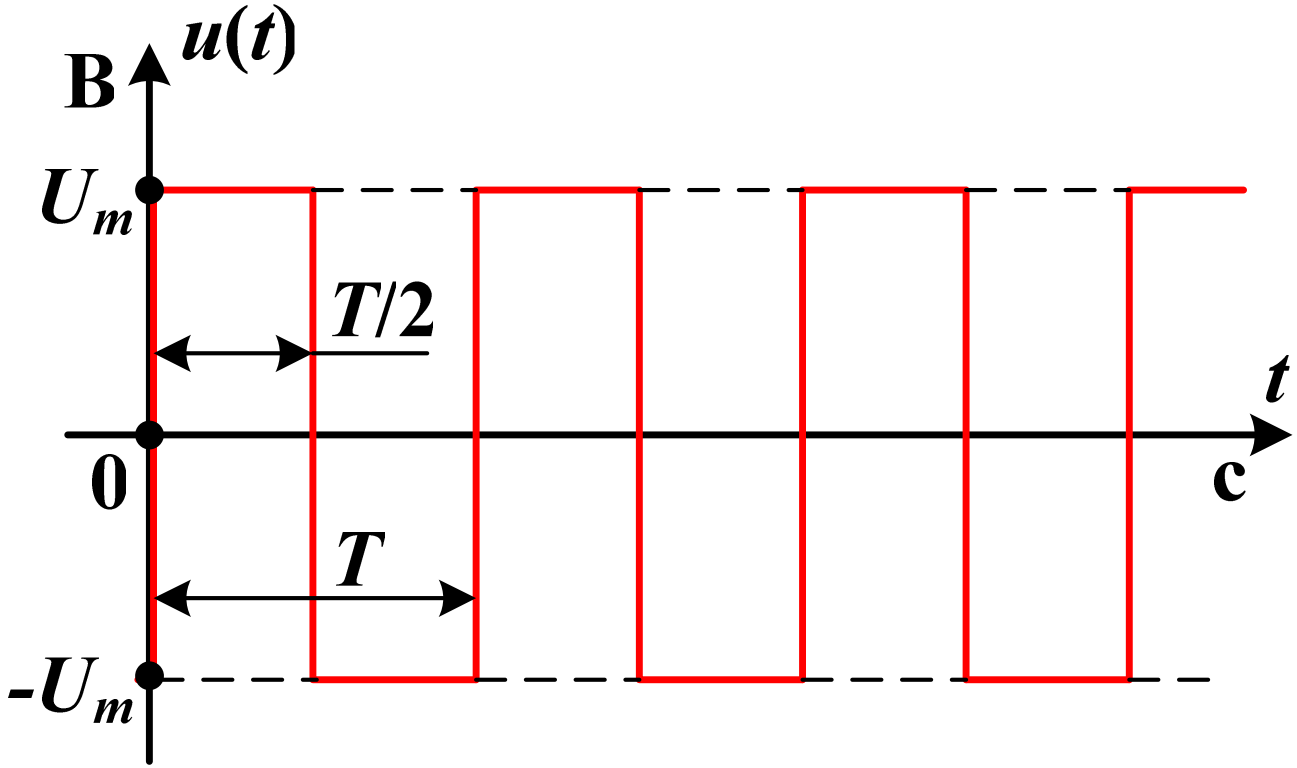
$$B_k = \frac{E_m}{k\pi}\left[1-\cos\left(2\pi k/q\right)\right];$$

$$C_k = \frac{E_m}{k\pi}\sin\left(2\pi k/q\right);$$

$$E_{mk} = A_{mk} = \frac{2E_m}{k\pi}\sin\left(\pi k/q\right);$$

$$\Psi_k = \operatorname{arctg}\left[\frac{\sin\left(2\pi k/q\right)}{1-\cos\left(2\pi k/q\right)}\right].$$

Пример 2



U_m – максимальное значение напряжения.

$$A_0 = U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = 0;$$

$$A_{cp} = U_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T \left|u(t)\right| dt = U_m;$$

$$A_m = U_m;$$

$$A = U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[u(t)\right]^2 dt} = U_m.$$

Коэффициенты ряда Фурье:

$$U_0 = C_k = 0;$$

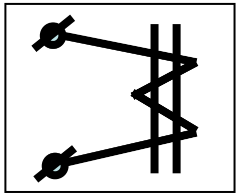
$$U_{mk} = A_{mk} = B_k = \frac{2U_m}{k\pi}\left[1 - \cos(\pi k)\right];$$

$$\Psi_k = 0.$$

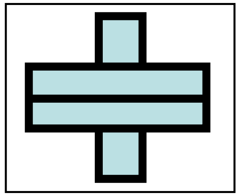
Измерения величин периодических напряжений и токов

1. **Действующие значения могут быть измерены вольтметрами и амперметрами следующих систем:**

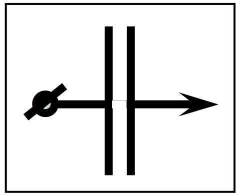
Электромагнитная



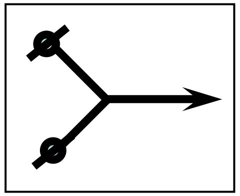
Электродинамическая



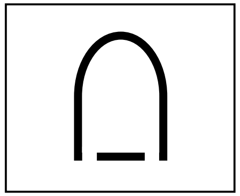
Электростатическая



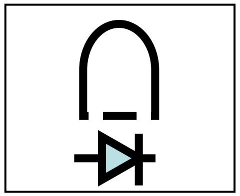
Тепловая



2. **Постоянные составляющие измеряются вольтметрами и амперметрами магнитоэлектрической системы:**



3. Средние по модулю значения напряжений и токов фиксируются при помощи вольтметров и амперметров магнитоэлектрической системы с двухполупериодным выпрямителем:



4. Максимальные и мгновенные значения (функции времени) напряжений и токов измеряются при помощи осциллографов.

5. Действующие значения и постоянные составляющие могут быть измерены электронными цифровыми вольтметрами и амперметрами

Коэффициенты негармонических периодических напряжений и токов

Коэффициенты периодических напряжений и токов используются для оценки отличия их от гармонических функций

1. Коэффициент формы

$$\boxed{K_{ф} = \frac{A}{A_{ср}}}$$

для синусоиды $K_{ф} = 1{,}11$

2. Коэффициент амплитуды

$$\boxed{К_а = \frac{A_m}{A}}$$

для синусоиды $К_а = \sqrt{2} = 1{,}41$

3. Коэффициент искажения

$$\boxed{K_{и} = \frac{A_1}{A} = \frac{A_{m1}}{\sqrt{2}A}}$$

для синусоиды $K_{и} = 1$

4. Коэффициент гармоник ($A_0 = 0$)

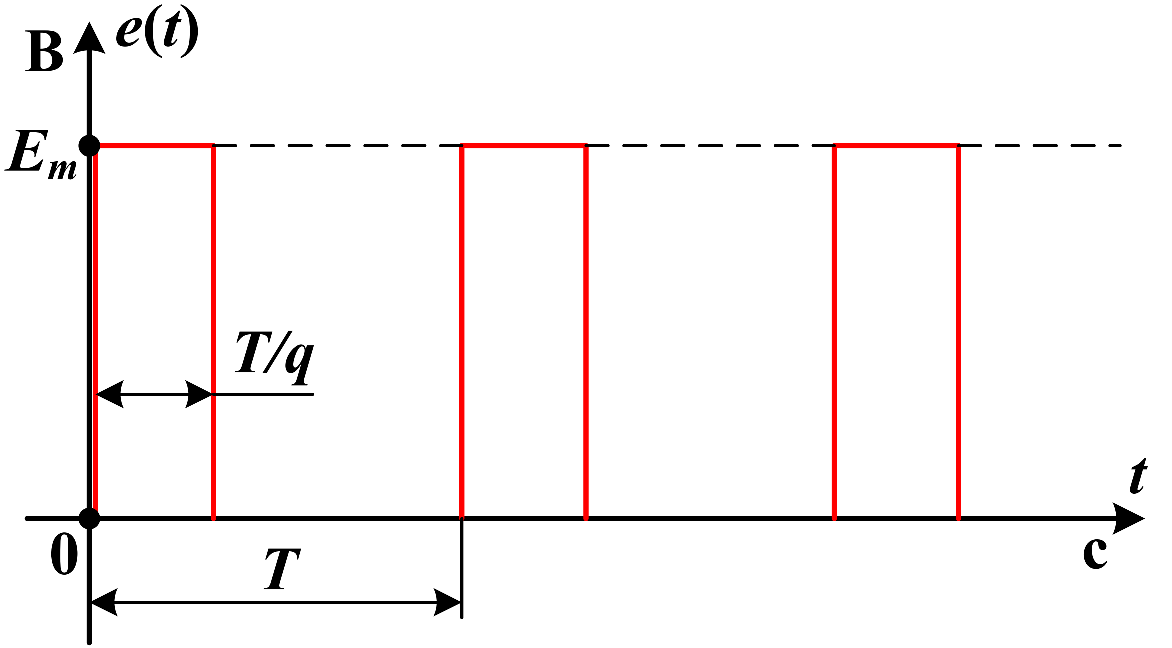
$$K_г = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \ldots}}{A_1}$$

для синусоиды $K_г = 0$

Для практически синусоидальных токов и напряжений:

$$K_{\Gamma} \leq 0{,}05$$

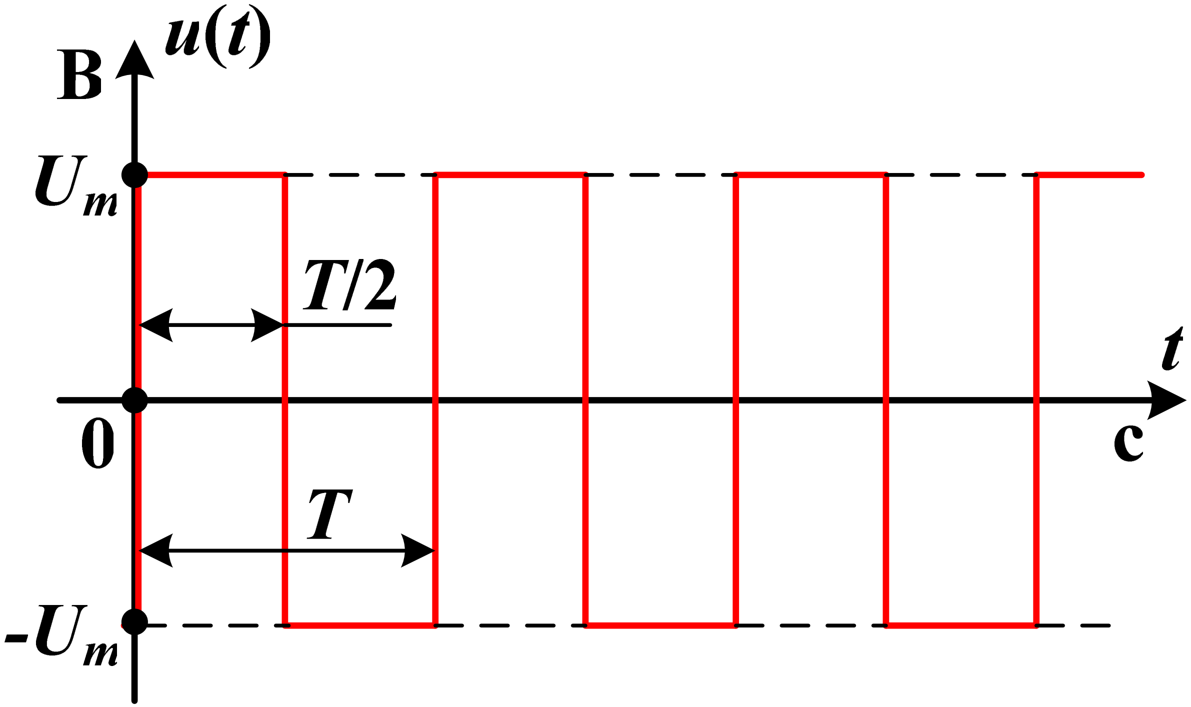
Пример 1



$$K_{\Phi} = \frac{A}{A_{cp}} = \frac{E}{E_{cp}} = \sqrt{q}; \qquad K_{\text{а}} = \frac{A_m}{A} = \frac{E_m}{E} = \sqrt{q};$$

$$K_u = \frac{A_1}{A} = \frac{E_1}{E} = \frac{\sqrt{2q}}{\pi}\left|\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)\right|.$$

Пример 2

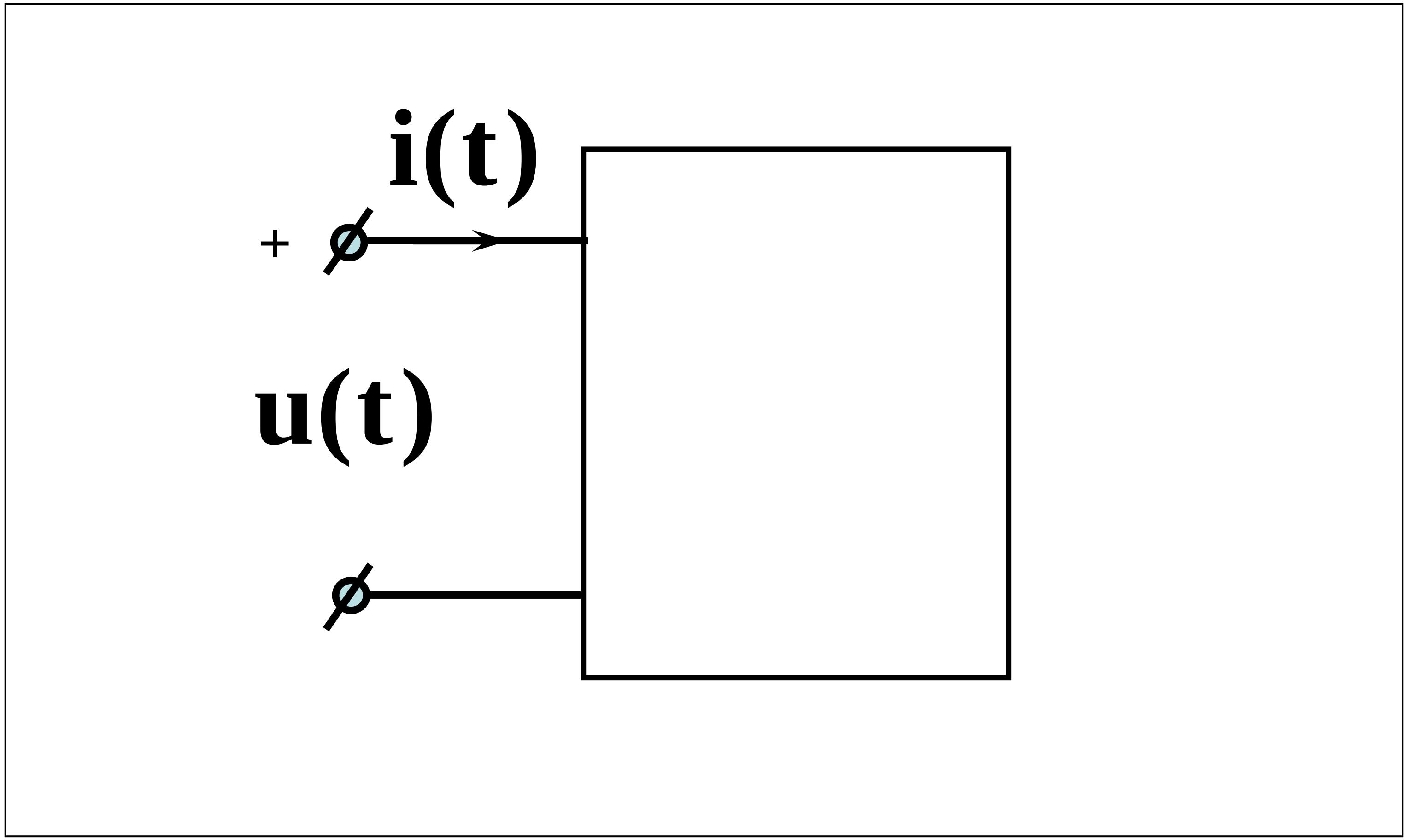


$$K_{\Phi} = \frac{A}{A_{cp}} = \frac{U}{U_{cp}} = 1; \qquad K_{a} = \frac{A_m}{A} = \frac{U_m}{U} = 1;$$

$$K_u = \frac{A_1}{A} = \frac{U_1}{U} = 0,9; \quad K_{\Gamma} = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \ldots}}{A_1} = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U_1} = 0,483.$$

Мощность
при периодических напряжениях и токах

Рассмотрим двухполюсник:



Напряжение и ток двухполюсника

$$u(t) = U_0 + \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \alpha_1) +$$

$$+ \sqrt{2}U_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots$$

$$i(t) = I_0 + \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \beta_1) +$$

$$+ \sqrt{2}I_2 \sin(2\omega t + \beta_2) + \dots$$

1. Активная мощность P

характеризует преобразование электромагнитной энергии в другие виды энергии: в тепловую энергию, в энергию светового излучения, в механическую энергию и т.д.

$$\boxed{W = P \cdot t = P \cdot n \cdot T, \quad \text{Дж}}$$

где $n = 1, 2, 3\ldots \qquad T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

При этом

$$\mathbf{P = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots = U_0 I_0 +}$$

$$\mathbf{+ U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + \ldots,\ \text{Вт}}$$

где $\varphi_1 = \alpha_1 - \beta_1$

$$\varphi_2 = \alpha_2 - \beta_2$$

2. Реактивная мощность Q (условная величина):

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots =$$

$$= U_1 I_1 \sin\varphi_1 + U_2 I_2 \sin\varphi_2 + \ldots,\ \text{вар}$$

3. Полная мощность S (условная величина):

$$S = UI = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots} \times$$

$$\times \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots},\ \text{ВА}$$

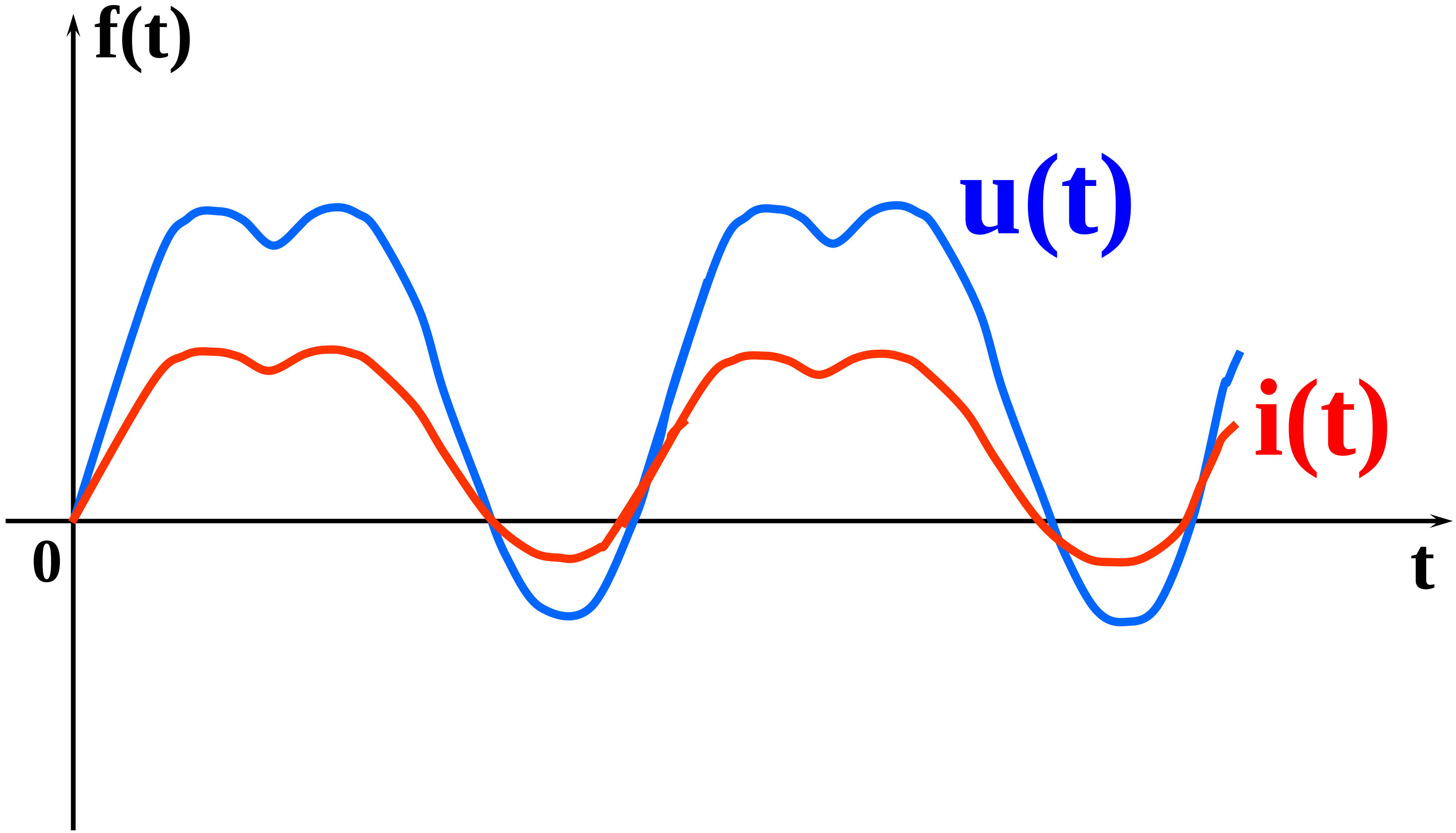
В большинстве случаях для негармонических функций

$$\boxed{S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Если

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

то формы $u(t)$ и $i(t)$ одинаковы


f(t)
u(t)
i(t)
0
t

4. Коэффициент мощности

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{P}{S} \le 1}$$

где $\varphi = \pm\arccos\left(\frac{P}{S}\right)$

Причем

при $Q > 0$ $\varphi > 0$ знак +

при $Q < 0$ $\varphi < 0$ знак -

Периодические напряжения и токи при $I_0=0$ и $U_0=0$ можно приближенно представить **эквивалентными синусоидами**:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &\approx \sqrt{2}U\sin(\omega t+\alpha_1) \\ i(t) &\approx \sqrt{2}I\sin(\omega t+\alpha_1-\varphi) \end{aligned}}$$

где:
$$U=\sqrt{U_1{}^2+U_2{}^2+\ldots}$$
$$I=\sqrt{I_1{}^2+I_2{}^2+\ldots}$$