

## 2.11. ОПТИМАЛЬНАЯ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

**Цель работы.** Практика применения систем автоматического управления показала, что длительность процесса является одним из основных показателей качества работы системы, и сокращение продолжительности переходных процессов при регулировании многих технологических объектов повышает их производительность. Поэтому повышению быстродействия систем автоматического управления уделяется большое внимание. Целью лабораторной работы является изучение процессов в оптимальной по быстродействию системе автоматического управления с объектом в виде двух последовательно соединенных интегрирующих звеньев.

### 2.11.1. Структура оптимальных по быстродействию систем

Задача оптимизации систем автоматического управления по быстродействию формулируется следующим образом. Дан объект управления, описываемый уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n) + b_i u, \quad i = 1, \dots, n,$$

причем на управляющее воздействие наложено ограничение

$$|u(t)| \leq U_m.$$

Требуется найти закон управления

$$u = u(x_1, \dots, x_n),$$

который обеспечивает перевод объекта из заданного начального состояния  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})^T$  в заданное конечное состояние  $\mathbf{x}_k = (x_{1k}, \dots, x_{nk})^T$  за минимально возможное время.

Оптимальное по быстродействию управление является релейным, и алгоритм работы оптимального регулятора описывается выражением

$$u = U_m \cdot \text{sign} V(x_1, \dots, x_n),$$

где функция  $V = V(x_1, \dots, x_n)$ , определяющая знак управляющего воздействия, называется функцией переключения.

Задача синтеза оптимального регулятора в основном сводится к определению аналитического выражения функции переключения и достаточно просто решается для линейных объектов второго и третьего порядков.

### 2.11.2. Синтез оптимального регулятора

В данной лабораторной работе в качестве объекта управления рассматривается космический аппарат (КА), который в процессе космического полета требуется переориентировать, то есть изменить его угловое положение.

Движение центра масс КА в плоскости описывается дифференциальным уравнением

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M, \quad (2.11.1)$$

где  $J$  – момент инерции КА;  $\varphi$  – угол поворота;  $M$  – момент, действующий на КА ( $|M| \leq M_m$ ).

Обозначим  $u(t) = M(t)$  и введем переменные состояния  $x_1 = \varphi$  и  $x_2 = d\varphi/dt$ . Тогда уравнение (2.11.1) можно записать в виде уравнений состояния:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t); \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = k \cdot u(t), \quad (2.11.2)$$

где  $k = 1/J$ ;  $|u(t)| \leq U_m$ .

Характеристическое уравнение объекта управления имеет два нулевых корня, поэтому согласно теореме об  $n$  интервалах оптимальное по быстродействию управление для данного объекта имеет не более двух интервалов, на которых поддерживается постоянное значение ( $+U_m$  или  $-U_m$ ) управляющего воздействия.

Для определения функции переключения  $V = V(x_1, x_2)$  используем метод фазовой плоскости. В силу релейного характера оптимального по быстродействию управления положим в (2.11.2)  $u = \mu U_m$ , где  $\mu = \pm 1$ :

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t); \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = k \mu U_m.$$

Исключив отсюда время  $t$ , найдем дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \mu \frac{k U_m}{x_2}. \quad (2.11.3)$$

В результате интегрирования уравнения (2.11.3) получим уравнение фазовых траекторий управляемого объекта

$$\frac{x_2^2}{2} = \mu k U_m x_1 + C, \quad (2.11.4)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования. Для того чтобы найти значение  $C$ , необходимо задать координаты  $x_{10}, x_{20}$  точки, лежащей на требуемой траектории. Подставив значения  $x_{10}, x_{20}$  в (2.11.4), получим

$$C = \mu k U_M x_{10} - \frac{x_{20}^2}{2}.$$

Уравнение (2.11.4) определяет на фазовой плоскости два семейства фазовых траекторий, соответствующих двум значениям управляющего воздействия:  $u = +U_M$  и  $u = -U_M$  (рис. 2.11.1, а). Отдельные фазовые траектории каждого из семейств получаются для разных начальных условий, то есть разных значений постоянной интегрирования  $C$  в уравнении (2.11.4). Стрелки на траекториях показывают направление движения при увеличении  $t$ .

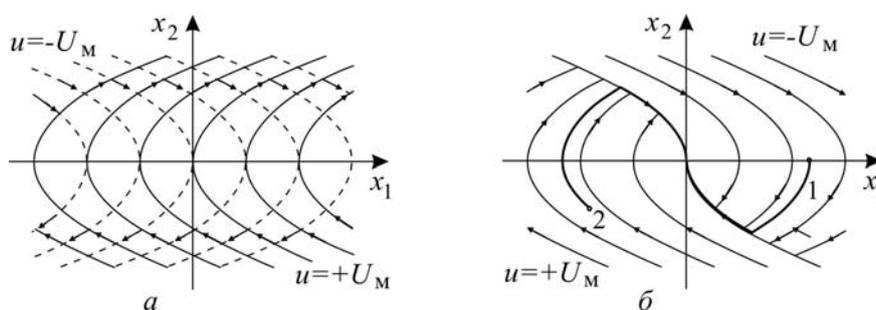


Рис. 2.11.1. Фазовые траектории:  
 а – семейства фазовых траекторий при  $u = U_M$  и  $u = -U_M$ ;  
 б – фазовый портрет оптимальной системы

Построим фазовый портрет оптимальной по быстродействию системы, приняв за конечную точку начало координат. Построение фазового портрета сводится к такому совмещению двух семейств на рис. 2.11.1, а, при котором для любой точки фазовой плоскости существует траектория, ведущая в начало координат. Сначала изобразим две полутраектории, заканчивающиеся в начале координат (линия  $AOB$  на рис. 2.11.1, б). Движение изображающей точки по этой линии происходит на заключительном интервале управления. На первом интервале (при двухинтервальном управлении) изображающая точка должна из произвольной точки попасть на линию  $AOB$ . Чтобы выполнить это условие, слева от линии  $AOB$  изобразим фазовые траектории, соответствующие  $u = +U_M$ , и справа – траектории, соответствующие  $u = -U_M$  (рис. 2.11.1, б). Этим заканчивается построение фазового портрета системы.

На рис. 2.11.1, б жирной линией выделены две траектории, отличающиеся начальными условиями. Движению изображающей точки по

траектории 1 соответствует такой процесс в системе, когда на первом интервале  $u = -U_M$ , а на втором  $u = +U_M$ . Движению изображающей точки по траектории 2 соответствует процесс с управлением  $u = +U_M$  на первом интервале и  $u = -U_M$  – на втором интервале.

Поскольку на линии  $AOB$  происходит изменение знака управляющего воздействия, ее называют *линией переключения*. Уравнение линии переключения легко получить из (2.11.4). Так как для траектории, проходящей через начало координат, постоянная  $C = 0$ , то участок  $AO$  линии переключения описывается уравнением

$$\frac{x_2^2}{2} = -kU_M x_1, \quad (2.11.5)$$

и участок  $OB$  – уравнением

$$\frac{x_2^2}{2} = kU_M x_1. \quad (2.11.6)$$

Учитывая, что на участке  $AO$   $x_2 > 0$  и на участке  $OB$   $x_2 < 0$ , объединим уравнения (2.11.5) и (2.11.6) в одно уравнение:

$$kU_M x_1 + \frac{x_2^2}{2} \text{sign } x_2 = 0, \quad (2.11.7)$$

Уравнение (2.11.7) можно записать и по-другому:

$$kU_M x_1 + x_2 |x_2| / 2 = 0. \quad (2.11.8)$$

На основании (2.11.8) введем функцию

$$V(x_1, x_2) = -x_1 - \frac{1}{2kU_M} x_2 |x_2|.$$

Нетрудно убедиться в том, что справа от линии переключения (рис. 2.11.1, б)  $V(x_1, x_2) < 0$ , слева –  $V(x_1, x_2) > 0$ , а на самой линии переключения  $V(x_1, x_2) = 0$ . Следовательно, знак функции  $V(x_1, x_2)$  совпадает с необходимым для оптимальности знаком управляющего воздействия и закон оптимального управления следует взять в виде функции

$$u = U_M \cdot \text{sign}(-x_1 - \frac{1}{2kU_M} x_2 |x_2|). \quad (2.11.9)$$

Запишем (2.11.9) иначе:

$$u = U_M \cdot \text{sign}(-x_1 - \varphi(x_2)),$$

где

$$\varphi(x_2) = \frac{1}{2kU_M} x_2 |x_2|. \quad (2.11.10)$$

Структурная схема синтезированной системы, в которой обеспечивается переход из произвольного начального состояния  $x_{10}, x_{20}$  в начало

координат за минимальное время, показана на рис. 2.11.2, а. В управляющей части системы используется нелинейный преобразователь, формирующий функцию (2.11.10), и релейный элемент.

На рис. 2.11.2, б и в показано изменение переменных  $x_1$  и  $x_2$  при движении изображающей точки по траекториям 1 и 2 на рис. 2.11.1, б.

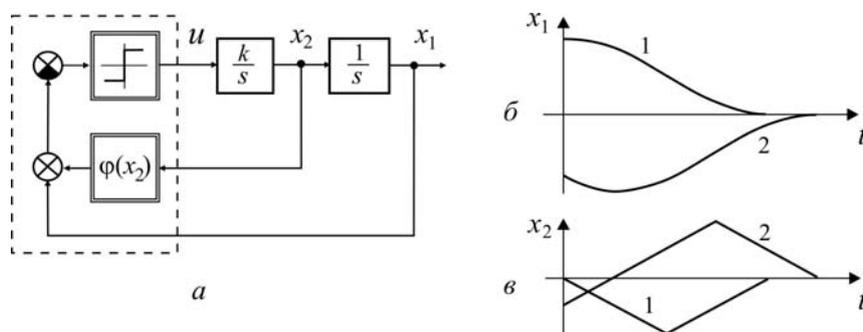


Рис. 2.11.2. Оптимальная по быстродействию система: а – структурная схема; б и в – изменение переменных  $x_1$  и  $x_2$

### 2.11.3. Выполнение лабораторной работы

#### Методические указания

Схема моделирования исследуемой системы изображена на рис. 2.11.3. При показанном положении ручного переключателя **Manual Switch** исследуются процессы в оптимальной по быстродействию системе. Для того чтобы наблюдать изменение управляющего воздействия и переменных  $x_1$ ,  $x_2$  во времени, используется виртуальный осциллограф **Scope**. Фазовые траектории на плоскости  $(x_1, x_2)$  строятся на экране виртуального графопостроителя **XY Graph**.

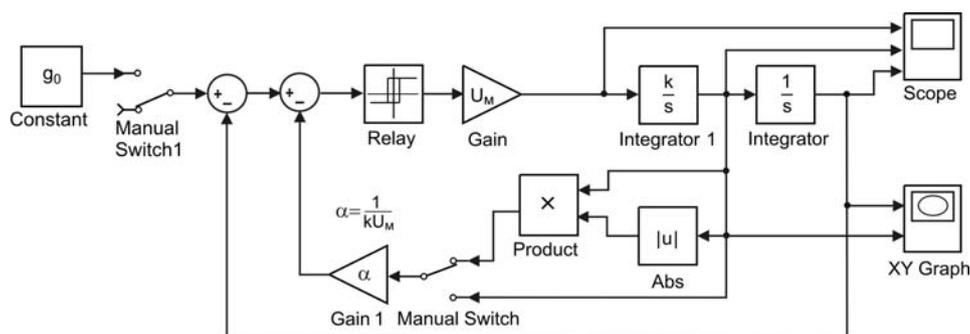


Рис. 2.11.3. Схема моделирования

Начальные условия  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = x_{20}$  для переменных состояния  $x_1$ ,  $x_2$  задаются начальными значениями сигналов соответственно на выходах интеграторов **Integrator** и **Integrator1**.

Если переключатель **Manual Switch** перевести в противоположное состояние, нелинейная обратная связь по переменной  $x_2$  заменяется на линейную. В этом случае линия переключения на плоскости  $(x_1, x_2)$  (см. рис. 2.11.1, б) представляет собой прямую линию.

Переключатель **Manual Switch1** предназначен для подключения к модели источник постоянного воздействия **Constant**.

**Примечание.** Значение коэффициента передачи  $k$  объекта управления и предельное значение  $U_M$  релейного элемента задаются преподавателем.

### Программа

1. Составить в среде моделирования MATLAB/Simulink модель системы согласно схеме моделирования (см. рис. 2.11.3) с заданными значениями  $k$  и  $U_M$ .

2. Пронаблюдать и зафиксировать фазовые траектории, кривые переходного процесса  $x_1 = x_1(t)$ ,  $x_2 = x_2(t)$  и управляющее воздействие  $u = u(t)$  в оптимальной системе при произвольных начальных условиях  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = x_{20}$ , лежащих по разные стороны от линии переключения.

3. Исследовать отработку системой постоянного задающего воздействия. Для этого установить начальные значения  $x_{10} = x_{20} = 0$  и подать на вход системы постоянное задающее воздействие. Пронаблюдать и зафиксировать фазовые траектории, кривые переходного процесса  $x_1 = x_1(t)$ ,  $x_2 = x_2(t)$  и управляющее воздействие  $u = u(t)$  для двух произвольных значений задающего воздействия.

### Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры технических приложений, когда целесообразно стремиться к повышению быстродействия САР.

2. Какой вид имеет критерий оптимальности в задаче максимального быстродействия?

3. Поясните содержание теоремы об  $n$  интервалах.