ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. Цель работы

Экспериментальное исследование условий устойчивости замкнутых САУ, оценка устойчивости при помощи критериев устойчивости, определение запасов устойчивости.

2. Краткие теоретические сведения

Устойчивость является одним из необходимых условий, обеспечивающих нормальное функционирование автоматических систем. Поэтому чрезвычайно важно выяснить те условия, которые обеспечивают принципиальную работоспособность системы, ее устойчивость.

Признаком устойчивости САУ является существование установившегося состояния. Если отклонение входной координаты от заданного значения (т.е. ошибка управления) не стремится к постоянной величине или к нулю, а возрастает или испытывает колебания, то САУ неустойчива. Причинами неустойчивости могут быть инерционность элементов и большой коэффициент передачи разомкнутой системы: многократно усиленное рассогласование, возвращающееся по цепи обратной связи на вход системы, не успевает отрабатываться из-за запаздывания в инерционных элементах.

Не останавливаясь на теоремах, доказанных Ляпуновым, рассмотрим, как можно оценить устойчивость линейных систем, описываемых дифференциальным уравнением вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^{(j)}(t) \qquad (1)$$

Решение этого уравнения содержит две составляющие, одна из которых $y_{св}(t)$ (свободная, или переходная, составляющая) определяется решением однородного дифференциального уравнения.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = 0 \qquad (2)$$

при начальных условиях: $y(0) \neq 0; y' \neq 0; y'' \neq 0;...$

В линейных системах, для которых справедлив принцип суперпозиции, свободная составляющая $y_{св}(t)$ не зависит от воздействий, а определяется только параметрами системы. В соответствии с определением устойчивости по Ляпунову САУ асимптотически устойчива, если с течением времени при $t \to \infty$ свободная (переходная) составляющая решения линейного дифференциального уравнения будет стремиться к нулю. На рисунке 1, *а* показаны $y_{св}(t)$, соответствующие устойчивым, а на рисунке 1, *б* – неустойчивым системам.

Поведение свободной составляющей определяется решением однородного дифференциального уравнения

$$y_{св}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{p_i t} \qquad (3)$$

где *Ai* – *постоянные интегрирования*, зависящие от начальных условий;

p_i – *корни характеристического уравнения* $F(p)=a_0 + a_1 p + ... + a_n p^n = 0$.

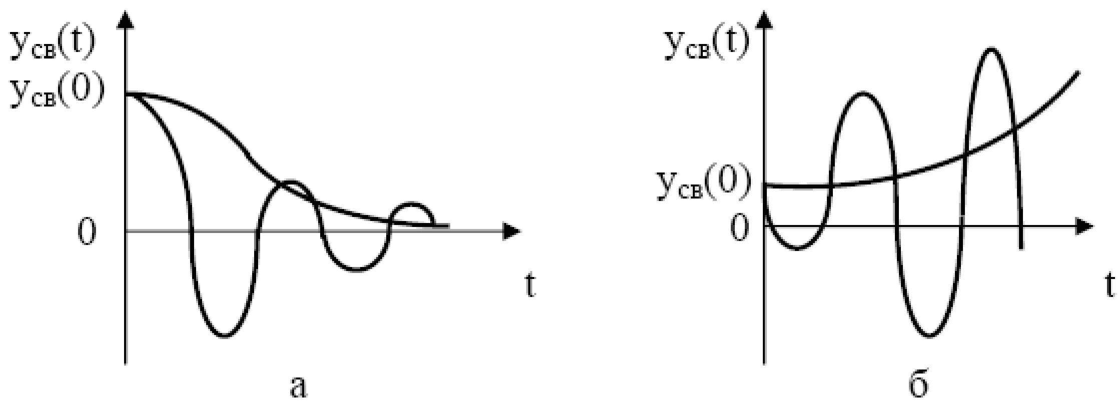

Рисунок 1. Свободные составляющие переходного процесса в устойчивых (а) и в неустойчивых (б) САУ.

Для оценки условий устойчивости необходимо выяснить, когда выражение (3) будет стремиться к нулю. Так как система линейная, на значение свободной составляющей влияют только корни характеристического уравнения, которые зависят от структуры и параметров системы. Эти параметры – вещественные числа. Следовательно, вещественными являются и коэффициенты характеристического уравнения, определяемые параметрами системы и их комбинациями, а это означает, что корни уравнения могут быть либо только вещественными, либо комплексно-сопряженными:

$$p_k = \alpha_k; \; p_{k+1} = \alpha_{k+1} + j\omega_{k+1}; \; p_{k+2} = \alpha_{k+1} - j\omega_{k+1}; \qquad (4)$$

Если вещественных корней *s*, а комплексно-сопряженных *n-s*, то свободная составляющая может быть записана в следующем виде:

$$y_{св}(t) = \sum_{i=1}^{s} A_i e^{\alpha_i t} + \sum_{r=1}^{(n-s)/2} A_r e^{\alpha_r t} \sin(\omega_r + \varphi_r); \qquad (5)$$

откуда следует, что $y_{св}(t)=0$ при $t \to \infty$ тогда, и только тогда, когда все α_r *и* α_i отрицательны.

На комплексной плоскости корней корни с отрицательными вещественными частями располагаются на левой полуплоскости и называются *левыми*, а корни, расположенные в правой полуплоскости, называются *правыми.*

Необходимое и достаточное условие устойчивости линейной системы может быть сформулировано так: линейная система устойчива, если все корни ее характеристического уравнения являются левыми.

Так как при расположении корней слева от мнимой оси система устойчива, а справа – неустойчива, то мнимую ось называют *границей устойчивости.* Если хотя бы один корень расположен на этой оси, то систему нельзя считать работоспособной: малейшие изменения параметров могут привести к потере устойчивости.

Правила, позволяющие оценивать устойчивость системы (определять местоположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости) без непосредственного вычисления корней, называются *критериями устойчивости.* Критерии устойчивости разделяются на алгебраические и частотные.

Строгое математическое обоснование критериев устойчивости приводится в ТАУ. Здесь же отметим только, что алгебраические критерии устанавливают связь между коэффициентами характеристического уравнения и расположением его корней на комплексной плоскости. Критерий Михайлова устанавливает связь условий устойчивости с видом годографа функции комплексного переменного, представляющей собой левую часть характеристического уравнения (годограф Михайлова) и формулируется следующим образом:

автоматическая система будет устойчива, если при изменении частоты в предела $0\langle\omega\langle+\infty$ *характеристический вектор F(jω), начав движение от вещественной оси комплексной плоскости, вращаясь против часовой стрелки и нигде не обращаясь в ноль, обходит последовательно n квадрантов (где n – степень характеристического уравнения системы).*

Критерий Найквиста показывает связь условий устойчивости замкнутых систем основного типа с видом АФХ или ЛАЧХ разомкнутой системы и имеет формулировку:

1. Если система устойчива в разомкнутом состоянии, то для устойчивости соответствующей замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы для $0\langle\omega\langle+\infty$ *не охватывала точку с координатами (–1, j0);*

2. Если система неустойчива в разомкнутом состоянии и имеет m корней в правой полуплоскости, то для устойчивости соответствующей замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы для $0\langle\omega\langle+\infty$ *охватывала m/2 раз точку с координатами (–1; j0).*

3. Пояснения к работе

На рисунке 2 представлена принципиальная схема исследуемой системы управления скоростью электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения М типа МИ-42. Управление двигателем осуществляется от электромашинного усилителя АМР типа ЭМУ-50А3, который приводится во вращение асинхронным двигателем АМ. Частота вращения исследуемого двигателя измеряется датчиком скорости BR. Сигнал, пропорциональный частоте вращения, через усилитель У поступает на одну из обмоток управления ОУ2 в качестве сигнала главной отрицательной обратной связи по частоте вращения. Обмотка управления ОУ1 является задающей и определяет заданное значение частоты вращения. Так как обмотки управления включены встречно, то они же выполняют и функцию элемента сравнения. Потенциометр R предназначен для настройки коэффициента передачи цепи обратной связи.

Двигатель МИ-42, управляемый по якорной цепи, через редуктор с передаточным числом q = 256 приводит во вращение нагрузку с моментом инерции $J_н$ = 6900 кг.м$_2$. Момент инерции, приведенный к валу двигателя, определяется как $J_{*н} = J_Н / q_2$.

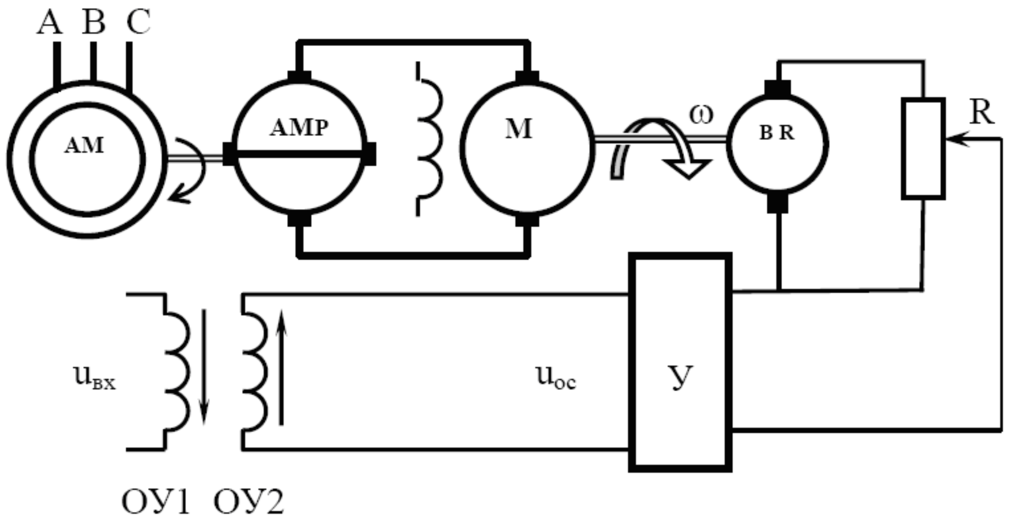

Рисунок 2. Принципиальная схема САУ

Для определения параметров двигателя по методике, изложенной в лабораторной работе «Частотные характеристики стационарных систем», необходимо воспользоваться его паспортными данными:

$P_{ном}$=3,2 кВт, $U_{ном}$=220 В, $I_{я\ ном}$=18 А, $J_{д}$=0,065 кг.м2, $R_{я}$=0,376 Ом,

$L_{я}$=0,004 Гн, $n_{ном}$=2500 об/мин.

Согласно паспортным данным передаточная функция двигателя в числовом выражении имеет вид

$$W_{д}(s)=\frac{K_{д}}{T_{э}T_{м}s^2+T_{м}s+1}=\frac{1{,}24}{0{,}0076s^2+0{,}4s+1}\approx\frac{1{,}24}{1+0{,}4s} \qquad (6)$$

Параметры ЭМУ определяются также по паспортным данным, которые имеют следующие значения для ЭМУ-50А3:

$P_{эму}$=4 кВт; $U_{эму}$=230 В; $I_{вх}$=10 мА; $r_{вх}$=2100 Ом; $L_{вх}$=100 Гн;

r_{1}=3,35 Ом; L_{1}=0,6 Гн.

Передаточную функцию ЭМУ соответственно приведенным паспортным данным можно представить как

$$W_{ЭМУ}(s)=\frac{K_{ЭМУ}}{(T_{ВХ}s+1)(T_{ЭМУ}s+1)}\approx\frac{11}{(1+0{,}5s)(1+0{,}2s)} \qquad (7)$$

где $K_{эму}=u_{эму}/I_{вх}r_{вх}\cong 11$; $T_{эму}=L_1/r_1=0.178$ с; $T_{вх}=L_{вх}/r_{вх}=0.0478$ с.

Исследуемой САУ соответствует структурная схема, приведенная на рисунке 3. На схеме обозначены $K_{ос}$ – коэффициент передачи цепи обратной связи,
$U_{вх}(s)$ – изображение входного напряжения.

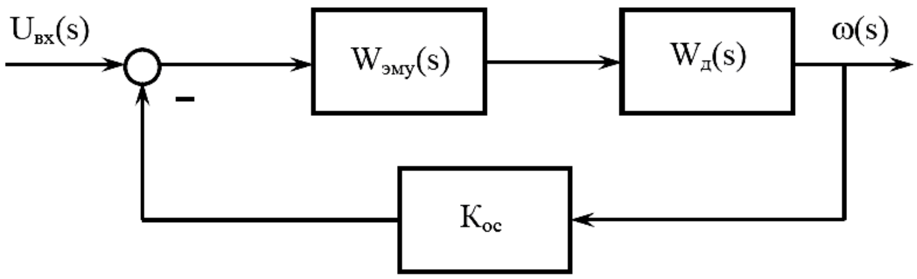

Рисунок 3. Структурная схема САУ

4. Программа работы

Исследование условий устойчивости проводится на примере замкнутой САУ представленной на рисунке 2. Лабораторная работа выполняется в среде MathCad и Matlab/Simulink.

Передаточные функции типовых блоков на структурной схеме имеют вид:

$$W_{Д}(p) = \frac{1.24}{1 + 0.4 \cdot p};$$

$$W_{ЭМУ}(p) = \frac{11}{(1 + 0.5p)(1 + 0.2p)},$$

K_{OC} – коэффициент передачи цепи обратной связи (выбирается из табл. 1 согласно варианту, указанному преподавателем).

Применительно к структурной схеме САУ (рисунок 3) при заданных и неизменных передаточных функциях ЭМУ $W_{ЭМУ}(s)$ и двигателя $W_{Д}(s)$ по варианту значения коэффициента обратной связи K_{OC} проделать следующую работу.

1. Определить значения полюсов передаточной функции замкнутой САУ, проанализировать их характер и сделать заключение об устойчивости САУ.

2. Снять переходную характеристику $h(t)$.

3. Разомкнуть САУ и оценить устойчивость по критерию Найквиста.

4. Снять логарифмическую амплитудную частотную и логарифмическую фазовую частотную характеристики разомкнутой системы. При совместном рассмотрении частотных характеристик определить запасы устойчивости по модулю и по фазе.

5. Построить при помощи моделирующей системы годограф Михайлова. Сделать вывод об устойчивости САУ по критерию Михайлова.

6. На основании алгебраического критерия Рауса–Гурвица рассчитать предельное значение K_{OC}, при котором САУ теряет устойчивость. Произвести экспериментальную проверку предельного значения K_{OC}.

Табл. 1.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K_{OC}	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,16	0,18	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5

5. Порядок выполнения работы

Передаточная функция ЗАС определяется по выражению

$$W(p) = \frac{W_{\text{П}}(p)}{1 + W_{\text{Р}}(p)},$$

где $W_{\text{П}}(p) = W_{\text{ЭМУ}}(p) \cdot W_{\text{Д}}(p)$ – передаточная функция прямой цепи;

$W_{\text{Р}}(p) = W_{\text{П}}(p) \cdot K_{\text{ОС}}$ – передаточная функция разомкнутой цепи.

Приводим передаточную функцию к рабочему виду

$$W_3(p) := W(p) \Bigg| \begin{matrix} simplify \\ float, 3 \end{matrix} \rightarrow \frac{1.49e - 8 \cdot p + 341.0}{27.5 \cdot p + 9.5 \cdot p^2 + p^3 + 707.0}.$$

5.1. Оценка устойчивости ЗАС по расположения полюсов и корней на корневой плоскости

Для удобства воспользуемся функциями $numer(..)$ и $denom(..)$ для выделения числителя и знаменателя соответственно.

$$g_1 := numer(W_3(p)) \left| \begin{matrix} solve, p \\ float, 3 \end{matrix} \right. \rightarrow \ldots;$$

$$g_2 := denom(W_3(p)) \left| \begin{matrix} solve, p \\ float, 3 \end{matrix} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}.$$

5.2. Оценка устойчивости по переходной характеристике

Принцип построения переходного процесса был показан в лабораторных работах №1 и №2

5.3. Оценка устойчивости по критерию Найквиста

Для построения амплитудно-фазовой характеристики <u>разомкнутой</u> характеристики оператор Лапласа заменяется произведением $j\omega$. По оси абсцисс откладываем вещественную составляющую $Re(W_P(j\omega))$, по оси ординат – мнимая $Im(W_P(j\omega))$.

Для снижения количества точек расчета частоты задаем следующим образом

$$l\omega := -4, -3.99..5;$$
$$\omega := 10^{l\omega}.$$

5.4. Оценка устойчивости по логарифмическим амлитудно- и фазочастотной характеристикам.

$$L(\omega) := 20 \cdot \log\left(\left|W_P(j\omega)\right|\right);$$
$$\varphi(\omega) := atan\frac{\mathrm{Im}(W_P(j\omega))}{\mathrm{Re}(W_P(j\omega))}.$$

По причине того, что арктангенс для углов 90° и минус 90° не существует, ЛФЧХ на графике изменяется скачком при этих значениях. Один из способов устранения представлен далее

$$\varphi(\omega) := \left| \begin{matrix} \dfrac{atan\dfrac{\mathrm{Im}(W_P(j\omega))}{\mathrm{Re}(W_P(j\omega))}}{\deg} \ if \ \mathrm{Re}(W(j\omega)) > 0 \\ \dfrac{atan\dfrac{\mathrm{Im}(W_P(j\omega))}{\mathrm{Re}(W_P(j\omega))} - \pi}{\deg} \ otherwise \end{matrix} \right.$$

Запас устойчивости системы по амплитуде определяется для частоты, при которой происходит отставании фазы на 180°, по фазе – при частоте среза.

!! Выполните также построение частотных характеристик в среде Matlab/Simulink.

5.5. Оценка устойчивости замкнутой САУ с помощью годографа Михайлова

Годограф строится для характеристического уравнения $F(p)$ передаточной функции замкнутой САУ.

$$F(p) := denom(W_3(p)) \;\; float, 3 \rightarrow ...$$

5.6. Оценка устойчивости по критерию Рауса–Гурвица

Для характеристического полинома передаточной функции замкнутой САУ составляются определители.

Определяем коэффициенты полинома

$$a := F(p)\; coeffs \rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Составляем главный определитель Гурвица:

$$\Delta_3 := \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = ...$$

Составляем определители Гурвица низшего порядка:

$$\Delta_2 := \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = ...$$

$$\Delta_1 := a_1 \qquad \Delta_1 = ...$$

6. Содержание отчета

В отчете необходимо привести задание для выполнения лабораторной работы, структурную схему исследуемой системы с передаточными функциями ее отдельных элементов, экспериментальные и расчетные графики, данные по результатам экспериментов и результаты обработки данных, сделать необходимые заключения и ответить на поставленные вопросы.

7. Вопросы

1. Какие причины лежат в основе возможной неустойчивости автоматической системы?

2. Как оценивается устойчивость САУ по поведению свободной составляющей решения линейного дифференциального уравнения?

3. С какой целью выясняются условия устойчивости САУ?

4. В чем заключается необходимое условие устойчивости?

5. В чем заключается достаточное условие устойчивости?

6. Что такое правые и левые корни?

7. Как найти нули и полюсы ПФ?

8. Как определить запасы устойчивости по ЛЧХ разомкнутой системы?

9. Что называется критерием устойчивости?

10. Какие критерии устойчивости наиболее часто используются в теории автоматического управления?

11. Какое уравнение является исходным для критерия Михайлова?

12. Как оценить устойчивость системы по критерию Гурвица?

13. Что такое АФХ? Как получить уравнение АФХ?

14. Как влияют на устойчивость параметры K и T?

Первая редакция 20 сентября 2018 г.

Вопросы и предложения по методическим указаниям можно отправлять сюда:

vasilevas@tpu.ru