

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Цель работы. Научиться:

- решать линейные алгебраические уравнения методом простой итерации;
- производить матричные преобразования;
- писать программы с использованием языка программно интегрированной среды MathCAD.

Теория

Одним из часто используемых методов для расчета систем алгебраических уравнений высокого порядка является метод простой итерации. Метод простой итерации легко реализуется алгоритмически. Приведем описание метода простой итерации.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = d_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = d_3 \end{cases}$$

Решим первое уравнение СЛАУ относительно x_1 , второе относительно x_2 , а третье относительно x_3 и выпишем матрицы коэффициентов

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \cdot 0 + x_2 c_{21} + x_3 c_{31} + b_1 \\ x_2 = x_1 c_{12} + x_2 \cdot 0 + x_3 c_{32} + b_2 \\ x_3 = x_1 c_{13} + x_2 c_{23} + x_3 \cdot 0 + b_3 \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 0 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, систему уравнений можно записать в виде

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{A}_2\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b},$$

где $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Первый шаг итерации заключается в выборе стартовых (начальных) значений $x^{(0)}$, по которым определяются значения первой итерации $x^{(1)}$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b}.$$

Затем процесс итерации повторяется

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{B}.$$

Процесс итерирования должен продолжаться до тех пор пока разность между значения последующей и предыдущей итераций не будут меньше наперед заданной малой величины ε называемой невязкой $\varepsilon_{i,j} = |x_j^{(i)} - x_j^{(i-1)}|$.

Здесь i - номер итерации, j - номер компоненты вектора \mathbf{x} .

Пример. Рассмотрим СЛАУ

$$\begin{cases} 14x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 0,5x_1 + 20x_2 + 2.5x_3 = 3 \\ -4x_1 + x_2 + 24x_3 = 5 \end{cases}$$

Найдем решения заданной системы, используя метод простой итерации, с точностью $\varepsilon = 0,005$.

Перепишем приведенную систему:

$$\begin{cases} x_1 = 0 + 0,143x_2 - 0,214x_3 + 0,143 \\ x_2 = -0,071x_1 + 0 - 0,125x_3 + 0,429 \\ x_3 = 0,167x_1 - 0,042x_2 + 0 + 0,208 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,143 & -0,214 \\ -0,071 & 0 & -0,125 \\ 0,167 & -0,042 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,143 \\ 0,429 \\ 0,208 \end{pmatrix}$$

Введем стартовые значения и проведем первую итерацию

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,143 & -0,214 \\ -0,071 & 0 & -0,125 \\ 0,167 & -0,042 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,143 \\ 0,429 \\ 0,208 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,136 \\ 0,138 \\ 0,221 \end{pmatrix}$$

Вычисляем невязку

$$\varepsilon = |x^{(1)} - x^{(0)}| = \begin{pmatrix} 0,036 \\ 0,038 \\ 0,121 \end{pmatrix}, \quad \max(\varepsilon) = 0,121$$

Проведем вторую итерацию, стартовыми значения для которой являются значения первой итерации

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,136 \\ 0,138 \\ 0,221 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,143 & -0,214 \\ -0,071 & 0 & -0,125 \\ 0,167 & -0,042 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,136 \\ 0,138 \\ 0,221 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,143 \\ 0,429 \\ 0,208 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.1152 \\ 0.3399 \\ 0.2252 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем невязку (поправка)

$$\varepsilon = |x^{(2)} - x^{(1)}| = \begin{pmatrix} 0,02079 \\ 0,20193 \\ 0,00425 \end{pmatrix}, \quad \max(\varepsilon) = 0,2019.$$

Желаемая точность не достигнута, значит, делаем следующую итерацию

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1152 \\ 0.3399 \\ 0.2252 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,143 & -0,214 \\ -0,071 & 0 & -0,125 \\ 0,167 & -0,042 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1148 \\ 0.119 \\ 0.2253 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,143 \\ 0,429 \\ 0,208 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.143 \\ 0.34 \\ 0.213 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем невязку

$$\varepsilon = |x^{(3)} - x^{(2)}| = \begin{pmatrix} 0,027936 \\ 0,000033 \\ 0,011878 \end{pmatrix}, \quad \max(\varepsilon) = 0,027$$

Желаемая точность не достигнута, делаем следующую итерацию

$$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.143 \\ 0.34 \\ 0.213 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,143 & -0,214 \\ -0,071 & 0 & -0,125 \\ 0,167 & -0,042 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1148 \\ 0.119 \\ 0.2253 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.143 \\ 0.34 \\ 0.213 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.146 \\ 0.342 \\ 0.218 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем невязку

$$\varepsilon = |x^{(4)} - x^{(3)}| = \begin{pmatrix} 0,002541 \\ 0,002247 \\ 0,004657 \end{pmatrix}, \quad \max(\varepsilon) = 0,004657$$

Ошибка вычислений ниже заданной точности, желаемая точность достигнута, поэтому итерацию завершаем.

Приведем пример с программной реализацией алгоритма простой итерации в программной среде MathCAD.

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0.5 \\ -2.3 & 7 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1) Первый этап - преобразуем исходную матрицу так чтобы диагональные элементы равнялись единицы

$$A_T := A^T \quad A_T^{(0)} := \frac{A_T^{(0)}}{A_{0,0}} \quad A_T^{(1)} := \frac{A_T^{(1)}}{A_{1,1}} \quad A_T^{(2)} := \frac{A_T^{(2)}}{A_{2,2}}$$

$$B_0 := \frac{B_0}{A_{0,0}} \quad B_1 := \frac{B_1}{A_{1,1}} \quad B_2 := \frac{B_2}{A_{2,2}}$$

в результате преобразований получаем новую матрицу A новый вектор правых частей B

$$A := A_T^T \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0.1 \\ -0.329 & 1 & -0.429 \\ -0.25 & -0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.857 \\ 1.75 \end{pmatrix}$$

2) Второй этап - Находи нижнюю и верхнюю треугольные матрицы A1 и A2 то есть представляем решение в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + A2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + B$$

n := rows (A) n = 3 i := 0..n - 1 j := i

$$A1_{i,j} := \text{if}(i \leq j, 0, -A_{i,j}) \quad A2_{i,j} := \text{if}(j \leq i, 0, -A_{i,j})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0.1 \\ -0.329 & 1 & -0.429 \\ -0.25 & -0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad A1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.329 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad A2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0.429 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Находим решения методом итераций. Остановку итерационного цикла производим по критерию $\varepsilon > |x - x_0|$

Запишем весь алгоритм в виде программы

```

Iter(A, xo, B, ε) :=
n ← rows(A)
for i ∈ 0..n - 1
  for j ∈ 0..n - 1
    A1i,j ← if(i ≤ j, 0, -Ai,j)
    A2i,j ← if(j ≤ i, 0, -Ai,j)
  Ad ← A1 + A2
for i ∈ 0..100
  x ← Ad · xo + B
  k ← i
  Max ← max(|x - xo|)
  xo ← x
  break if ε ≥ Max
x ← stack(x, k)

```

Формирование нижней и верхней треугольных матриц

Число итераций

Цикл итераций

Прерывание по заданному критерию

Решения уравнений

Число итераций

$x_0 := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$
 $Iter(A, x_0, B, 10^{-6}) = \begin{pmatrix} 1.202 \\ 2.712 \\ 3.406 \\ 22 \end{pmatrix}$

Условия для выполнения лабораторной работы №1

Заданы матрицы коэффициентов при неизвестных величинах – **A** и векторы правых частей – **B**. Найти решения системы уравнений методом простой итерации.

Номер варианта задания определяется по последней цифре номера зачетной книжки, 0 соответствует 10-му варианту. Например, если номер зачетной книжки Д-5А11/04, то номер варианта задания равен 4. Если номер зачетной книжки 3-5А11/20, то номер варианта задания равен 10.

Работу сделать с использованием программно интегрированной среды **MathCAD**.

Варианты					
	1	2	3	4	5
A	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0,5 & 5 & -1 \\ 0,5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2,4 & 1 \\ 1 & 5,2 & -1 \\ 2 & -1,7 & 5 \end{pmatrix}$
B	$\begin{pmatrix} 2,5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

<i>Варианты</i>					
	6	7	8	9	10
A	$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0,5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0,5 & 5 & -1 \\ 0,5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0,5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2,4 & 1 \\ 1 & 5,2 & -1 \\ 2 & -1,7 & 5 \end{pmatrix}$
B	$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,5 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИИ ЗЕЙДЕЛЯ

Цель работы. Научиться:

- решать линейные алгебраические уравнения методом итерации Зейделя;
- производить матричные преобразования;
- писать программы с использованием языка программно интегрированной среды MathCAD.

Теория

Наряду с методом простой итерации используется метод итерации Зейделя. Метод итерации Зейделя так же прост в алгоритмической реализации как метод простой итерации, но имеет лучшую сходимость.

Приведем описание метода простой итерации.

Задана система линейных алгебраических уравнений

$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2,5$$

$$3x_1 + 5x_2 - x_3 = 3$$

$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 7$$

Найти решения системы методом итераций

Решение. Для решения будем использовать программно интегрированную среду MathCAD

1. Выписываем матрицу коэффициентов при неизвестных величинах и вектор правых частей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2. Преобразуем матрицу так, чтобы диагональные элементы матрицы равнялись единицы. Для этого необходимо каждую строку матрицы разделить на ее диагональный элемент

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & -0,5 \\ 0,6 & 1 & -0,2 \\ 0,667 & -1,333 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0,625 \\ 0,6 \\ 2,333 \end{pmatrix}$$

3. Находим верхнюю и нижнюю треугольные матрицы с отрицательным знаком

$$A1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0,667 & -1,333 & 0 \end{pmatrix}, \quad A2 = \begin{pmatrix} 0 & -0,75 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и представляем решение в виде

$$x = A_1x + A_2x + B$$

4. Последнее выражение перепишем в виде удобном для итерации

$$x - A_1x = A_2x + B \rightarrow x(I - A_1) = A_2x + B$$

$$x = A_z A_2x + A_z B \text{ где } A_z = (I - A_1)^{-1}$$

Приведем пример решения задачи в среде **MathCAD**.

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1) Первый этап - преобразуем исходную матрицу так что бы диагональные элементы ровнялись единицы

$$AT := A^T \quad AT^{(0)} := \frac{AT^{(0)}}{AT_{0,0}} \quad AT^{(1)} := \frac{AT^{(1)}}{AT_{1,1}} \quad AT^{(2)} := \frac{AT^{(2)}}{AT_{2,2}}$$

$$B_0 := \frac{B_0}{A_{0,0}} \quad B_1 := \frac{B_1}{A_{1,1}} \quad B_2 := \frac{B_2}{A_{2,2}}$$

в результате преобразований получаем новую матрицу **A** и новый вектор правых частей **B**

$$A := AT^T \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & -0,5 \\ 0,6 & 1 & -0,2 \\ 0,667 & -1,333 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0,625 \\ 0,6 \\ 2,333 \end{pmatrix}$$

2) Второй этап - Находи нижнюю и верхнюю треугольные матрицы A1 и A2 то есть представляем решение в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + A2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + B$$

$$n := \text{rows}(A) \quad n = 3 \quad i := 0..n-1 \quad j := i \\ A1_{i,j} := \text{if}(i \leq j, 0, -A_{i,j}) \quad A2_{i,j} := \text{if}(j \leq i, 0, -A_{i,j})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & -0,5 \\ 0,6 & 1 & -0,2 \\ 0,667 & -1,333 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0 & 0 \\ -0,667 & 1,333 & 0 \end{pmatrix} \quad A2 = \begin{pmatrix} 0 & -0,75 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Третий этап. Находим матрицу Зейделя $Az=(I-A1)^{-1}$

$$I := \text{identity} \quad (3) \quad Az := (I - A1)^{-1} \quad Az = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.6 & 1 & 0 \\ -1.467 & 1.333 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Четвертый этап. Находим решения методом итераций.

Остановку итерационного цикла производим по критерию $\varepsilon > |x - x_0|$

$$x = Az \cdot A2 \cdot x + Az \cdot B$$

Запишем весь алгоритм в виде программы используя MathCAD

```

ItZ(A, x0, B, ε) :=
n ← rows(A)
for i ∈ 0..n - 1
  for j ∈ 0..n - 1
    A1i,j ← if(i ≤ j, 0, -Ai,j)
    A2i,j ← if(j ≤ i, 0, -Ai,j)
  Az ← (identity(n) - A1)-1
  for i ∈ 0..100
    x ← Az · A2 · x0 + Az · B
    k ← i
    Max ← max(|x - x0|)
    x0 ← x
    break if ε ≥ Max
  x ← stack(x, k)
  
```

Формирование нижней и верхней треугольных матриц

Число итераций

Цикл итераций

Прерывание по заданному критерию

При обращении к программе последовательно задаем матрицу коэффициентов, вектор стартовых значений, вектор правых частей и точность вычисления.

$$x_0 := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad ItZ(A, x_0, B, 10^{-4}) = \begin{pmatrix} 1.3364 \\ 0.1182 \\ 1.6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Решения уравнений

Число итераций

В результате получаем вектор искомой величины и число итераций.

Рассчитаем ту же систему уравнений методом простой итерации и сравним число итераций

$$Iter(A, x_0, B, 10^{-4}) = \begin{pmatrix} 1.3363 \\ 0.1181 \\ 1.6 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Решения уравнений

Число итераций

Видно, что число итераций в методе Зейделя гораздо меньше.

Заданы матрицы коэффициентов при неизвестных величинах – **A** и векторы правых частей – **B**. Найти решения системы уравнений методом итерации Зейделя. Сравнить количество итерации с лабораторной работой №1.

Работу сделать с использованием программно интегрированной среды **MathCAD**.

<i>Варианты</i>					
	1	2	3	4	5
A	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0,5 & 5 & -1 \\ 0,5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2,4 & 1 \\ 1 & 5,2 & -1 \\ 2 & -1,7 & 5 \end{pmatrix}$
B	$\begin{pmatrix} 2,5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

<i>Варианты</i>					
	6	7	8	9	10
A	$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0,5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0,5 & 5 & -1 \\ 0,5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0,5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2,4 & 1 \\ 1 & 5,2 & -1 \\ 2 & -1,7 & 5 \end{pmatrix}$
B	$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,5 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3.
РАСЩЕПЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ МАТРИЦ НА
ДЕЙСТВИТЕЛЬНУЮ И МНИМУЮ ЧАСТИ. РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
В ФОРМЕ БАЛАНСА ТОКОВ**

Цель работы. Научиться

- представлять комплексную систему n уравнений матрицу в виде системы $2n$ действительных уравнений;
- Записывать и решать нелинейные уравнения в форме баланса токов;
- писать программы с использованием языка программно интегрированной среды MathCAD.

Теория

Часть первая. При расчетах установившихся режимов реальных энергетических систем возникают уравнения с комплексными коэффициентами. Поэтому рассмотрим преобразование системы уравнений с комплексными коэффициентами в систему уравнений с действительными коэффициентами.

Пусть нужно решить комплексную систему уравнений

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} 2 + 6j & -1 - 3j \\ 2,5 + 2j & 2,5 - 6j \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 2 - 10j \\ -4 + 5j \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{I}}.$$

Разобьем систему $\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{I}}$ на действительную и мнимую части:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \mathbf{G} - j\mathbf{B}, \quad \underline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}_r + j\mathbf{U}_i, \quad \underline{\mathbf{I}} = \mathbf{I}_r + j\mathbf{I}_i, \quad (\mathbf{G} - j\mathbf{B})(\mathbf{U}_r + j\mathbf{U}_i) = \mathbf{I}_r + j\mathbf{I}_i$$

$$\mathbf{G}\mathbf{U}_r + \mathbf{B}\mathbf{U}_i + j(\mathbf{G}\mathbf{U}_i - \mathbf{B}\mathbf{U}_r) = \mathbf{I}_r + j\mathbf{I}_i \rightarrow \mathbf{G}\mathbf{U}_r + \mathbf{B}\mathbf{U}_i = \mathbf{I}_r, \quad \mathbf{G}\mathbf{U}_i - \mathbf{B}\mathbf{U}_r = \mathbf{I}_i$$

В результате получаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_r \\ \mathbf{U}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{I}_i \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G} & -\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{I}_i \end{pmatrix}.$$

В нашем случае

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2,5 & 2,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix},$$

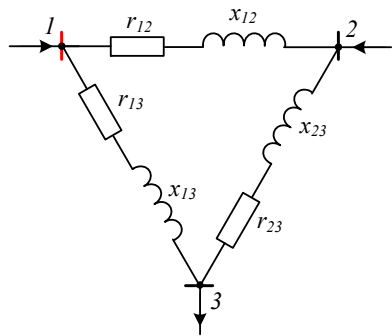
$$\begin{cases} I_1 = I_1' + jI_1'' \\ I_2 = jI_2' + jI_2'' \end{cases}, \quad \mathbf{I}_r = \begin{pmatrix} I_1' \\ I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_i = \begin{pmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 & 3 \\ 2,5 & 2,5 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 2,5 & 2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Решаем эту систему и получаем

$$\begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,128 \\ -1,456 \\ -0,464 \\ 0,672 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \underline{U}_1 = -2,128 - j0,464 \\ \underline{U}_2 = -1,456 + j0,672 \end{cases}, \quad \begin{cases} \underline{U}_1 = 2,178e^{-j167,699^\circ} \\ \underline{U}_2 = 1,604e^{j155,225^\circ} \end{cases}$$

Часть вторая. С помощью выше описанного метода расщепления комплексных матриц на действительные можно решать и нелинейные уравнения. Рассмотрим как такой метод можно использовать для определения потенциалов энергосистемы в форме баланса токов.



Приведем **пример** решения для схемы, приведенной ниже с балансирующим узлом $U_3 = U_\phi$. Составим уравнения баланса токов, учитывая, что величина балансирующего узла:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & -Y_{21} \\ -Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{13}U_\phi \\ Y_{23}U_\phi \end{pmatrix},$$

где,
 $Y = g - jb$, $S = P + jQ$, $I = I_r + jI_i$, $YU_\phi = gU_\phi + jbU_\phi$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{1r} + jI_{1i} \\ I_{2r} + jI_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S_1^*}{U_1^*} \\ \frac{S_2^*}{U_2^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P_1U_{1r} + Q_1U_{1i}}{U_{1r}^2 + U_{1i}^2} + j \frac{P_1U_{1i} - Q_1U_{1r}}{U_{1r}^2 + U_{1i}^2} \\ \frac{P_2U_{2r} + Q_2U_{2i}}{U_{2r}^2 + U_{2i}^2} + j \frac{P_2U_{2i} - Q_2U_{2r}}{U_{2r}^2 + U_{2i}^2} \end{pmatrix}$$

Теперь комплексное уравнение баланса токов можно записать в виде действительной системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & b_{11} & b_{12} \\ g_{21} & g_{22} & b_{21} & b_{22} \\ -b_{11} & -b_{12} & g_{11} & g_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1r} \\ U_{2r} \\ U_{1i} \\ U_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{1r} \\ I_{2r} \\ I_{1i} \\ I_{2i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{13}U_{\phi} \\ g_{23}U_{\phi} \\ -b_{13}U_{\phi} \\ -b_{23}U_{\phi} \end{pmatrix},$$

или подставляя значение токов через потенциалы и мощность, получаем

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & b_{11} & b_{12} \\ g_{21} & g_{22} & b_{21} & b_{22} \\ -b_{11} & -b_{12} & g_{11} & g_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1r} \\ U_{2r} \\ U_{1i} \\ U_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P_1 U_{1r} + Q_1 U_{1i}}{U_{1r}^2 + U_{1i}^2} \\ \frac{P_2 U_{2r} + Q_2 U_{2i}}{U_{2r}^2 + U_{2i}^2} \\ \frac{P_1 U_{1i} - Q_1 U_{1r}}{U_{1r}^2 + U_{1i}^2} \\ \frac{P_2 U_{2i} - Q_2 U_{2r}}{U_{2r}^2 + U_{2i}^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{13}U_{\phi} \\ g_{23}U_{\phi} \\ -b_{13}U_{\phi} \\ -b_{23}U_{\phi} \end{pmatrix}$$

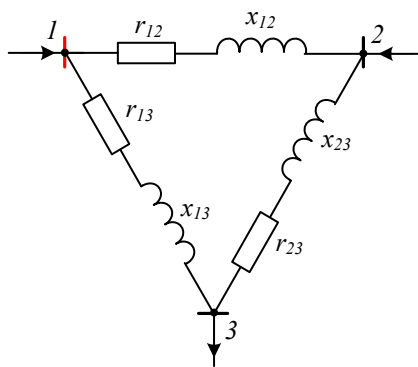
Полученную систему можно решить одним из выше рассмотренных методов итераций.

Приведем **пример** применения описанного алгоритма с использованием MathCAD.

Дано

$$z_{12} := 10 + 20i \quad z_{13} := 15 + 30i \quad z_{23} := 10 + 25i \quad U_{\phi} := 150$$

$$P_1 := 28.86 \quad Q_1 := 17.32 \quad P_2 := -46.2 \quad Q_2 := 23$$



$$Y_{11} := \frac{1}{z_{12}} + \frac{1}{z_{13}} \quad Y_{12} := \frac{1}{z_{12}} \quad Y_{13} := \frac{1}{z_{13}} \quad Y_{22} := \frac{1}{z_{12}} + \frac{1}{z_{23}}$$

$$Y_{21} := \frac{1}{z_{12}} \quad Y_{23} := \frac{1}{z_{23}}$$

$$Y := \begin{pmatrix} Y_{11} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0.033 - 0.067i & -0.02 + 0.04i \\ -0.02 + 0.04i & 0.034 - 0.074i \end{pmatrix}$$

Расщепляем комплексную матрицу на действительную и мнимую части

$$g := \text{Re}(Y) \quad g = \begin{pmatrix} 0.033 & -0.02 \\ -0.02 & 0.034 \end{pmatrix} \quad b := \text{Im}(Y) \quad b = \begin{pmatrix} -0.067 & 0.04 \\ 0.04 & -0.074 \end{pmatrix}$$

Формируем матрицу

$$\mathbf{BG} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{G} \end{pmatrix}$$

$$\text{BG1} := \text{stack}(g, b) \quad \text{BG2} := \text{stack}(-b, g) \quad \text{BG1} = \begin{pmatrix} 0.033 & -0.02 \\ -0.02 & 0.034 \\ -0.067 & 0.04 \\ 0.04 & -0.074 \end{pmatrix}$$

$$\text{BG2} = \begin{pmatrix} 0.067 & -0.04 \\ -0.04 & 0.074 \\ 0.033 & -0.02 \\ -0.02 & 0.034 \end{pmatrix}$$

$$\text{BG} := \text{augment}(\text{BG1}, \text{BG2}) \quad \text{BG} = \begin{pmatrix} 0.033 & -0.02 & 0.067 & -0.04 \\ -0.02 & 0.034 & -0.04 & 0.074 \\ -0.067 & 0.04 & 0.033 & -0.02 \\ 0.04 & -0.074 & -0.02 & 0.034 \end{pmatrix}$$

Формируем правую часть уравнения – токи

$$I_{r1}(r, x) := \frac{P_1 \cdot r + Q_1 \cdot x}{r^2 + x^2} \quad I_{i1}(r, x) := \frac{P_1 \cdot x - Q_1 \cdot r}{r^2 + x^2} \quad I_{r2}(r, x) := \frac{P_2 \cdot r + Q_2 \cdot x}{r^2 + x^2} \quad I_{i2}(r, x) := \frac{P_2 \cdot x - Q_2 \cdot r}{r^2 + x^2}$$

$$I_{-}(u1_r, u2_r, u1_i, u2_i) := \begin{pmatrix} I_{r1}(u1_r, u1_i) \\ I_{r2}(u2_r, u2_i) \\ I_{i1}(u1_r, u1_i) \\ I_{i2}(u2_r, u2_i) \end{pmatrix} \quad I := \begin{pmatrix} \text{Re}(Y13) \cdot U_{\bar{0}} \\ \text{Re}(Y23) \cdot U_{\bar{0}} \\ \text{Im}(Y13) \cdot U_{\bar{0}} \\ \text{Im}(Y23) \cdot U_{\bar{0}} \end{pmatrix}$$

Производим итерацию до тех пор пока не получаем желаемую точность 10^{-2}

$$U := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u1_r \\ u2_r \\ u1_i \\ u2_i \end{pmatrix} := U \quad U := \text{BG}^{-1} \cdot (I_{-}(u1_r, u2_r, u1_i, u2_i) + I)$$

$$\mathbf{1) } U = \begin{pmatrix} 4.06 \times 10^3 \\ 5.512 \times 10^3 \\ 1.996 \times 10^3 \\ -1.868 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u1_r \\ u2_r \\ u1_i \\ u2_i \end{pmatrix} - U = \begin{pmatrix} -4059.8635 \\ -5511.5058 \\ -1996.0496 \\ 1868.1839 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u1_r \\ u2_r \\ u1_i \\ u2_i \end{pmatrix} := U \quad U := \text{BG}^{-1} \cdot (I_{-}(u1_r, u2_r, u1_i, u2_i) + I)$$

$$\mathbf{2) } U = \begin{pmatrix} 150.049 \\ 149.995 \\ 0.035 \\ -0.084 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u1_r \\ u2_r \\ u1_i \\ u2_i \end{pmatrix} - U = \begin{pmatrix} 3909.9146 \\ 5361.6109 \\ 1996.1146 \\ -1868.0002 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u1_r \\ u2_r \\ u1_i \\ u2_i \end{pmatrix} := U \quad U := \text{BG}^{-1} \cdot (I_{-}(u1_r, u2_r, u1_i, u2_i) + I)$$

$$\mathbf{3) } U = \begin{pmatrix} 153.934 \\ 152.325 \\ -1.276 \\ -4.82 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u1_r \\ u2_r \\ u1_i \\ u2_i \end{pmatrix} - U = \begin{pmatrix} -3.8847 \\ -2.3297 \\ 1.311 \\ 4.7364 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u1_r \\ u2_r \\ u1_i \\ u2_i \end{pmatrix} := U \quad U := \text{BG}^{-1} \cdot (I_{-}(u1_r, u2_r, u1_i, u2_i) + I)$$

$$\begin{aligned}
 \text{4) } U &= \begin{pmatrix} 153.742 \\ 152.09 \\ -1.315 \\ -4.782 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u1_r \\ u2_r \\ u1_i \\ u2_i \end{pmatrix} - U &= \begin{pmatrix} 0.1918 \\ 0.235 \\ 0.0388 \\ -0.0387 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u1_i \\ u2_i \\ u1_r \\ u2_r \end{pmatrix} & := U \\
 \text{5) } U &= \begin{pmatrix} 153.748 \\ 152.094 \\ -1.319 \\ -4.79 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u1_r \\ u2_r \\ u1_i \\ u2_i \end{pmatrix} - U &= \begin{pmatrix} -0.0061 \\ -0.0043 \\ 0.0037 \\ 0.0083 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u1_i \\ u2_i \\ u1_r \\ u2_r \end{pmatrix} & := U
 \end{aligned}$$

Для упрощения вычислений составляем программу

```

max(U) :=
  n ← length(U)
  u_m ← U_0
  for i ∈ 1..n - 1
    u_m ← U_i if u_m < U_i
  u_m

```

Программа поиска максимальной компоненты вектора

```

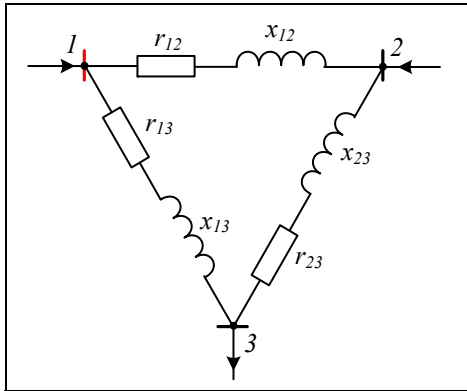
Balans_I(BG, U, I, ε) :=
  for i ∈ 0..100
    \begin{pmatrix} u1_r \\ u2_r \\ u1_i \\ u2_i \end{pmatrix} ← U
    U ← BG^{-1} · (I_-(u1_r, u2_r, u1_i, u2_i) + I)
    ΔU ← U - \begin{pmatrix} u1_r \\ u2_r \\ u1_i \\ u2_i \end{pmatrix}
    if ε ≥ max(ΔU)
      k ← i + 1
      break
  (U_0 U_1 U_2 U_3 k)^T

```

$$\underline{U} := \text{Balans_I} \left[\text{BG}, \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, I, 10^{-2} \right] U = \begin{pmatrix} 153.748 \\ 152.094 \\ -1.319 \\ -4.79 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Проверка полученных результатов

$$Y \cdot \begin{pmatrix} U_0 + j \cdot U_2 \\ U_1 + j \cdot U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.187 - 4.114i \\ 1.761 - 5.314i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 - Q_1 \cdot j \\ U_0 - j \cdot U_2 \\ P_2 - Q_2 \cdot j \\ U_1 - j \cdot U_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{13} \\ Y_{23} \end{pmatrix} \cdot U_6 = \begin{pmatrix} 2.187 - 4.114i \\ 1.761 - 5.314i \end{pmatrix}$$



Условия для выполнения работы № 3

Для заданной схемы найти потенциалы в требуемых узлах, если заданы сопротивления ветвей, значение напряжения базового узла и полные мощности в узлах. Задачу решить методом расщепления комплексной матрицы на действительные. Нелинейные уравнения потенциалов представить в форме баланса токов и решить методом простой итерации.

В таблице напряжения даны в **кВ**, Мощности активная и реактивная в **МВт** и **Мвар** соответственно, сопротивления ветвей в **Ом**.

Работу сделать с использованием программно интегрированной среды **MathCAD**.

Варианты					
	1	2	3	4	5
Z	$Z_{12} = 10 + j20$	$Z_{12} = 12 + j20$	$Z_{12} = 11 + j20$	$Z_{12} = 11 + j22$	$Z_{12} = 14 + j20$
	$Z_{13} = 10 + j15$	$Z_{13} = 8 + j15$	$Z_{13} = 14 + j15$	$Z_{13} = 9 + j15$	$Z_{13} = 10 + j18$
	$Z_{23} = 10 + j25$	$Z_{23} = 10 + j20$	$Z_{23} = 10 + j12$	$Z_{23} = 10 + j15$	$Z_{23} = 17 + j25$
S	$P_1 = 28,88$	$P_1 = 24$	$P_1 = 21$	$P_1 = -28,88$	$P_1 = 22$
	$Q_1 = 15,33$	$Q_1 = 18$	$Q_1 = 15$	$Q_1 = -15$	$Q_1 = 15$
	$P_2 = 25,78$	$P_2 = 30,78$	$P_2 = -30$	$P_2 = 25$	$P_2 = -22$
	$Q_2 = -25,33$	$Q_2 = 25$	$Q_2 = -25$	$Q_2 = 23$	$Q_2 = -22$
Ном ер бал. узла	$U_1 = 155$	$U_2 = 130$	$U_3 = 155$	$U_1 = 200$	$U_3 = 155$

Варианты					
	6	7	8	9	10
A	$Z_{12} = 12 + j20$	$Z_{12} = 14 + j20$	$Z_{12} = 10 + j20$	$Z_{12} = 11 + j20$	$Z_{12} = 12 + j20$
	$Z_{13} = 8 + j15$	$Z_{13} = 10 + j18$	$Z_{13} = 10 + j15$	$Z_{13} = 11 + j10$	$Z_{13} = 8 + j15$
	$Z_{23} = 10 + j20$	$Z_{23} = 17 + j25$	$Z_{23} = 10 + j25$	$Z_{23} = 10 + j22$	$Z_{23} = 10 + j20$

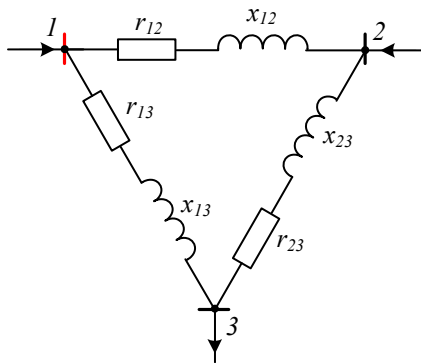
В	$P_1 = 24$	$P_1 = 28,88$	$P_1 = -28,88$	$P_1 = 21$	$P_1 = 22$
	$Q_1 = 18$	$Q_1 = 15,33$	$Q_1 = -15$	$Q_1 = 15$	$Q_1 = 15$
	$P_2 = 30,78$	$P_2 = 25,78$	$P_2 = 25$	$P_2 = -30$	$P_2 = -22$
	$Q_2 = 25$	$Q_2 = -25,33$	$Q_2 = 23$	$Q_2 = -25$	$Q_2 = -22$
Ном ер бал. узла	$U_2 = 130$	$U_1 = 150$	$U_1 = 133$	$U_3 = 144$	$U_2 = 180$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ФОРМЕ БАЛАНСА МОЩНОСТИ. МЕТОД НЬЮТОНА.

Цель работы. Научиться:

- записывать и решать нелинейные уравнения в форме баланса мощностей;
- решать нелинейные алгебраические уравнения методом Ньютона;
- писать программы с использованием языка программирования интегрированной среды MathCAD.

Теория



Пусть в рассматриваемой схеме балансирующим узлом является первый узел. Тогда уравнения узловых потенциалов будут иметь вид:

$$\begin{cases} (Y_{21} + Y_{23})U_2 - U_3 Y_{23} = I_2 + U_1 Y_{21} \\ -U_2 Y_{32} + (Y_{31} + Y_{32})U_3 = I_3 + U_1 Y_{31} \end{cases}$$

Напоминаем, что величина напряжения балансирующего узла является действительной. Перепишем это уравнений

через мощности узлов

$$\begin{cases} (Y_{21} + Y_{23})U_2 - U_3 Y_{23} = \frac{S_2^*}{U_2} + U_1 Y_{21} \\ -U_2 Y_{32} + (Y_{31} + Y_{32})U_3 = \frac{S_3^*}{U_3} + U_1 Y_{31} \end{cases}$$

Перепишем эти уравнения, освободившись от знаменателя:

$$\begin{cases} (Y_{21} + Y_{23})U_2 U_2^* - U_3 U_2^* Y_{23} = S_2^* + U_2^* U_1 Y_{21} \\ -U_2 U_3^* Y_{32} + (Y_{31} + Y_{32})U_3 U_3^* = S_3^* + U_3^* U_1 Y_{31} \end{cases}$$

Для удобства введем новые обозначения для собственных проводимостей узлов. Для i – того узла $Y_{ii} = (Y_{im} + Y_{ik})$ (собственная проводимость узла), тогда

$$\begin{cases} -Y_{22}U_2 U_2^* - U_3 U_2^* Y_{23} = S_2^* + U_2^* U_1 Y_{21} \\ -U_2 U_3^* Y_{32} - Y_{33}U_3 U_3^* = S_3^* + U_3^* U_1 Y_{31} \end{cases}$$

Введем функции небаланса мощностей (невязка)

$$\begin{cases} \underline{W}_{S2} = \underline{S}_2^* - \underline{Y}_{22} \underline{U}_2 \underline{U}_2^* + \underline{U}_2^* \underline{U}_1 \underline{Y}_{21} + \underline{U}_3 \underline{U}_2^* \underline{Y}_{23} \\ \underline{W}_{S3} = \underline{S}_3^* - \underline{Y}_{33} \underline{U}_3 \underline{U}_3^* + \underline{U}_3^* \underline{U}_1 \underline{Y}_{31} + \underline{U}_2 \underline{U}_3^* \underline{Y}_{32} \end{cases}$$

Если учесть, что $\underline{U}_i \underline{U}_i^* = U_i^2$, $\underline{U}_m \underline{U}_k^* = U_m e^{j\delta_m} U_k e^{-j\delta_k} = U_m U_k e^{-j\delta_{km}}$, $\delta_{km} = \delta_k - \delta_m$ и, что проводимость ветви представляется в виде суммы действительной и мнимой частей: $\underline{Y} = g - jb$, тогда произведения вида $\underline{U}_k^* \underline{U}_m \underline{Y}_{km}$ представятся в виде

$$\begin{aligned} \underline{U}_k^* \underline{U}_m \underline{Y}_{km} &= U_k U_m e^{-j\delta_{km}} (g_{km} - jb_{km}) = \\ &= U_k U_m [\cos(\delta_{km}) - j \sin(\delta_{km})] (g_{km} - jb_{km}) = \\ &= U_k U_m [g_{km} \cos(\delta_{km}) - b_{km} \sin(\delta_{km})] - j U_k U_m [b_{km} \cos(\delta_{km}) + g_{km} \sin(\delta_{km})] \end{aligned}$$

Разделим уравнения баланса на действительную и мнимую части учитывая, что $\underline{S}_i^* = P_i - jQ_i$ получим четыре выражения

$$\begin{cases} w_{P2} = P_2 - g_{22} U_2^2 + U_2 U_1 (g_{21} \cos(\delta_{21}) - b_{21} \sin(\delta_{21})) + U_2 U_3 (g_{23} \cos(\delta_{23}) - b_{23} \sin(\delta_{23})) \\ w_{P3} = P_3 - g_{33} U_3^2 + U_3 U_1 (g_{31} \cos(\delta_{31}) - b_{31} \sin(\delta_{31})) + U_3 U_2 (g_{32} \cos(\delta_{32}) - b_{32} \sin(\delta_{32})) \\ w_{Q2} = Q_2 - b_{22} U_2^2 + U_2 U_1 (b_{21} \cos(\delta_{21}) + g_{21} \sin(\delta_{21})) + U_2 U_3 (b_{23} \cos(\delta_{23}) + g_{23} \sin(\delta_{23})) \\ w_{Q3} = Q_3 - b_{33} U_3^2 + U_3 U_1 (b_{31} \cos(\delta_{31}) + g_{31} \sin(\delta_{31})) + U_3 U_2 (b_{32} \cos(\delta_{32}) - g_{23} \sin(\delta_{32})) \end{cases}$$

Получили четыре нелинейных уравнений с четырьмя неизвестными $U_2, \delta_2, U_3, \delta_3$. Чтобы найти корни этой системы уравнений будем использовать метод Ньютона. Запишем итерационное уравнение Ньютона для поиска корней

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}}$$

В нашем случае величины приведенные в формуле имеют значения:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} w_{P2} \\ w_{P3} \\ w_{Q2} \\ w_{Q3} \end{pmatrix}, \partial \mathbf{f}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_{P2}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial U_2} \\ \frac{\partial w_{P2}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial U_3} \\ \frac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_2} \\ \frac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_3} \end{pmatrix}$$

Сначала мы должны найти производные от каждой функции по каждой переменной, то есть

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w_{P2}}{\partial U_2}, \frac{\partial w_{P2}}{\partial U_3}, \frac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_2}, \frac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial U_2}, \frac{\partial w_{P3}}{\partial U_3}, \frac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_2}, \frac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_3} \\ \frac{\partial w_{Q2}}{\partial U_2}, \frac{\partial w_{Q2}}{\partial U_3}, \frac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_2}, \frac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial U_2}, \frac{\partial w_{Q3}}{\partial U_3}, \frac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_2}, \frac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_3} \end{pmatrix}$$

В результате получаем матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w_{P2}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{P2}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_3} \\ \frac{\partial w_{P3}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_3} \\ \frac{\partial w_{Q2}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_3} \\ \frac{\partial w_{Q3}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{P2}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \\ w_{P3}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \\ w_{Q2}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \\ w_{Q3}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2^{(1)} - U_2^{(0)} \\ U_3^{(1)} - U_3^{(0)} \\ \delta_2^{(1)} - \delta_2^{(0)} \\ \delta_3^{(1)} - \delta_3^{(0)} \end{pmatrix} \text{ поправки к переменным.}$$

Технология решения системы уравнений такова. Подставляем везде, где встречаются переменные $U_2, \delta_2, U_3, \delta_3$ в уравнении их стартовые (нулевые) приближения $U_2^{(0)}, U_3^{(0)}, \delta_2^{(0)}, \delta_3^{(0)}$. Затем определяется вектор-поправку

$$\begin{pmatrix} \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \end{pmatrix} \text{ решая уравнение}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_{P2}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{P2}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_3} \\ \frac{\partial w_{P3}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_3} \\ \frac{\partial w_{Q2}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_3} \\ \frac{\partial w_{Q3}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w_{P2}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \\ w_{P3}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \\ w_{Q2}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \\ w_{Q3}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \end{pmatrix}$$

Если порядок матрицы высокий для решения уравнений используют методы Гаусса, простой итерации или Зейделя. Затем найденные поправки используем для определения следующих стартовых значений

$$\begin{pmatrix} U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ \delta_2^{(1)} \\ \delta_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2^{(0)} \\ U_3^{(0)} \\ \delta_2^{(0)} \\ \delta_3^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \end{pmatrix}$$

Далее этот процесс повторяется до тех пор, пока максимальная из поправок не будет меньше наперед заданного малого числа ϵ .

Приведем **пример**. Определить потенциалы узлов для приведенной схемы, если балансирующим узлом является третий узел. Заданы полные

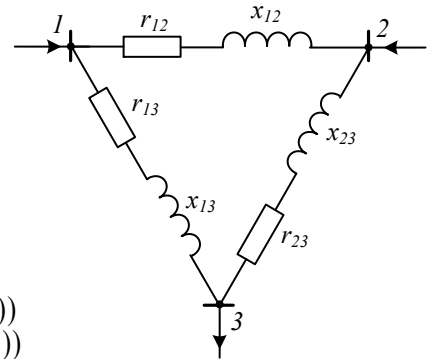
мощности в первом и во втором узлах, известь потенциал балансирующего узла.

Для расчета будем использовать уравнения напряжений в форме баланса мощностей. Для решения нелинейного уравнения будем использовать метод Ньютона

Дано

$$Z_{12} := 10 + 20j \quad Z_{13} := 15 + 30j \quad Z_{23} := 10 + 25j$$

$$U_b := 150 \quad P_1 := 28.86 \quad Q_1 := 17.32 \quad P_2 := -46.2 \quad Q_2 := 23$$



Формируем элементы матрицы проводимости

$$Y_{11} := \frac{1}{Z_{12}} + \frac{1}{Z_{13}} \quad Y_{12} := \frac{1}{Z_{12}} \quad Y_{13} := \frac{1}{Z_{13}}$$

$$Y_{22} := \frac{1}{Z_{12}} + \frac{1}{Z_{23}} \quad Y_{23} := \frac{1}{Z_{23}} \quad Y_{21} := Y_{12}$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{21} & g_{22} & g_{13} & g_{23} \end{pmatrix} := \text{Re} \left(\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{21} & Y_{22} & Y_{13} & Y_{23} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{21} & b_{22} & b_{13} & b_{23} \end{pmatrix} := -\text{Im} \left(\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{21} & Y_{22} & Y_{13} & Y_{23} \end{pmatrix} \right)$$

Формируем функции небаланса мощности -невязку

$$W_{p1}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) := P_1 - g_{11} \cdot u_1^2 + u_1 \cdot u_2 \cdot (g_{12} \cos(\phi_2 - \phi_1) + b_{12} \sin(\phi_2 - \phi_1)) + u_1 \cdot U_b \cdot (\cos(\phi_1) \cdot g_{13} - b_{13} \sin(\phi_1))$$

$$W_{q1}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) := Q_1 - b_{11} \cdot u_1^2 - u_1 \cdot u_2 \cdot (-b_{12} \cos(\phi_2 - \phi_1) + g_{12} \sin(\phi_2 - \phi_1)) + u_1 \cdot U_b \cdot (\sin(\phi_1) \cdot g_{13} + \cos(\phi_1) \cdot b_{13})$$

$$W_{p2}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) := P_2 - g_{22} \cdot u_2^2 + u_1 \cdot u_2 \cdot (g_{21} \cos(\phi_1 - \phi_2) + b_{21} \sin(\phi_1 - \phi_2)) + u_2 \cdot U_b \cdot (\cos(\phi_2) \cdot g_{23} - b_{23} \sin(\phi_2))$$

$$W_{q2}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) := Q_2 - b_{22} \cdot u_2^2 - u_1 \cdot u_2 \cdot (-b_{21} \cos(\phi_1 - \phi_2) + g_{21} \sin(\phi_1 - \phi_2)) + u_2 \cdot U_b \cdot (\sin(\phi_2) \cdot g_{23} + \cos(\phi_2) \cdot b_{23})$$

Формируем матрицу Якоби - Якобиан

$$D(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} W_{p1}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) & \frac{\partial}{\partial u_2} W_{p1}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_1} W_{p1}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_2} W_{p1}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) \\ \frac{\partial}{\partial u_1} W_{q1}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) & \frac{\partial}{\partial u_2} W_{q1}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_1} W_{q1}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_2} W_{q1}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) \\ \frac{\partial}{\partial u_1} W_{p2}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) & \frac{\partial}{\partial u_2} W_{p2}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_1} W_{p2}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_2} W_{p2}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) \\ \frac{\partial}{\partial u_1} W_{q2}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) & \frac{\partial}{\partial u_2} W_{q2}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_1} W_{q2}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_2} W_{q2}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) \end{pmatrix}$$

$$W(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) := \begin{pmatrix} W_{p1}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) \\ W_{p2}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) \\ W_{q1}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) \\ W_{q2}(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) \end{pmatrix}$$

Приведем три итерации

$$U := \begin{pmatrix} 150 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} := U \text{ задаем произвольные стартовые значения}$$

1)-итер. $\Delta(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) := D(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2)^{-1} \cdot W(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2)$ $\overrightarrow{|\Delta(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2)|} = \begin{pmatrix} 2.852593 \\ 4.630306 \\ 0.00781 \\ 0.013428 \end{pmatrix}$

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} - \Delta(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) \quad U = \begin{pmatrix} 153.3576 \\ 151.4866 \\ -0.0072 \\ -0.0296 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} := U$$

2)-итер. $\Delta(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) := D(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2)^{-1} \cdot W(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2)$ $\overrightarrow{|\Delta(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2)|} = \begin{pmatrix} 0.45034 \\ 0.77534 \\ 0.0015 \\ 0.00213 \end{pmatrix}$

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} - \Delta(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) \quad U = \begin{pmatrix} 153.8079 \\ 152.262 \\ -0.0087 \\ -0.0317 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} := U$$

3) итер. $\Delta(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) := D(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2)^{-1} \cdot W(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2)$ $\overrightarrow{|\Delta(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2)|} = \begin{pmatrix} 0.063 \\ 0.107 \\ 1.867 \times 10^{-4} \\ 2.884 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \Delta(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) \quad U = \begin{pmatrix} 153.8711 \\ 152.3695 \\ -0.0089 \\ -0.032 \end{pmatrix}$$

Приведем программу расчета в среде MathCAD

```

max(U) :=
n ← length(U)
u_m ← U_0
for i ∈ 1..n - 1
    u_m ← U_i if u_m < U_i
u_m

```

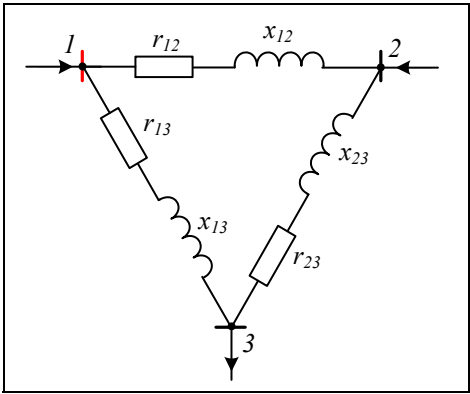
**Вспомогательная программа
вычисления максимальной
компоненты вектора**

```

balans_W(U, ε) := for i ∈ 0..100
    (
        u1
        u2
        f1
        f2
    ) ← U
    Δ(u1, u2, f1, f2) ← D(u1, u2, f1, f2)-1 W(u1, u2, f1, f2)
    ε1 ← |Δ(u1, u2, f1, f2)|
    U ← (
        u1
        u2
        f1
        f2
    ) - Δ(u1, u2, f1, f2)
    if ε ≥ max(ε1)
        k ← i + 1
        break
    (
        u1
        u2
        f1
        f2
        k
    )

```

$\varepsilon := 10^{-3}$ $U := \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\text{balans_W}(U, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 153.75353 \\ 152.1695 \\ -0.00858 \\ -0.03148 \\ 7 \end{pmatrix}$



Условия для выполнения работы № 4

Для заданной схемы найти потенциалы в требуемых узлах, если заданы сопротивления ветвей, значение напряжения базового узла и полные мощности в узлах. Нелинейные уравнения потенциалов представить в форме баланса мощности и решить методом итерации Ньютона.

В таблице напряжения даны в **кВ**, Мощности активная и реактивная в **МВт** и **Мвар** соответственно, сопротивления ветвей в **Ом**.

Работу сделать с использованием программно интегрированной среды **MathCAD**.

<i>Варианты</i>					
	1	2	3	4	5
<i>Z</i>	$Z_{12} = 10 + j20$	$Z_{12} = 12 + j20$	$Z_{12} = 11 + j20$	$Z_{12} = 11 + j22$	$Z_{12} = 14 + j20$
	$Z_{13} = 10 + j15$	$Z_{13} = 8 + j15$	$Z_{13} = 14 + j15$	$Z_{13} = 9 + j15$	$Z_{13} = 10 + j18$
	$Z_{23} = 10 + j25$	$Z_{23} = 10 + j20$	$Z_{23} = 10 + j12$	$Z_{23} = 10 + j15$	$Z_{23} = 17 + j25$
<i>S</i>	$P_1 = 28,88$	$P_1 = 24$	$P_1 = 21$	$P_1 = -28,88$	$P_1 = 22$
	$Q_1 = 15,33$	$Q_1 = 18$	$Q_1 = 15$	$Q_1 = -15$	$Q_1 = 15$
	$P_2 = 25,78$	$P_2 = 30,78$	$P_2 = -30$	$P_2 = 25$	$P_2 = -22$
	$Q_2 = -25,33$	$Q_2 = 25$	$Q_2 = -25$	$Q_2 = 23$	$Q_2 = -22$
Ном ер бал. узла	$U_1 = 155$	$U_2 = 130$	$U_3 = 155$	$U_1 = 200$	$U_3 = 155$

<i>Варианты</i>					
	6	7	8	9	10
<i>Z</i>	$Z_{12} = 12 + j20$	$Z_{12} = 14 + j20$	$Z_{12} = 10 + j20$	$Z_{12} = 11 + j20$	$Z_{12} = 12 + j20$
	$Z_{13} = 8 + j15$	$Z_{13} = 10 + j18$	$Z_{13} = 10 + j15$	$Z_{13} = 11 + j10$	$Z_{13} = 8 + j15$
	$Z_{23} = 10 + j20$	$Z_{23} = 17 + j25$	$Z_{23} = 10 + j25$	$Z_{23} = 10 + j22$	$Z_{23} = 10 + j20$
<i>S</i>	$P_1 = 24$	$P_1 = 28,88$	$P_1 = -28,88$	$P_1 = 21$	$P_1 = 22$
	$Q_1 = 18$	$Q_1 = 15,33$	$Q_1 = -15$	$Q_1 = 15$	$Q_1 = 15$
	$P_2 = 30,78$	$P_2 = 25,78$	$P_2 = 25$	$P_2 = -30$	$P_2 = -22$
	$Q_2 = 25$	$Q_2 = -25,33$	$Q_2 = 23$	$Q_2 = -25$	$Q_2 = -22$
Ном ер бал. узла	$U_2 = 130$	$U_1 = 150$	$U_1 = 133$	$U_3 = 144$	$U_2 = 180$

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4.
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ВЕЛИЧИНЫ УДАРНОГО
ТОКА ОТ ФАЗЫ ПЕРЕМЕННОГО ВНЕШНЕГО ИСТОЧНИКА
НАПРЯЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СХЕМОТЕХНИЧЕСКОЙ
СРЕДЫ MATHCAD.**

Цель работы: Научиться

- решать дифференциальные уравнения при гармоническом воздействии;
- расщеплять принужденную и свободную составляющие решения;
- применять метод пространство состояний
- строить графические зависимости 1D и 2D

Теория

В электроэнергетике очень важно уметь решать дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, в правой части которого стоит синусоидальная функция - гармоническое воздействие. В частности такие уравнения возникают при исследовании влияния фазы гармонического напряжения на величину тока в последовательно RL контуре. Использование программно интегрированной среда MathCAD позволяет проследить динамику изменения величины тока при изменении фазы воздействующего гармонического напряжения.

Приведем решение дифференциального уравнения при гармоническом воздействии. Рассмотрим схему - рисунок 1.

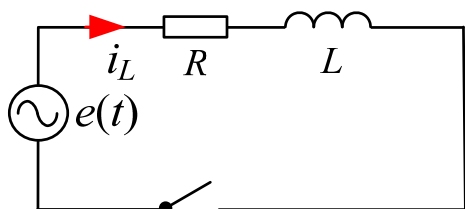


Рис. 1

Запишем уравнение первого порядка

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \sin(\omega t + \alpha)$$

Будем решать в комплексном виде. Для этого запишем правую часть в виде:

$$E \sin(\omega t + \alpha) \rightarrow E e^{j(\omega t + \alpha)} = \underline{E} e^{j\omega t} \rightarrow \underline{E} = E e^{j\alpha}$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \underline{E} e^{j\omega t}$$

Решение этого уравнения запишем в виде сумму аperiodической составляющей и периодической составляющей

$$i = A e^{pt} + I_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$$

Корень характеристического уравнения определяется решения алгебраического уравнения

$$Lp + R = 0 \rightarrow p = -\frac{R}{L}$$

Постоянная времени T есть величина обратная корню характеристического уравнения

$$T = \frac{1}{|p|}$$

Находим принужденную периодическую составляющую, подставляя комплексное решение $\underline{I}e^{j\omega t}$ в неоднородное уравнение

$$Lj\omega \underline{I}e^{j\omega t} + R \underline{I}e^{j\omega t} = \underline{E}e^{j\omega t} \rightarrow Lj\omega \underline{I} + R \underline{I} = \underline{E} \rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + j\omega L}$$

Получаем решение в виде

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + j\omega L} = I_m e^{j\beta}, \quad I_m = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \beta = \alpha - \varphi, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Окончательное периодическое решение можно записать взяв мнимую часть от последнего выражения :

$$i_{II}(t) = \text{Im}(I_m e^{j\beta}) = I_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$$

Найдем константу интегрирования A , используя начальные условия

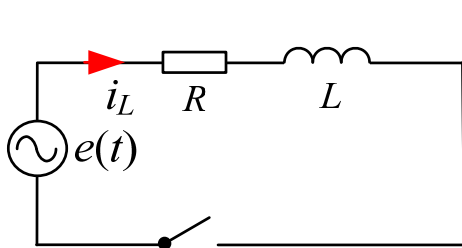
$$i(0) = 0 = A + I_m \sin(\varphi - \alpha) \rightarrow A = -I_m \sin(\varphi - \alpha)$$

Теперь можно окончательно записать:

$$i(t) = Ae^{pt} + I_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi) - I_m e^{-\frac{t}{T}} \sin(\alpha - \varphi)$$

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left(\sin(\omega t + \alpha - \varphi) - e^{-\frac{t}{T}} \sin(\alpha - \varphi) \right)$$

Пример. При каких значениях фазы переменного источника питания будет максимальное значение мгновенного полного тока при включении электрической цепи приведенной на рисунке ниже.



$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi) + I_m \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{t}{T_a}}$$

Полученный результат зависит от начальных условий, т.е. от времени включения t , и от фазы источника питания α . Что бы определить при каких значения t и α будет максимальный ток переходного процесса

нужно решить систему уравнений приведенную ниже:

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial i}{\partial \alpha} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial i}{\partial t} = \omega I_m \cos(\omega t + \alpha - \varphi) - \frac{1}{T_a} I_m \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{t}{T_a}} = 0 & (1) \\ \frac{\partial i}{\partial \alpha} = I_m \cos(\omega t + \alpha - \varphi) - I_m \cos(\alpha - \varphi) e^{-\frac{t}{T_a}} = 0 & (2) \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$(1) \rightarrow I_m \cos(\omega t + \alpha - \phi) = \frac{1}{T_a \omega} I_m \sin(\alpha + \phi) e^{-\frac{t}{T_a}}$$

По подстановки полученных выражений во второе уравнение (2) получим:

$$\frac{1}{T_a \omega} I_m \sin(\alpha + \phi) e^{-\frac{t}{T_a}} = I_m \cos(\alpha + \phi) e^{-\frac{t}{T_a}}$$

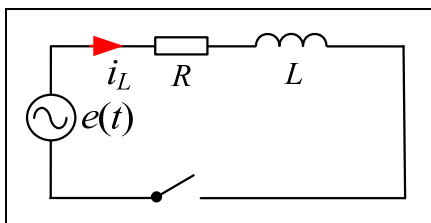
Из последней уравнения получаем :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \phi) = T_a \omega = \frac{\omega L}{R} = \operatorname{tg}(\phi)$$

Отсюда следует что $\alpha = 0$.

Промоделируем переходный процесс с помощью системы MathCAD при различных значениях фазы источника питания и убедимся, что максимальное значение тока получается при значении фазы источника равным нулю.

Условия для выполнения работы



Для схемы приведенной на рисунке, используя программно интегрированную среду **MathCAD** промоделировать процесс изменения амплитуды тока при воздействии синусоидального напряжения, фаза которого меняется в интервале от $\phi = 0$ до $\phi = \pi/2$. При

различных фазах воздействующего источника напряжения построить графические зависимости

- аperiodической составляющей тока,
- установившейся гармонической составляющей тока,
- изменения ток как функцию времени и фазы.

При численном решении дифференциального уравнения использовать метод Рунге-Кутты 4го порядка.

Тб.1

Варианты					
	1	2	3	4	5
$E(t), B$	$10 \sin(\omega t + \phi)$	$12 \sin(\omega t + \phi)$	$9 \sin(\omega t + \phi)$	$14 \sin(\omega t + \phi)$	$18 \sin(\omega t + \phi)$
$R, Ом$	5	7	10	6	5
$L, Гн$	0,02	0,01	0,03	0,02	0,05
$\omega, рад / с$	314	314	314	314	314

Варианты					
	1	2	3	4	5
$e(t), B$	$20 \sin(\omega t + \phi)$	$15 \sin(\omega t + \phi)$	$14 \sin(\omega t + \phi)$	$25 \sin(\omega t + \phi)$	$30 \sin(\omega t + \phi)$
$R, Ом$	8	10	4,5	5,5	7
$L, Гн$	0.03	0,025	0,035	0,03	0,05
$\omega, рад/с$	314	314	314	314	314

Пример выполнения. Задаемся данными в соответствии с вариантом (см. тб.1)

$$R = 5, L = 0,01, \omega = 314, E(t) = 10e^{j(\omega t + \phi)}$$

напряжение источника питания записываем в комплексной форме.

Формируем уравнение состояния

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t) \rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{i}{R} + \frac{e(t)}{R} \rightarrow \frac{dx}{dt} = Ax + B(t)$$

Здесь

$$x = i, A = -\frac{1}{R}, B = \frac{E(t)}{R}$$

Записываем расширенную матрицу для обращения к стандартной программе вычисления дифференциального уравнения

$$D(t, x, \phi) = Ax + \text{Im}(B(t, \phi))$$

Заметим, что в качестве аргумента появилась фаза.

Далее обращаемся к стандартной программе

$$x(\phi) = rkfixed(0.5, 0, T, N, D(\phi))$$

Здесь

0.5 – начальное значение тока

0 – начало процесса

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ – окончание процесса}$$

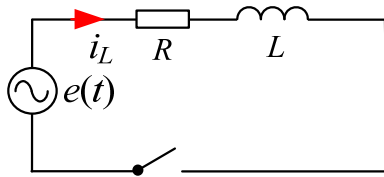
$N = 10^2$ – число точек разбиения временного интервала

$D(\phi)$ – расширенная матрица состояния

Дальнейшие описания приведены в листинге MathCAD

Исходные данные

$$\omega := 314 \quad E(t, \phi) := 10 \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \phi)} \quad R_0 := 5 \quad L_0 := 0.05 \quad Z := R_0 + i \cdot \omega \cdot L_0$$



$$A := \frac{-R_0}{L_0} \quad B(t, \phi) := \frac{E(t, \phi)}{L_0}$$

$$T_a := \frac{1}{|A|} \quad T_a = 0.01 \quad T_0 := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad T := 3 \cdot T_0$$

Записываем расширенную матрицу состояния

$$D(\phi, t, x) := A \cdot x + \text{Im}(B(t, \phi)) \quad N := 10^2 \cdot 1 \quad i := 0..N$$

Решаем уравнение методом Рунге-Кутты с различными фазовыми значениями

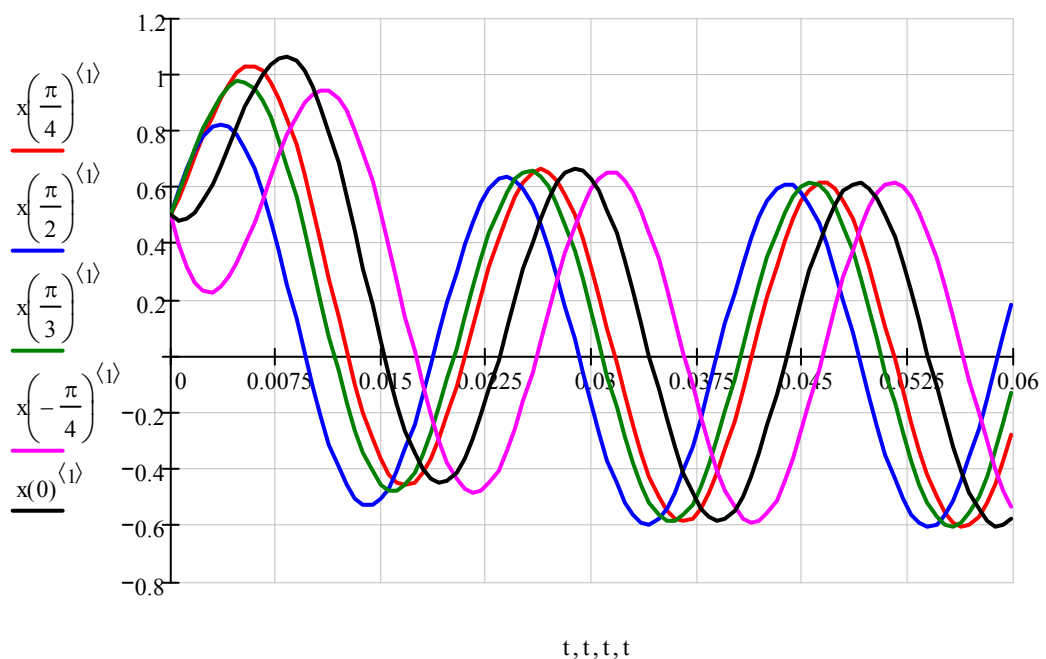
$$x(\phi) := \text{rkfixed}(0.5, 0, T, N, D(\phi))$$

$$X(t, \phi) := \text{Im} \left(\frac{E(t, \phi)}{Z} \right) \quad t := x(0)^{\langle 0 \rangle}$$

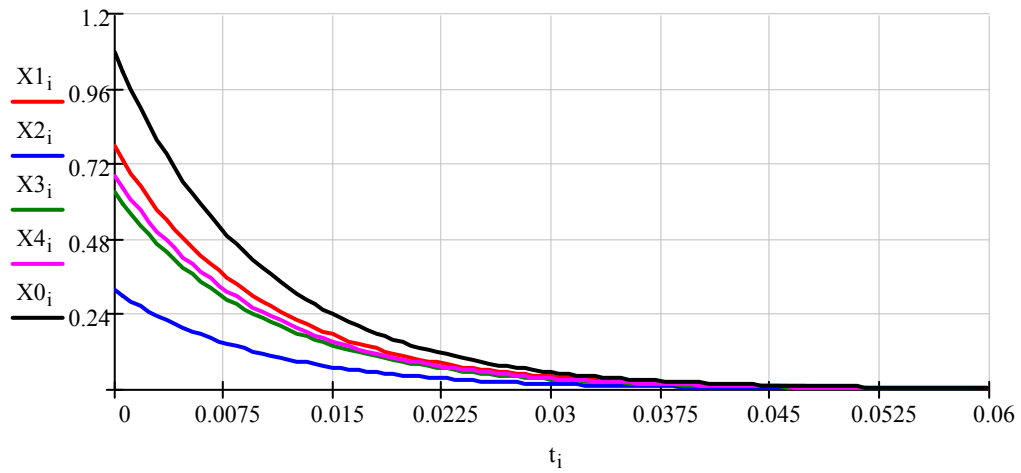
$$X1_i := \left(x \left(\frac{\pi}{4} \right)^{\langle 1 \rangle} \right)_i - X \left(t_i, \frac{\pi}{4} \right) \quad X2_i := \left(x \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\langle 1 \rangle} \right)_i - X \left(t_i, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$X3_i := \left(x \left(\frac{\pi}{3} \right)^{\langle 1 \rangle} \right)_i - X \left(t_i, \frac{\pi}{3} \right) \quad X4_i := \left(x \left(-\frac{\pi}{2} \right)^{\langle 1 \rangle} \right)_i - X \left(t_i, -\frac{\pi}{2} \right) \quad X0_i := \left(x(0)^{\langle 1 \rangle} \right)_i - X(t_i, 0)$$

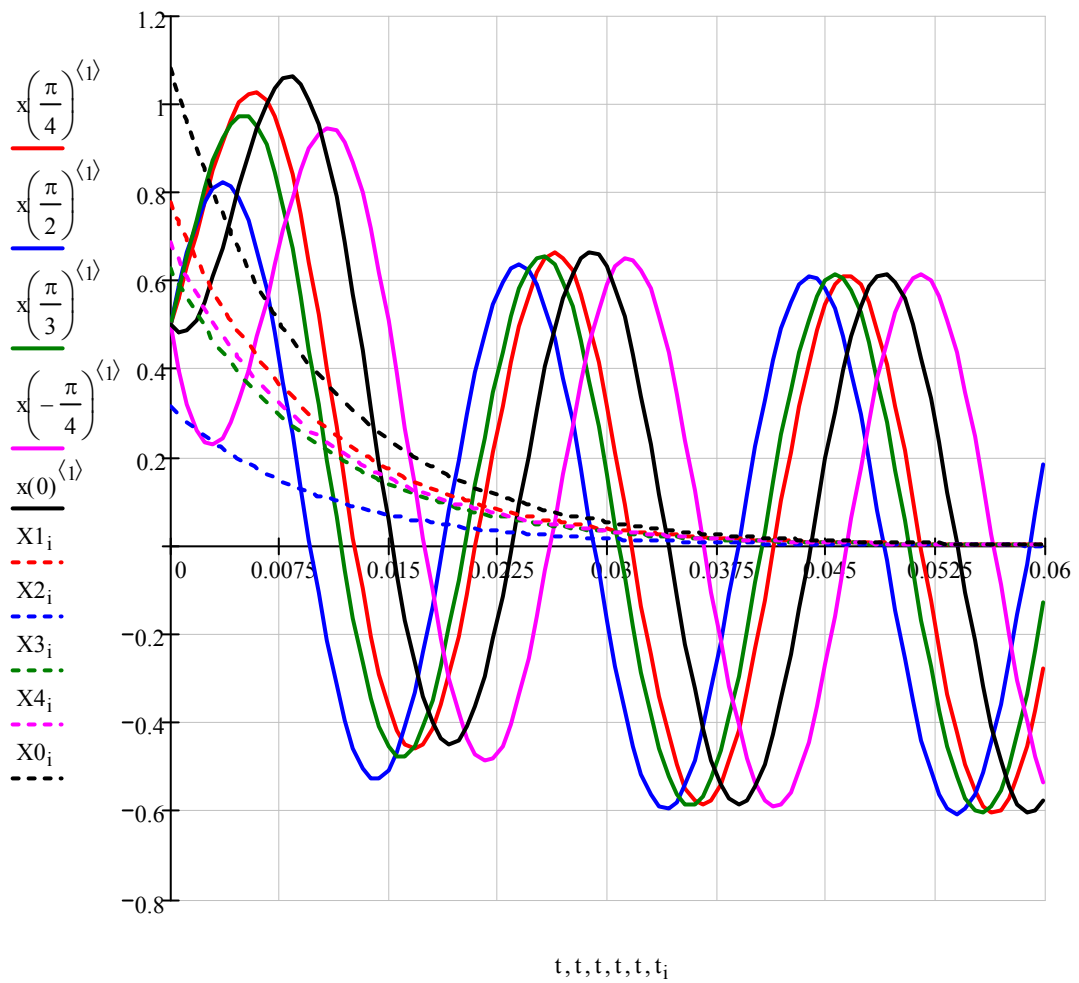
Переходные процессы при различных фазах напряжения. Максимальное значение получается при нулевой фазе - черная кривая.



Апериодические составляющие при различных фазах

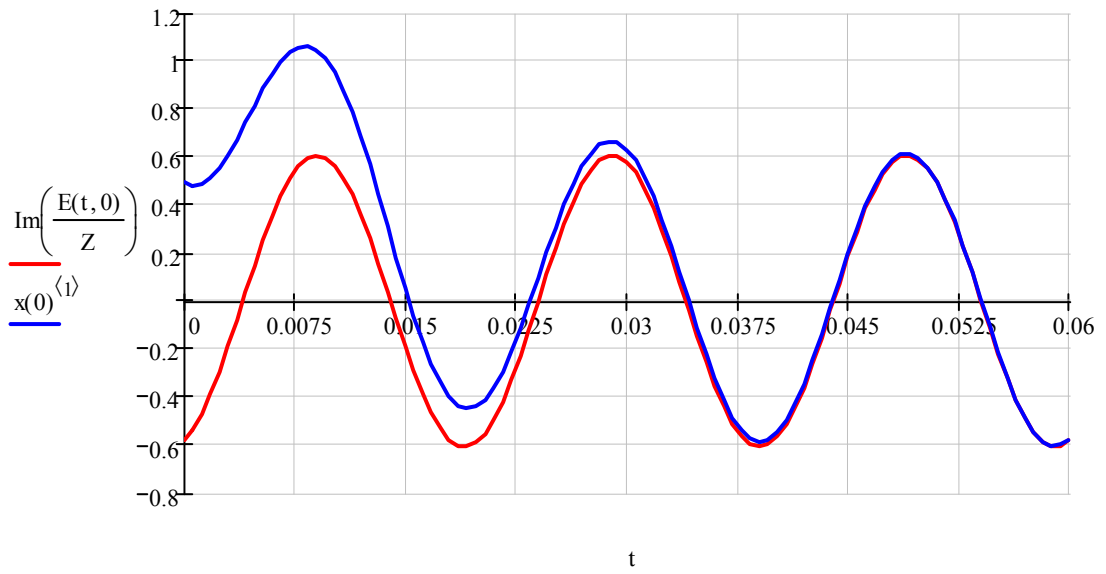


Совмещенные графики апериодических составляющих токов и их полные значения

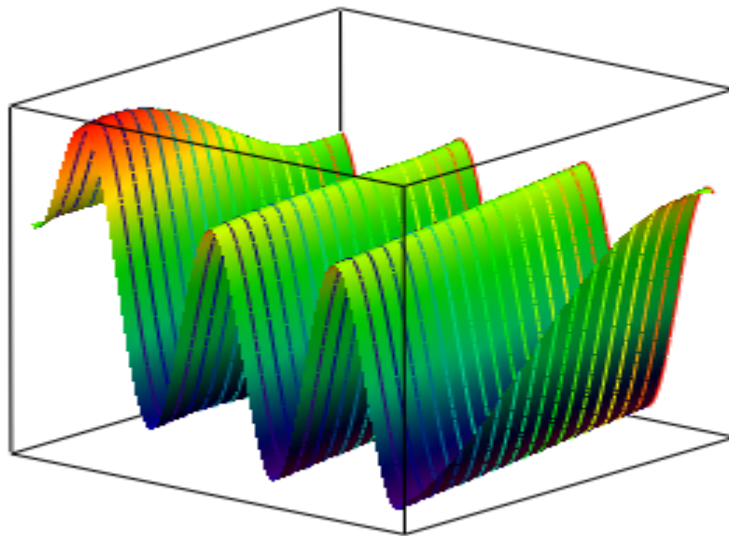


Пример сравнения максимального полного тока и его периодической составляющей, видно что

ударный ток превышает периодическую составляющую более чем в 1,5 раз.



$$M := 20 \quad j := 0..M \quad \phi_j := \frac{\pi}{M} \cdot j \quad X_{i,j} := \text{rkfixed}(0.5, 0, T, N, D(\phi_j)) \quad Y_{i,j} := \left[(X_j)^{\langle 1 \rangle} \right]_i$$



Y

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПАРКА – ГОРЕВА

Цель работы: Научиться

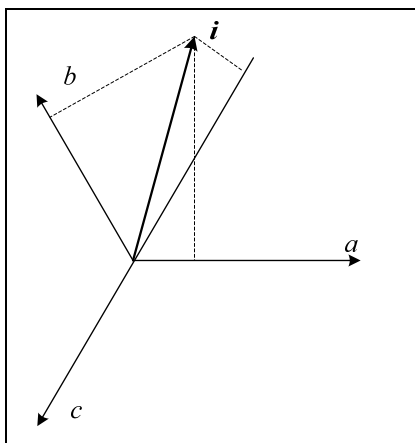
- представлять изображающий вектор в покоящейся системе координат альфа бета;
- представлять изображающий вектор во вращающейся системе координат qd;
- находить связь между покоящейся трехфазной системой координат, покоящейся ортогональной системой координат и вращающейся ортогональной системой координат.
- Использовать программно интегрированную среду MATLAB Simulink.

Теория

До сих пор мы рассматривали связь между движущейся и покоящейся ортогональными системами координат. Но в двигателях используют три фазы. Поэтому найдем связь между ортогональными i_α, i_β, i_0 и i_q, i_d, i_0 координатами и трехфазной системой координат i_a, i_b, i_c .

В случае симметричной цепи мы имеем выражение для нулевой последовательности

$$i_0 = \frac{1}{3}(i_a + i_b + i_c) \quad (3.22)$$



Введем оператор поворота $a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Связь трехфазной системы координат статора – ABC с двухфазной системой координат статора - $\alpha\beta$

Представим изображающий вектор i в трехфазной ABC неподвижной системе координат статора учитывая, что

$$a = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a^2 = e^{-j120^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} i &= \frac{2}{3}(i_A + i_B a + i_C a^2) = \frac{2}{3}\left(i_A + i_B \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i_C \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \\ &= \left(\frac{2}{3}i_A - \frac{i_B + i_C}{3}\right) + j\left(\frac{i_B - i_C}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

Представим изображающий вектор в ортогональной неподвижной $\alpha\beta$ системе координат статора и найдем связь трехфазной и ортогональной систем координат:

$$i = i_\alpha + j \cdot i_\beta = \left(\frac{2}{3}i_A - \frac{i_B + i_C}{3} \right) + j \left(\frac{i_B - i_C}{\sqrt{3}} \right) \quad (2)$$

$$i_\alpha = \frac{2}{3}i_A - \frac{i_B + i_C}{3}, \quad i_\beta = \frac{i_B - i_C}{\sqrt{3}}$$

Если добавить ток нулевой последовательности, то получим систему уравнений связывающей токи покоящихся систем координат $\alpha\beta$ и ABC статора:

$$i_\alpha = \frac{2}{3}i_A - \frac{i_B + i_C}{3}, \quad i_\beta = \frac{i_B - i_C}{\sqrt{3}}, \quad i_0 = \frac{i_A + i_C + i_C}{3} \quad (3)$$

Если к первому выражению прибавить и отнять величину $\frac{i_A}{3}$ и учесть последнее выражение то можно получить

$$i_\alpha = i_A - i_0 \quad (4)$$

В матричном виде эти соотношения имеют вид:

$$\begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix} \quad (5)$$

Что бы получить обратную матрицу к соотношению (5) проделаем следующие операции:

Из (4) находим

$$i_A = i_\alpha + i_0$$

Далее, запишем изображающий вектор в виде:

$$\operatorname{Re}(ia^2) = i_B - i_0 = \operatorname{Re}[(i_\alpha + ji_\beta)a^2] = -\frac{1}{2}i_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}i_\beta$$

Отсюда получаем:

$$i_B = -\frac{1}{2}i_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}i_\beta + i_0$$

Поступаем аналогично и получаем:

$$\operatorname{Re}(ia) = i_C - i_0 = \operatorname{Re}\left[(i_\alpha + ji_\beta)a\right] = -\frac{1}{2}i_\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}i_\beta$$

$$i_C = -\frac{1}{2}i_\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}i_\beta + i_0$$

Таким образом, получаем связь:

$$\begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix}$$

2. Связь двухфазной системы координат статора – $\alpha\beta$ с двухфазной системой координат ротора – qd

Ортогональная подвижная система координат ротора qd связана с ортогональной покоящейся системой координат статора $\alpha\beta$ соотношением:

$$i_\alpha + ji_\beta = (i_q + ji_d)e^{j\omega t} \rightarrow i_q + ji_d = (i_\alpha + ji_\beta)e^{-j\omega t} \quad (6)$$

Последнее соотношение позволяет связать подвижную систему координат qd с трехфазной системой координат abc

3. Связь двухфазной системы координат ротора – qd с трехфазной системой координат статора – ABC

$$i_q + ji_d = \frac{2}{3}(i_A + i_B a + i_C a^2)e^{-j\omega t} = \frac{2}{3}\left(i_A e^{-j\omega t} + i_B e^{-j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} + i_C e^{-j\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)}\right)$$

$$i_q = \frac{2}{3}\left(i_A \cos(\omega t) + i_B \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + i_C \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \quad (7)$$

$$i_d = -\frac{2}{3}\left(i_A \sin(\omega t) + i_B \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + i_C \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

Таким образом, можно записать матричное соотношение которое называется преобразованием ПАРКА:

$$\begin{pmatrix} i_q \\ i_d \\ i_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\omega t) & -\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix} \quad (8)$$

Чтобы получить обратное соотношение сделаем следующие операции

$$\begin{aligned} i_a - i_0 &= \operatorname{Re} \left[(i_q + j i_d) e^{j\omega t} \right] = i_q \cos(\omega t) - i_d \sin(\omega t) \\ i_B - i_0 &= \operatorname{Re} \left[(i_q + j i_d) e^{j\omega t} a^2 \right] = \operatorname{Re} \left[(i_q + j i_d) e^{j(\omega t - 120^\circ)} \right] \\ &= i_q \cos(\omega t - 120^\circ) - i_d \sin(\omega t - 120^\circ) \\ i_C - i_0 &= \operatorname{Re} \left[(i_q + j i_d) e^{j\omega t} a \right] = \operatorname{Re} \left[(i_q + j i_d) e^{j(\omega t + 120^\circ)} \right] \\ &= i_q \cos(\omega t + 120^\circ) - i_d \sin(\omega t + 120^\circ) \end{aligned}$$

Последние соотношения можно переписать:

$$\begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 1 \\ \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_q \\ i_d \\ i_0 \end{pmatrix}$$

Это преобразование называется преобразованием ПАРКА

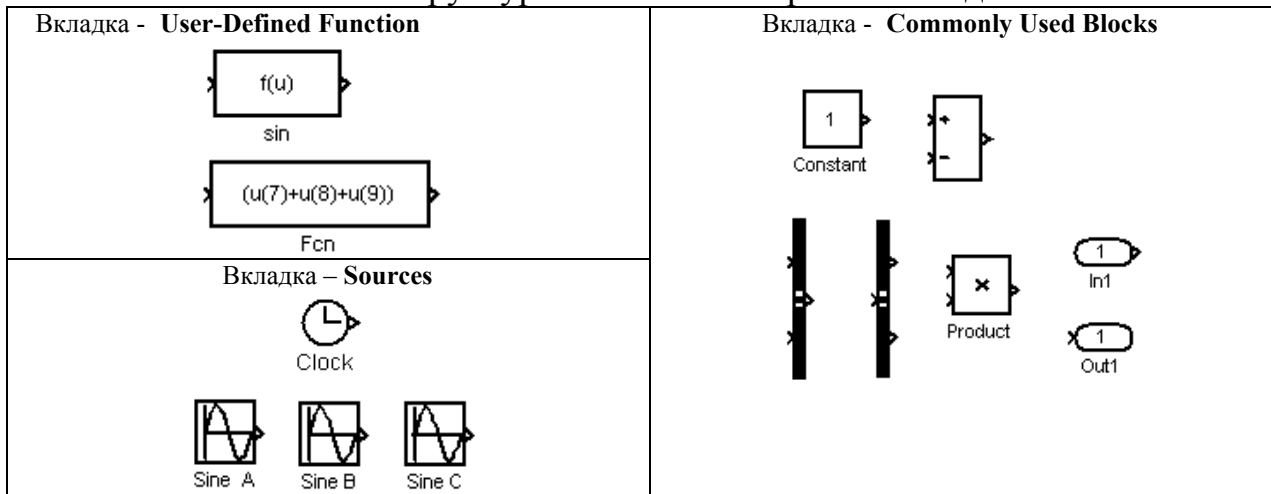
Приведем формирование блоков в среде **MATLAB Simulink** (Здесь приводится один из возможных вариантов). Проверку блоков будем проверять в среде **MathCAD**

Формируем вспомогательные блоки

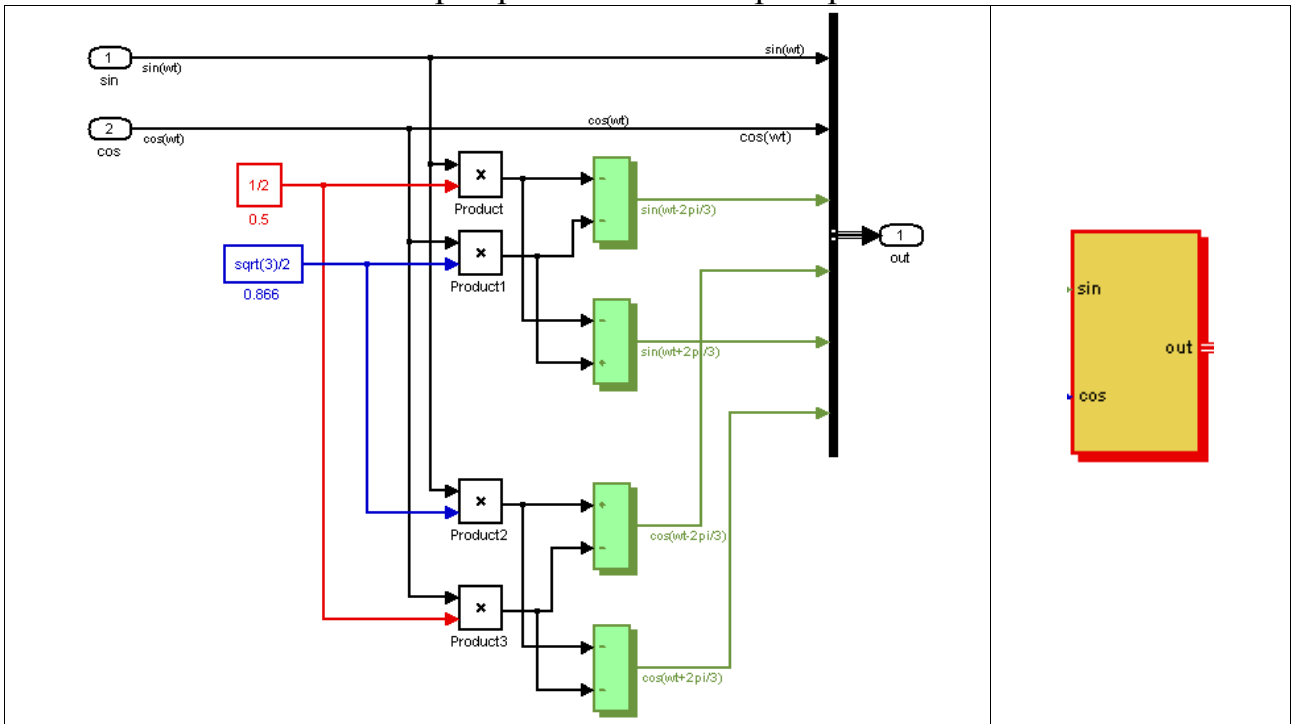
В качестве вспомогательных тригонометрических соотношений будем использовать следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sin\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} \sin(\phi) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\phi) & \cos\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} \cos(\phi) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\phi) \\ \sin\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} \sin(\phi) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\phi) & \cos\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} \cos(\phi) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\phi) \end{aligned}$$

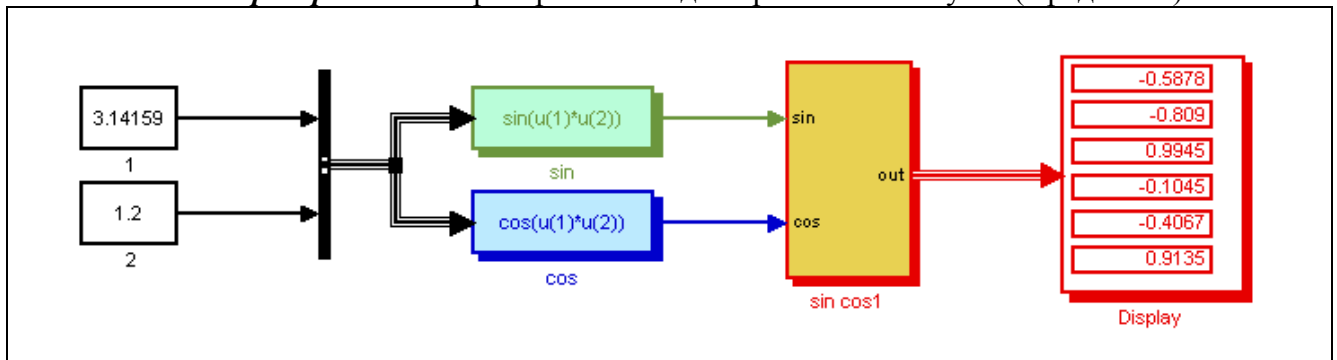
Блоки структурной схемы которые нам понадобятся



Формирование блока преобразования

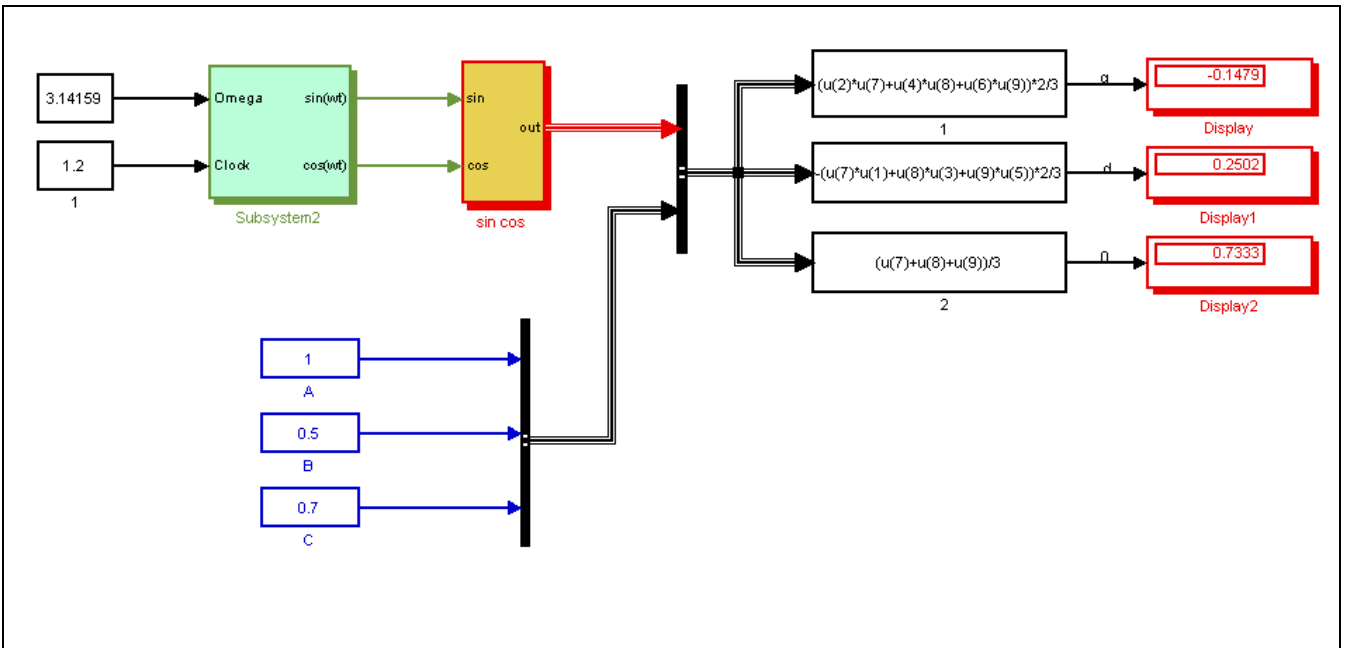


Проверка блока преобразование для произвольного угла (в радианах)



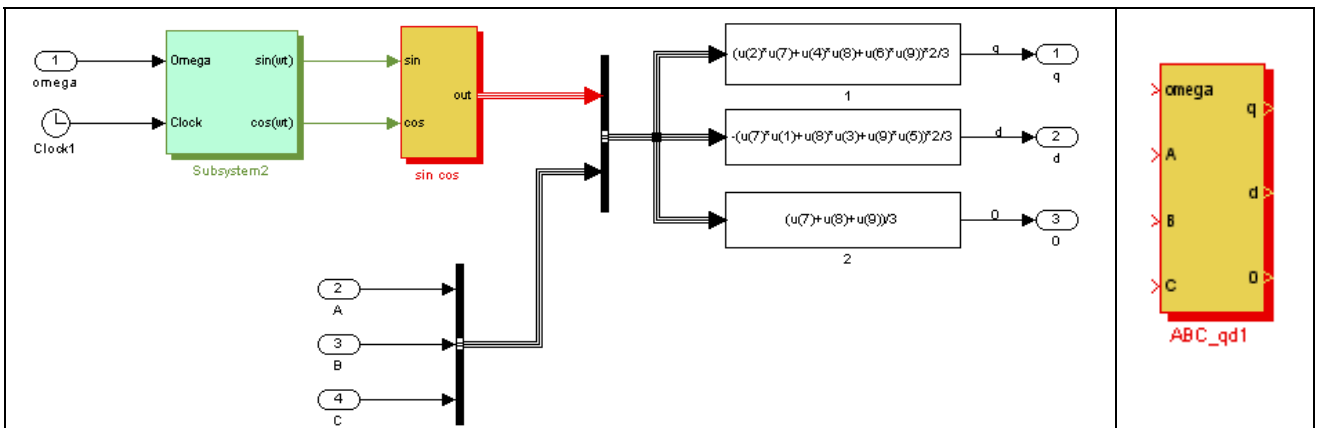
Проверка (MathCAD)

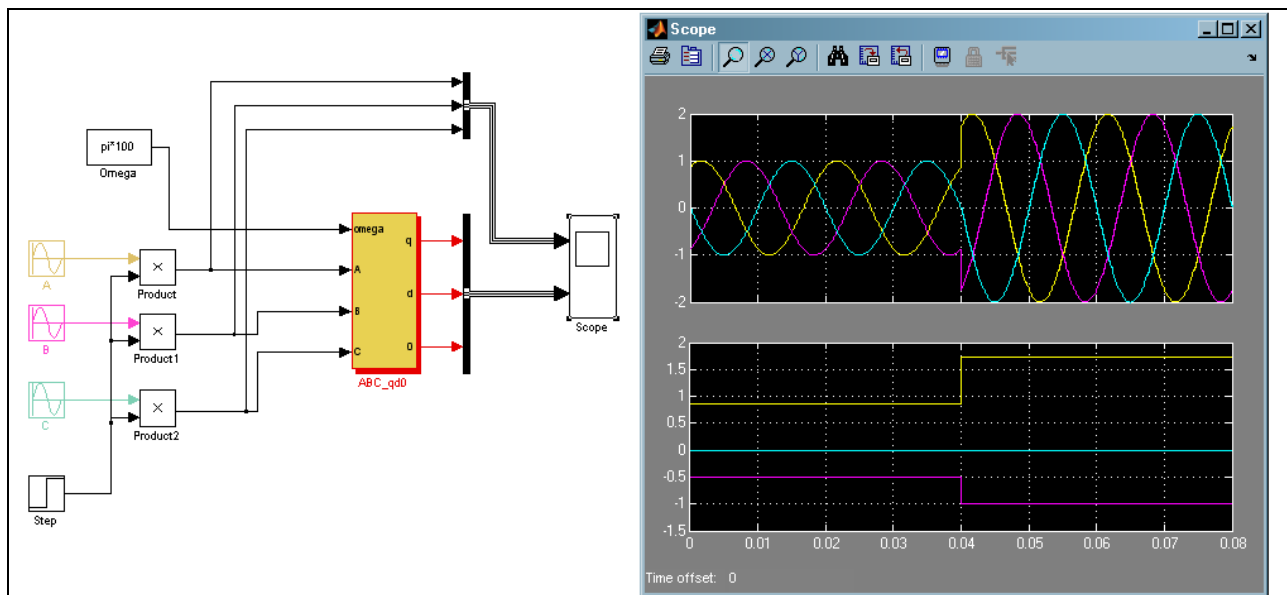
$$\phi := \pi \cdot 1.2 \quad \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \cos\left(\phi - \frac{\pi \cdot 2}{3}\right) & \cos\left(\phi + \frac{\pi \cdot 2}{3}\right) \\ \sin(\phi) & \sin\left(\phi - \frac{\pi \cdot 2}{3}\right) & \sin\left(\phi + \frac{\pi \cdot 2}{3}\right) \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.809 & -0.105 & 0.914 \\ -0.588 & 0.995 & -0.407 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$$



Проверка (MathCAD)

$$\phi := \pi \cdot 1.2 \quad \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \cos\left(\phi - \frac{\pi \cdot 2}{3}\right) & \cos\left(\phi + \frac{\pi \cdot 2}{3}\right) \\ -\sin(\phi) & -\sin\left(\phi - \frac{\pi \cdot 2}{3}\right) & -\sin\left(\phi + \frac{\pi \cdot 2}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1479 \\ 0.2502 \\ 0.7333 \end{pmatrix}$$





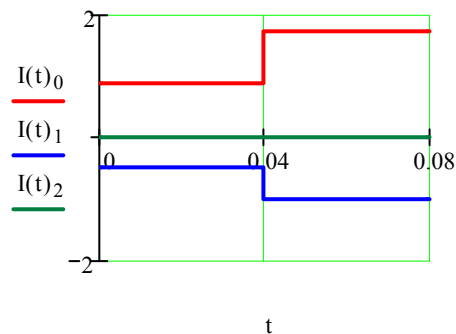
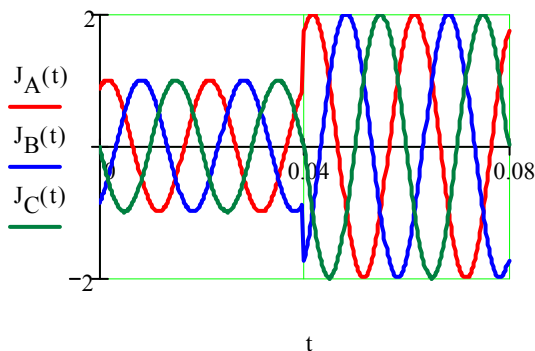
$$\omega := 100\pi$$

Проверка(MathCAD)

$$J_A(t) := \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \quad J_B(t) := \sin\left(\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \quad J_C(t) := \sin\left(\omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

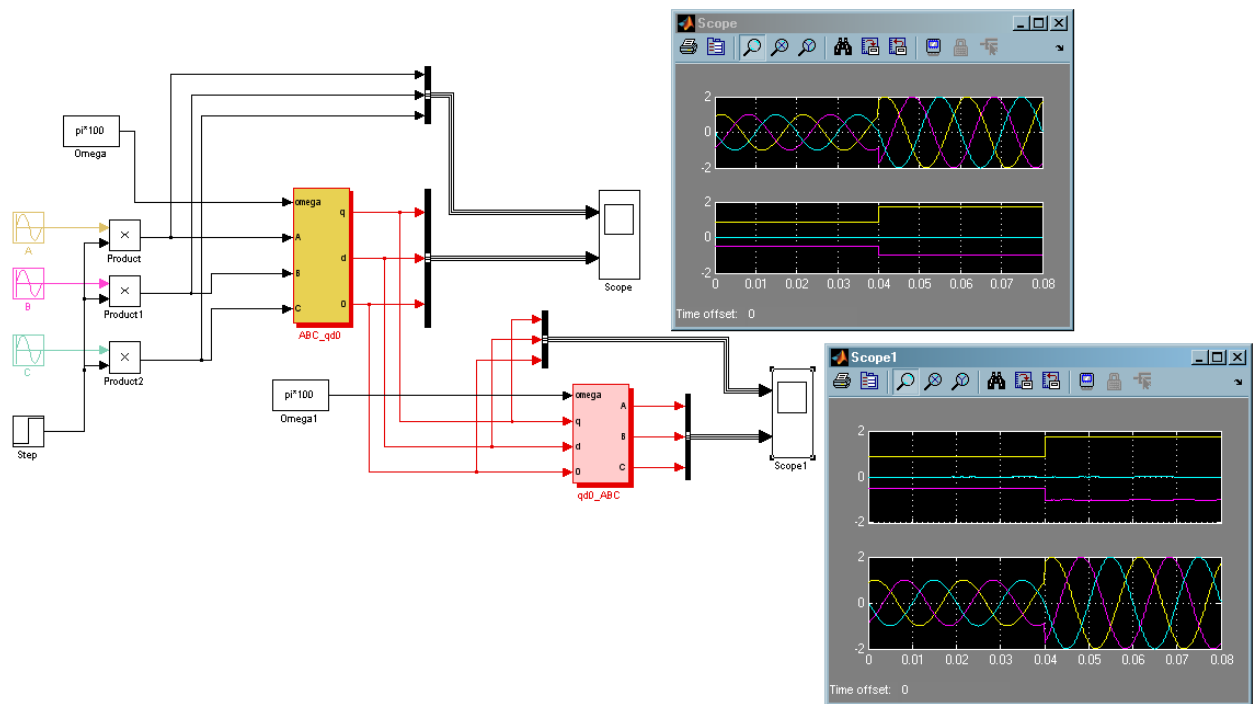
$$J_A(t) := \text{if}(t \geq 0.04, 2, 1) \cdot J_A(t) \quad J_B(t) := \text{if}(t \geq 0.04, 2, 1) \cdot J_B(t) \quad J_C(t) := \text{if}(t \geq 0.04, 2, 1) \cdot J_C(t)$$

$$I(t) := \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t) & \cos\left(\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & \cos\left(\omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \\ -\sin(\omega \cdot t) & -\sin\left(\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & -\sin\left(\omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_A(t) \\ J_B(t) \\ J_C(t) \end{pmatrix} \quad T := 0.02 \quad t := 0, .01 \cdot T .. 4 \cdot T$$



Обратное преобразование сделать самостоятельно.

Ниже приведен рисунок прямого и обратного преобразования Парка-Горва .



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7 МОДЕЛЬ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Цель работы: Научиться:

- строить статические характеристики асинхронного двигателя
- разбираться в статической устойчивости асинхронного двигателя
- использование сплайн функций, графически строить пространственные поверхности и функции заданные в параметрической форме.

1. Прочитать текст Теория

Значения даны в относительных единицах.

2. Построить графические зависимости $P(s)$, $s(U)$, $Q_m(U)$, $Q_s(U)$, $Q(U)=Q_m(U)+Q_s(U)$ выбрав механическую мощность по варианту.

3. Отметить на графиках критические точки

Диапазон изменения напряжения U принять равным от 0.6 до 1

$$x := 1 \quad R_m := 1 \quad x_m := 1 \quad P1(U, s) := \frac{U^2 \cdot R \cdot s}{R^2 + (x \cdot s)^2}$$

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{\text{мех}}$	0,304	0,32	0,342	0,36	0.304	0,38	0,28	0,342	0,36	0.304

Теория

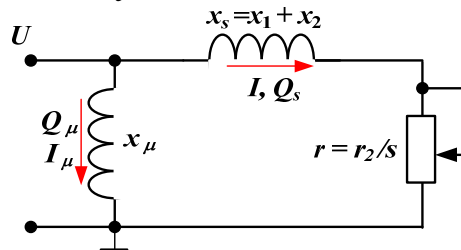
Асинхронный двигатель потребляет мощность, равную мощности машины, т.е. машины, приводимой во вращение двигателем. Машины имеют механические характеристики 3-х типов:

- механический момент $M_{мех}$ постоянный, т.е. не зависит от угловой скорости ω
- момент пропорционален скорости
- момент пропорциональный квадрату скорости

В дальнейшем будем считать что механический момент $M_{мех}$ не зависит от частоты ω , а следовательно и от скольжения s . Механическая мощность $P_{мех}$ при этом пропорциональна частоте ω т.е.

$$P_{мех} = \omega$$

Приведем Г-образную схему замещения двигателя, рис. 1.



Ток в нагрузке определяется выражением:

$$\underline{I} = \frac{U}{x_s + j \frac{r_2}{s}} \rightarrow I = \frac{U}{\sqrt{x_s^2 + \left(\frac{r_2}{s}\right)^2}},$$

а активная мощность:

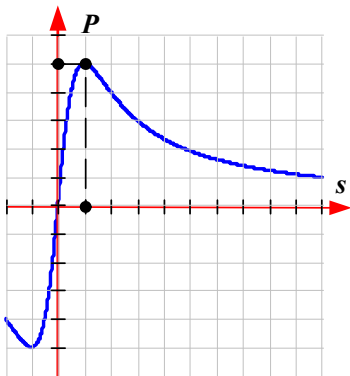
$$P = I^2 \frac{r_2}{s} \rightarrow P = \frac{U^2}{x_s^2 + \left(\frac{r_2}{s}\right)^2} \frac{r_2}{s} = \frac{U^2 r_2 s}{(s x_s)^2 + r_2^2}$$

Максимум мощности от скольжения определяется выражением:

$$\frac{dP}{ds} = \frac{U^2 r_2 \left((s x_s)^2 + r_2^2 \right) - U^2 r_2 s^2 x_s^2 2}{\left((s x_s)^2 + r_2^2 \right)^2} = 0$$

Приравняв знаменатель нулю, получаем точку в которой мощность имеет наибольшее значение:

$$(s x_s)^2 + r_2^2 - s^2 x_s^2 2 = 0 \rightarrow s = \frac{r_2}{x_s}$$



Будем считать, что

$$M_{\text{мех}} = P / \omega_0 = 3I^2 \frac{r_2}{s} \frac{1}{\omega_0}$$

В относительных единицах мощность равна механическому моменту и из последнего выражения следует, что если считать механический момент постоянным то скольжение пропорционально квадрату тока:

$$\omega_0 = 1, \rightarrow M_{\text{мех}} = \text{const} \rightarrow 3I^2 \frac{r_2}{s} \rightarrow s \equiv I^2$$

Построим зависимость мощности от скольжения при различных напряжениях. Будем строить эти зависимости в относительных единицах. Для построения зависимости будем использовать среду **MathCAD**

```

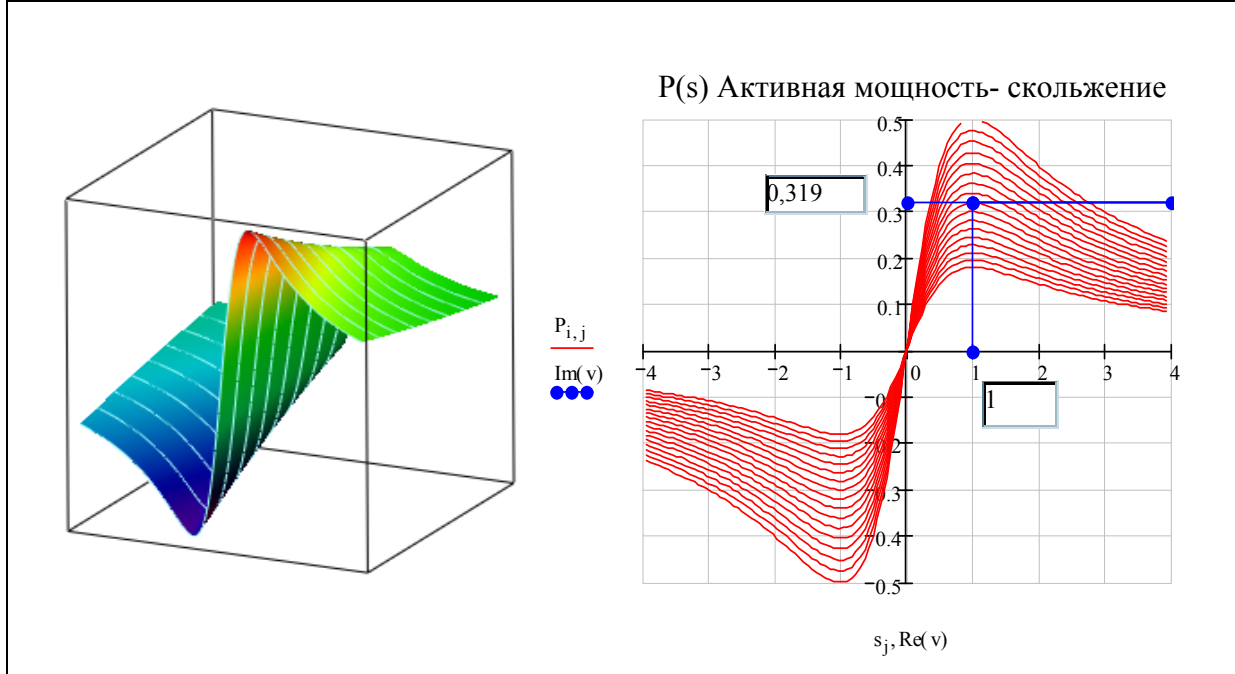
N:=16  M:=151  i:=0..N  j:=0..M
s_j := 10/M * j - 5  U_i := 0.4/N * i + 0.6  x:=1  R:=1

PI(U,s) := U^2 * R * s / (R^2 + (x*s)^2)

Строим как функцию двух переменных и проецируем ее на плоскость P, s
P_i,j := PI(U_i, s_j)

При заданном значении механической мощности P = 0,319 каждому значению напряжения
соответствуют две точки скольжения

```



Чтобы найти точки пересечения заданной механической мощности с зависимостью $P(s)$ нужно решить квадратное уравнение

$$P = \frac{U^2 r_2 s}{(s x_s)^2 + r_2^2} = P_{Mex} \rightarrow -U^2 r_2 s + P_{Mex} \left[(s x_s)^2 + r_2^2 \right] = 0$$

После преобразований получаем:

$$P_{Mex} s^2 x_s^2 - U^2 r_2 s + P_{Mex} r_2^2 = 0$$

$$s^2 - \frac{U^2}{P_{Mex}} \frac{r_2}{x_s^2} s + \frac{r_2^2}{x_s^2} = 0$$

Запишем решение квадратного уравнения :

$$s = \frac{1}{2} \frac{U^2}{P_{Mex}} \frac{r_2}{x_s^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{U^2}{P_{Mex}} \frac{r_2}{x_s^2} \right)^2 - \left(\frac{r_2}{x_s} \right)^2}$$

Таким образом, при заданном значении механической мощности нагрузки каждому значению напряжения соответствуют два значения s , т.е. два режима при которых активная мощность двигателя равна механической мощности рабочей машины, т.е. нагрузке на валу. Приведем полученную зависимость скольжения, от напряжения используя среду MathCAD

Для определения корней уравнения выбираются только те кривые, которые находятся выше критической точки (она отмечена на графике)

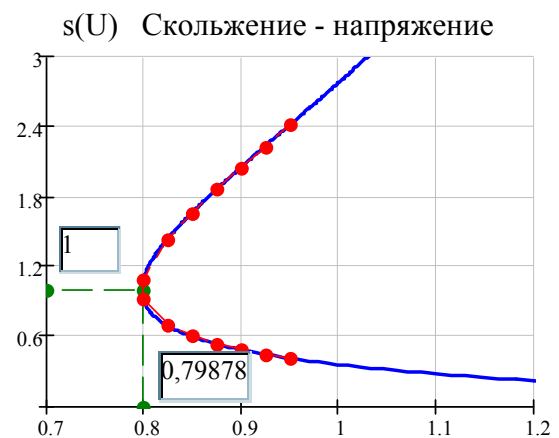
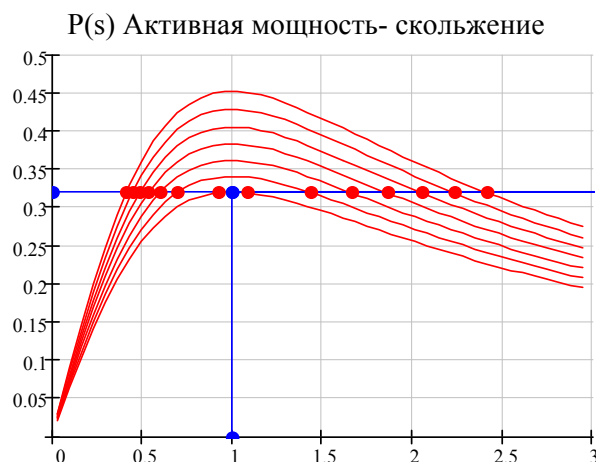
$$S1(u) := \frac{1}{2} \frac{u^2}{Po} \frac{R}{x^2} - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{u^2}{Po} \frac{R}{x^2} \right)^2 - \left(\frac{R}{x} \right)^2} \quad S2(u) := \frac{1}{2} \frac{u^2}{Po} \frac{R}{x^2} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{u^2}{Po} \frac{R}{x^2} \right)^2 - \left(\frac{R}{x} \right)^2}$$

$$s2 := S2(u) \quad s1 := S1(u) \quad u^T = (0.8 \ 0.825 \ 0.85 \ 0.875 \ 0.9 \ 0.925 \ 0.95)$$

$$so := 1 \quad u1 := reverse(u) \quad s_1 := reverse(s1) \quad S_{\text{all}} := stack(s_1, s2) \quad U := stack(u1, u) \quad c := cspline(S, U)$$

$$u_t(t) := interp(c, S, U, t) \quad s := 0, 0.01..4 \quad V := (0.8 \ 0.8 + i \cdot 1 \ i + 0.7)^T$$

$$P_{-k,j} := P1(u_k, s_j)$$



В тех точках графика мощности, которые находятся слева от вертикальной линии производные положительные $dP/dt > 0$, это точки устойчивой работы двигателя.

В точках, которые находятся справа от вертикальной линии, производные отрицательны $dP/dt < 0$. Это точки неустойчивой работы двигателя.

Критической точкой называется точка, в которой производная равна нулю $dP/dt = 0$. Эта точка предельной работы двигателя.

При напряжении меньше критического работа двигателя невозможна, так как его максимальная мощность меньше мощности нагрузки $P < P_{\text{мех}}$.

При снижении напряжения ниже критического режима режим двигателя не существует. Физически при снижении $U < U_{\text{критич}}$ вращающийся двигатель будет тормозиться, ток и реактивная мощность будут резко расти, а затем двигатель остановится – опрокидывается.

Используя параметрические зависимости можно построить графики активной и реактивной мощностей от напряжения, $U(s)$, $P(s)$, $Q(s)$.

Реактивная мощность двигателя Q имеет две составляющие:

$$Q = Q_{\mu} + Q_s$$

Здесь намагничивающая мощность, связанная с намагничивающим током:

$$Q_{\mu} = U^2 / x_{\mu},$$

мощность рассеивания или реактивная мощность, поглощаемая в x_s

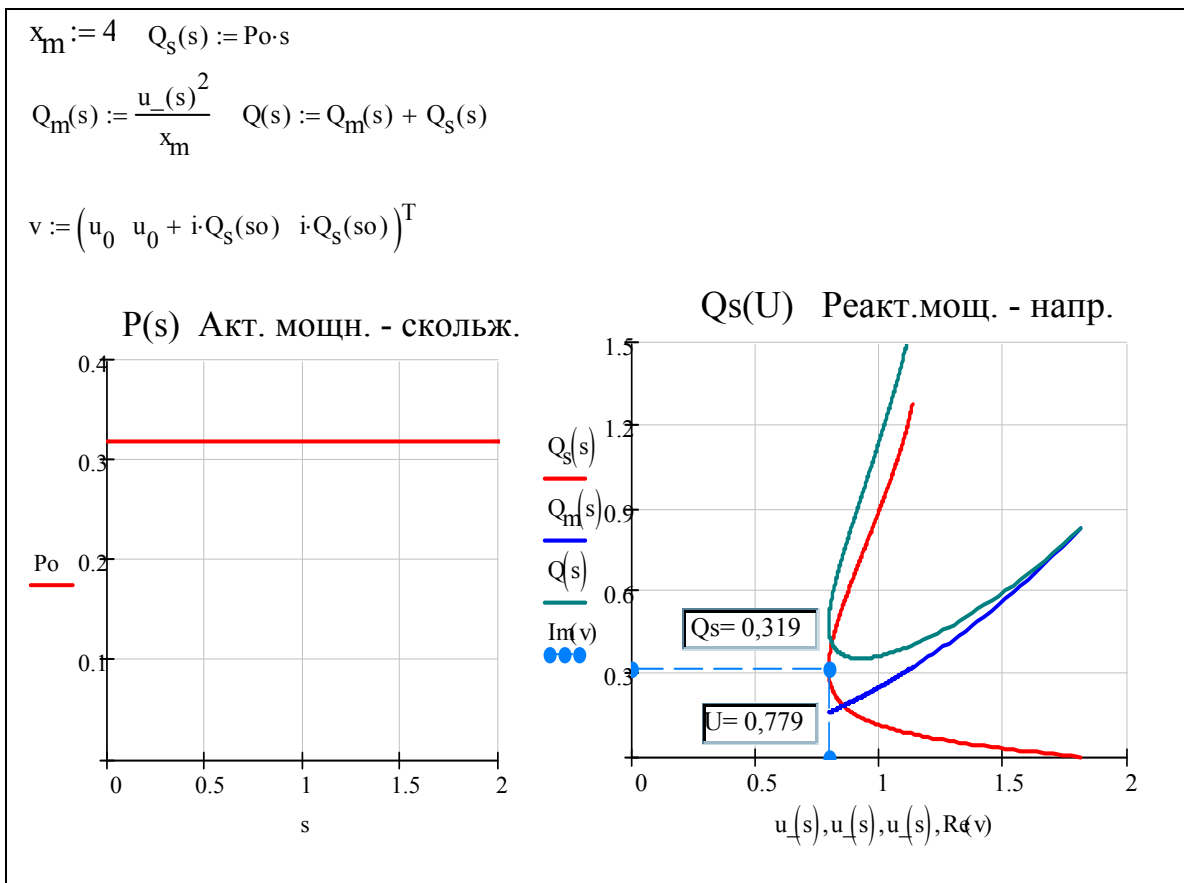
$$Q_s = 3I^2 x_s$$

Учитывая, что квадрат тока пропорционален скольжению, мощность рассеивания можно записать в виде

$$Q_s = 3I^2 x_s \rightarrow M_{\text{мех}} = 3I^2 \frac{x_s}{s} = P_{\text{мех}} = \text{const} \rightarrow s \cdot P_{\text{мех}} = 3I^2 x_s$$

$$Q_s = s \cdot P_{\text{мех}}$$

Построим графические зависимости полученных соотношений, используя среду MathCAD



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8

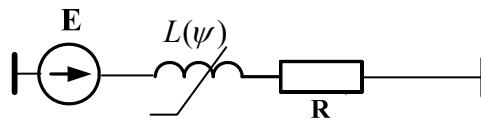
МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В *EWB* И *MATLAB (SIMULINK)*

Цель работы: Научиться:

- строить статические характеристики асинхронного двигателя
- разбираться в статической устойчивости асинхронного двигателя
- использование сплайн функций, графически строить пространственные поверхности и функции заданные в параметрической форме.

<i>Варианты</i>										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	10	15	20	15	8	7	11	12	6	14
E	15	10	13	12	14	18	20	17	16	11
<i>L(ψ)</i>	Функциональную зависимость выбрать самостоятельно									

1. Задана схема с нелинейным элементом.



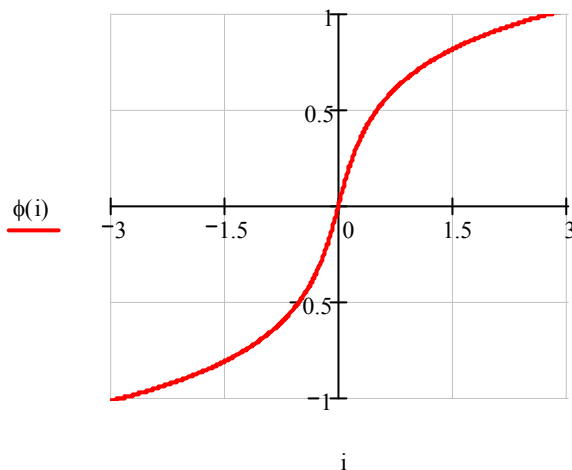
Рассчитать и построить графические зависимости тока и потокосцепления нелинейного элемента в соответствии с табличными данными в средах **EWB** и **MATLAB(Simulink)**. Решение проверить в **MathCAD**

2. Рассчитать ток намагничивания и потокосцепление трансформатора в режиме холостого хода с учетом насыщения, если заданы зависимости $\Phi(i) = a \cdot \operatorname{arcsinh}(i \cdot b)$, $a = 0,3$ $b = 5$

$$\frac{d\Phi}{dt} + iR = e(t), \quad e(t) = E_m \sin(\omega t + \phi), \quad f = 50 \text{Гц},$$

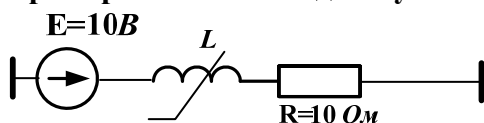
R и E выбирать в соответствии с вариантом. $E_m = 15E$, фаза ϕ - любое значение от 0 до 45° .

Для решения задачи использовать **MATLAB(Simulink)**. Решение проверить в **MathCAD**



Характеристика намагничивания трансформатора

Пример выполнения для пункта 1.:



Пусть задан закон изменения индуктивности нелинейной индуктивности $L(\psi) = \frac{1}{1 + \sin(20\psi)}$. Составим модель нелинейного элемента

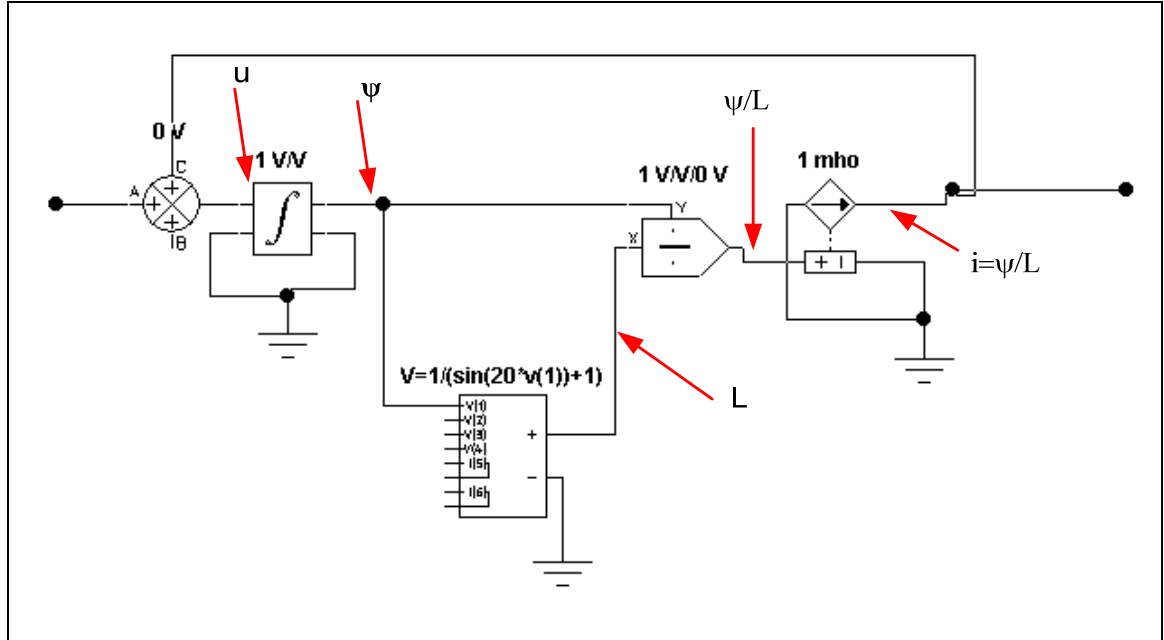
$L(\psi)$. Вспомним, что напряжение на индуктивности определяется выражением:

$$u(t) = \frac{d\psi}{dt} \rightarrow \psi = \int_0^t u dt, \quad \psi = iL \rightarrow i = \frac{\psi}{L}$$

Теперь можно составить источник тока управляемый напряжением. Последовательность действий такова:

1. Определяем напряжение на индуктивности $u(t) = \frac{d\psi}{dt}$

2. Определяем потокосцепление $\psi = \int_0^t u dt$
3. Определяем ток как отношение: $i = \frac{\psi}{L}$
4. Составляем источник тока управляемый напряжением:



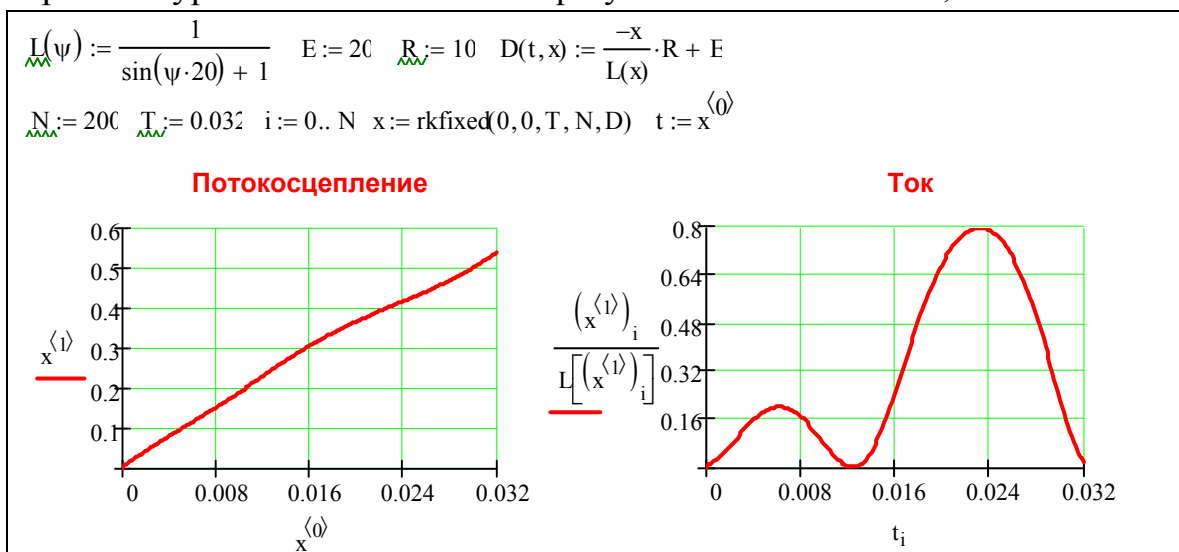
Решим переходный процесс с полученной нелинейной индуктивностью
 Запишем дифференциальное уравнение (второй закон Кирхгофа)

$$\frac{d\psi}{dt} + iR = E \rightarrow \frac{d\psi}{dt} + \frac{\psi}{L(\psi)} R = E$$

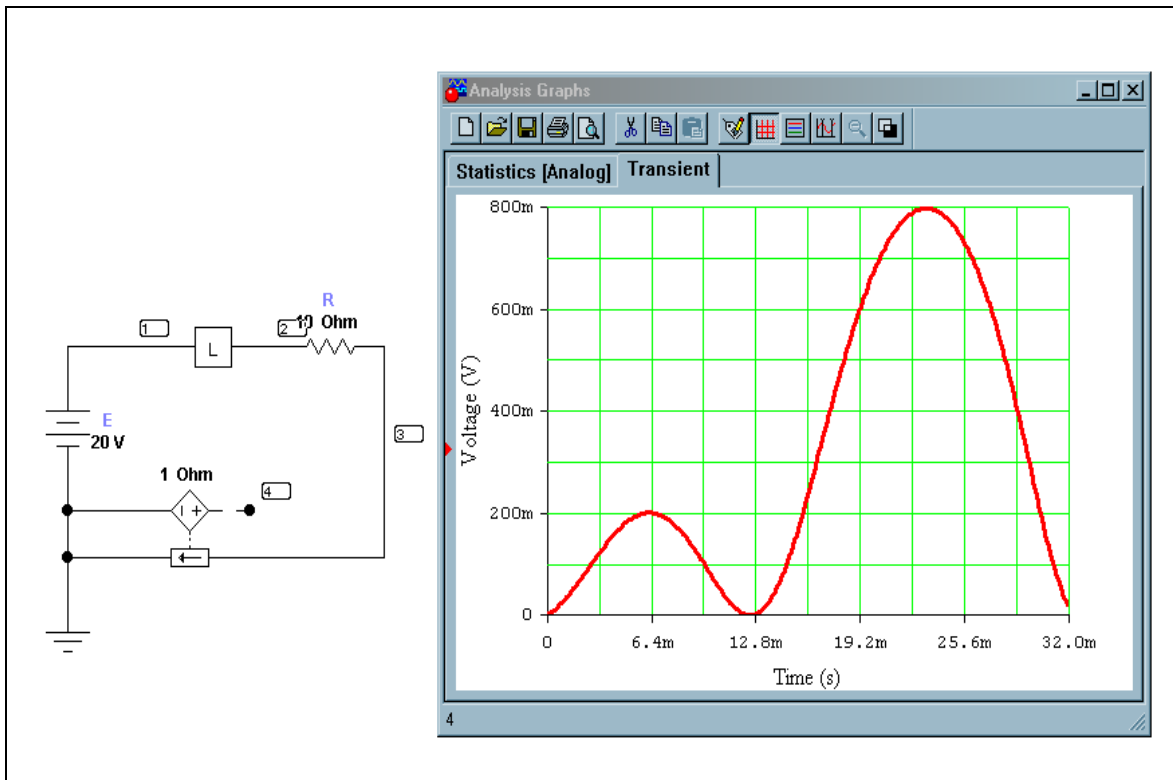
Приводим уравнение к нормальной форме:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\psi}{L(\psi)} R + E$$

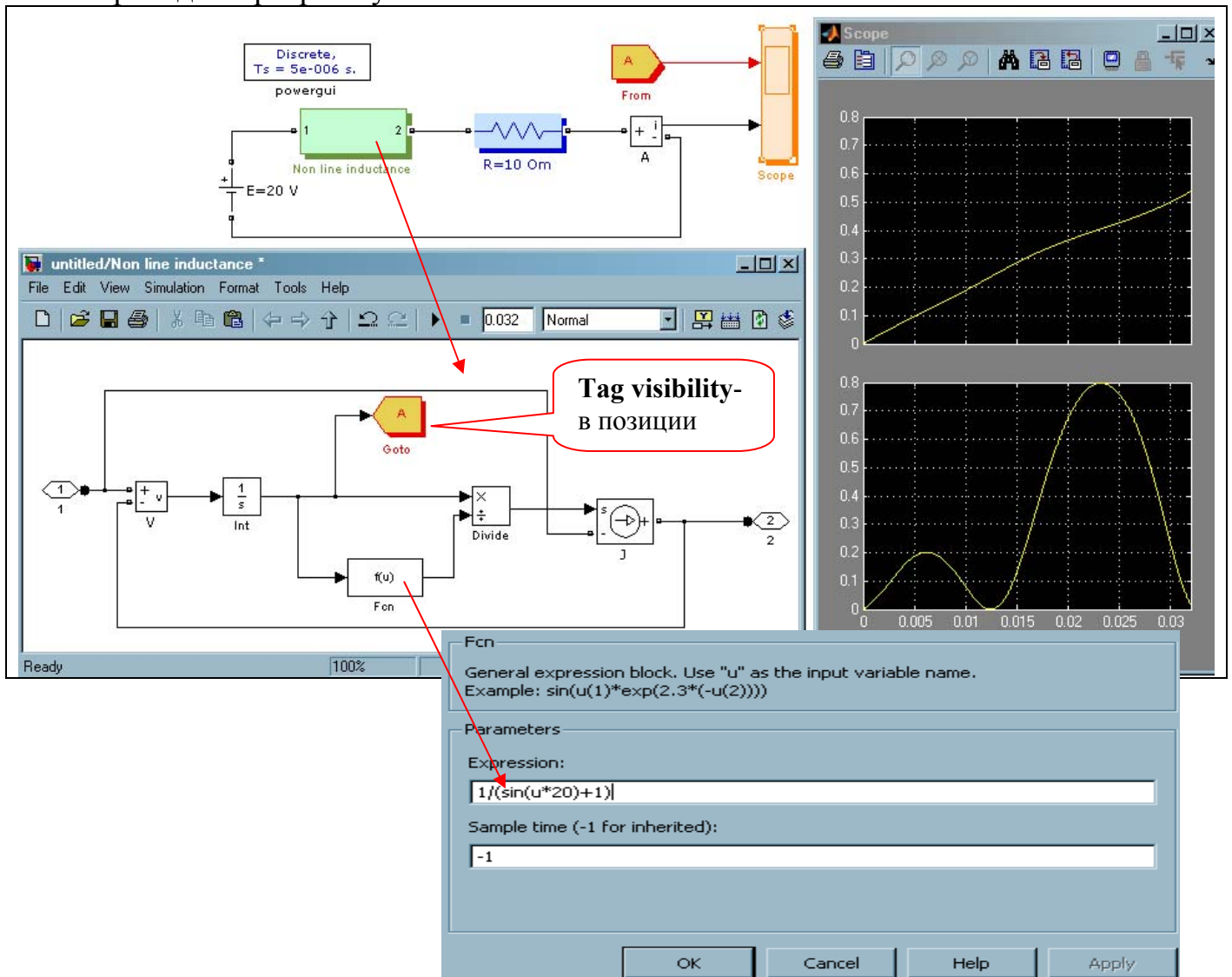
И решаем уравнение в **Mathcad**. При условии что $R = 10 \text{ Ом}$, $E = 20 \text{ В}$



Приведем программу в **EWB**



Приведем программу в **MATLAB**



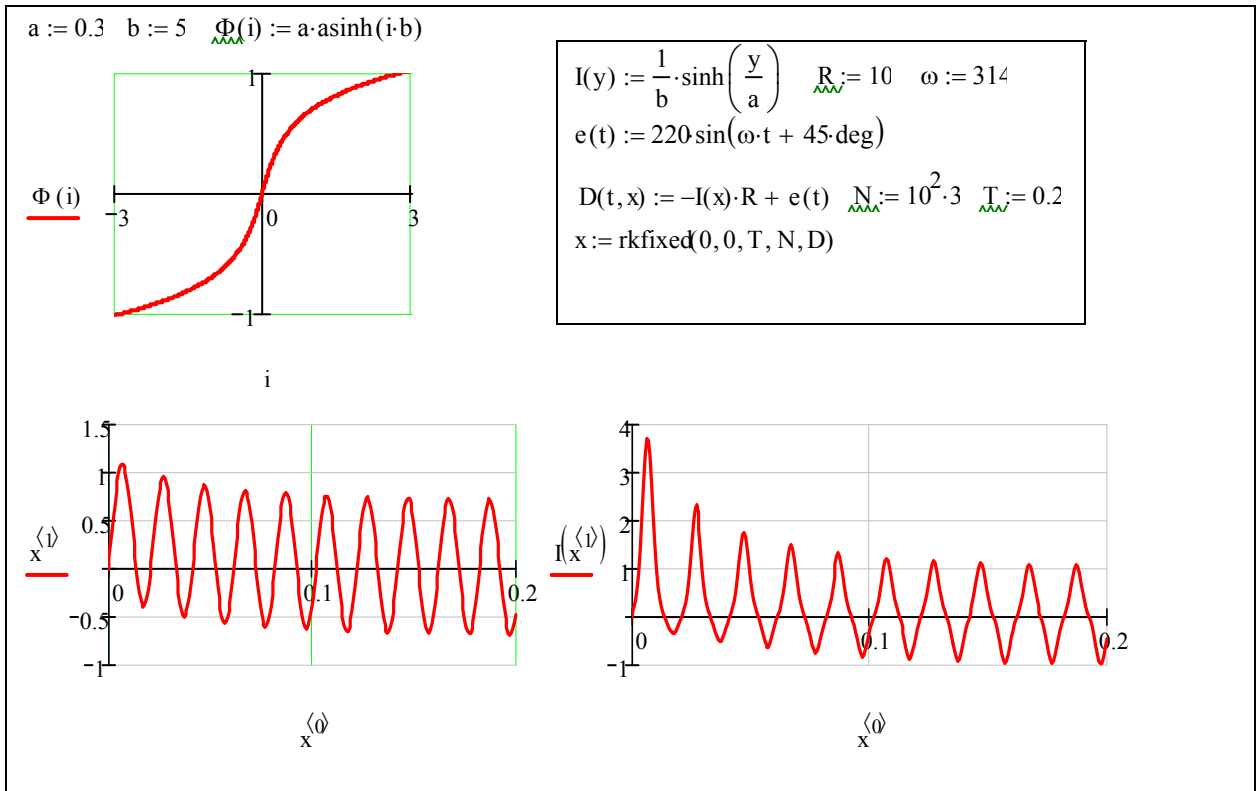
Пример выполнения пункта 2.:

$\Phi(i) = a \cdot \operatorname{arcsinh}(i \cdot b)$, $a = 0,3$ $b = 5$

$\frac{d\Phi}{dt} + iR = e(t)$, $e(t) = 220 \sin(\omega t + 45)$, $f = 50 \text{Гц}$, $R = 10 \text{ Ом}$

Решение: выразим ток через потокосцепление $i(\Phi) = \frac{1}{b} \cdot \sinh(\Phi / b)$, и запишем уравнение состояния в нормальной форме и приведем решение **MathCAD**:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -i(\Phi)R + e(t),$$



Приведем решение MATLAB:

