2.4 Законы постоянного тока

2.4.1 Закон Ома

Немецкий физик Ом установил, что *сила тока* I, *текущего по однородному металлическому проводнику пропорциональна напряжению на концах проводника* U

Закон Ома для участка цепи

$$\boxed{I = \frac{U}{R}} \qquad (2.4.1)$$

где R - *электрическое сопротивление проводника*.

Единицей сопротивления является Ом – он равен сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет ток силой 1 А.

Сопротивление проводника зависит от формы, размеров и свойств материала из которого он сделан.

Для *однородного цилиндрического проводника*

$$\boxed{R = \rho \frac{l}{S}} \qquad (2.4.2)$$

где l - длина проводника, S - площадь поперечного сечения, ρ - удельное электрическое сопротивление.

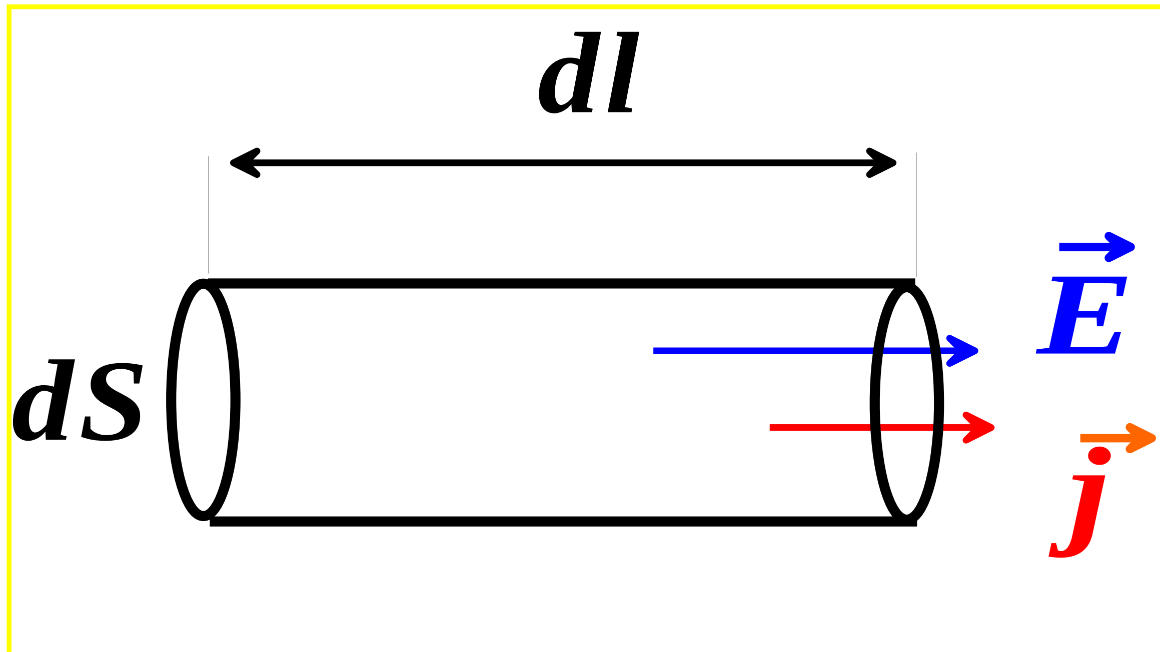
Единицей удельного сопротивления является (Ом·м).

Наименьшим удельным сопротивлением обладают серебро ($1.6 \cdot 10^{-8}$ Ом ·м) и медь ($1.7 \cdot 10^{-8}$ Ом ·м). На практике чаще используется алюминий ($2.6 \cdot 10^{-8}$ Ом ·м) .

2.4.2 *Закон Ома в дифференциальной форме*

Найдем связь между плотностью тока $\vec{j}$ и напряженностью электрического поля $\vec{E}$.

В изотропном проводнике упорядоченное движение положительных носителей тока происходит в направлении вектора $\vec{E}$. Поэтому направления векторов $\vec{j}$ и $\vec{E}$ совпадают. Выделим вблизи некоторой точки проводника элементарный объем в виде цилиндра, ось которого параллельна векторам $\vec{j}$ и $\vec{E}$.



Через поперечное сечение цилиндра течет ток силой jdS. Напряжение, приложенное к цилиндру, равно Edl, где E - напряженность поля в данной точке.

Сопротивление цилиндра, согласно (2.4.2), равно $\rho\dfrac{dl}{dS}$

Подставим эти величины в закон Ома (2.4.1)

$$jdS = \frac{dS}{\rho dl}Edl \quad \rightarrow \quad j = \frac{E}{\rho}$$

Поскольку вектора $\vec{j}$ и $\vec{E}$ параллельны, то можем записать <u>закон Ома в дифференциальной форме</u>

$$\boxed{\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \sigma\vec{E}} \qquad (2.4.3)$$

где σ - удельная электрическая проводимость ($\sigma = 1/\rho$).

Величина, обратная 1 Ом, называется сименсом (См). **Поэтому единицей измерения удельной проводимости σ является сименс на метр (См/м).**

Опыт показывает, что удельное сопротивление ρ и сопротивление R большинства металлов при температурах, близких к комнатной, меняются от температуры почти линейно

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$$

$$R = R_0(1 + \alpha t) \qquad (2.4.4)$$

где - ρ и ρ_0 , R и R_0 - удельные сопротивления и сопротивления проводника при температурах t и 0°C,

α - температурный коэффициент.

Для чистых металлов температурный коэффициент

$$\alpha \approx 1/273\ \text{К}^{-1}$$

Поэтому *сопротивление металлов* может быть записано в виде

$$R = \alpha R_0 T \qquad (2.4.5)$$

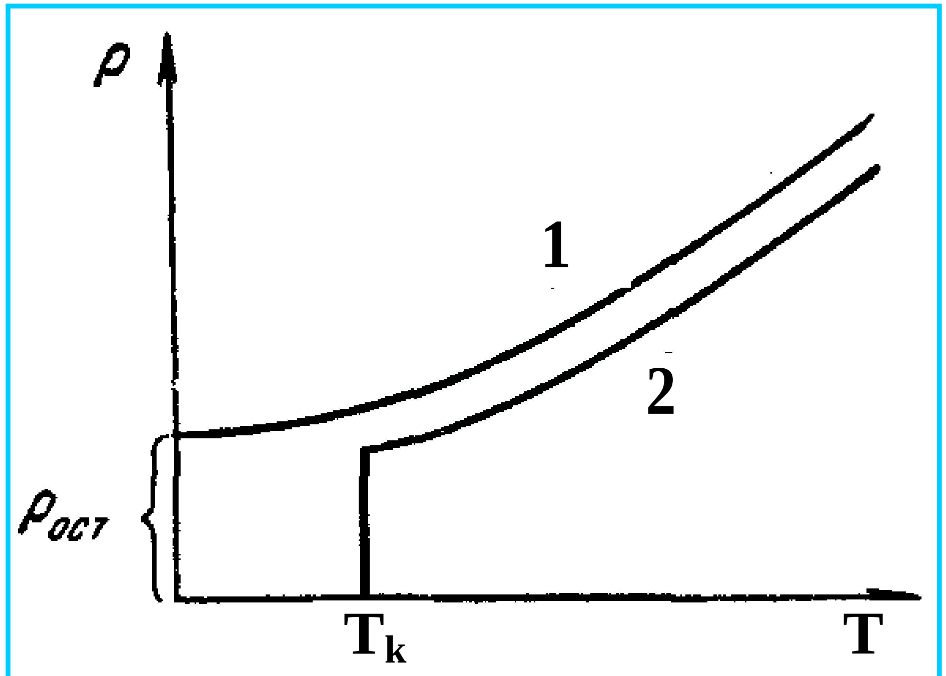
где T - термодинамическая температура.

При низких температурах возникают отклонения от линейного закона (2.4.4).

В большинстве случаев зависимость ρ следует кривой 1. Остаточное сопротивление $\rho_{ост}$ зависит от чистоты материала и механических напряжений в нем.

Однако, у многих ***металлов и сплавов при очень низких температурах сопротивление скачком обращается в ноль –*** кривая 2.

Это впервые обнаружил Камерлинг-Оннес в 1911 году у ртути. Данное явление называется ***<u>сверхпроводимостью</u>***.



2.4.3 *Закон Ома для неоднородного участка цепи*

Рассмотрим неоднородный участок цепи 1-2, в котором действует ЭДС - $\mathcal{E}_{12}$. Пусть разность потенциалов

на концах участка равна $\varphi_1 - \varphi_2$.

На носитель тока с зарядом q кроме

электростатической силы $\vec{F}_E = \vec{E}q$ действует сторонняя

сила $\vec{F}_{ст} = \vec{E}_{ст}q$, которая тоже вызывает упорядоченное движение носителей тока. Поэтому плотность тока пропорциональна сумме напряженностей $\vec{E} + \vec{E}_{ст}$

$$\boxed{\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{ст})} \qquad (2.4.6)$$

Формула (2.4.6) обобщает формулу (2.4.3) на случай неоднородного проводника.

Она выражает собой *закон Ома в дифференциальной форме для неоднородного участка цепи*.

Из закона сохранения заряда следует, что ток на неоднородном участке должен быть одинаковым. Выберем поперечное сечение, перпендикулярно направлению тока I, причем так, чтобы в его пределах плотность тока j можно было считать постоянной. Площадь такого сечения S может меняться вдоль участка. Тогда ток I можно записать как

$$I = jS = \sigma(E + E_{ст})S = \frac{S}{\rho}(E + E_{ст})$$

Данное уравнение можно переписать в виде

$$I\frac{\rho}{S} = E + E_{ст}$$

Умножим его на малый элемент участка цепи dl и проинтегрируем по всему участку от начальной точки 1 до конечной точки 2

$$I\int_1^2 \frac{\rho}{S}dl = \int_1^2 E dl + \int_1^2 E_{ст} dl$$

Согласно (2.4.2) интеграл слева равен сопротивлению R участка цепи.

Напряженность электрического поля меняется вдоль участка и связана с потенциалом формулой (1.10.2)

$$E = -\frac{d\varphi}{dl} \quad \rightarrow \quad Edl = -d\varphi$$

Поэтому первый интеграл справа равен

$$\int_1^2 \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\int_1^2 \mathbf{d}\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Второй интеграл справа согласно (2.3.3) равен ЭДС на участке цепи 1 - 2 : $\mathcal{E}_{12}$

Поэтому можем записать

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$$

Или

$$\boxed{I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R}} \qquad (2.4.7)$$

Это и есть закон Ома для неоднородного участка цепи.

Здесь R – *полное сопротивление цепи*, включающее в себя внутреннее сопротивление источника тока r и сопротивление внешней цепи $R_{вц}$

$$R = R_{вц} + r$$

Если цепь замкнута, то $\varphi_1 = \varphi_2$ **и получаем** ***закон Ома для замкнутой цепи***

$$I = \frac{\varepsilon_{12}}{r + R_{вц}} \qquad (2.4.8)$$

Если цепь ***разомкнута***, **то ток в ней отсутствует I = 0, а из (2.4.7) находим**

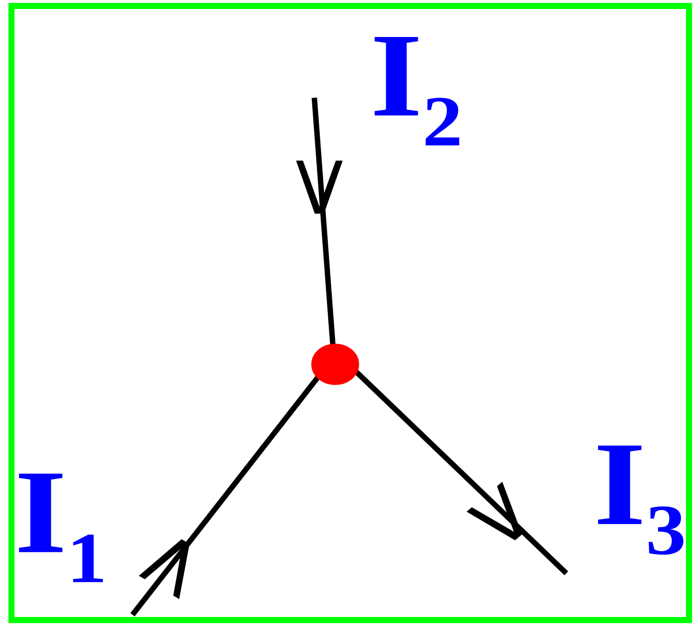
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon_{12} \qquad (2.4.9)$$

ЭДС ***равна разности потенциалов на концах разомкнутой цепи*****.**

2.4.3 *Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа*

Расчет тока в разветвленных цепях упрощается, если пользоваться правилами Кирхгофа.

Узлом называется точка, в которой сходятся более чем два проводника.



Ток, текущий к узлу берется с одним знаком, а ток текущий от узла – с другим знаком.

Из уравнения непрерывности постоянного тока (2.2.1)

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{j} = const \quad ; \quad I = const$$

следует *первое правило Кирхгофа*:

алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле равна нулю

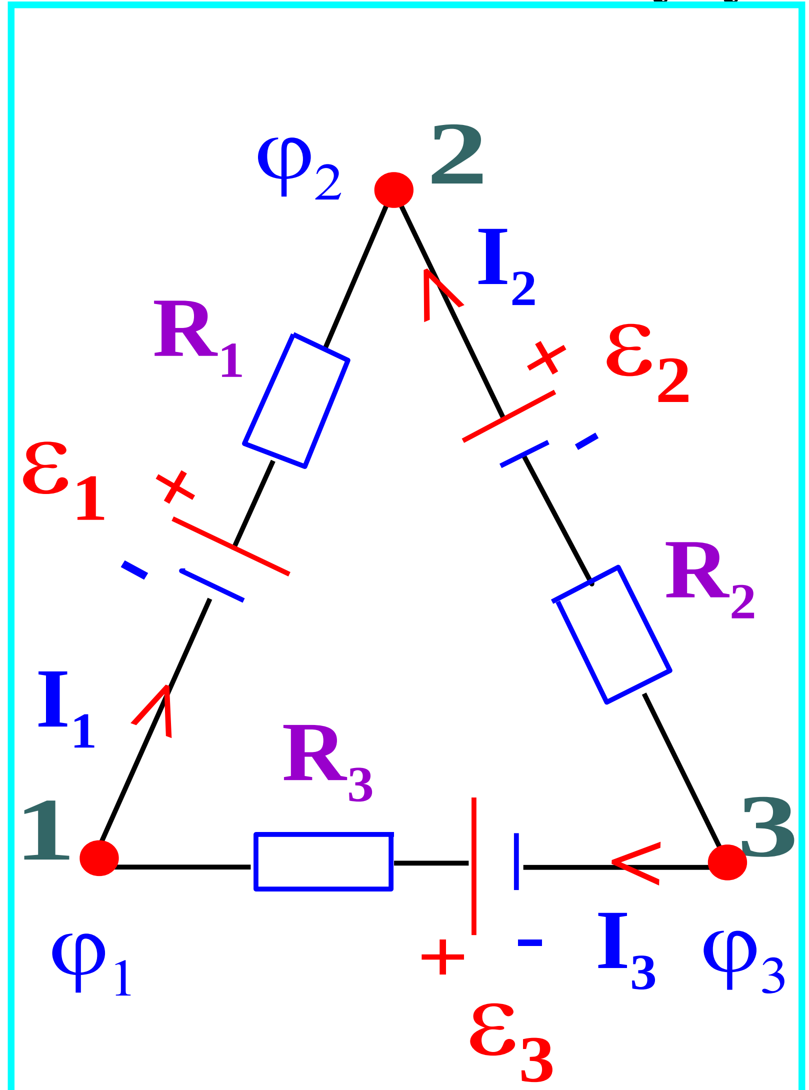
$$\boxed{\sum_k I_k = 0} \qquad (2.4.10)$$

Уравнение (2.4.10) надо записать для *всех узлов* цепи. Если количество узлов равно N, то независимыми будут только (N-1) уравнений.

Выделим в разветвленной цепи замкнутый контур, например, с узлами 123. Выберем направление обхода контура – например, по часовой стрелке.

Токи, совпадающие с направлением обхода считаются положительными, а несовпадающие – отрицательными.

ЭДС в цепи считаются положительными, если они создают ток, направленный в сторону обхода.



Запишем закон Ома для всех трех участков цепи

$$I_1R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1$$

$$-I_2R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 - \varepsilon_2$$

$$I_3R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 + \varepsilon_3$$

Суммируя, получаем

$$I_1R_1 - I_2R_2 + I_3R_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

или в общем случае

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \varepsilon_k \qquad (2.4.11)$$

это и есть *второе правило Кирхгофа* :

в любом замкнутом контуре, выбранном в разветвленной цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления участков контура равна алгебраической сумме ЭДС, имеющихся в контуре

2.4.4 *Мощность тока*

Пусть к некоторому участку цепи приложено напряжение U и по нему течет постоянный ток.

За время t через любое сечение проводника проходит заряд

$$q = I \cdot t$$

Этот заряд переносится из одного конца участка в другой. Согласно (2.3.5), (2.3.6) силы электростатического поля и сторонние силы на данном участке совершают работу

$$A = U \cdot q = U \cdot I \cdot t$$

Разделив работу на время t, получим мощность, развиваемую током на участке цепи

$$P = \frac{A}{t} = U \cdot I = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot I + \varepsilon_{12} \cdot I \qquad (2.4.12)$$

Эта мощность может расходоваться на:

1) **совершение работы над внешними телами, при этом участок цепи должен двигаться**
2) **на протекание химических реакций**
3) **нагревание участка цепи**

Используя закон Ома

$$I = U/R$$

мощность можно записать так же в виде

$$\boxed{P = \frac{U^2}{R} = I^2 R} \qquad (2.4.13)$$

Единицей мощности тока является Ватт = Дж/сек.

Если проводник неподвижен и в нем не происходят химические реакции, то работа тока идет на увеличение внутренней энергии проводника, что приводит к его нагреванию.

В результате в проводнике выделяется теплота

$$\boxed{Q = U \cdot I \cdot t = \frac{U^2}{R} t = I^2 R \cdot t} \qquad (2.4.14)$$

Это закон Джоуля - Ленца.

Если ток меняется во времени, то теплота определяется интегралом

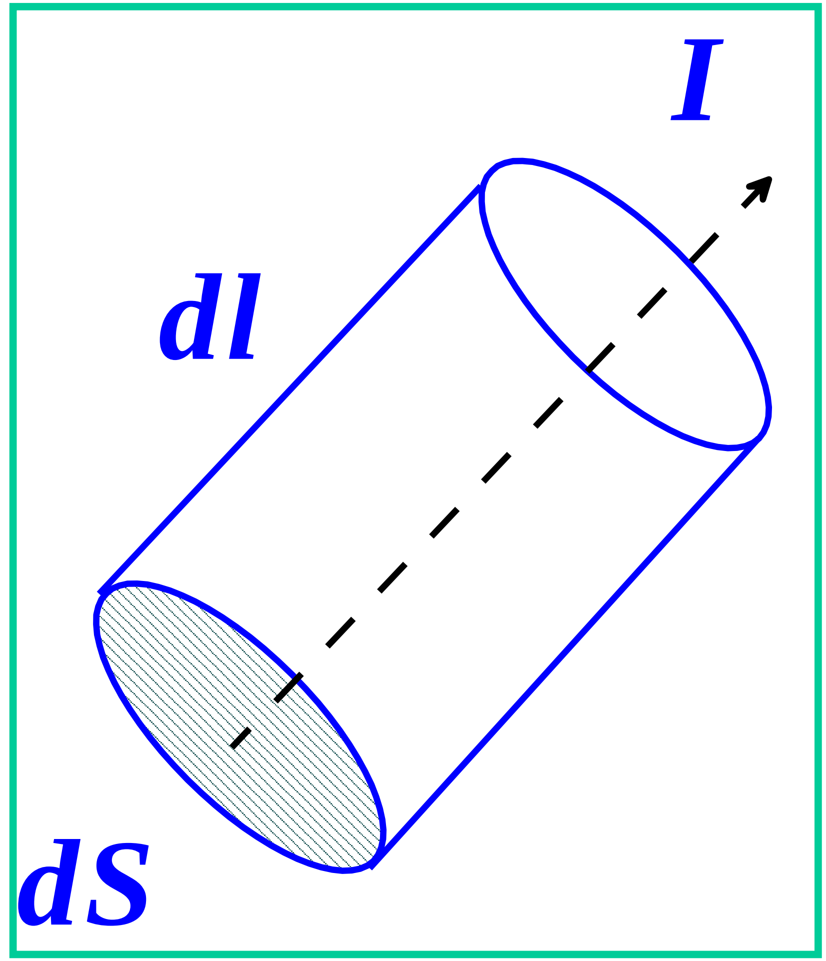
$$\boxed{Q = \int_0^t I^2 R \cdot dt} \qquad (2.4.15)$$

Выберем внутри проводника элементарный объем в виде малого цилиндра, ось которого совпадает с направлением тока.

Объем цилиндра $dV = dS \cdot dl$

а сопротивление $R = \rho \dfrac{dl}{dS}$

За время dt в этом цилиндре выделится тепло



$$dQ = I^2 R \cdot dt = I^2 \rho \frac{dl}{dS} dt =$$

$$= (j \cdot dS)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = j^2 \rho \cdot dV \cdot dt$$

Определим ***удельную тепловую мощность тока***

$$w = \frac{dQ}{dVdt} = \rho j^2 \qquad (2.4.16)$$

Удельная мощность равна количеству теплоты, выделяемой в единице объема проводника за 1 сек.

Используя $\sigma = 1/\rho \;;\; E = \rho j \;;\; j = \sigma E$

можем записать

$$\boxed{w = \rho j^2 = jE = \sigma E^2} \qquad (2.4.17)$$

Это ***закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме***.