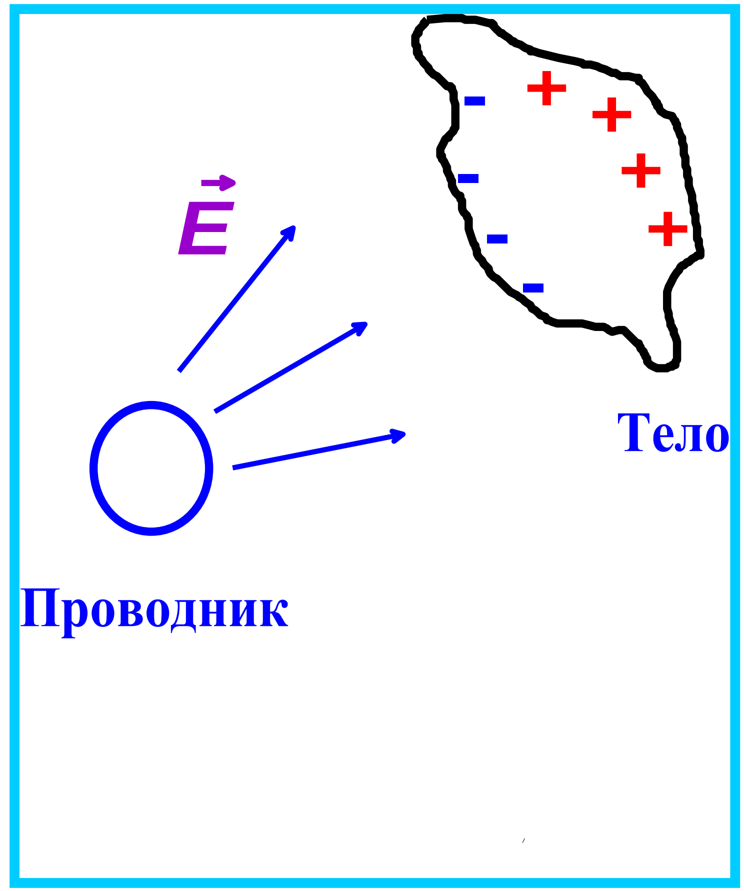
1.25. Конденсаторы

***Конденсатор – устройство, способное накапливать заряд*. Таким свойством оно обладает потому, что *при приближении к проводнику других тел его емкость увеличивается*.**



Это связано с тем, что на теле, внесенном в поле проводника, возникают индуцированные (если тело проводник) или связанные (если тело - диэлектрик) заряды. Заряды, противоположные по знаку заряду проводника, находятся к нему ближе, чем одноименные, и поэтому оказывают большее влияние на поле и потенциал проводника, *уменьшая их величину*.

Но согласно (1.24.2) ***уменьшение потенциала, увеличивает емкость***.

Поэтому конденсаторы делают в виде двух проводников, расположенных близко друг к другу – в виде пластин, коаксиальных цилиндров или сфер.

Поле заключено внутри конденсатора, а линии смещения начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой. Заряды на обкладках отличаются лишь знаком и пропорциональны разности потенциалов на обкладках

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

Емкость конденсатора равна отношению заряда q, накопленного на конденсаторе, к разности потенциалов

$$\boxed{C = \frac{q}{U}} \qquad (1.25.1)$$

1.25.а Емкость плоского конденсатора

Пусть S – площадь обкладок, d – расстояние между ними, $\pm q$ – заряды на обкладках, ε – диэлектрическая проницаемость среды между обкладками.

Если расстояние между пластинами мало по сравнению с их линейными размерами, то электрическое поле между обкладками близко к однородному, а его напряженность равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

где $\sigma = \dfrac{q}{S}$ **- поверхностная плотность зарядов.**

Разность потенциалов между обкладками равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \frac{qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$$

Поэтому ***емкость плоского конденсатора*** **равна**

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}} \qquad (1.25.2)$$

Отсюда следует, что ***размерность электрической постоянной*** ε_0 **есть**

$$[\varepsilon_0] = \frac{Ф}{м}$$

1.25.б Емкость цилиндрического конденсатора

Цилиндрический конденсатор состоит из двух полых, коаксиальных цилиндров длиной l и радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$), вставленных друг в друга и заряженных зарядами $\pm q$. Разность потенциалов между обкладками с учетом влияния диэлектрика равна (1.13.5)

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2k\lambda}{\varepsilon} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

где $\lambda = \dfrac{q}{l}$ **- линейная плотность заряда на обкладках цилиндра. Подставляя в (1.25.1), получаем**

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}} \qquad (1.25.3)$$

1.25.c Емкость сферического конденсатора

Сферический конденсатор состоит из двух полых, коаксиальных сфер с радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$), вставленных друг в друга и заряженных зарядами $\pm q$. Разность потенциалов вычисляем по формуле (1.13.3)

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{kq}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Подставляя в (1.25.1), получаем емкость сферического конденсатора

$$\boxed{C = \frac{k\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}} \qquad (1.25.4)$$

Устремляя в формуле (1.25.4) внешний радиус к бесконечности ($R_2 \to \infty$), получим прежнюю формулу для емкости шара (1.24.4)

$$C = k\varepsilon R$$

где $R = R_1$ - радиус шара.

В электрических цепях конденсаторы соединяют в батареи. При этом используется их параллельное и последовательное соединение.

1.25.д Параллельное соединение конденсаторов

У параллельно соединенных конденсаторов потенциалы на обкладках всех конденсаторов одинаковые, поэтому разность потенциалов на обкладках всех конденсаторов одна и та же и равна U.

Если емкости конденсаторов C_1, C_2 ,…, C_n , то согласно (1.25.1) заряды на них равны

$$q_1 = C_1U, \quad q_2 = C_2U \quad ,\ldots, \quad q_N = C_NU$$

Заряд батареи конденсаторов равен

$$Q=\sum_{i=1}^{N} q_i=(C_1+C_2+\ldots+C_N)U$$

Поэтому ***емкость батареи из параллельно соединенных конденсаторов*** **равна**

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}=C_1+C_2+\ldots+C_N} \qquad (1.25.5)$$

1.25.е Последовательное соединение конденсаторов

При последовательном соединении вторая обкладка первого конденсатора образует с первой обкладкой второго конденсатора единый проводник. При подаче напряжения возникают индуцированные заряды, причем заряд на второй обкладке 1 – го конденсатора равен заряду на первой обкладке 2 – го конденсатора.

Поэтому у последовательно соединенных конденсаторов заряды обкладок всех конденсаторов равны по модулю q, а разность потенциалов на зажимах батареи равна

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + ,\ldots, + \Delta\varphi_N$$

где $\Delta\varphi_i = \dfrac{q}{C_i}$ - разность потенциалов на обкладках i – го конденсатора

Эту разность потенциалов можем выразить через емкость батареи

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C}$$

Приравнивая два выражения для $\Delta\varphi$ **, получаем**

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{N} \frac{q}{C_i} = \frac{q}{C}$$

Следовательно, емкость батареи из *последовательно соединенных конденсаторов* определяется формулой

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}} \qquad (1.25.6)$$

1.26. Энергия электростатического поля

1.26.а *Энергия системы неподвижных зарядов*

Пусть имеются 2 точечных неподвижных заряда q_1 и q_2, расположенных на расстоянии r_{12}. Согласно (1.9.3) потенциальная энергия 1-го заряда в поле 2-го заряда равна

$$\boxed{U_{12}(r_{12}) = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} = q_1 \cdot \varphi_2(r_{12})} \qquad (1.26.1)$$

Такую же потенциальную энергию имеет и 2-ой заряд в поле 1-го

$$\boxed{U_{21}(r_{12}) = U_{12}(r_{12}) = q_2 \cdot \varphi_1(r_{12})}$$

$U_{12} = U_{21} = W$ **- энергия взаимодействия двух зарядов.**

Пусть теперь имеется система из N неподвижных точечных зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_N$.

Энергия взаимодействия этой системы будет равна сумме энергий каждой пары зарядов

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} U_{ij}(r_{ij}) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} k\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\cdot\varphi_i} \qquad (1.26.2)$$

где

$$\varphi_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} k\frac{q_j}{r_{ij}} \qquad (1.26.3)$$

потенциал, созданный всеми зарядами (кроме q_i) в точке пространства, где расположен заряд q_i.

1.26.б Энергия заряженного проводника

Заряд Q, расположенный в проводнике, можно разбить на совокупность малых точечных зарядов Δq_i. Энергию их взаимодействия можно записать как

$$W_{Взаимод.} = \frac{1}{2}\sum_i \Delta q_i \cdot \varphi_i$$

В проводнике весь заряд находится на поверхности, которая является эквипотенциальной. Поэтому потенциалы всех зарядов Δq_i одинаковы и равны потенциалу проводника φ. Следовательно

$$\boxed{W_{Взаимод.} = \frac{1}{2}\varphi\sum_i \Delta q_i = \frac{1}{2}\varphi Q} \qquad (1.26.4)$$

Согласно (1.24.2)

$$Q = C\varphi$$

Поэтому

$$\boxed{W_{проводника} = \frac{1}{2}\varphi Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}} \qquad (1.26.5)$$

Эта формула и дает энергию заряженного проводника.

Она равна работе, которую надо совершить, чтобы зарядить проводник.

1.26.в *Энергия заряженного конденсатора*

Рассмотрим плоский конденсатор, обкладки которого заряжены ($+q, -q$) и имеют потенциалы φ_1, φ_2 .

Каждую из обкладок можно разбить на элементарные заряды Δq_i. Тогда энергия обкладки с зарядом $+q$ равна

$$W_+ = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \Delta q_i = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_1 \Delta q_i = \frac{1}{2}\varphi_1 q$$

Аналогично, энергия обкладки с зарядом $-q$ равна

$$W_- = -\frac{1}{2}\varphi_2 q$$

Полная энергия конденсатора равна сумме энергий двух обкладок

$$W = W_{+} + W_{-} = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)q = \frac{1}{2}Uq$$

Используя (1.25.1), энергию конденсатора можем переписать в виде

$$\boxed{W = \frac{1}{2}Uq = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}} \qquad (1.26.6)$$

Формула (1.26.6) подобна формуле для заряженного проводника (1.26.5).

Найдем силу, с которой обкладки конденсатора притягивают друг друга. Для этого подставим в его энергию (1.26.5) выражение для емкости плоского конденсатора (1.25.2)

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}$$

Будем рассматривать расстояние между обкладками конденсатора d как переменную *x*, тогда

$$W(x) = \frac{q^2 x}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}$$

Силу найдем из связи с потенциальной энергией W

$$\boxed{F = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}} \qquad (1.26.7)$$

Знак минус говорит о том, что обкладки притягивают друг друга.

1.26.г *Энергия электрического поля*

Выразим энергию конденсатора через напряженность электрического поля

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S d}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V}{2} E^2$$

(1.26.8)

где $V = Sd$ **- объем между обкладками,**

$E = U/d$ **- напряженность электрического поля между обкладками.**

Таким образом, энергия конденсатора выражена через характеристику электростатического поля – его напряженность E.

С другой стороны, формула (1.26.6) дает эту же энергию через заряд на обкладках.

Встает вопрос о физической интерпретации этого результата :

где *сосредоточена электрическая энергия и что является носителем электрической энергии: заряд или поле ?*

Электростатика на этот вопрос ответить не может, поскольку в ней заряды и созданное ими поле не отделимы друг от друга.

Известно, что переменные во времени электрическое и магнитное поля могут существовать и не зависимо от зарядов, которые их возбудили. Эти поля распространяются в виде электромагнитных волн, которые, переносят энергию (солнечное излучение, радиоволны, инфракрасное-тепловое излучение).

Следовательно, ***носителем энергии является электромагнитное поле***.

Внутри конденсатора поля однородное, поэтому энергия поля распределена равномерно по объему между обкладками с постоянной плотностью

$$\boxed{w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} E^2} \qquad (1.26.9)$$

Учитывая, что

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon \mathrm{E}$$

можем записать

$$w = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$$

В изотропном диэлектрике вектора $\vec{D}$ **и** $\vec{\mathrm{E}}$ **направлены в одну сторону**

$$\vec{D} \parallel \vec{\mathrm{E}}$$

поэтому

$$w = \frac{DE}{2} = \frac{(\vec{D} \cdot \vec{E})}{2}$$

Используем (1.16.2)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Тогда

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{(\vec{E} \cdot \vec{P})}{2}} \qquad (1.26.10)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой плотность энергии электрического поля *в вакууме*, второе слагаемое равно работе, затрачиваемой *на поляризацию* единицы объема диэлектрика.

1.26.д *Энергия заряженного шара в диэлектрике*

В качестве примера использования формулы (1.26.9) найдем энергию электрического поля заряженного шара с радиусом R и зарядом Q, находящегося в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε.

Вне шара ($r > R$) напряженность электрического поля, созданного шаром равна (1.7.6)

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$$

Разобьем окружающее шар пространство на тонкие шаровые слои толщиной dr. Объем шарового слоя равен

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Внутри тонкого слоя напряженность электрического поля во всех точках одинаковая, поэтому энергия поля распределена по его объему с постоянной плотностью. Согласно (1.26.9) в тонком слое заключена энергия

$$dW = wdV = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

Полная энергия электрического поля вне шара равна

$$W = \int dW = \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$$

Поскольку емкость шара равна (1.24.4)

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$$

то энергию электрического поля шара можем записать как

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C}} \qquad (1.26.11)$$

Эта формула совпадает с общей формулой для энергии заряженного проводника (1.26.5), поскольку шар является его частным случаем.