1.15. Уравнения Пуассона и Лапласа

Получим уравнение, из решения которого можно определить электрический потенциал φ в диэлектрике.

Для этого подставим в формулу (1.14.11) выражение (1.10.1), связывающее напряженность электрического поля с электрическим потенциалом

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = -(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho')$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}) = \mathbf{divgrad} = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

где Δ - дифференциальный оператор, называемый оператором Лапласа (лапласианом).

В результате получаем

уравнение Пуассона

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho')} \qquad \text{(1.15.1)}$$

Из его решения находится электростатический потенциал φ в любой точке диэлектрика, если известно распределение сторонних ρ и связанных ρ' зарядов.

В тех участках поля, где электрических зарядов нет ($\rho + \rho' = 0$), уравнение Пуассона принимает особенно простой вид

$$\boxed{\Delta\varphi = 0} \qquad \text{(1.15.2)}$$

Это уравнение называется уравнением Лапласа – оно является частным случаем уравнения Пуассона.

1.16. Вектор электрического смещения

Нахождение напряженности электрического поля $\vec{E}$ из теоремы Гаусса неудобно, так как входящая в него объемная плотность связанных зарядов ρ', зависит от $\vec{E}$.

Расчет поля можно упростить, если ввести вспомогательный вектор, источником которого являются только *сторонние* заряды с плотностью ρ.

Для этого подставим в формулу (1.14.11) плотность связанных зарядов ρ' из (1.14.10)

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \vec{\nabla}\vec{\mathscr{P}})$$

или

$$\vec{\nabla}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathscr{P}}) = \rho \qquad (1.16.1)$$

Отсюда следует, что искомым вектором является вектор

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathscr{P}}} \qquad (1.16.2)$$

который называется электрическим смещением или электрической индукцией.

Подставим в (1.16.2) вектор поляризации $\vec{\mathscr{P}}$ из (1.14.3)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \kappa \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E}$$

Величина

$$\boxed{\varepsilon = 1 + \kappa} \qquad (1.16.3)$$

называется диэлектрической проницаемостью среды. Вектор электрического смещения теперь можем записать в виде

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}} \qquad (1.16.4)$$

Из формулы (1.16.4) следует, что вектора $\vec{D}$ и $\vec{E}$ *параллельны друг другу*.

Однако, это справедливо лишь для изотропных диэлектриков.

В *анизотропных диэлектриках* направления векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$ в общем случае *не совпадают*.

С учетом (1.16.2) и (1.16.4) формулу (1.16.1) можно переписать в виде

$$\boxed{(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \rho} \qquad (1.16.5)$$

Проинтегрируем это уравнение по некоторому объему V

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) dV = \int_V \rho dV$$

Применим к левому интегралу *теорему Остроградского-Гаусса*

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) dV = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \Phi_D$$

где Φ_D - поток вектора смещения $\vec{D}$ через замкнутую поверхность S, охватывающую объем V.

В результате получили

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = \int_V \rho\,dV \qquad (1.16.6)$$

Эта формула выражает собой теорему Гаусса для электрического смещения: *поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность равен сумме сторонних зарядов внутри этой поверхности*.

Единицей измерения электрического смещения является $[D] = \frac{Кл}{м^2}$, а единицей измерения его потока $[\Phi_D] = Кл$

Из (1.16.6) следует, что заряд величиной 1 *Кл* создает через охватывающую его поверхность поток смещения, равный 1 *Кл* .

Поле вектора смещения $\vec{D}$ изображают с помощью силовых линий, аналогично силовым линиям напряженности электрического поля $\vec{E}$.

Важное отличие между этими двумя векторами состоит в том, что линии вектора смещения $\vec{D}$ могут начинаться и заканчиваться только на сторонних зарядах. Через связанные заряды линии вектора смещения $\vec{D}$ идут не прерываясь.

В тоже время, *силовые линии напряженности электрического поля $\vec{E}$ могут начинаться или заканчиваться как на сторонних, так и на связанных зарядах*.

1.17. Пример вычисления поля в диэлектриках: поле внутри плоской пластины

Пусть имеются две бесконечные параллельные, разноименно заряженные плоскости с поверхностными плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$. Эти поверхностные заряды являются *несвободными сторонними* зарядами, нанесенными извне на две поверхности.

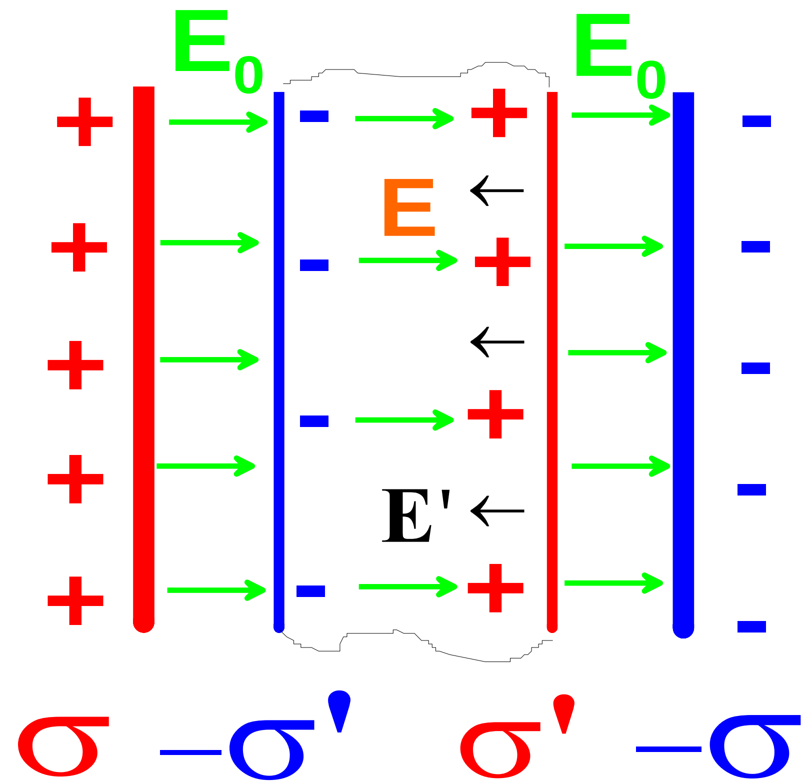
В вакууме электрическое поле между плоскостями

имело бы напряженность $\vec{E}_0$ с величиной $E_0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ и

смещение $\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E}_0$ с величиной $D_0 = \varepsilon_0 E_0 = \sigma$.

Внесем между плоскостями пластину из однородного изотропного диэлектрика.

Под действием поля $\vec{E}_0$ диэлектрик поляризуется и на его поверхностях появляются связанные заряды с плотностями $\pm\sigma'$. Эти заряды создают внутри пластины однородное поле с напряженностью $E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$



Поля $\vec{E}_0$ и $\vec{E}'$ направлены *навстречу друг другу*, поэтому суммарное поле внутри диэлектрика равно

$$E = E_0 - E' = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma') \qquad (1.17.1)$$

В пространстве между диэлектриком и заряженными плоскостями поле не меняется и остается равным E_0 .

Поляризация диэлектрика пропорциональна напряженности электрического поля в данной точке пространства, поэтому согласно (1.14.8)

$$\sigma' = \kappa\varepsilon_0 E$$

Подставляя это выражение в (1.17.1), получаем

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma') = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \kappa\varepsilon_0 \boldsymbol{E})$$

откуда

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0(1+\kappa)}\sigma = \frac{E_0}{(1+\kappa)} = \frac{E_0}{\varepsilon}$$

Таким образом

$$\boxed{E = \frac{E_0}{\varepsilon}} \qquad (1.17.2)$$

Следовательно, поле внутри диэлектрика ослабляется в ε число раз по сравнению с полем в вакууме. Это связано с поляризацией диэлектрика.

Умножим (1.17.2) на $\varepsilon_0\varepsilon$, получим электрическое смещение внутри пластины

$$D = \varepsilon_0\varepsilon E = \varepsilon_0\varepsilon\frac{E_0}{\varepsilon} = \varepsilon_0 E_0 = D_0 = \sigma$$

Значит, *электрическое смещение внутри пластины такое же как и вне пластины, то есть оно непрерывно на границе раздела вакуум/диэлектрик*.

Выразим плотность связанных зарядов в диэлектрике через плотность σ' сторонних зарядов на плоскостях σ. Для этого используем формулу (1.17.2) и прежние соотношения

$$E = \frac{(\sigma - \sigma')}{\varepsilon_0} \quad ; \quad E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

откуда

$$\frac{(\sigma - \sigma')}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

Следовательно **(1.17.3)**

$$\boxed{\sigma' = \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}\sigma}$$

1.18. Ротор вектора напряженности электрического поля

Ранее было показано (1.11.2), что циркуляция вектора напряженности электрического поля по любому замкнутому контуру *L* равна нулю

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0 \qquad (1.18.1)$$

Существует <u>теорема Стокса</u>, согласно которой *интеграл по замкнутому контуру L равен интегралу по поверхности S, охватываемой этим контуром*

$$\boxed{\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S [\vec{\nabla} \times \vec{E}]d\vec{S}} \qquad (1.18.2)$$

Вектор

$$\boxed{[\vec{\nabla} \times \vec{E}] = \mathrm{rot}\vec{E}} \qquad (1.18.3)$$

называется **ротором вектора** $\vec{E}$.

Поскольку равенство нулю циркуляции выполняется для любого замкнутого контура L, то из (1.18.1) и (1.18.2) следует

$$\int_S [\vec{\nabla} \times \vec{E}]\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

Поверхность S , опирающаяся на контур тоже может быть произвольной. Поэтому интеграл будет равен нулю, лишь если равна нулю подинтегральная функция

$$\boxed{[\vec{\nabla} \times \vec{E}] = \mathrm{rot}\vec{E} = 0} \qquad (1.18.4)$$

Запишем последнее уравнение (1.18.4) вместе с прежним уравнением (1.16.5)

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = div\vec{D} = \rho$$

(1.18.5)

$$[\vec{\nabla} \times \vec{E}] = \mathbf{rot}\vec{E} = 0$$

Эти два уравнения являются основными уравнениями электростатики.

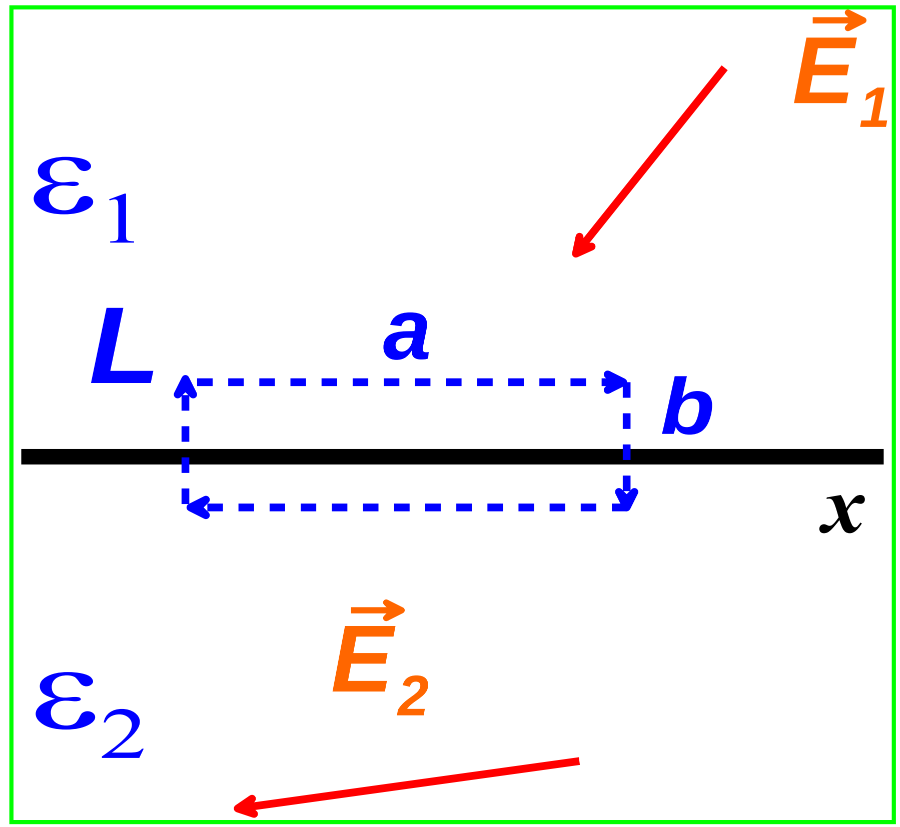
Им должно удовлетворять электростатическое поле в любом диэлектрике, в том числе и неоднородном по составу.

1.19. Условия для электрических полей на границе раздела двух диэлектриков

Рассмотрим систему из 2-х диэлектриков, разделенных плоской границей, и имеющих диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2. Ось **x** направим вдоль границы.

Выберем прямоугольный контур L длиной a и шириной b, который частично проходит в первом диэлектрике и частично - во втором.

Направление обхода контура показано на рисунке стрелками.



Пусть в первом диэлектрике создано поле $\vec{E}_1$, а во втором - $\vec{E}_2$. Так как контур L замкнутый, то циркуляция вектора напряженности по нему равна нулю. Циркуляция – это криволинейный интеграл, распишем его в виде суммы вкладов от 4-х сторон контура с учетом взаимной ориентации полей и направления обхода контура

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -E_{1x}a + E_{2x}a - E_{Л}b + E_{П}b = 0$$

откуда
$$(E_{1x} - E_{2x})a = (E_{П} - E_{Л})b$$

Это равенство должно выполняться для произвольного контура L. Сделаем контур бесконечно тонким, устремляя ширину b к нулю, тогда получим

$$\boxed{E_{1x} = E_{2x}} \qquad (1.19.1)$$

Значения проекций E_{1x} и E_{2x} берутся вблизи границы. Равенство (1.19.1) должно выполняться при произвольной ориентации оси x в плоскости границы.

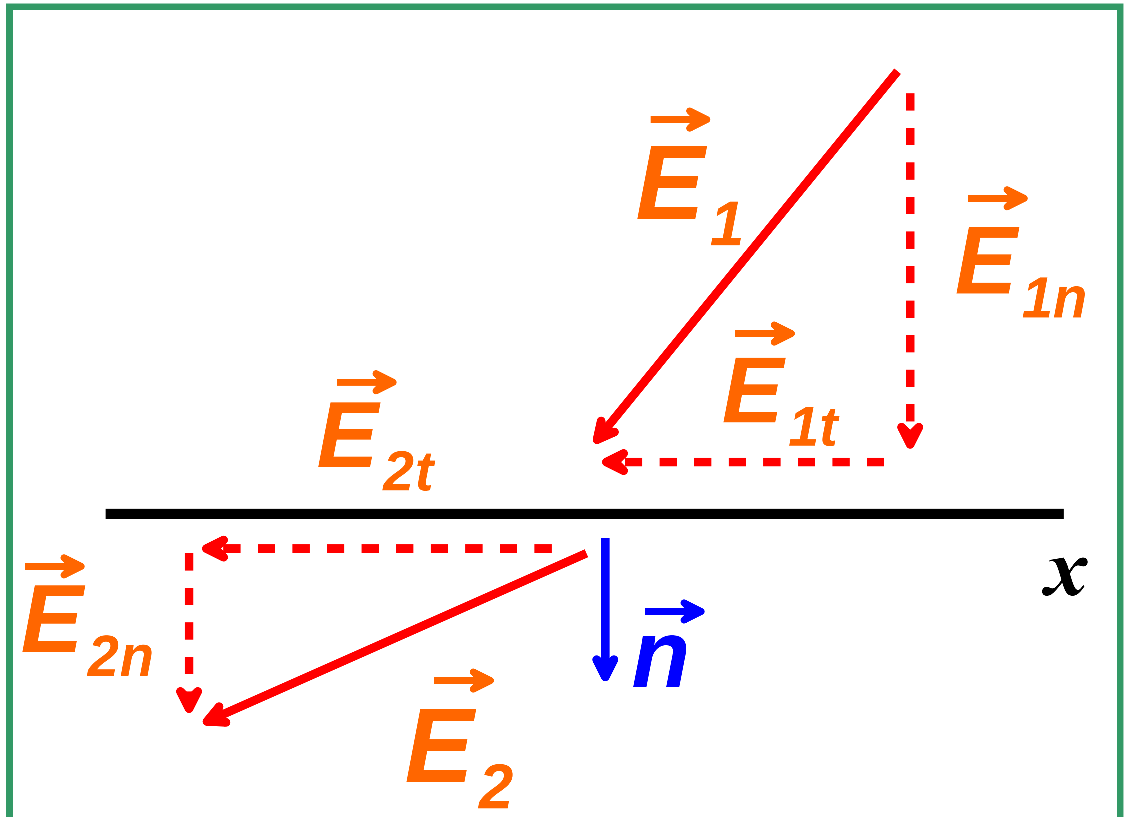
Выберем ось x так, чтобы обратились в ноль проекции обоих векторов

$$E_{1x} = E_{2x} = 0$$

Это значит, что вблизи границы векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности. Представим их в виде

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1n} + \vec{E}_{1t}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2n} + \vec{E}_{2t}$$



где $\vec{E}_{1t}$ и $\vec{E}_{2t}$ - тангенциальные проекции векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ на границу.

Согласно (1.19.1) должно выполняться

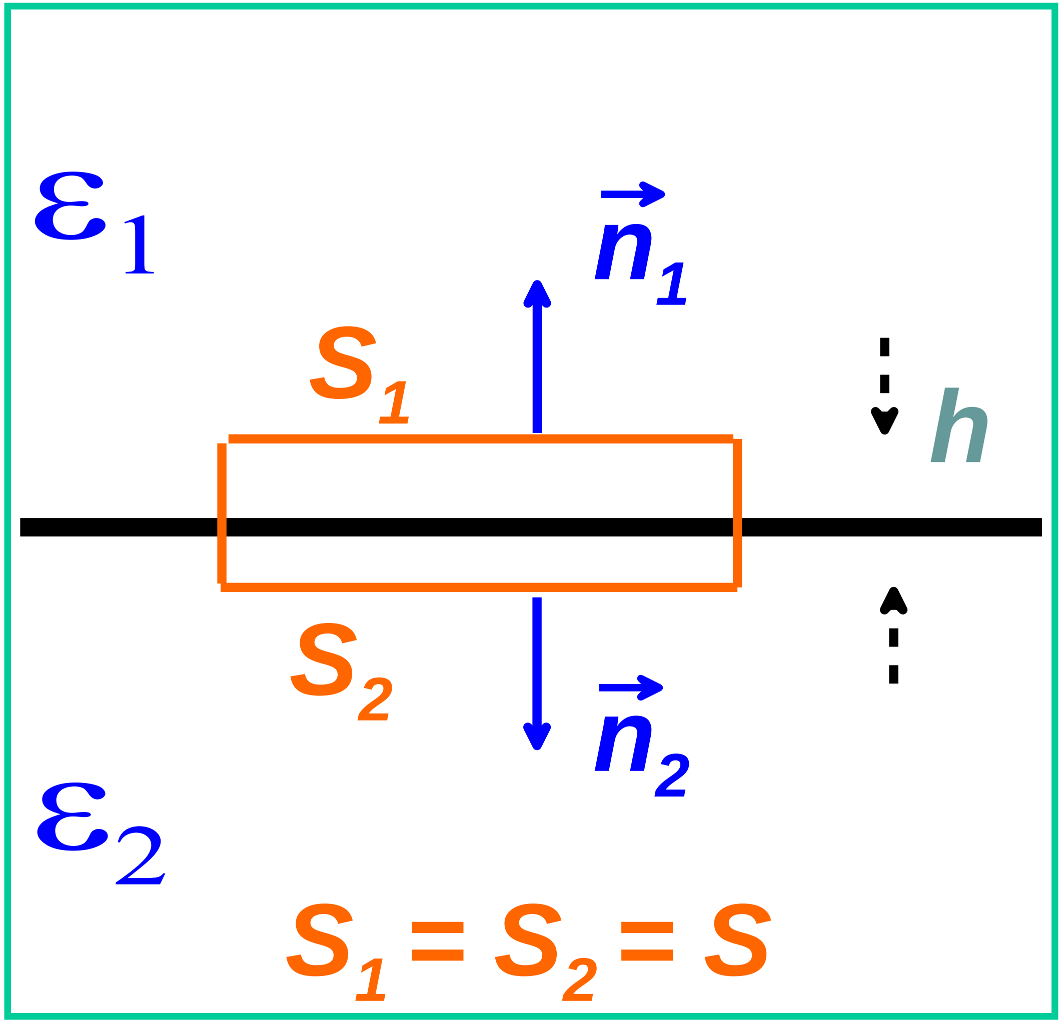
$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}} \qquad (1.19.2)$$

Следовательно, на границе раздела двух диэлектриков тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля непрерывна.

Используем связь напряженности поля со смещением (1.16.4), тогда формулу (1.19.2) можно переписать в виде

$$\boxed{\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}} \qquad (1.19.3)$$

Выберем теперь вблизи границы цилиндр с высотой **h** и основанием **S**. Пусть **h** настолько мала, что в пределах цилиндра электрическое поле можно считать однородным.



Применим к поверхности цилиндра теорему Гаусса для вектора смещения (1.16.6). Если сторонних зарядов нет, то

$$\Phi_D = \int_V \rho dV = 0$$

С другой стороны, поток смещения через поверхность цилиндра можно представить как сумму потоков

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = D_{1n} S + D_{2n} S + \langle D_n \rangle S_{бок} = 0$$

где $\langle D_n \rangle$ - усредненное значение на бок D_n й поверхности $S_{бок}$.

Устремим $h \to 0$, тогда $S_{бок} \to 0$ и получим

$$D_{1n} = -D_{2n} \qquad (1.19.4)$$

Знак минус связан с тем, что вектора $\vec{D}_1$ и $\vec{D}_2$ спроецированы на противоположно направленные нормали $\vec{n}_1, \vec{n}_2$. Их можно спроецировать на одну и ту же нормаль, например $\vec{n}_1$, тогда

$$\boxed{D_{1n} = D_{2n}} \quad (1.19.5)$$

Следовательно, на границе раздела двух диэлектриков нормальная составляющая вектора смещения $\vec{D}$ непрерывна.

Это справедливо не только для электростатических полей, но и для электрических полей, зависящих от времени.

Выражая смещение через напряженность, формулу (1.19.5) перепишем в виде

$$\boxed{\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}} \quad (1.19.6)$$

Если на границе раздела двух сред находится поверхностный сторонний заряд с плотностью σ , то из теоремы Гаусса получаем

$$\Phi_D = \int_V \rho dV = \sigma$$

Поэтому на границе раздела нормальная составляющая вектора D терпит скачок, равный σ

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$$

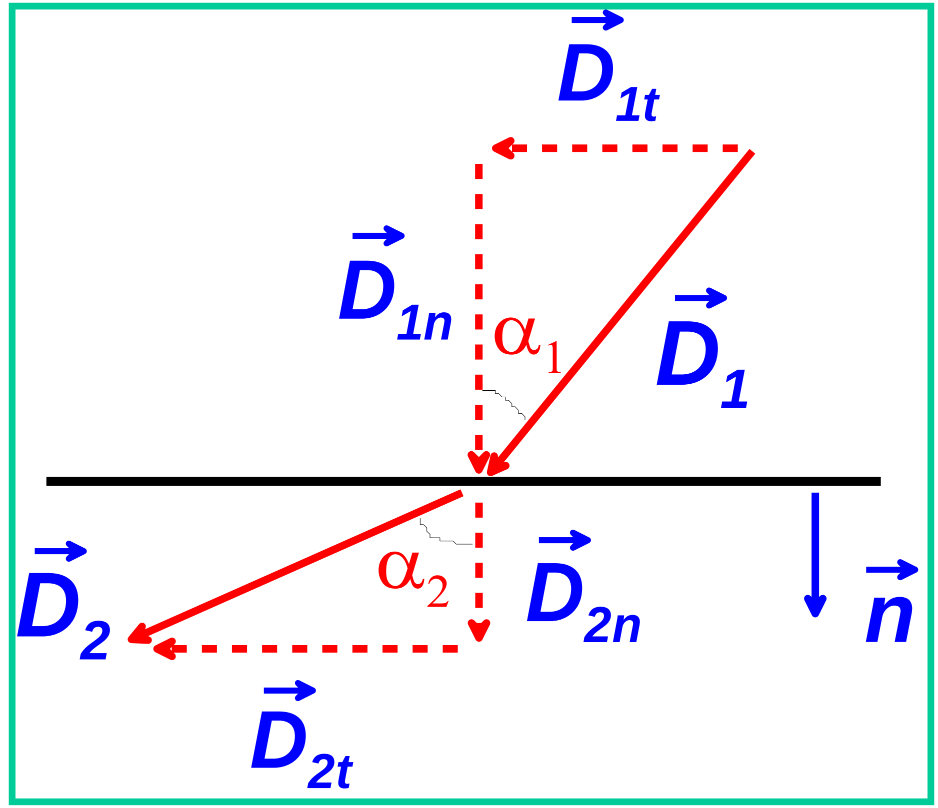
Циркуляция же напряженности электрического поля E по любому замкнутому контуру равна нулю и в этом случае, поэтому тангенциальная составляющая E по-прежнему непрерывна

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

1.20. Закон преломления для линий смещения

На границе диэлектриков линии электрического смещения терпят излом, преломляются. Найдем связь между углами падения и преломления. Из рисунка следует

$$tg\alpha_1 = \frac{D_{1t}}{D_{1n}}; \qquad tg\alpha_2 = \frac{D_{2t}}{D_{2n}}$$



используя (1.19.5) и (1.16.4)

$$\frac{D_{1t}}{tg\alpha_1} = \frac{D_{2t}}{tg\alpha_2}; \qquad \frac{\varepsilon_1 E_{1t}}{tg\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2 E_{2t}}{tg\alpha_2}$$

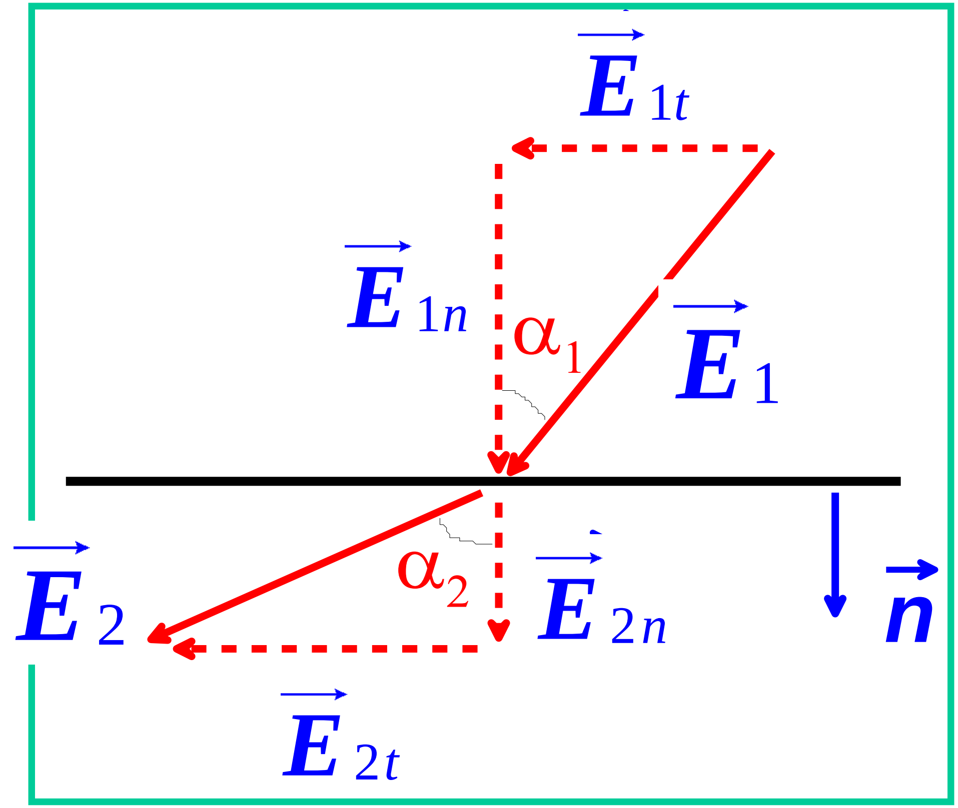
а также (1.19.2), получим

$$\boxed{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2}} \qquad (1.20.1)$$

Закон преломления для линий смещения

Теперь рассмотрим преломление линий напряженности электрического поля. Построим аналогичный рисунок для векторов $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ в средах.

$$tg\alpha_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}; \qquad tg\alpha_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$



учитывая

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \qquad E_{1t} = E_{2t}$$

получаем закон преломления для напряженности электрического поля

$$\boxed{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2}}$$

Как видно, он такой же как и для смещения.