1.5 Поток вектора напряженности электрического поля

Ранее отмечалось, что величина вектора напряженности электрического поля равна количеству силовых линий, пронизывающих перпендикулярную к ним *единичную* площадку.

Выберем малую площадку dS, расположенную под углом α к силовым линиям.

Потоком вектора напряженности $\vec{E}$ через эту площадку называется число пронизывающих ее силовых линий

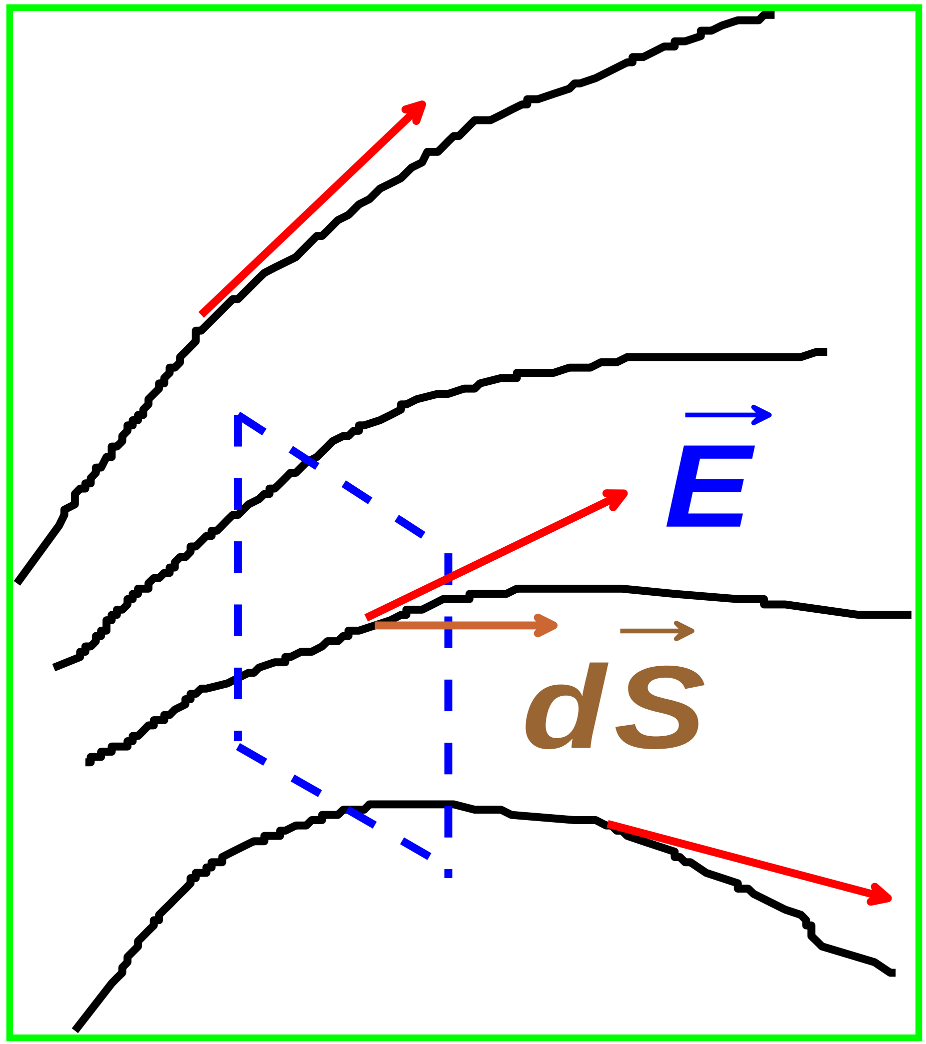
$$\boxed{d\Phi_E = E_n dS} \qquad (1.5.1)$$

где E_n – проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль к площадке $\vec{n}$.

Она равна

$$E_n = (\vec{E} \cdot \vec{n}) = E\cos\alpha$$

Рисунок поясняет определение потока вектора $\vec{E}$.



Если площадка имеет единичную площадь dS = 1 м^2 и перпендикулярна вектору $\vec{E}$, то $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ и получаем

$$\Phi_E = E \cdot 1 м^2$$

Значит, *величина вектора напряженности электрического поля численно равна потоку этого вектора через перпендикулярную к нему единичную площадку*.

За единицу потока вектора напряженности электрического поля принимают поток вектора $\vec{E}$ величиной $E = 1 В/м$ через перпендикулярную к нему единичную площадку

$$[\Phi_E] = \frac{В}{м} м^2 = В \cdot м$$

Введем вектор площади $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$

Тогда $d\Phi_E = E_n dS = (\vec{E} \cdot \vec{n}) \cdot dS = (\vec{E} \cdot d\vec{S})$

Пусть дана произвольная поверхность S. **Поток вектора** $\vec{E}$ **через эту поверхность равен поверхностному интегралу**

$$\Phi_E = \oint_S d\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad (1.5.2)$$

Поток зависит от направления нормали $\vec{n}$ **. Для замкнутых поверхностей** ***за положительное направление нормали принимают внешнюю нормаль, направленную наружу области, охватываемой поверхностью*****. Тогда из (1.5.2) следует, что поток положительный, если линии напряженности выходят из поверхности, и поток отрицательный, если линии входят в поверхность.**

Найдем поток вектора $\vec{E}$, созданного точечным зарядом, через сферическую поверхность S радиуса r. Пусть заряд находится в *центре* этой сферы. Величина вектора напряженности такого заряда равна

$$E = k\frac{q}{r^2}$$

Силовые линии перпендикулярны сфере, поэтому число линий N, пересекающих сферу, равно произведению густоты линий, то есть E, на площадь сферы

$$N = E \cdot S = k\frac{qS}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q4\pi r^2}{r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Поток равен числу линий N, поэтому

$$\boxed{\Phi_E = N = \frac{q}{\varepsilon_0}} \qquad (1.5.3)$$

Следовательно, поток одинаков для сферы любого радиуса, а его знак совпадает со знаком заряда. *Для положительных зарядов поток положителен, для отрицательных – отрицательный*.

1.6 Теорема Остроградского-Гаусса для электрического поля в вакууме

Пусть внутри замкнутой поверхности S находится n зарядов q_i (i = 1,…,n). Согласно принципу суперпозиции напряженность поля, создаваемого всеми зарядами, равна

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

Подставим ее в выражение для потока через поверхность S

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{E_i} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \qquad (1.6.1)$$

Эта формула выражает собой теорему Остроградского-Гаусса : ***поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную*** ε_0 **.**

В общем случае заряд может быть распределен непрерывно с объемной плотностью

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dq}{dV}$$

Элементарный заряд dq в малом объеме dV можно рассматривать как точечный, поэтому поток вектора напряженности созданного им поля равен

$$d\Phi_E = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \frac{\rho dV}{\varepsilon_0}$$

Суммарный поток от всех элементарных зарядов, заключенных в конечном объеме V, охватываемом поверхностью S, равен

$$\Phi_E = \int d\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\rho dV}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

Здесь интеграл по объему V

$$\int_V \rho dV$$

дает полный заряд внутри поверхности S, охватывающей объем V.

Итак,

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \qquad (1.6.2)$$

эта формула выражает собой теорему Остроградского - Гаусса в интегральной форме: ***поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен заряду внутри этой поверхности, деленной на*** ε_0 **.**

1.7 Применение теоремы Остроградского-Гаусса к расчету электрических полей в вакууме

Электрическое поле системы зарядов можно найти с помощью принципа суперпозиции полей, но обычно такой расчет сложен. Теорема Остроградского-Гаусса позволяет значительно упростить вычисления.

Рассмотрим поля зарядов, непрерывно и равномерно распределенных в пространстве. Введем понятия поверхностной и линейной плотности заряда.

Пусть заряд находится в тонком слое. Его распределение можно описать с помощью поверхностной плотности σ, равной

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \qquad [\sigma] = \frac{Кл}{м^2} \qquad (1.7.1)$$

где dq – заряд, находящийся в слое площади dS.

Если заряд находится внутри цилиндра, то используют линейную плотность заряда λ , равную

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \qquad [\lambda] = \frac{Кл}{м} \qquad (1.7.2)$$

где dq - заряд внутри отрезка цилиндра длиной dl.

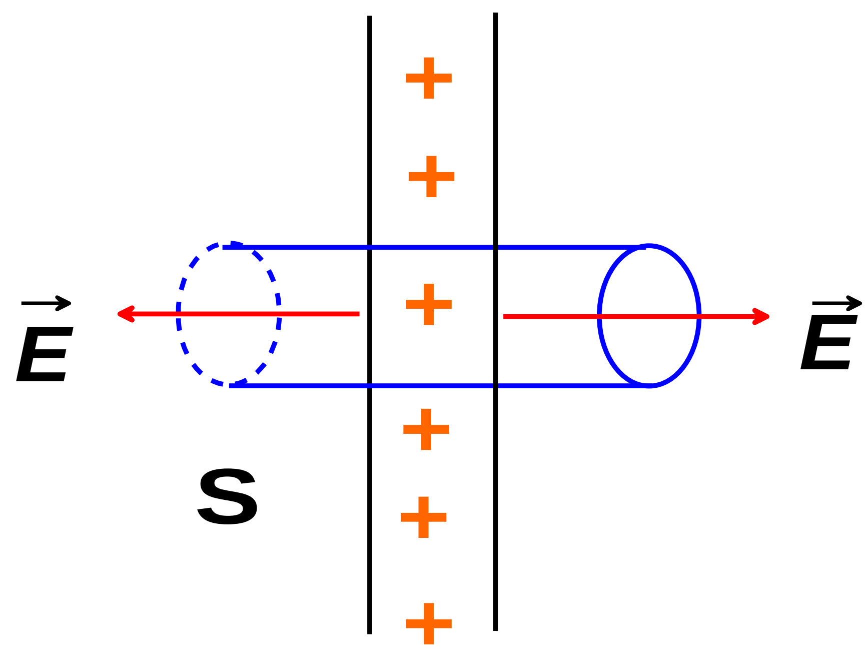
А) Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

Рассмотрим плоскость, на которой положительный заряд распределен с постоянной поверхностной плотностью σ .

Из симметрии задачи следует, что электрическое поле в точках, расположенных зеркально относительно плоскости, должно быть одинаковым по модулю и противоположным по направлению, а силовые линии электрического поля должны быть перпендикулярны к плоскости.

Выберем в качестве замкнутой поверхности цилиндр, основания которого параллельны плоскости. Найдем поток вектора напряженности через поверхность цилиндра.

Поток через боковую поверхность равен нулю, так как силовые линии ее не пересекают.



Поэтому полный поток равен сумме потоков через два основания, площадь каждого из которых равна S. По теореме Остроградского-Гаусса получаем

$$\Phi_E = 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

Откуда

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \qquad (1.7.3)$$

Следовательно, напряженность электрического поля равномерно заряженной бесконечной поверхности не зависит от длины цилиндра и одинакова на любых расстояниях от плоскости, то есть это *поле однородно*.

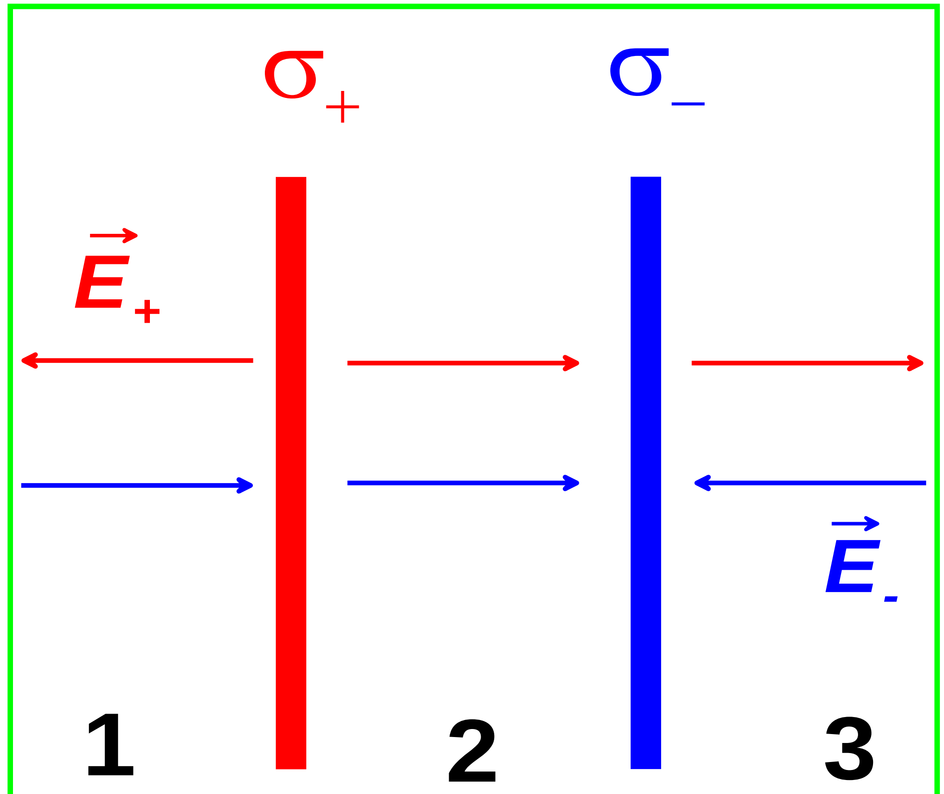
Для отрицательно заряженной поверхности расчет аналогичен, меняется лишь направление поля.

Б) Поле двух разноименно заряженных бесконечных плоскостей

Пусть имеются две бесконечные плоскости, параллельные друг другу и заряженные противоположными по знаку зарядами. Для нахождения напряженности воспользуемся результатом предыдущей задачи и принципом суперпозиции. Слева и справа от двух поверхностей электрические поля направлены в противоположные стороны и гасят друг друга,

поэтому в областях 1 и 3 суммарное поле равно нулю

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 0$$



Между плоскостями (область 2) поля направлены в одну сторону

$$\vec{E}_{+} = \vec{E}_{-}$$

Поэтому величина напряженности суммарного поля здесь равна

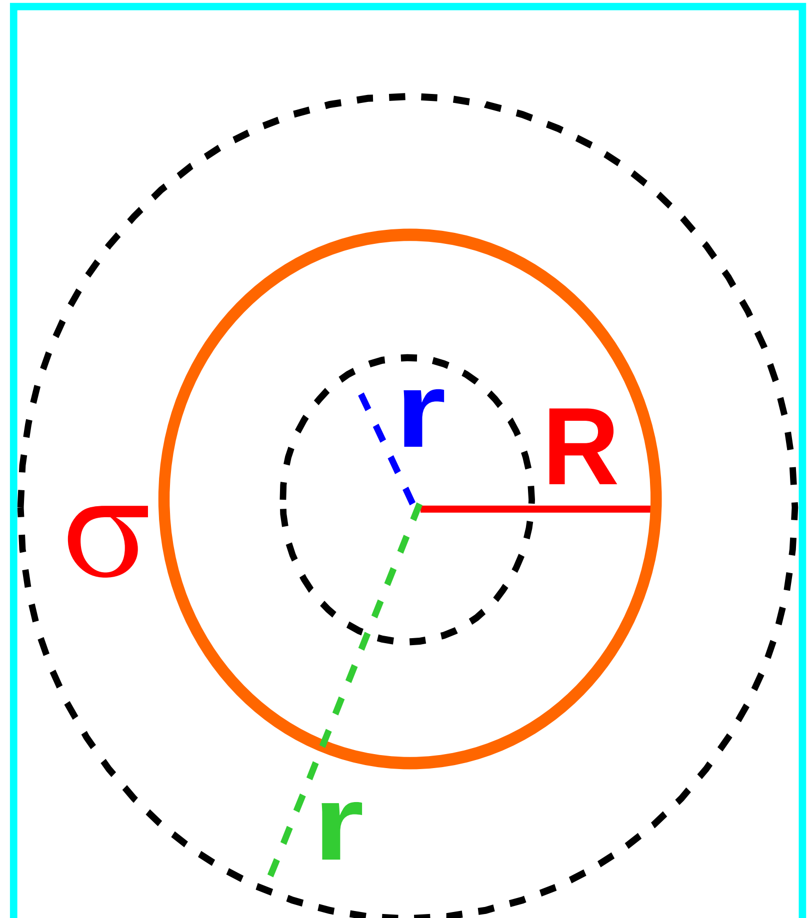
$$\boxed{E = E_{+} + E_{-} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \qquad (1.7.4)$$

В) Поле равномерно заряженной сферической поверхности

Пусть сфера радиуса **R** заряжена так, что ее заряд **Q** равномерно распределен по поверхности. Тогда поверхностная плотность заряда равна

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Поле такой сферы обладает сферической симметрией – **силовые линии направлены радиально**. Построим замкнутую поверхность в виде сферы радиуса **r** и имеющую один центр с заряженной сферой.



Если $r < R$, то внутри замкнутой поверхности нет зарядов, поэтому поле равно нулю $E = 0$.

Итак, *внутри заряженной сферы поле равно нулю*.

Если $r \geq R$, то внутрь замкнутой поверхности попадает весь заряд сферы, поэтому по теореме Остроградского-Гаусса

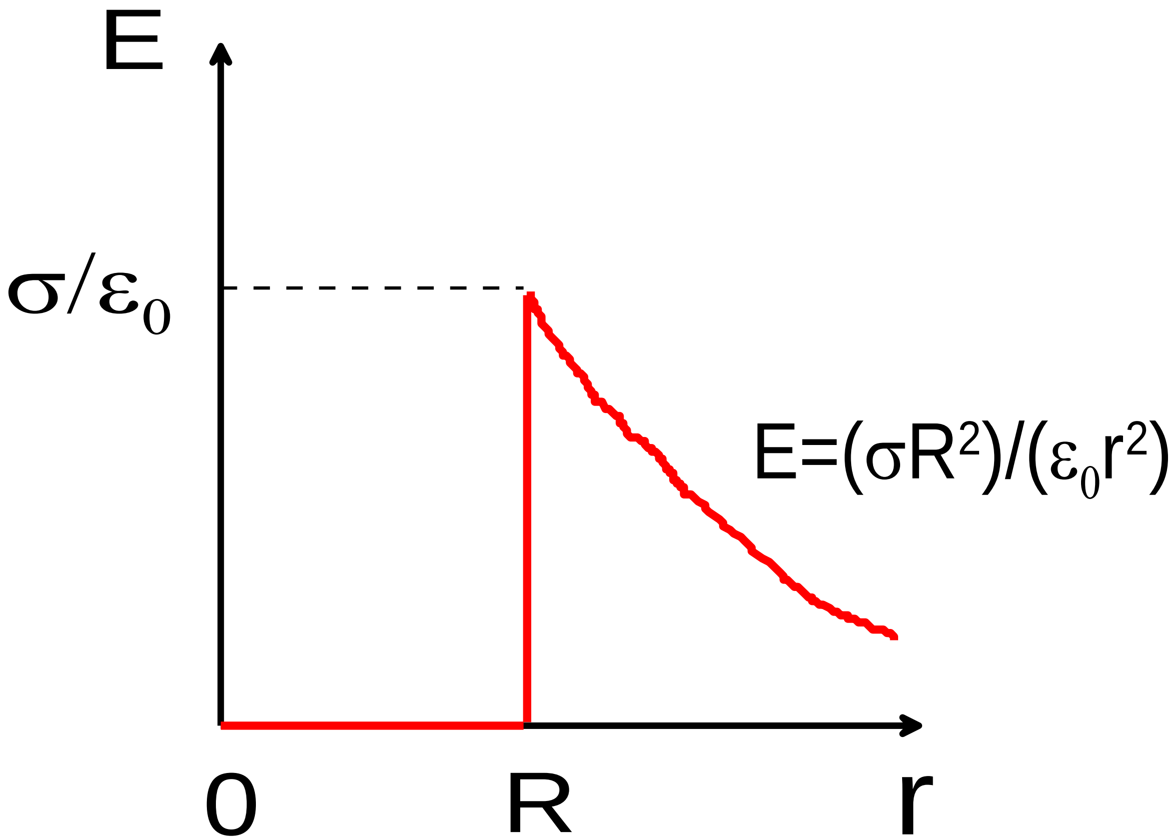
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dq = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Откуда

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R^2\sigma}{r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}} \qquad (1.7.5)$$

Таким образом, *вне сферы поле тождественно полю точечного заряда той же величины* Q *и расположенного в центре сферы*. Непосредственно на сфере напряженность поля равна $E = \sigma/\varepsilon_0$

На рисунке показано распределение напряженности электрического поля заряженной сферы в зависимости от расстояния, отсчитанного от ее центра.



На поверхности сферы напряженность электрического поля терпит скачок, равный σ/ε_0 **.**

Г) Поле объемно заряженного шара

Рассмотрим шар радиуса R заряженный с постоянной объемной плотностью ρ . Его электрическое поле тоже обладает сферической симметрией.

Снова построим замкнутую поверхность в виде концентрической сферы радиуса r. Если $r \geq R$, то внутри этой поверхности будет весь заряд шара Q, равный

$$Q = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

По теореме *Остроградского-Гаусса*, как и ранее, получаем

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Откуда *напряженность поля вне шара* равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R^3 \rho}{3r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2} \qquad (1.7.6)$$

Если r < R , то внутри замкнутой поверхности находится заряд, равный

$$Q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

поэтому по теореме Остроградского-Гаусса

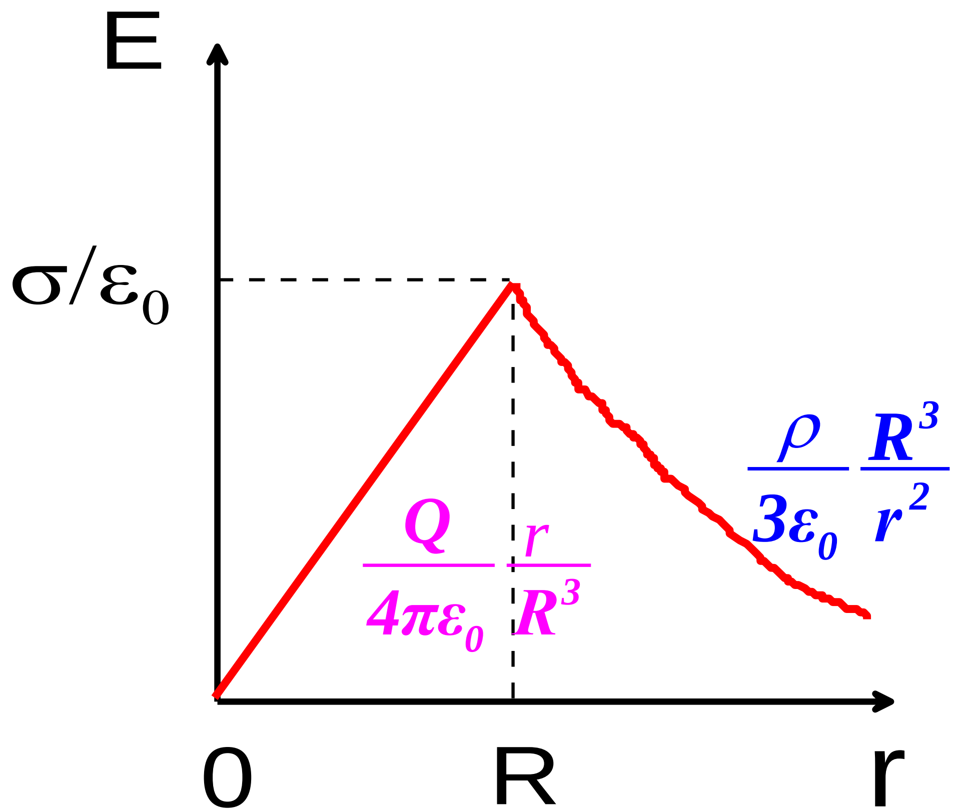
$$\Phi_E = 4\pi r^2 E = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{r^3}{R^3}$$

Следовательно, *напряженность поля внутри шара* равна

$$\boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3}} \qquad (1.7.7)$$

Зависимость напряженности поля внутри шара от расстояния r *линейная*.

На рисунке показано распределение напряженности электрического поля объемно заряженного шара в зависимости от расстояния, отсчитанного от центра шара.



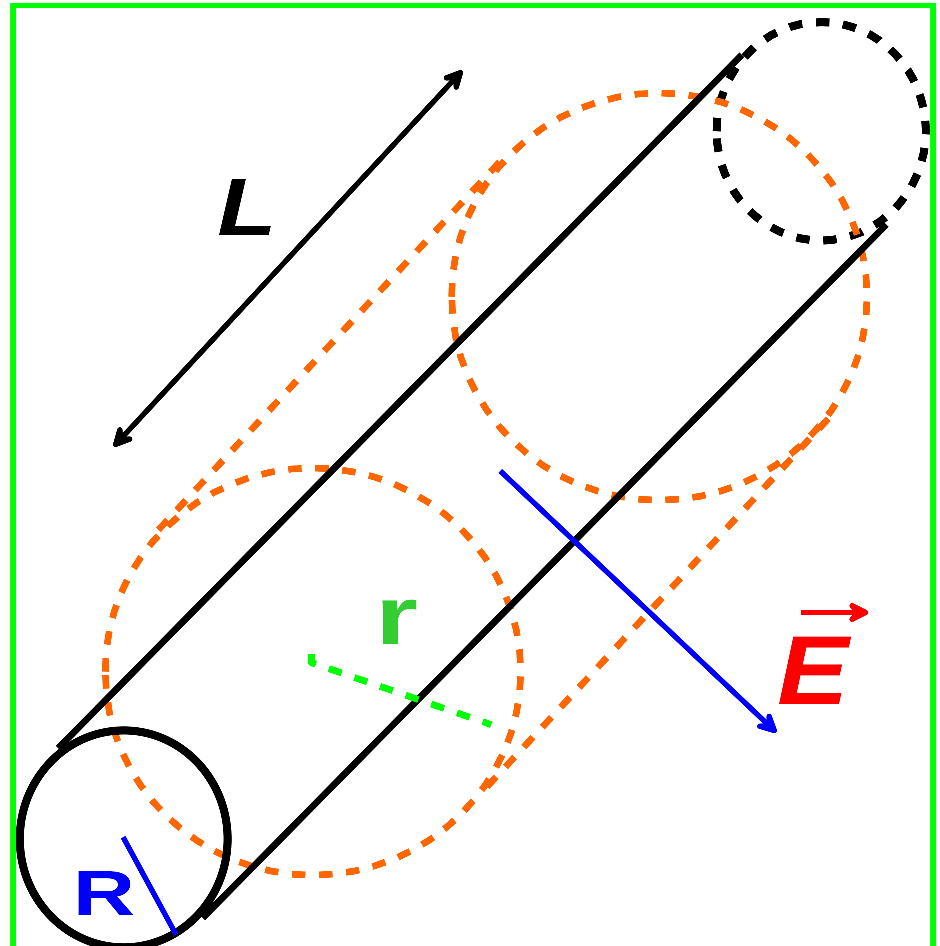
Д) Поле бесконечного заряженного цилиндра

Рассмотрим цилиндр радиуса **R** заряженный равномерно с линейной плотностью λ . Из симметрии цилиндра как фигуры следует, что напряженность поля в любой точке должна быть направлена по прямой, ***перпендикулярной*** оси цилиндра.

Выберем замкнутую поверхность в виде ***коаксиального цилиндра*** радиуса **r** и длиной **L**. Поток через его торцы равен нулю, так как силовые линии их не пересекают.

Пусть $r > R$ тогда поток через боковую поверхность цилиндра равен

$$\oint\limits_S \vec{E}d\vec{S} = E\oint\limits_S dS = E \cdot 2\pi rL = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



где Q – заряд внутри выбранной замкнутой поверхности (пунктирный цилиндр). Отсюда получаем ***напряженность поля вне исходного цилиндра***

$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}} \qquad (1.7.8)$$

где $\dfrac{Q}{L} = \lambda$ - линейная плотность заряда.

Введем поверхностную плотность заряда согласно

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{2\pi RL} = \frac{\lambda}{2\pi R}$$

где S – площадь боковой поверхности. Выражая λ через σ и подставляя (1.7.8), получаем ***другое выражение для напряженности поля вне цилиндра***

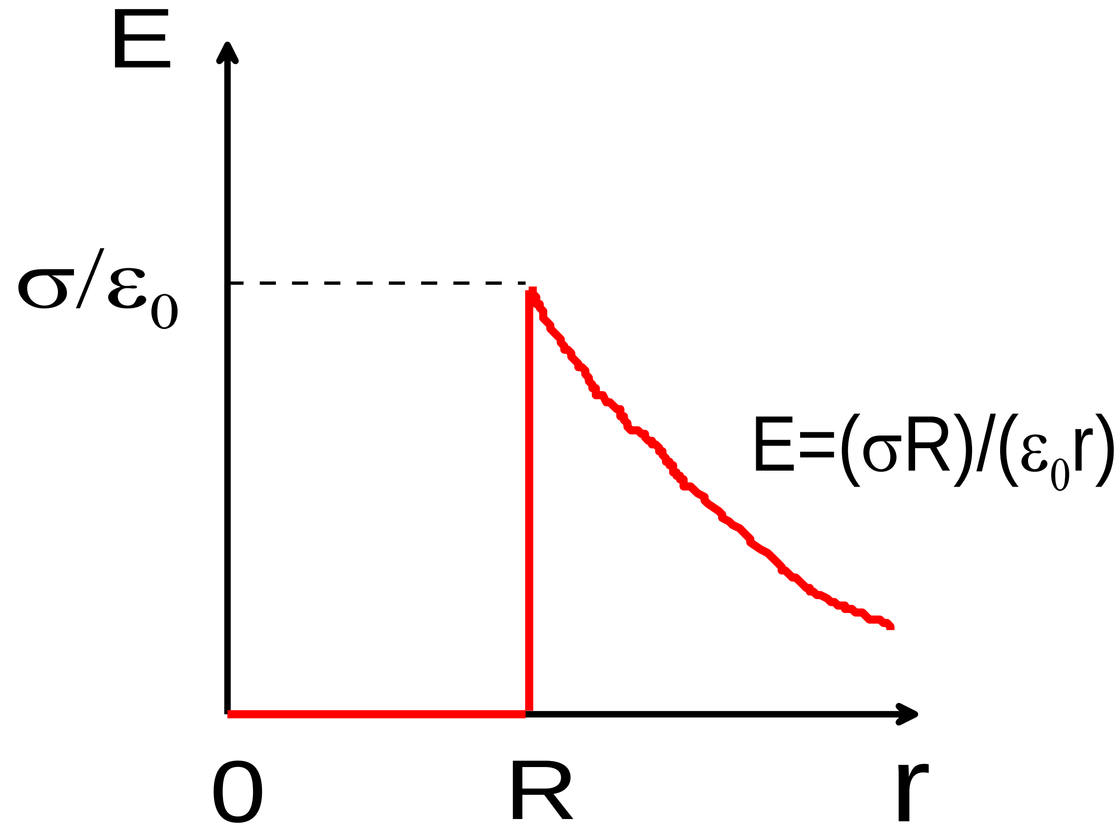
$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi R\sigma}{r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R}{r}} \qquad (1.7.9)$$

При $r = R$ напряженность поля равна $E = \sigma/\varepsilon_0$.

Если $r < R$, то внутри замкнутой поверхности зарядов нет, поэтому *поле внутри заряженного цилиндра равно нулю*.

Значит, при прохождении через боковую поверхность напряженность электрического поля терпит скачок, равный σ/ε_0 , как и в случае заряженной сферы.

На рисунке показано изменение напряженности электрического поля от расстояния, отсчитанного от оси цилиндра.



На боковой поверхности цилиндра напряженность электрического поля терпит скачок , равный σ/ε_0 .

1.9 Потенциал электростатического поля

Рассмотрим электрическое поле точечного заряда **q**. Поместим в это поле другой заряд **q´**, на него будет действовать кулоновская сила

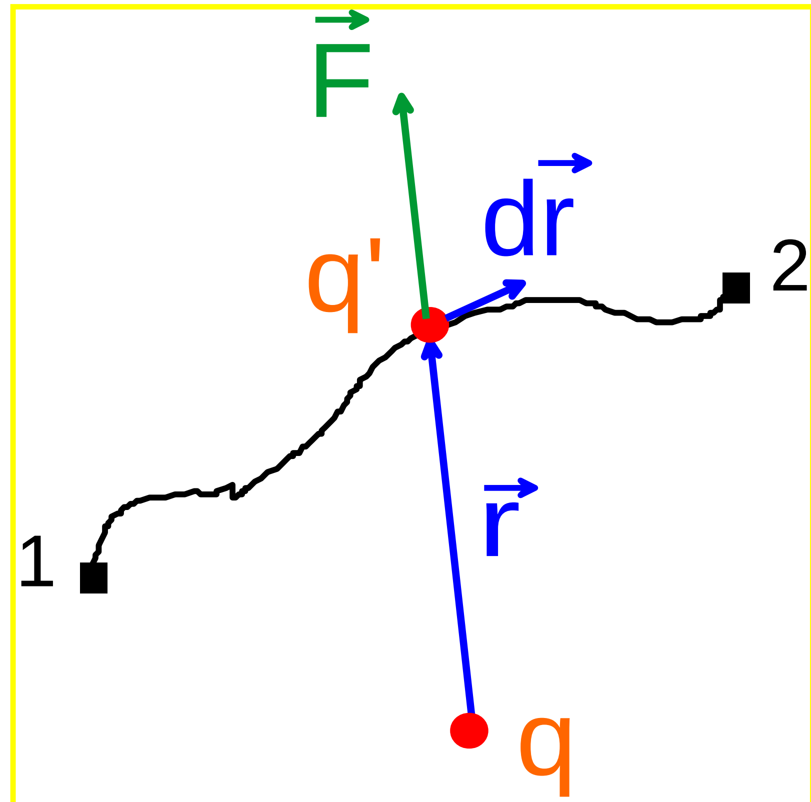
$$\vec{F}(\vec{r}) = k\frac{qq'}{r^2}\vec{e}_r = F(r)\cdot\vec{e}_r$$

где $\vec{e}_r$ - единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора $\vec{r}$, соединяющего заряд **q** с зарядом **q´**. Кулоновская сила – центральная сила, поэтому она консервативна и совершаемая ей работа при перемещении заряда **q´** в поле заряда **q** не зависит от пути.

Пусть 1 и 2 начальная и конечная точки, в которых находился заряд q'. Работа кулоновской силы на пути между этими точками равна

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int_1^2 F(r)(\vec{e}_r \cdot d\vec{r}) = \int_1^2 F(r)dr = \qquad (1.9.1)$$

$$= kqq'\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}dr = -kqq'\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$



где r_1 и r_2 – расстояния между зарядами q и q' в начале и конце движения заряда q', а $(\vec{e}_r d\vec{r}) = dr$ - проекция вектора перемещения $d\vec{r}$ на направление вектора силы.

Из формулы (1.9.1) следует, что работу можно записать как разность значений потенциальной энергии $U(r)$ в начальной и конечной точках

$$A_{12} = U_1 - U_2 \qquad (1.9.2)$$

где

$$U(r) = k\frac{qq'}{r} + const$$

Величина *const* в потенциальной энергии $U(r)$ не влияет на физические свойства. Выберем ее так, чтобы при удалении заряда q´ от заряда q на бесконечность его потенциальная энергия обращалась в нуль, тогда получим

$const = 0$ и значит

$$\boxed{U(r) = k\frac{qq'}{r}} \qquad (1.9.3)$$

Будем теперь рассматривать заряд q' как пробный заряд, с помощью которого изучается электрическое поле заряда q.

Составим отношение $\dfrac{U(r)}{q'}$. Оно не зависит от величины пробного заряда и поэтому является характеристикой электрического поля заряда q

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{U(r)}{q'} = k\frac{q}{r}} \qquad (1.9.4)$$

$\varphi(r)$ - называется **потенциалом электрического поля** в точке r.

Из (1.9.4) следует, что *потенциал в заданной точке поля численно равен потенциальной энергии, которой обладает в этой точке единичный положительный заряд*.

Поэтому потенциал – является энергетической характеристикой электрического поля.

Формулу (1.9.4) можно переписать в обратном виде

$$\boxed{U = q\varphi} \qquad \textbf{(1.9.5)}$$

Значит, некоторый заряд q, находящийся в точке поля с потенциалом φ, имеет потенциальную энергию U.

Подставляя (1.9.5) в формулу для работы сил поля (1.9.2), совершаемой при перемещении заряда q, получаем

$$\boxed{A_{12} = U_1 - U_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad (1.9.6)$$

Следовательно, работа сил электрического поля пропорциональна убыли потенциала этого поля.

Если заряд q перемещается в точку 2, находящуюся на бесконечности, то его потенциал обращается в ноль

$$U_2(r=\infty) = q\varphi_2(r=\infty) = 0$$

а работа при таком перемещении равна $A_{1\infty} = q\varphi_1$

Следовательно, потенциал численно равен работе, совершаемой силами электрического поля над единичным положительным зарядом при его перемещении из заданной точки 1 на бесконечность.

Такую же по величине работу необходимо совершить *против сил* электрического поля, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в заданную точку поля.

Если имеется система зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_N$, то из принципа суперпозиции полей вытекает, что потенциал суммарного электрического поля системы равен сумме потенциалов электрических полей отдельных зарядов

$$\varphi = k\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i} = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i \qquad (1.9.7)$$

где - $r_1, r_2, \ldots, r_N$ - расстояния от зарядов до выбранной точки поля.

1.10 Связь между потенциалом и напряженностью электрического поля

Электрическое поле можно описать с помощью двух величин – вектором напряженности $\vec{E}$ и потенциалом φ . Между ними существует связь, найдем ее.

Для этого используем выражение для силы $\vec{F}$, действующей на заряд q в электрическом поле $\vec{E}$.

С одной стороны эта сила равна

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

С другой стороны, для консервативных сил

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\vec{\nabla}(q\varphi) = -q\vec{\nabla}\varphi$$

Приравнивая, получаем

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi} \qquad (1.10.1)$$

или в декартовых проекциях

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (1.10.2)$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$