4. Основы электромагнитной теории Максвелла

4.1 Вихревое электрическое поле

Пусть переменное магнитное поле пронизывает неподвижный замкнутый проводник. Согласно *закону Фарадея* в проводнике в этом случае возникает *ЭДС* электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i$, действие которой приводит к возникновению индукционного тока.

Опыт показывает, что появление данной *ЭДС не зависит от рода проводника и его состояния, в частности, его температуры*. Значит, она не связана с изменением свойств проводника в магнитном поле и может быть обусловлена только самим магнитным полем.

Поскольку проводник считается не подвижным, то возникший в нем индукционный ток нельзя объяснить силой Лоренца (как это было сделано раньше при рассмотрении контура с током и подвижной перемычкой 3.13), так как на неподвижные заряды она не действует.

Возникает вопрос о природе *ЭДС* электромагнитной индукции. Известно, что *ЭДС* в цепи возникает тогда, когда в ней на носители тока действуют сторонние силы. Причем эти силы должны быть не электростатического происхождения.

***Максвелл выдвинул гипотезу* о том, что причиной возникновения *ЭДС* электромагнитной индукции является некоторое *новое электрическое поле*, которое по своим свойствам отличается от электростатического поля и создается не зарядами, а переменным магнитным полем.**

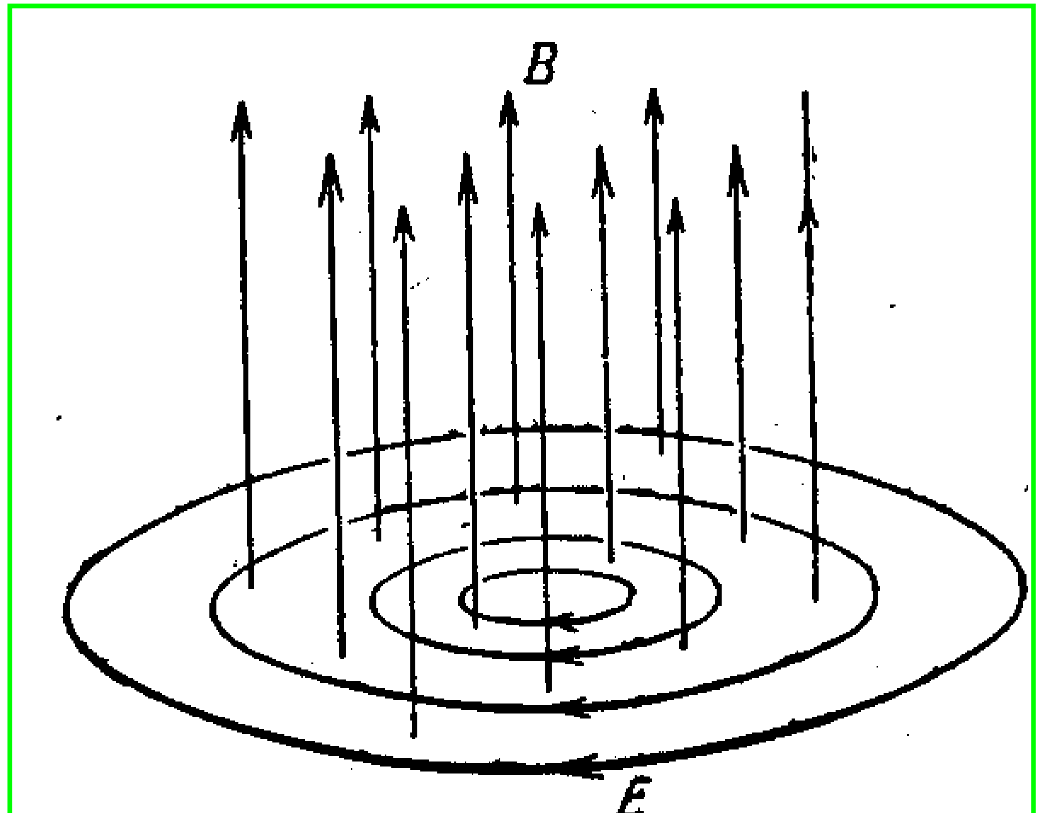
Обозначим напряженность этого нового электрического поля как $\vec{E}_в$.

Оно возникает в пространстве, окружающем переменное магнитное поле. Согласно Максвеллу, замкнутый проводник выступает всего лишь прибором, позволяющем обнаружить это поле.

Имеется *важное отличие* нового поля $\vec{E}_в$ от электростатического поля.

Силовые линии электростатического поля всегда разомкнуты – они начинаются и заканчиваются на электрических зарядах. Поэтому напряжение по замкнутому контуру в электростатическом поле равно нулю (циркуляция напряженности электростатического поля равна нулю). Электростатическое поле не может поддерживать замкнутое движение зарядов и поэтому не может приводить к возникновению *ЭДС*.

В отличие от электростатического поля, электрическое поле $\vec{E}_В$, возникающее в явлении электромагнитной индукции, имеет ***замкнутые силовые линии***, поэтому оно, как и магнитное поле, является ***вихревым полем***. Это вихревое электрическое поле $\vec{E}_В$ вызывает в проводнике движение электрона по замкнутым траекториям и создает ***вихревой ток*** с замкнутыми линиями. Именно оно и выступает в роли ***сторонних сил*** и является причиной возникновения **ЭДС** электромагнитной индукции. На рисунке магнитная индукция $\vec{B}$ растет с течением времени.



Найдем связь вектора напряженности вихревого электрического поля $\vec{E}_B$ с вектором магнитной индукции $\vec{B}$.

Согласно (2.3.4), *ЭДС* в замкнутом контуре равна циркуляции вектора напряженности $\vec{E}_B$ по этому контуру

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_B d\vec{l}$$

Учитывая, что $\mathcal{E}_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ $\qquad \Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$

можем записать $\oint \vec{E}_B d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\int_S \vec{B} d\vec{S}$

где интеграл справа берется по любой поверхности S, опирающейся на контур из проводника.

Так как проводник и связанная с ним поверхность S неподвижны, то операции дифференцирования и интегрирования можно поменять местами

$$\oint \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

Здесь под знаком интеграла использован символ для частной производной по времени, так как вектор магнитной индукции $\vec{B}$ в общем случае может зависеть не только от времени, но и от координат. Применим к левой части равенства теорему Стокса

$$\oint \vec{E}_B d\vec{l} = \oint rot\vec{E}_B d\vec{S} = \oint [\vec{\nabla} \times \vec{E}_B] \cdot d\vec{S}$$

Поскольку поверхность $\mathbf{S}$ может быть выбрана произвольно, то из равенства интегралов

$$\int_S rot\vec{E}_B d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

следует равенство подинтегральных функций

$$\boxed{\mathbf{rot}\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{B}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{t}}} \qquad \mathbf{(4.1.1)}$$

Ротор вихревого электрического поля $\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{B}}$ ***равен взятой с обратным знаком производной по времени от вектора магнитной индукции*** $\vec{\mathbf{B}}$ **.**

Уравнение (4.1.1) показывает, что *изменяющееся во времени магнитное поле* $\vec{B}$ *порождает вихревое электрическое поле* $\vec{E}_B$.

Данный результат получен из рассмотрения проводящего контура. Но *вихревое электрическое поле возникает* не только в точках этого контура, но и *в любых других точках пространства, где магнитное поле меняется со временем*.

В отличие от вихревого поля, электростатическое поле потенциально и согласно (1.18.4) ротор его вектора напряженности $\vec{E}_q$ в любой точке пространства равен нулю

$$rot\vec{E}_q = 0 \qquad (4.1.2)$$

Итак, существуют два вида электрического поля – потенциальное $\vec{E}_q$ и вихревое $\vec{E}_B$.

В общем случае электрическое поле равно сумме этих двух полей

$$\vec{E} = \vec{E}_B + \vec{E}_q$$

Сложив уравнения (4.1.1) и (4.1.2), получим уравнение для суммарного электрического поля

$$\boxed{rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \qquad (4.1.3)$$

Это одно из основных уравнений теории Максвелла.

4.2 Ток смещения

Опыт подтверждает, что переменное магнитное поле создает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле.

Возникает вопрос, справедливо ли обратное – создает ли в свою очередь переменное электрическое поле магнитное поле ? Вообще говоря, этого следовало бы ожидать, исходя из симметрии законов природы.

Однако, до сих пор в рассмотрении источниками магнитного поля выступали только токи, то есть движущиеся заряды.

Чтобы утвердиться в положительном ответе на этот вопрос, **Максвелл** заметил, что если на него ответить отрицательно, то для нестационарных процессов возникает противоречие между уравнением непрерывности для плотности заряда

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (4.2.1)$$

и формулой

$$[\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}}] = \vec{j} \qquad (4.2.2)$$

связывающей напряженность магнитного поля с вектором плотности тока.

Убедимся в этом.

Возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (4.2.2)

$$\mathrm{div}[\vec{\nabla}\times\vec{H}] = \mathrm{div}\vec{j} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{j})$$

$$(\vec{\nabla}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{H}]) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{j})$$

Известно, что дивергенция ротора любого вектора равна нулю

$$(\vec{\nabla}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{H}]) = \mathrm{divrot}\vec{H} \equiv 0$$

Поэтому должна равняться нулю и дивергенция плотности тока

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}) = \mathrm{div}\vec{j} = 0$$

тогда из (4.2.1) следует, что $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

Таким образом, получили, что плотность заряда ρ не меняется с течением времени. Но это справедливо только для стационарных процессов. В случае же не стационарных процессов плотность ρ , как показывает опыт, меняется со временем.

Чтобы устранить возникшее противоречие Максвелл ввел в рассмотрение так называемый *ток смещения*, который существует помимо токов проводимости.

Этому току смещения отвечает своя плотность тока $\vec{j}_{смещ}$, которая определяется так, чтобы выполнялось условие

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{j}+\vec{j}_{смещ}) = \mathrm{div}(\vec{j}+\vec{j}_{смещ}) = 0 \qquad (4.2.3)$$

Суммарный ток (ток проводимости + ток смещения) называют *полным током*.

Так как дивергенция вектора характеризует наличие источников, то равенство нулю дивергенции полного тока (4.2.3) говорит о том, что

***у полного тока нет источников*,**

а поэтому

***линии полного тока не могут нигде ни начинаться, ни кончаться, они должны быть замкнутыми, либо уходить на бесконечность*.**

Следовательно,

***там где обрываются линии тока проводимости, к этим линиям должны непосредственно примыкать продолжающие их линии тока смещения*.**

Согласно Максвеллу, именно плотность полного тока должна входить в уравнение (4.2.2) и поэтому в действительности оно должно иметь вид

$$\boxed{[\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}}] = \vec{j} + \vec{j}_{смещ}} \qquad (4.2.4)$$

Равноправность вхождения двух токов в правую часть этого уравнения говорит о том, что токи смещения в магнитном отношении подобны токам проводимости, то есть они возбуждают магнитное поле по тем же законам, что и токи проводимости.

В тоже время, в уравнении непрерывности (4.2.1) необходимо использовать только плотность токов проводимости $\vec{j}$.

Тогда из (4.2.3) следует

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{смещ})$$

Подставляя этот результат в (4.2.1), получаем уравнение, которому должна удовлетворять плотность токов смещения

$$\boxed{(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{смещ}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}} \qquad (4.2.5)$$

Найдем явный вид для плотности тока смещения. Для этого выразим ее через вектор электрического смещения $\vec{D}$.

Используем уравнение (1.16.5)

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \rho$$

Продифференцируем его по времени

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Поменяем в левой части порядок дифференцирования по времени и координатам

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$$

Подставим производную от плотности в уравнение (4.2.5)

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{смещ}) = (\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$$

Отсюда следует, что с точностью до произвольной функции времени F(t) не зависящей от координат, выражения под знаком градиента слева и справа должны совпадать.

Полагая эту функцию равной нулю F(t) = 0, получаем

$$\boxed{\vec{j}_{смещ} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \qquad (4.2.6)$$

Это и есть искомый результат.

Подставляя (4.2.6) в формулу (4.2.4), получим еще одно уравнение Максвелла

$$[\vec{\nabla} \times \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (4.2.7)$$

Оно показывает, что *магнитное поле порождается не только токами проводимости (первое слагаемое), но и меняющимся во времени электрическим полем (второе слагаемое).*

Введение тока смещения сделало электрическое и магнитное поля равноправными и взаимно связанными.

Согласно уравнениям *Максвелла* (4.1.3) и (4.2.7) ***электрическое и магнитное поля способны порождать друг друга и превращаться друг в друга.***

Всякое изменение магнитного поля всегда сопровождается появлением электрического поля и, наоборот, всякое изменение электрического поля приводит к появлению магнитного поля.

***Поэтому электрическое и магнитное поля образуют единое электромагнитное поле*.**

***Термин ток смещения является условным*.** **По существу ток смещения – это изменяющееся во времени электрическое поле.**

Из всех свойств, присущих току проводимости, ток смещения обладает лишь одним свойством – способностью создавать магнитное поле.

Ток смещения получил название тока лишь потому, что его размерность

$$\vec{j}_{смещ} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

совпадает с размерностью плотности тока.

Ток смещения всегда возникает там, где есть изменяющееся во времени электрическое поле.

В частности, ток смещения возникает внутри проводов, по которым течет переменный ток. Но обычно он здесь мал по сравнению с токами проводимости.

Для тока смещения, как и для тока проводимости, можно строить линии тока.

Рассмотрим в качестве примера плоский конденсатор. Согласно (1.17.2) электрическое смещение в зазоре конденсатора равно поверхностной плотности заряда на обкладке

$$D = \sigma$$

Возьмем производную по времени

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Согласно (4.2.6), левая часть этого равенства есть плотность тока смещения в зазоре. Правая же часть равна плотности тока проводимости внутри обкладок.

Их равенство означает, что на границе обкладок линии тока проводимости непрерывно переходят в линии тока смещения. Это показывает, что линии полного тока действительно непрерывны и замкнуты.

Выпишем все уравнения Максвелла, которым удовлетворяют электрическое и магнитное поле

(4.2.8)

$$[\vec{\nabla} \times \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

вытекает из закона электромагнитной индукции Фарадея, говорит о существовании вихревого электрического поля

(4.2.9)

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$

указывает на отсутствие магнитных зарядов, источником магнитного поля являются только токи

(4.2.10)

$$[\vec{\nabla} \times \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

выражает зависимость магнитного поля от токов проводимости и токов смещения

(4.2.11)

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \rho$$

эквивалентно закону Кулона, показывает, что источниками электрического смещения являются сторонние заряды

Четыре уравнения (4.2.8) - (4.2.11) называются уравнениями Максвелла в дифференциальной форме.

В них неизвестными являются $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{j}, \rho$ - их больше, чем уравнений. Поэтому одних только уравнений Максвелла недостаточно, чтобы найти все неизвестные. Для этого их надо дополнить полученными ранее "материальными" уравнениями

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \qquad (4.2.12)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \qquad (4.2.13)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \qquad (4.2.14)$$

Уравнения (4.2.8) - (4.2.14) являются *основными уравнениями электродинамики покоящихся сред*.

Из принципа относительности Эйнштейна следует, что отдельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет относительный смысл.

Например, если электрическое поле создается системой неподвижных зарядов, то эти заряды, являясь неподвижными относительно одной инерциальной системы отсчета, будут двигаться относительно другой и поэтому будут порождать не только электрическое, но и магнитное поле.

Аналогично, неподвижный относительно одной инерциальной системы отсчета проводник с постоянным током, возбуждая в каждой точке пространства постоянное магнитное поле, движется относительно других инерциальных систем, и создаваемое им переменное магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле.