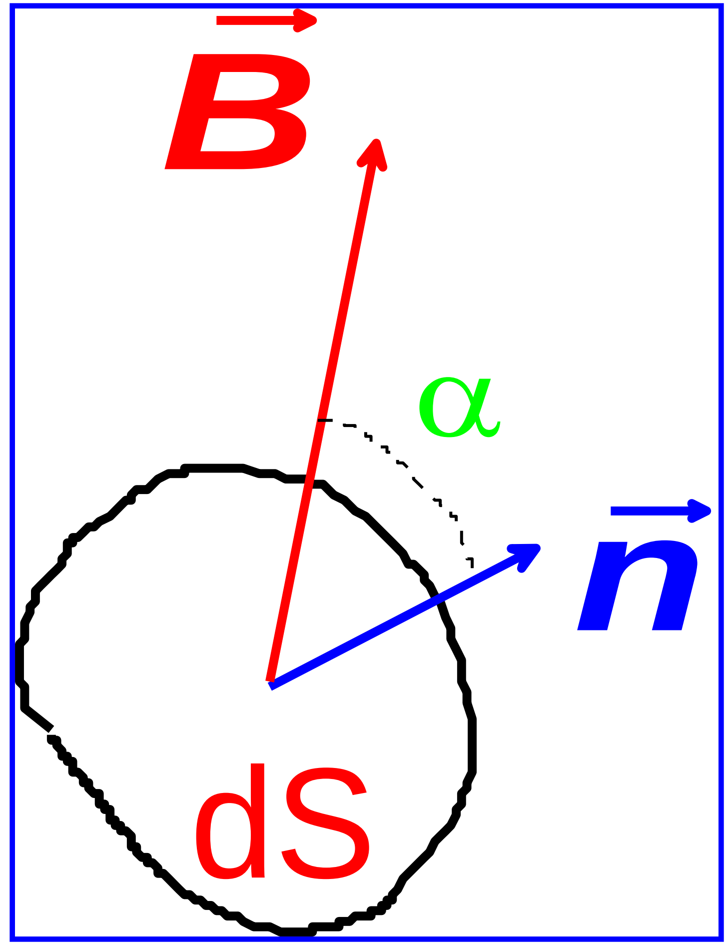
3.9 Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля.

Магнитным потоком через элементарную площадку **dS** *называется величина, равная*

$$d\Phi_B = (\vec{B}d\vec{S}) = B_n dS$$

$$d\vec{S} = \vec{n}dS$$

$$B_n = B\cos\alpha$$



B_n – проекция вектора магнитной индукции на направление нормали.

Величина потока $d\Phi_B$ равна числу силовых линий B, пересекающих площадку dS.

Магнитный поток через произвольную поверхность S равен

$$\Phi_B = \int\limits_S \vec{B} d\vec{S} = \int\limits_S B_n dS \qquad (3.9.1)$$

Если поверхность S плоская и перпендикулярна вектору магнитной индукции, то поток равен

$$\Phi_B = BS$$

Эта формула используется для определения единицы магнитного потока - *вебера*.

1 Вебер (Вб) **– это поток магнитного поля с индукцией в 1 Тл, проходящий через плоскую единичную поверхность (площадью 1 м^2), перпендикулярную к силовым линиям.**

Поток вектора $\mathbf{B}$ может быть как положительным, так и отрицательным. Это зависит от выбора направления нормали к поверхности $\mathbf{n}$ через знак $\cos\alpha$.

***Положительное направление нормали связывают с контуром, по которому течет ток, - нормаль определяется по правилу правого винта*.**

Поэтому магнитный поток, созданный контуром с током через поверхность, ограниченную самим контуром, положителен.

Поскольку *линии магнитной индукции не имеют ни начала ни конца*, то количества силовых линий входящих и выходящих через любую замкнутую поверхность S равны друг другу. Однако, знаки потоков, созданных входящими и выходящими силовыми линиями, противоположны, поэтому полный поток через замкнутую поверхность равен нулю

Теорема Гаусса для магнитной индукции

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \qquad (3.9.2)$$

В отличие от магнитного потока, поток напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в общем случае не равен нулю – он пропорционален заряду внутри этой поверхности q/ε_0.

Применим к формуле (3.9.2) теорему Остроградского-Гаусса – перейдем в ней от поверхностного интеграла к объемному

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = \int_V div\vec{B}dV = 0$$

Данное равенство должно выполняться для любого объема V, что может быть обеспечено, лишь если подинтегральная функция равна нулю в каждой точке пространства, следовательно

$$\boxed{div\vec{B} = 0} \qquad (3.9.3)$$

3.10 Ротор магнитного поля

Пусть в пространстве токи текут непрерывно и описываются плотностью тока *j*. Найдем циркуляцию магнитного поля по некоторому замкнутому контуру *L*. Выберем поверхность S, опирающуюся на этот контур. Разобьем ее на малые элементарные площадки dS. Через каждую площадку течет элементарный ток, равный

$$dI = (\vec{j}d\vec{S})$$

Циркуляция магнитного поля по всему замкнутому контуру пропорциональна сумме всех токов, охватываемых контуром, что сводится к интегралу

$$\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \int\limits_S dI = \mu_0 \int\limits_S \vec{j}d\vec{S}$$

Применим к левой части этого равенства теорему Стокса – перейдем от интеграла по контуру *L* к интегралу по поверхности *S*, натянутой на этот контур

$$\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \int\limits_S [\vec{\nabla} \times \vec{B}]d\vec{S} = \mu_0 \int\limits_S \vec{j}d\vec{S}$$

Последнее равенство должно выполняться для любой поверхности S, опирающейся на контур L, поэтому должны равняться подинтегральные функции двух поверхностных интегралов

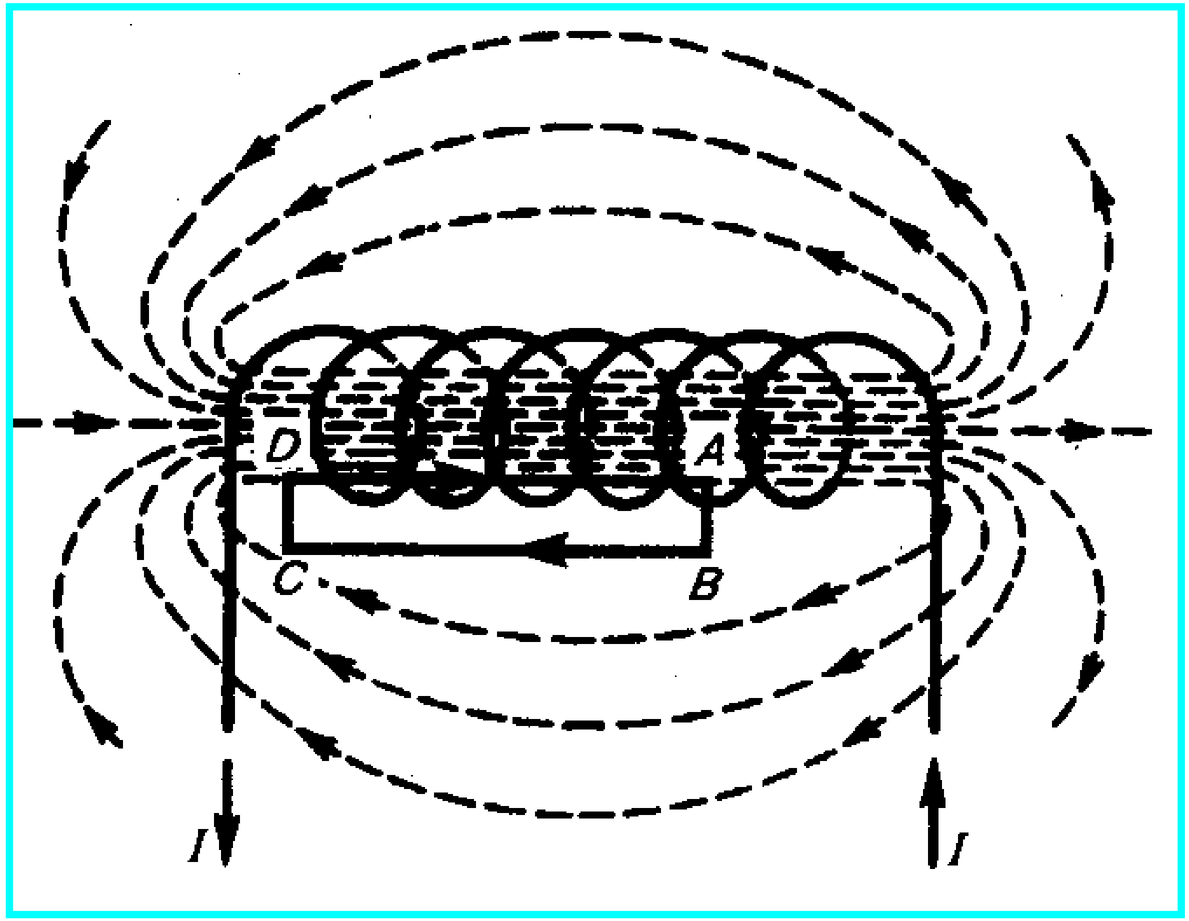
$$[\vec{\nabla} \times \vec{B}] = rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad (3.10.1)$$

Следовательно, *ротор магнитной индукции в некоторой точке пространства равен произведению магнитной постоянной на плотность тока в этой точке*.

Поле, у которого ротор отличен от нуля называют *вихревым или соленоидальным*. Поэтому магнитное поле – вихревое.

3.11 Магнитное поле соленоида

***Соленоид – это провод, навитый на цилиндр*. По проводу течет ток *I*. Круговые токи витков создают магнитное поле, силовые линии которого внутри и вне соленоида направлены в разные стороны.**



Чем соленоид длиннее, тем слабее магнитное поле вне его.

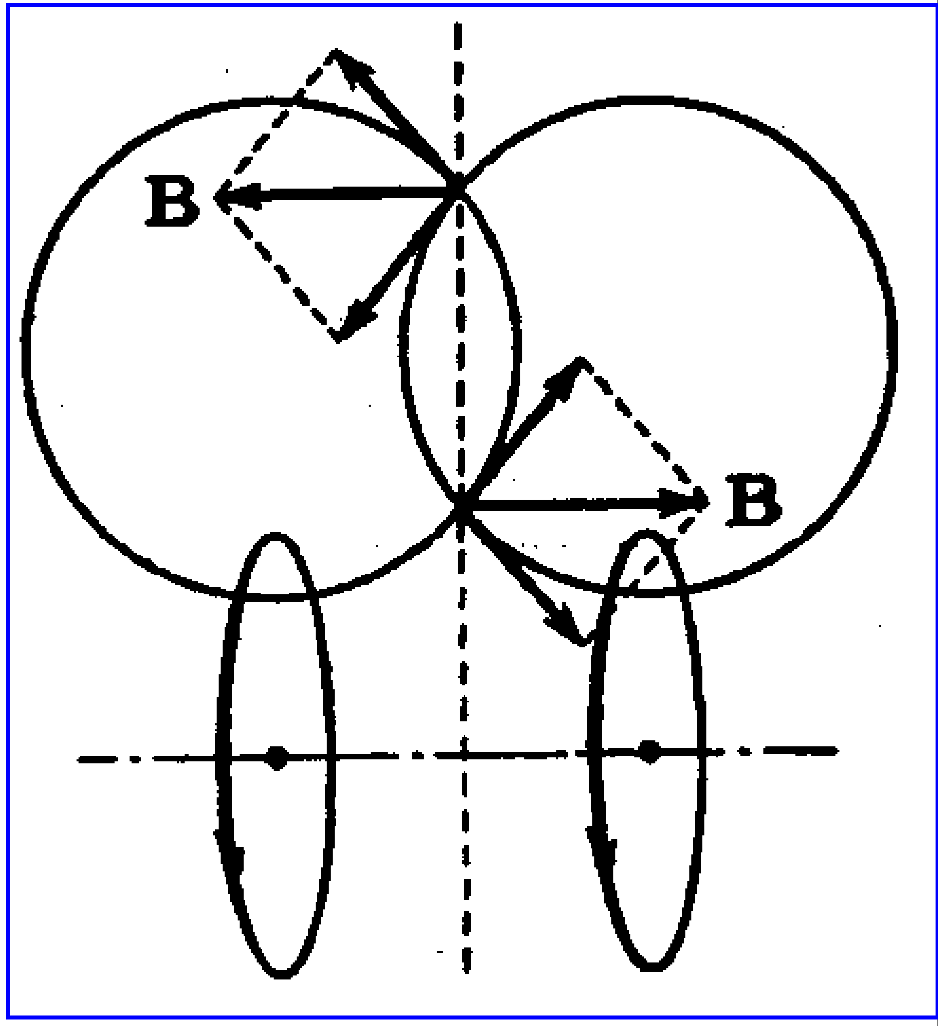
Покажем это.

Рассмотрим два соседних витка соленоида.

Проведем плоскость, перпендикулярную оси соленоида и проходящую посередине между витками. Суммарное магнитное поле в точках этой плоскости направлено вдоль оси соленоида.

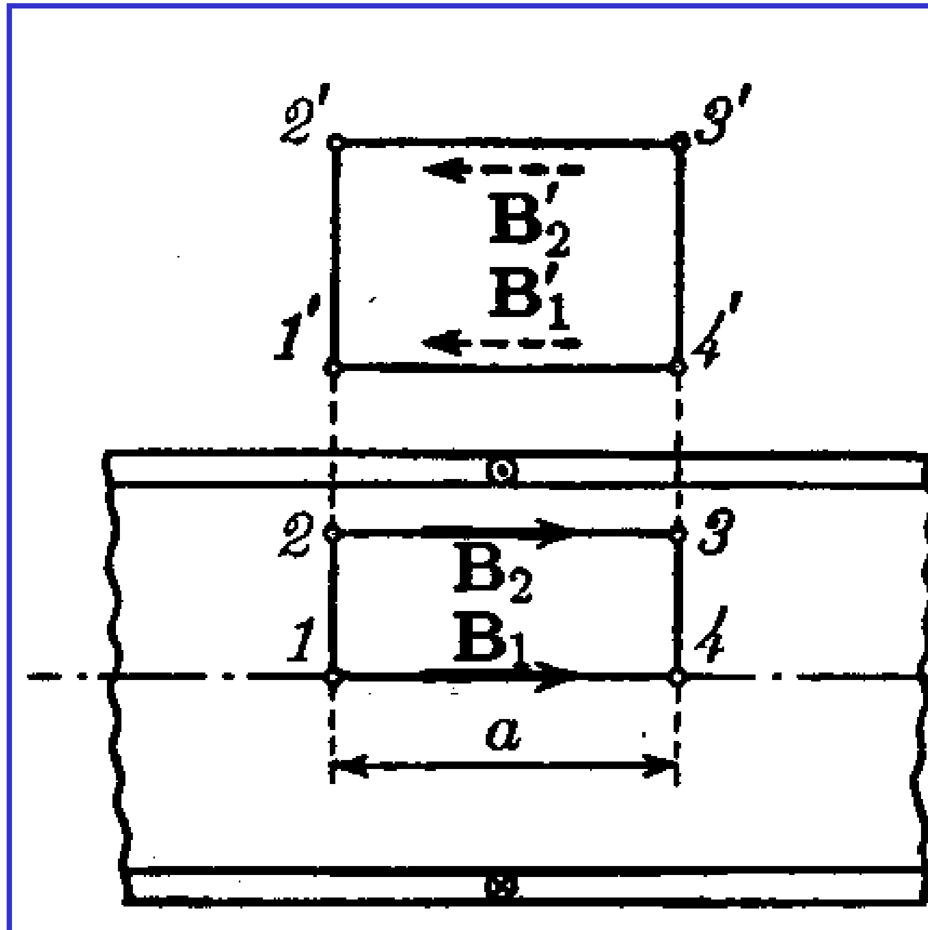
Если сблизить витки, то нижняя точка пересечения силовых линий будет находится внутри соленоида, а верхняя точка – вне соленоида.

Поэтому *у бесконечного соленоида вектор магнитной индукции в любой точке направлен параллельно оси, но в противоположные стороны внутри и вне соленоида*.



Покажем, что отсюда следует однородность магнитного поля бесконечного соленоида.

Рассмотрим сначала область внутри соленоида. Выберем в ней замкнутый прямоугольный контур (1-2-3-4).



Участки (1-4) и (2-3) параллельны оси соленоида и имеют длину a. Обойдем контур по часовой стрелке. В результате получим циркуляцию

$$\oint\limits_{1234} \vec{B}d\vec{l} = (B_2 - B_1)a$$

где учтено, что вклады от участков (1-2) и (3-4) равны нулю.

Контур (1-2-3-4) не охватывает токов, поэтому циркуляция вдоль него равна нулю, откуда

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_1$$

Так как стороны контура можно выбирать произвольно, то магнитное поле в любой точке внутри соленоида одно и тоже, то есть оно однородно.

Теперь рассмотрим контур (1´- 2´- 3´- 4´) вне соленоида. Этот контур тоже не охватывает токов, поэтому

$$\vec{B}_1' = \vec{B}_2'$$

Из произвольности сторон контура (1´- 2´- 3´- 4´) опять следует однородность магнитного поля вне соленоида.

Теперь найдем циркуляцию магнитной индукции по прямоугольному контуру ABCD (на первом рисунке), одна часть которого находится внутри соленоида, а другая – вне его. Пусть этот контур охватывает *N* витков. Тогда магнитная циркуляция вдоль него равна

$$\oint\limits_{ABCD} \vec{B}d\vec{l} = (B + B')a = \mu_0 NI$$

где *a* – длина сторон BC и AD. Разделив на *a*, получим

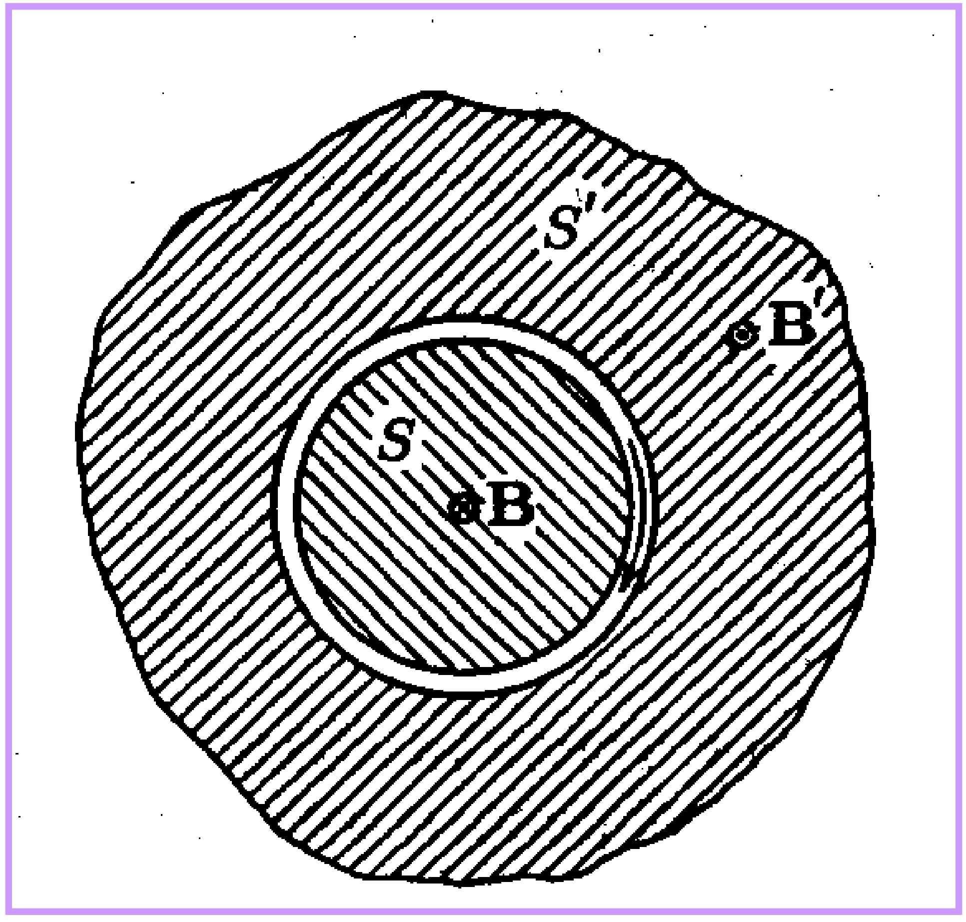
$$B + B' = \mu_0 nI \qquad (3.11.1)$$

где *n = N/a* – число витков на единицу длины соленоида.

Из формулы (3.11.1) следует, что магнитная индукция имеет конечные значения как внутри, так и вне соленоида.

Проведем плоскость, перпендикулярную оси соленоида. В ней выделим круговое сечение соленоида S и окружающую поверхность S'.

Поскольку силовые линии магнитной индукции замкнуты, то магнитный поток через всю плоскость ($S + S'$) равен нулю.



С другой стороны, полный поток равен сумме потоков через поверхности S и S′

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}d\vec{S} + \int_{S'} \vec{B}'d\vec{S}' = BS - B'S' = 0$$

Знак минус связан с противоположным направлением магнитных полей внутри B и вне соленоида B′. Таким образом, получаем

$$BS = B'S'$$

В левой части этого равенства оба сомножителя конечны, тогда как в правой части площадь S′ бесконечно большая. Чтобы равенство удовлетворялось необходимо потребовать, чтобы B′ = 0.

Подставляя $B' = 0$ в формулу (3.11.1), получаем выражение для магнитной индукции внутри бесконечного соленоида

$$\boxed{B = \mu_0 nI} \qquad (3.11.2)$$

Магнитный поток через один виток равен

$$\Phi_в = BS$$

Тогда полный поток Φ_c через все витки соленоида есть

потокосцепление

$$\Phi_c = \Phi_в N = BSN \qquad (3.11.3)$$

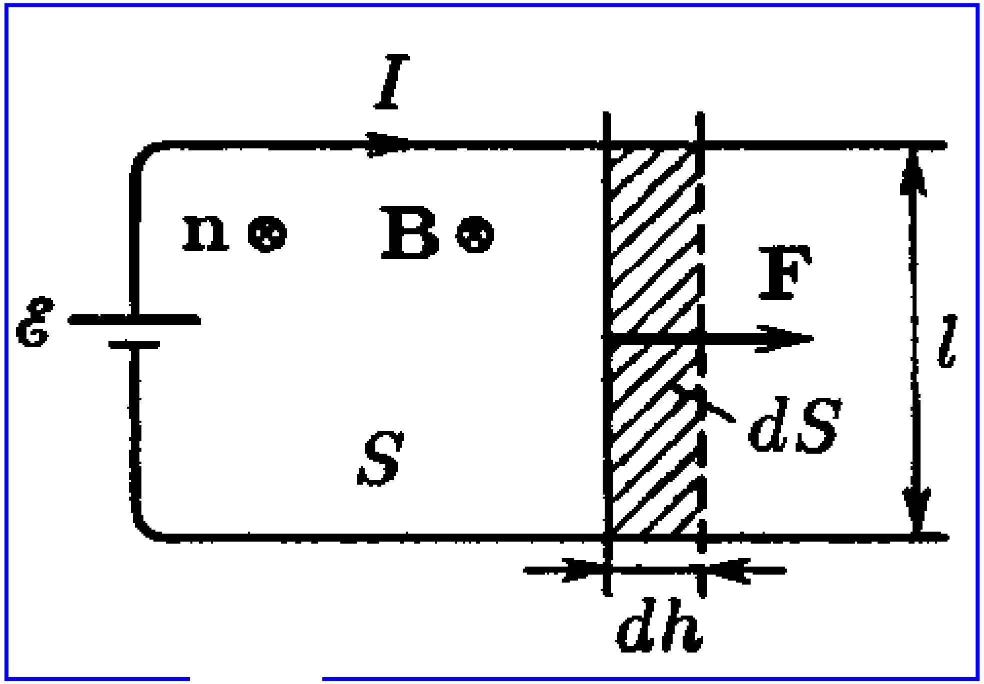
3.13 Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле

Поместим в однородное магнитное поле не закрепленный проводник с током. На него будет действовать сила Ампера. В результате проводник начнет перемещаться. Значит, магнитная сила совершает над ним работу. Найдем выражение для этой работы.

Пусть в прямоугольном контуре с током I одна из сторон (перемычка) длиной l может свободно передвигаться.

Ток в контуре вызван ε - ЭДС.

Индукция **B** и нормаль **n** направлены в лист.



На перемычку действует сила Ампера

$$F = IBl$$

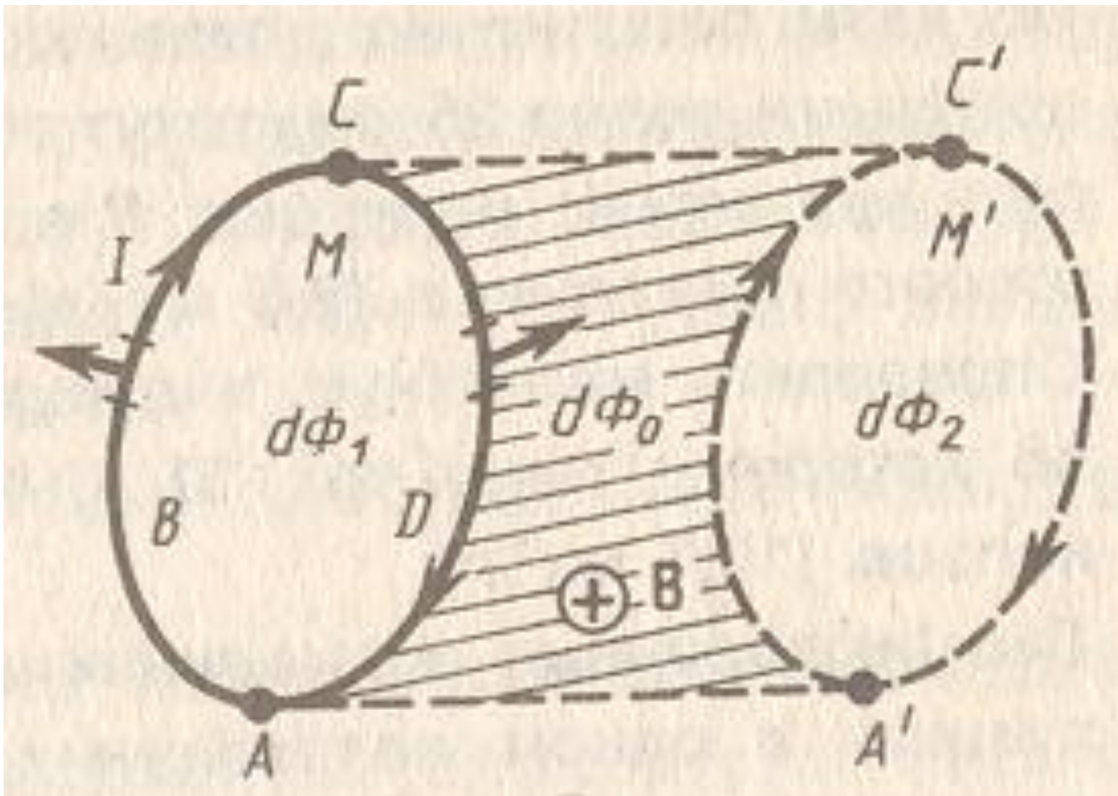
вызывающая ее перемещение на некоторое расстояние dh**.**
На этом пути сила Ампера совершает работу

$$dA = Fdh = IBldh = IBdS = Id\Phi \qquad (3.13.1)$$

Следовательно, *работа магнитных сил по перемещению проводника с током равна произведению силы тока на магнитный поток через площадь, пересеченную проводником.*

***Однако, эта работа совершается не за счет энергии внешнего магнитного поля, а за счет источника, поддерживающего постоянным ток в контуре*.**

Теперь найдем работу по перемещению произвольного замкнутого контура (**ABCD**) с постоянным током ***I*** в магнитном поле с индукцией ***B***. Пусть контур лежит в плоскости листа и перемещается под действием силы **Ампера** на малое расстояние. Вектор магнитной индукции, как и раньше, входит в лист.



Разобьем контур (ABCD) на два проводника (ABC) и (СДА), соединенных своими концами.

Работа силы Ампера по перемещению контура (ABCD) равна сумме работ по перемещению этих двух проводников

$$dA = dA_1 + dA_2$$

где dA_1 - работа силы Ампера по перемещению проводника ABC, dA_2 - работа по перемещению проводника СДА.

Силы Ампера, приложенные к участку ABC, образуют с вектором перемещения тупые углы, поэтому работа этих сил отрицательная

$$dA_1 < 0$$

и ее можно записать как $dA_1 = -I(d\Phi_0 + d\Phi_1)$, **где** $d\Phi_0$ **– поток через заштрихованную поверхность, а** $d\Phi_1$ **– поток через контур в его начальном положении ABCD.**

На участке СДА силы Ампера образуют с вектором перемещения острые углы, поэтому их работа положительная

$$dA_2 > 0$$

и ее можно записать как $dA_2 = I(d\Phi_0 + d\Phi_2)$

где $d\Phi_2$ **– поток через контур в его конечном положении A′B ′ C ′ D ′.**

Полная работа сил Ампера по перемещению контура равна

$$dA = I(d\Phi_0 + d\Phi_2) - I(d\Phi_0 + d\Phi_1) =$$
$$= I(d\Phi_2 - d\Phi_1) \qquad (3.13.2)$$

где ($d\Phi_2$ - $d\Phi_1$) – изменение магнитного потока сквозь площадь контура.

Если перемещение конечное, то работа равна интегралу от (3.13.2)

$$A = I\Delta\Phi \qquad (3.13.3)$$

Таким образом, ***работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока*** **$\Delta\Phi$,** ***сцепленного с контуром*****.**