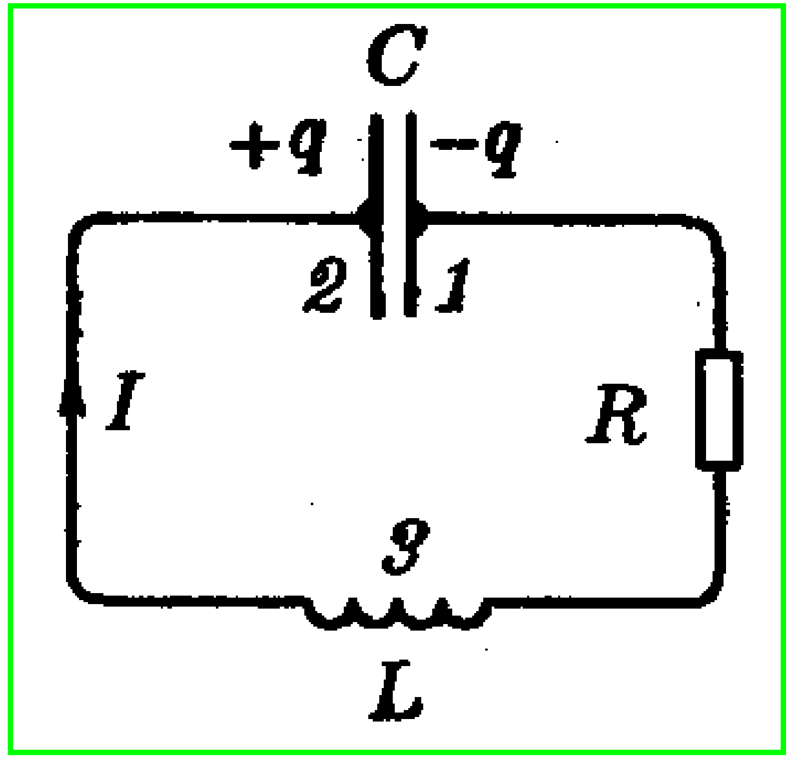
8. Колебания в электрическом контуре

8.1 Свободные гармонические колебания в электрическом контуре

Колебательный электрический контур – это замкнутая цепь, состоящая из конденсатора C, индуктивности L и сопротивления R. ЭДС в цепи отсутствует. Для возбуждения колебаний конденсатор заряжают, сообщая обкладкам заряды $\pm q$. В конденсаторе возникает электрическое поле с энергией

$$W_c = \frac{q^2}{2C}$$



Если затем конденсатор замкнуть на катушку индуктивности, то он начнет разряжаться и в контуре потечет ток I, увеличивающийся со временем. Вместе с ним будет возрастать магнитное поле в катушке.

В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, а энергия магнитного поля катушки

$$W_L = \frac{L\dot{q}^2}{2}$$

наоборот, будет увеличиваться.

В момент, когда конденсатор полностью разрядится, его энергия и электрическое поле будут равны нулю, а ток в цепи и энергия магнитного поля в катушке будут максимальными.

После этого ток и магнитное поле в катушке начнут убывать, а конденсатор начнет перезаряжаться – на обкладках возникнут заряды противоположных знаков по сравнению с первоначальными зарядами.

Поскольку магнитный поток в катушке убывает, то в ней по правилу Ленца возникнет индукционный ток, направление которого совпадает с током разрядки конденсатора.

В конденсаторе возникнет электрическое поле, которое будет стремиться ослабить ток.

Через некоторое время заряд на обкладках достигнет максимума, ток будет равен нулю. Затем процессы пойдут в обратном направлении. Через период Т система придет в первоначальное состояние.

Далее все процессы повторяться.

Получим уравнение колебаний электрического контура.

Согласно закону Ома для замкнутой цепи

$$I \cdot R + U_c = \varepsilon_s$$

где $I{\cdot}R$ – падение напряжения на сопротивлении, U_c – напряжение на конденсаторе,

ε_s - ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке

$$\varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}$$

Поэтому закон Ома принимает вид

$$L\frac{dI}{dt} + I \cdot R + \frac{q}{C} = 0$$

Поскольку $$I = \frac{dq}{dt}$$

то для заряда на обкладках конденсатора $q(t)$ **получаем уравнение**

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C} = 0 \qquad \textbf{(8.1.1)}$$

Решим это уравнение сначала для случая, когда сопротивлением цепи можно пренебречь $\mathbf{R = 0}$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Тогда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad ; \quad T = 2\pi\sqrt{LC}$$ **формула Томсона**

$$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

где q_m **– амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора.**

Сила тока в контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= I_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$I_m = \omega_0 q_m$$

- амплитуда силы тока

Напряжение на обкладках конденсатора

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$U_m = \frac{q_m}{C}$$ - **амплитуда напряжения.**

Сравнивая выражения для тока, заряда и напряжения видим, что колебания тока опережают по фазе колебания заряда и напряжения U_c на $\pi/2$. Поэтому когда ток достигает максимума, заряд и напряжение равны 0, и наоборот.

Найдем полную энергию электрического контура

$$W = W_c + W_L = \frac{q_m^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{L}{2} I_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Подставляя сюда амплитуды тока $I_m = \omega_0 q_m$ **и напряжения** $U_m = \dfrac{q_m}{C}$ **и учитывая выражение для частоты колебаний** $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ **, получаем**

$$W = W_c^{(\max)} = \frac{q_m^2}{2C} = W_L^{(\max)} = \frac{L}{2}\omega_0^2 q_m^2$$

Значит полная энергия контура совпадает с максимальной электрической энергией конденсатора и максимальной магнитной энергией катушки.

Электрические колебания в контуре можно сравнить с механическими колебаниям маятника, при которых происходит превращение потенциальной энергии в кинетическую и наоборот.

Энергия электрического поля конденсатора аналогична потенциальной энергии маятника.

$$W_c = \frac{q^2}{2C}$$

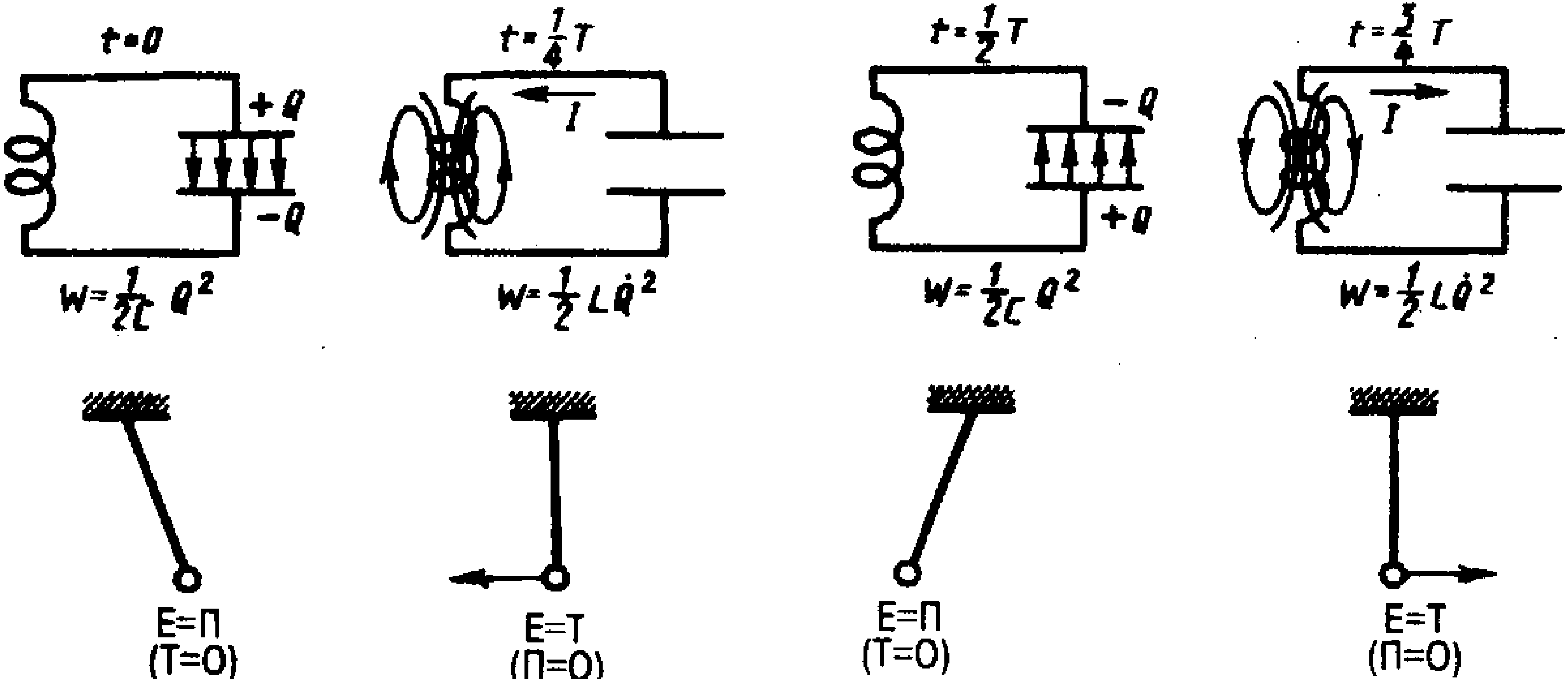
Энергия магнитного поля катушки подобна кинетической энергии маятника.

$$W_L = \frac{L\dot{q}^2}{2}$$

Сила тока в контуре подобна скорости движения маятника.

Индуктивность играет роль массы.

Сопротивление контура аналогично силе трения.



Колебания в контуре сопровождаются превращениями энергий электрического и магнитного полей.

8.2 Свободные затухающие колебания в электрическом контуре

В реальном электрическом контуре всегда имеется активное сопротивление. Протекающий по нему ток нагревает его, вследствие чего энергия контура уменьшается, а колебания в нем затухают. Поэтому вернемся к общему уравнению (8.1.1), описывающему затухающие колебания. Оно имеет вид, подобный уравнению затухающих колебаний общего вида (7.5.1)

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad \delta = \frac{R}{2L}$$

Его решениями являются затухающие колебания заряда на обкладках конденсатора

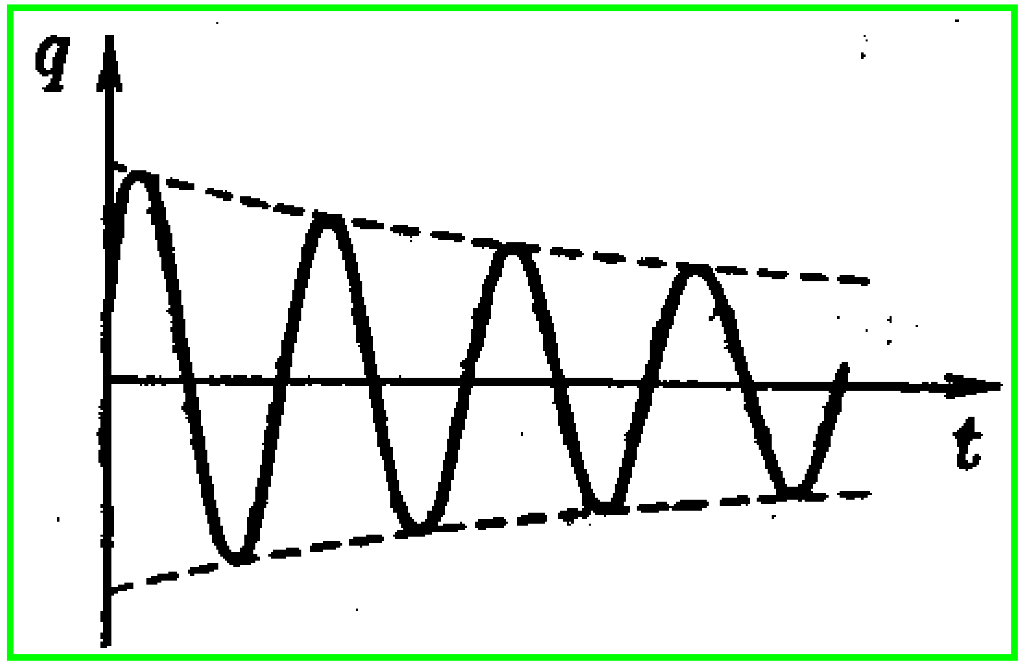
$$q(t) = q_m e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

с частотой

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



Разделив заряд на емкость, получим изменение напряжения на обкладках конденсатора

$$U(t)=\frac{q(t)}{C}=\frac{q_m}{C}e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi_0)=$$

$$=U_m e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi_0)$$

где U_m – амплитуда напряжения.

Взяв производную от заряда, получим силу тока в цепи

$$I(t) = \frac{dq}{dt} =$$

$$= q_m e^{-\delta t}[-\delta\cos(\omega t + \varphi_0) - \omega\sin(\omega t + \varphi_0)]$$

которую, используя $1 = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}}$ **, перепишем в виде**

$$I(t) = \omega_0 q_m e^{-\delta t}[-\frac{\delta}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}}\cos(\omega t + \varphi_0) -$$

$$-\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}}\sin(\omega t + \varphi_0)]$$

Вводя угол ψ, согласно

$$\cos\Psi = -\frac{\delta}{\omega_0} \quad ; \quad \sin\Psi = \frac{\omega}{\omega_0}$$

можем записать ток в виде

$$I(t) = \omega_0 q_m e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0 + \Psi)$$

Поскольку

$$\cos\Psi < 0 \quad ; \quad \sin\Psi > 0$$

то угол ψ заключен в пределах

$$\pi/2 < \psi < \pi$$

Следовательно, при наличии в электрическом контуре сопротивления сила тока в нем опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на $90°$.

Для электрического контура используют те же самые параметры, что и для механических колебаний :

логарифмический коэффициент затухания

$$\Theta = \delta \cdot T$$

добротность

$$Q = \frac{\pi}{\Theta}$$

Если активное сопротивление и затухание малы, так что

$$\delta << \omega_0$$

то

$$\omega \approx \omega_0$$

а добротность принимает вид

$$Q \approx \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Если сопротивление большое

$$\delta \geq \omega_0$$

то происходит апериодический разряд конденсатора.

Сопротивление контура, начиная с которого колебательный процесс переходит в апериодический, называется ***критическим сопротивлением*** $\boldsymbol{R_k}$

Оно определяется из условия $$\delta = \omega_0$$

откуда

$$\frac{R_k}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \rightarrow \quad R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

8.3 Вынужденные колебания

Чтобы в реальной колебательной системе колебания не затухали необходимо компенсировать потери энергии. Это возможно, если на систему действует периодически изменяющееся воздействие

$$X(t) = X_0 \cos \omega t$$

А) В случае механических колебаний таким воздействием является вынуждающая сила

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

ω - частота вынуждающей силы.

В результате уравнение колебаний пружинного маятника принимает вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0\cos(\omega t)$$

Поделив его на массу тела и вводя прежние параметры, получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \qquad \textbf{(8.3.1)}$$

Это уравнение вынужденных механических колебаний.

Б) Для электрического колебательного контура роль воздействия **X(t)** играет внешняя **ЭДС**, подведенная к контуру или переменное напряжение

$$U(t) = U_m \cos \omega t$$

Уравнение, описывающее колебания заряда на обкладках конденсатора имеет вид

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_m}{L}\cos(\omega t)$$

Используя прежние параметры, уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos(\omega t) \qquad (8.3.2)$$

Это ***уравнение вынужденных электрических колебаний*****.**

Оба уравнения (8.3.1) , (8.3.2) можно записать в общем виде

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = x_0 \cos(\omega t) \qquad (8.3.3)$$

Уравнение (8.3.3) является неоднородным дифференциальным уравнением.

Его решение равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Уравнение (8.3.3) удобнее записать в комплексном виде, в котором оно проще решается

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = x_0 e^{i\omega t}$$

Будем искать его частное решение в виде

$$s(t) = s_0 e^{i\gamma t}$$

Вычисляем производные

$$\dot{s}(t) = i\gamma s_0 e^{i\gamma t}$$

$$\ddot{s}(t) = -\gamma^2 s_0 e^{i\gamma t}$$

и подставляем в (8.3.3)

$$s_0 e^{i\gamma t}\left(-\gamma^2 + 2i\delta\gamma + \omega_0^2\right) = x_0 e^{i\omega t}$$

Это уравнение должно выполняться в любой момент времени, поэтому должны равняться частоты

$$\omega = \gamma$$

Тогда получаем

$$s_0 = \frac{x_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\delta\omega} =$$

$$= \frac{x_0\left((\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega\right)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

Запишем последнее выражение в виде

$$s_0 = Ae^{-i\varphi}$$

где

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Таким образом частное решение исходного уравнения равно

$$s(t) = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$$

Его вещественная часть равна

$$s(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$$

К нему надо добавить общее решение однородного уравнения, которое было найдено ранее

$$s_1(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ **частота затухающих колебаний**

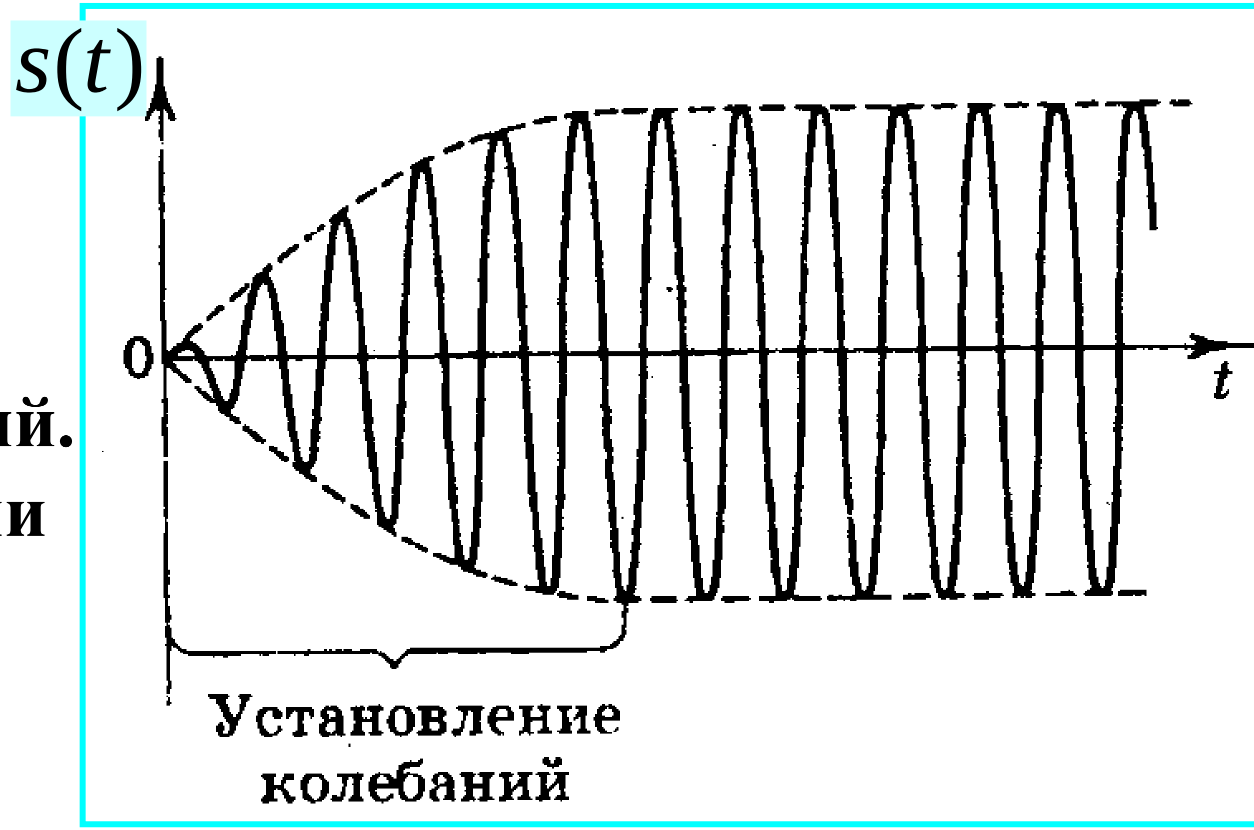
A_0 **и** φ_1 **- произвольные константы.**

Итак, окончательно общее решение неоднородного уравнения равно

$$s(t) = A\cos(\omega t - \varphi) + A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Второе слагаемое играет заметную роль только в начальной стадии процесса – при установлении колебаний. Через время релаксации

$$\tau = \frac{1}{\delta}$$



им можно пренебречь, колебания становятся гармоническими с частотой вынуждающей силы ω.

Резонанс

Рассмотрим зависимость амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы ω

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

Эта функция имеет максимум, когда знаменатель минимален

$$\frac{d\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right)}{d\omega} = 0$$

Откуда находим ***резонансную частоту***

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad ; \quad \omega_{рез} < \omega_0$$

и ***резонансную амплитуду***

$$A_{рез} = \frac{x_0}{\sqrt{4\delta^4 + 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2)}} =$$

$$= \frac{x_0}{2\delta\sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)}}$$

При приближении частоты вынуждающей силы к резонансной частоте амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает - ***явление резонанса*****.**

При малом затухании $\delta << \omega_0$ резонансная частота приближается к частоте собственных колебаний системы $\omega_{рез} \approx \omega_0$, а амплитуда в резонансе равна

$$A_{рез} \approx \frac{x_0}{2\delta\omega_0}$$

Отклонение при нулевой частоте $\omega=0$ называют ***статическим отклонением***

$$A(\omega = 0) = \frac{x_0}{\omega_0^2}$$

Сравнивая, видим, что резонансное и статическое отклонения связаны формулой

$$A_{рез} \approx \frac{\omega_0}{2\delta} A(0)$$

Коэффициент пропорциональности между этими амплитудами равен добротности контура

$$\frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{2\pi}{2\delta T} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi}{\theta} = Q$$

где, согласно (7.5.5) - (7.5.7)

$$\theta = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_\tau} = \ln\left[\frac{A(t)}{A(t+T)}\right]$$

логарифмический коэффициент затухания.

Таким образом, при малом затухании $\delta << \omega_0$

$$A_{рез} = QA(0)$$

Добротность можно переписать в виде

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

где $\Delta\omega = 2\delta$ - ширина пика.

Поэтому *добротность определяет остроту резонанса*.