# 7. Механические колебания

## 7.1 Гармонический осциллятор

**Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, которые описываются уравнением**

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0 \qquad (7.1.1)$$

**где $s(t)$ - некоторая физическая величина (отклонение маятника от положения равновесия, величина заряда конденсатора и т.д.), $\omega_0$ - частота колебаний.**

**В механике примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятник. Рассмотрим их.**

## 7.2 Пружинный маятник

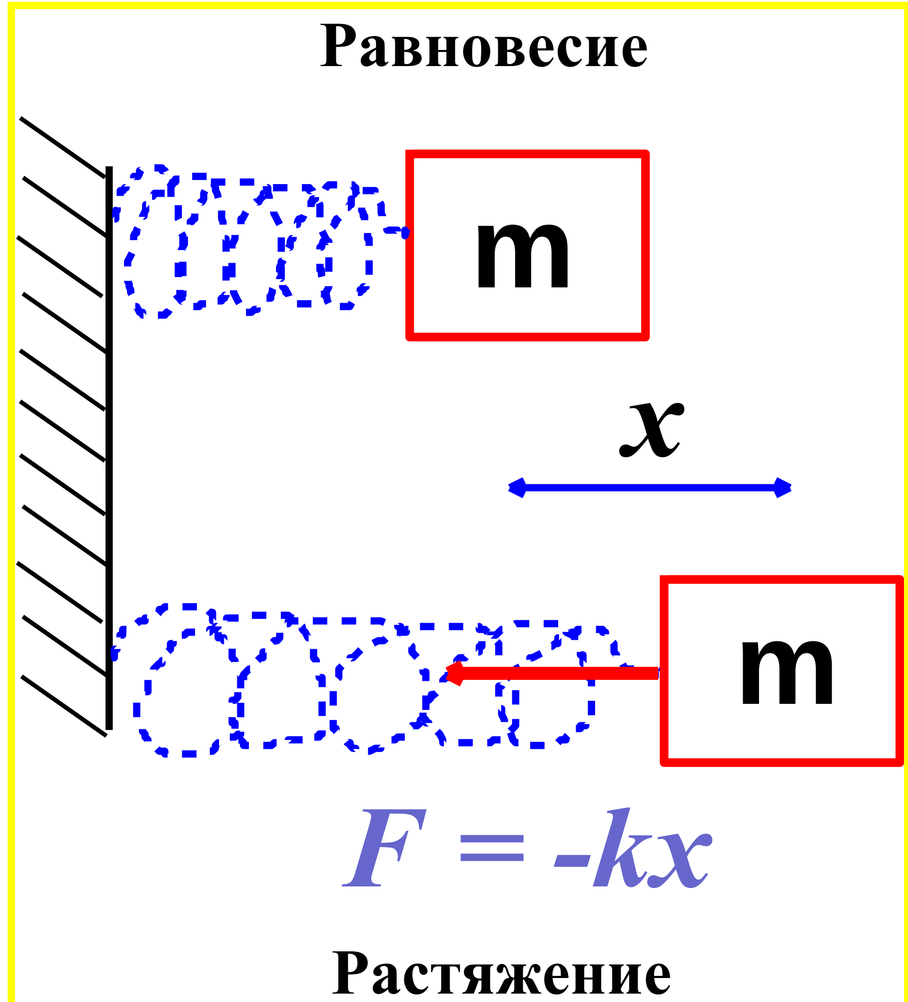
**Маятник – это твердое тело, совершающее колебания под действием некоторой силы.**

**Пусть груз массой m подвешен на упругой пружине и совершает колебания под действием упругой силы (закон Гука)**

$$F = -kx \qquad (7.2.1)$$

***x*** **– отклонение груза от положения равновесия,**

***k*** **– жесткость пружины.**




**Действие силы тяжести не учитывается.**

Уравнение **Ньютона,** описывающее движение тела

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Сравнивая с **(7.1.1)**, находим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (7.2.2)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

**Его решением являются гармонические волны**

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)} \qquad (7.2.3)$$

$A$ – **амплитуда колебаний,**

$\varphi_0$ - **начальная фаза.**

**Возвращающую упругую силу можно переписать в виде**

$$F = -m\omega_0^2 x$$

**Сила пропорциональна отклонению о точки равновесия.**

**Найдем кинетическую и потенциальную энергии маятника**

$$T_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]$$

$$F = -\frac{dU}{dx} \quad \rightarrow \quad dU = -Fdx$$

$$U = \int dU = -\int_0^x Fdx = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]$$

**Таким образом, потенциальная и кинетическая энергии изменяются с *удвоенной частотой* $2\omega_0$ - в 2 раза большей частоты колебаний маятника.**

**Полная энергия пружинного маятника**

$$E = T_к + U = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

**не зависит от времени – закон сохранения энергии замкнутой системы.**

**Найдем среднюю кинетическую и среднюю потенциальную энергии.**

**Для этого надо взять интеграл по периоду их изменений, то есть по** $T/2$

$$< T_\kappa > = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2}\frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)dt =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\frac{1}{T/2}\int_0^{T/2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)dt =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\frac{1}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}$$

**Аналогично находим среднюю потенциальную энергию**

$$<U> = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} dU = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)dt =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\frac{1}{T/2}\int_0^{T/2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)dt =$$

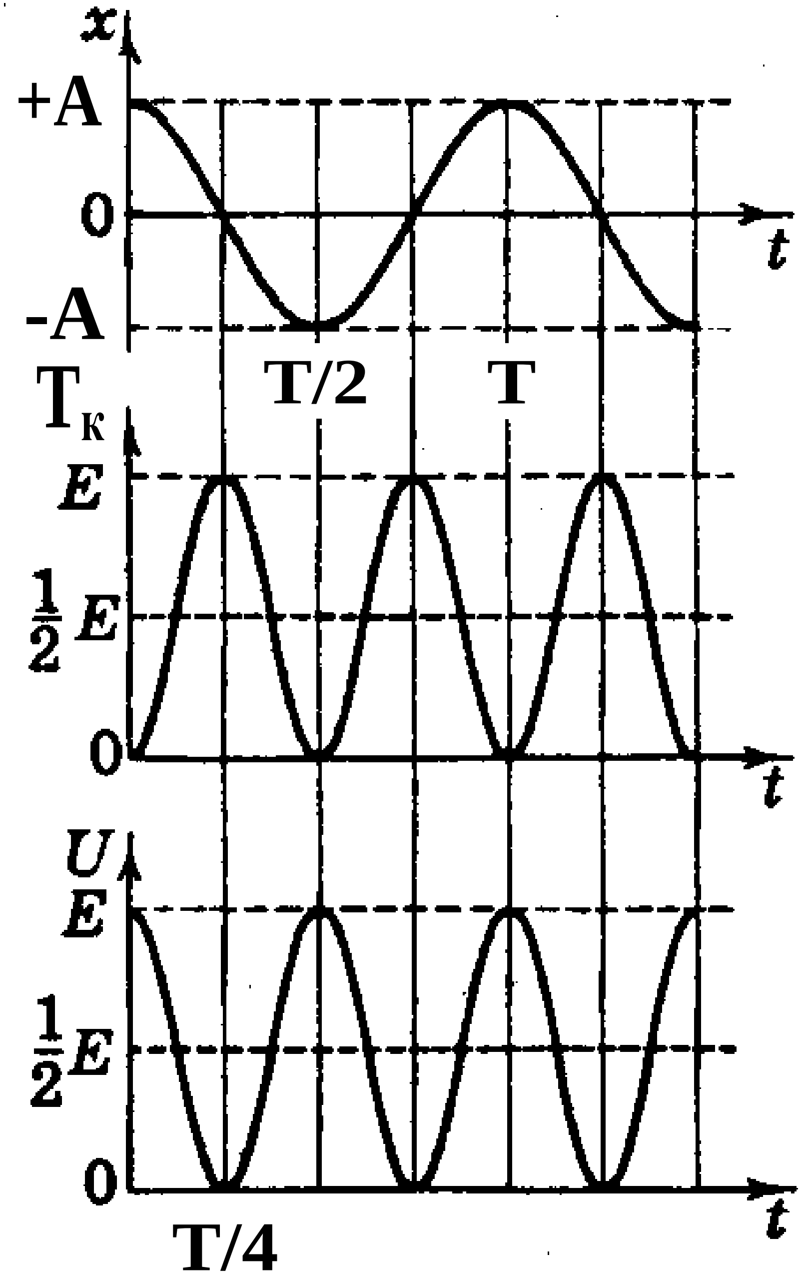
$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\frac{1}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}$$

Таким образом

$\langle T_к \rangle = \langle U \rangle = E/2$

$\langle T_к \rangle + \langle U \rangle = E$

Изменения от времени смещения груза и его энергий.



# 7.3 Физический маятник

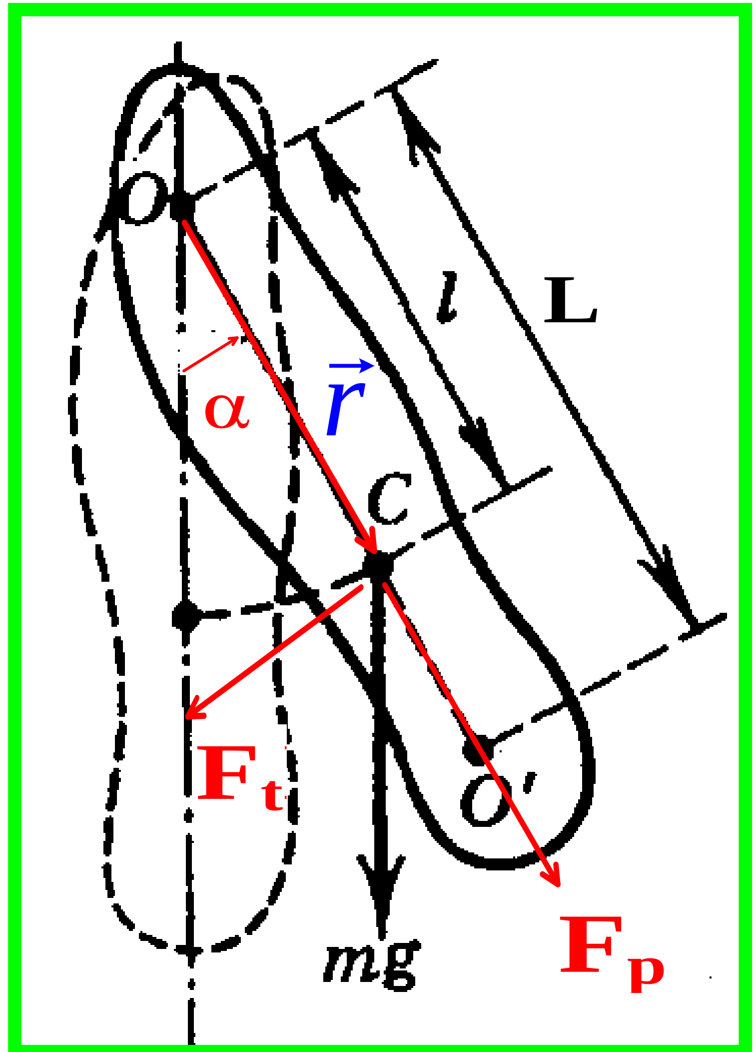
**Физический маятник – это твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной оси, проходящей через точку, не совпадающую с центром масс тела.**

**При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращающий момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия.**

**O - точка подвеса, C - центр масс.**

**Разложим силу тяжести на составляющие**

$$m\vec{g} = \vec{F}_t + \vec{F}_p$$



$\vec{F}_t$ - возвращающая сила, которая приводит к колебаниям.

Направим ось вращения $z$ перпендикулярно листу, так чтобы она выходила из листа. Уравнение вращательного движения тела вокруг этой оси

$$(\vec{M})_z = J(\vec{\varepsilon})_z$$

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}_t]$$

$$\vec{r} = l \cdot \vec{e}$$

$\vec{r}$ - радиус вектор центра масс, $J$ - момент инерции тела относительно точки подвеса **O** , $\vec{e}$ - единичный вектор, направленный от точки **O** к центру масс **C**.

**Согласно правилу правого винта вектор момента сил $\vec{M}$ направлен в лист, против оси $z$, кроме того, угол между радиус вектором центра масс $\vec{r}$ и силой $\vec{F}_t$ прямой, поэтому**

$$(\vec{M})_z = -F_t \cdot l$$

**Из рисунка следует**

$$F_t = mg\sin\alpha$$

**Угол отклонения $\alpha$ является *псевдовектором*, его величина откладывается от вертикальной линии, направленной к Земле. На рисунке $\alpha > 0$.**

**Рисунок отвечает моменту времени, когда тело под действием силы $\vec{F}_t$ возвращается к положению равновесия, поэтому :**

1) **угол уменьшается**
2) **угловая скорость $\vec{\omega} = \dot{\vec{\alpha}}$ отрицательная и растет по величине**
3) **угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\alpha}}$ положительное**

$$\varepsilon_z = \frac{d^2\alpha}{dt^2} > 0$$

**Вектора $\vec{M}$ и $\vec{\varepsilon}$ в любой момент времени направлены в разные стороны.**

**Поэтому уравнение вращательного движения имеет вид**

$$-F_t l = J\varepsilon$$

$$-mgl\sin\alpha = J\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

**Пусть угол отклонения мал, тогда** $\sin\alpha \approx \alpha$ **и получаем**

$$-mgl\alpha = J\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

**Перепишем последнее уравнение в виде**

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0$$

**Следовательно, *при малых колебаниях* угловое отклонение маятника изменяется по гармоническому закону**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$\alpha_0$ **– максимальный угол отклонения (амплитуда).**

**Введем обозначение**

***приведенная длина физического маятника***

$$L = \frac{J}{ml}$$

**Если длину $L$ откладывать вдоль линии OC от точки подвеса O, то получим некоторую точку O′, которую называют *центром качаний*.**

**Согласно теореме Штейнера** $$J = J_c + ml^2$$

**где $J_c$ - момент инерции тела относительно центра масс.**

**Поэтому**

$$L = \frac{J_c + ml^2}{ml} = \frac{J_c}{ml} + l > l$$

**С использованием приведенной длины частота и период колебаний можно записать в виде**

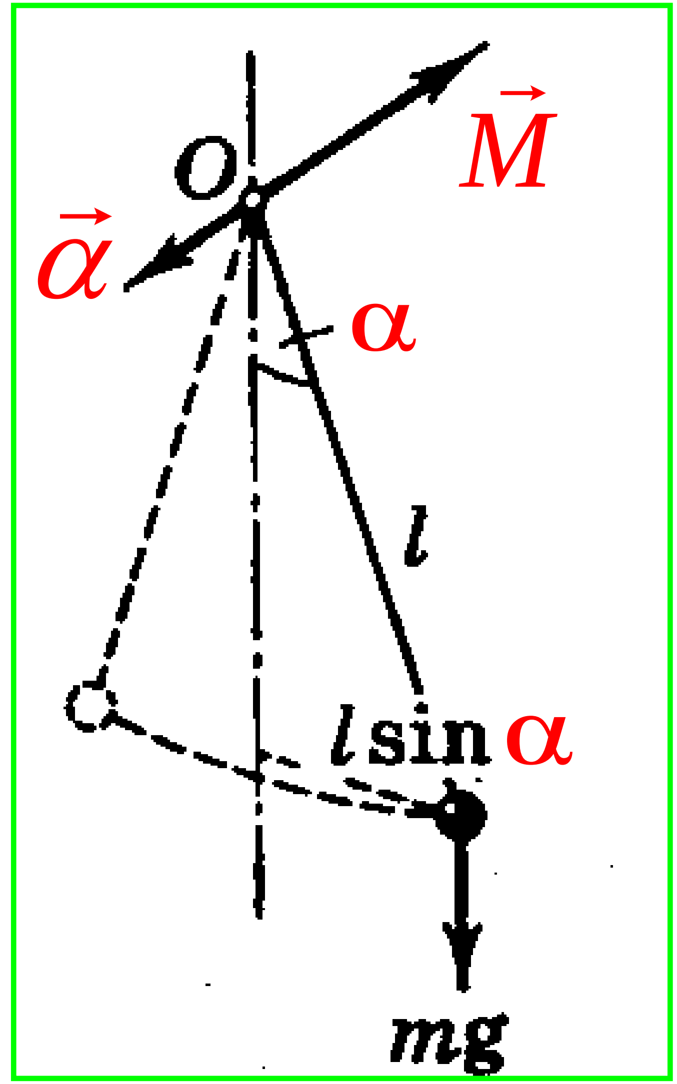
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad ; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

**Точка подвеса и центр качаний обладают свойством взаимозаменяемости :**

**если точку подвеса О перенести в центр качаний О′, то точка подвеса О станет точкой качаний, при этом период колебаний не изменится.**

## 7.4 Математический маятник

**Математический маятник – это материальная точка массой $m$, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити.**




**Ее колебания тоже происходят под действием силы тяжести.**
**Поэтому математический маятник является** ***частным случаем*** **физического маятника, у которого вся масса тела расположена в одной точке – центре масс тела. $l$ – длина нити.**

**Векторы $\vec{\alpha}$ и $\vec{M}$ направлены в противоположные стороны.**

**Момент инерции материальной точки относительно точки подвеса О равен**

$$J = ml^2$$

**Можно использовать все формулы, полученные для физического маятника**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad L = \frac{J}{ml} = l$$

**Приведенная длина математического маятника равна длине нити.**

**Поэтому** ***приведенную длину физического маятника можно рассматривать как длину такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом физического маятника*****.**

## 7.5 Свободные затухающие колебания

**Свободные затухающие колебания – это колебания, амплитуда которых с течением времени уменьшается за счет потерь энергии.**

**Например, при механических колебаниях за счет трения часть энергии колебаний переходит в теплоту.**

**В электрической цепи роль сил трения играет сопротивление. Кроме того, энергия электрических колебаний излучается в виде электромагнитных волн.**

**Колебания называются свободными (или собственными), потому что они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.**

**Рассмотрим механический осциллятор. Пусть на тело наряду с упругой силой $F_{упр}$ действует сила трения $F_{тр}$, направленная против скорости.**

**Величина силы трения пропорциональна скорости движения**

$$F_{тр} = -r\dot{x}$$

**$r$ – коэффициент трения.**

**Уравнение Ньютона для такого осциллятора имеет вид**

$$F_p = F_{упр} + F_{тр} = ma \quad ; \quad -kx - r\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

**Обозначим** $$2\delta = \frac{r}{m} \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$\delta$ - ***коэффициент затухания***,

$\omega_0$ - **циклическая частота *незатухающих* колебаний в отсутствие потерь энергии ( то есть при $\delta = 0$ ), она называется *собственной частотой* колебаний.**

**Тогда уравнение свободных затухающих колебаний механического осциллятора принимает вид**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

**Аналогичный вид имеют свободные затухающие колебания и для других величин $s(t)$, описывающих другие колебательные процессы**

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \qquad (7.5.1)$$

**В линейных системах параметры $\delta$ и $\omega_0$ постоянны.**

Будем искать решение уравнения (7.5.1) в виде

$$s(t) = e^{-\delta t} u(t)$$

Подставляя, получаем уравнение для функции $u(t)$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + (\omega_0^2 - \delta^2) u = 0 \qquad (7.5.2)$$

Решение этого уравнения зависит от знака разницы

$$\omega_0^2 - \delta^2$$

**Пусть затухание слабое, так что**

$$\delta < \omega_0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0$$

**Тогда уравнение (7.5.2) по виду подобно (7.1.1)**

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0$$

**где** $\omega$ **- частота затухающих колебаний.**

**Решением этого уравнения является**

$$u(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

**Поэтому в случае малых колебаний величина *s*, описывающая колебательный процесс меняется со временем по закону**

$$s(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

**где**

$A(t) = A_0 e^{-\delta t}$ - **амплитуда затухающих колебаний**

$A_0 = A(t = 0)$ - **начальная амплитуда**

**Время, за которое амплитуда $A(t)$ уменьшается в $e$ раз называется *временем релаксации***

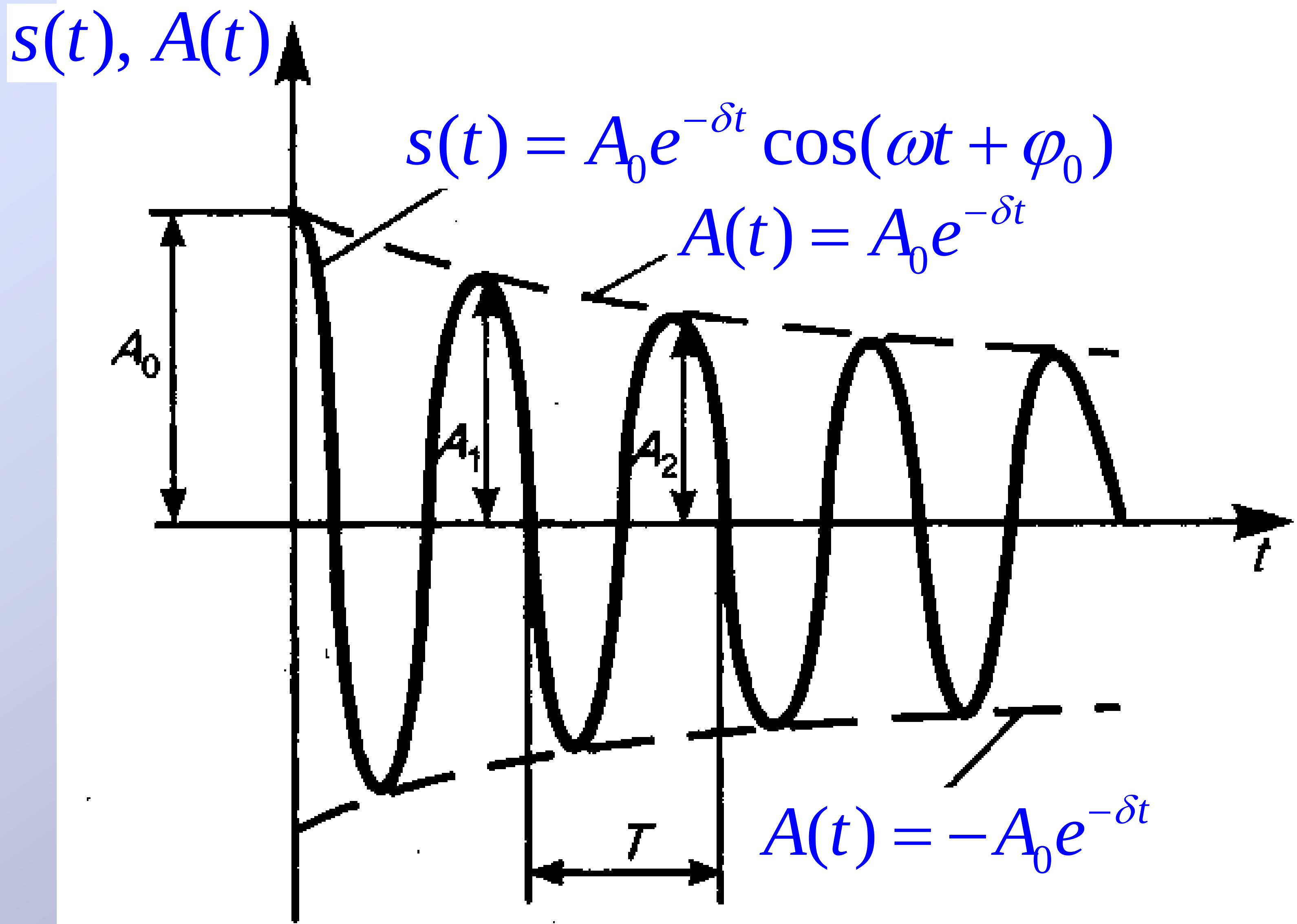
$$\tau = \frac{1}{\delta} \qquad (7.5.3)$$

**Затухающие колебания *не повторяются*, поэтому они *не являются периодическими*. Для малых затуханий можно условно пользоваться понятием периода**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \qquad (7.5.4)$$

**как промежутком времени между двумя характерными последующими значениями амплитуды.**

# Изменение во времени затухающих колебаний



**Амплитуды двух последовательных колебаний, отличающихся на период, относятся как**

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T} \qquad (7.5.5)$$

**Это отношение называется *декрементом затухания*, а его логарифм**

$$\theta = \ln\left[\frac{A(t)}{A(t+T)}\right] = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_\tau} \qquad (7.5.6)$$

**называется *логарифмическим декрементом затухания*,**

$N_\tau$ **- число колебаний, совершаемое за время релаксации** $\tau$**.**

**Для характеристики колебаний используется также величина**

***добротность*** $$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_\tau \qquad (7.5.7)$$

**которая пропорциональна числу колебаний** $N_\tau$ **.**

**Установим физический смысл добротности.**

**Для этого вычислим полную энергию колебаний на примере механического осциллятора**

$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2}$$

**Скорость тела равна**

$$\upsilon(t) = \dot{x} = A_0[-\delta e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0) - \omega e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_0)]$$

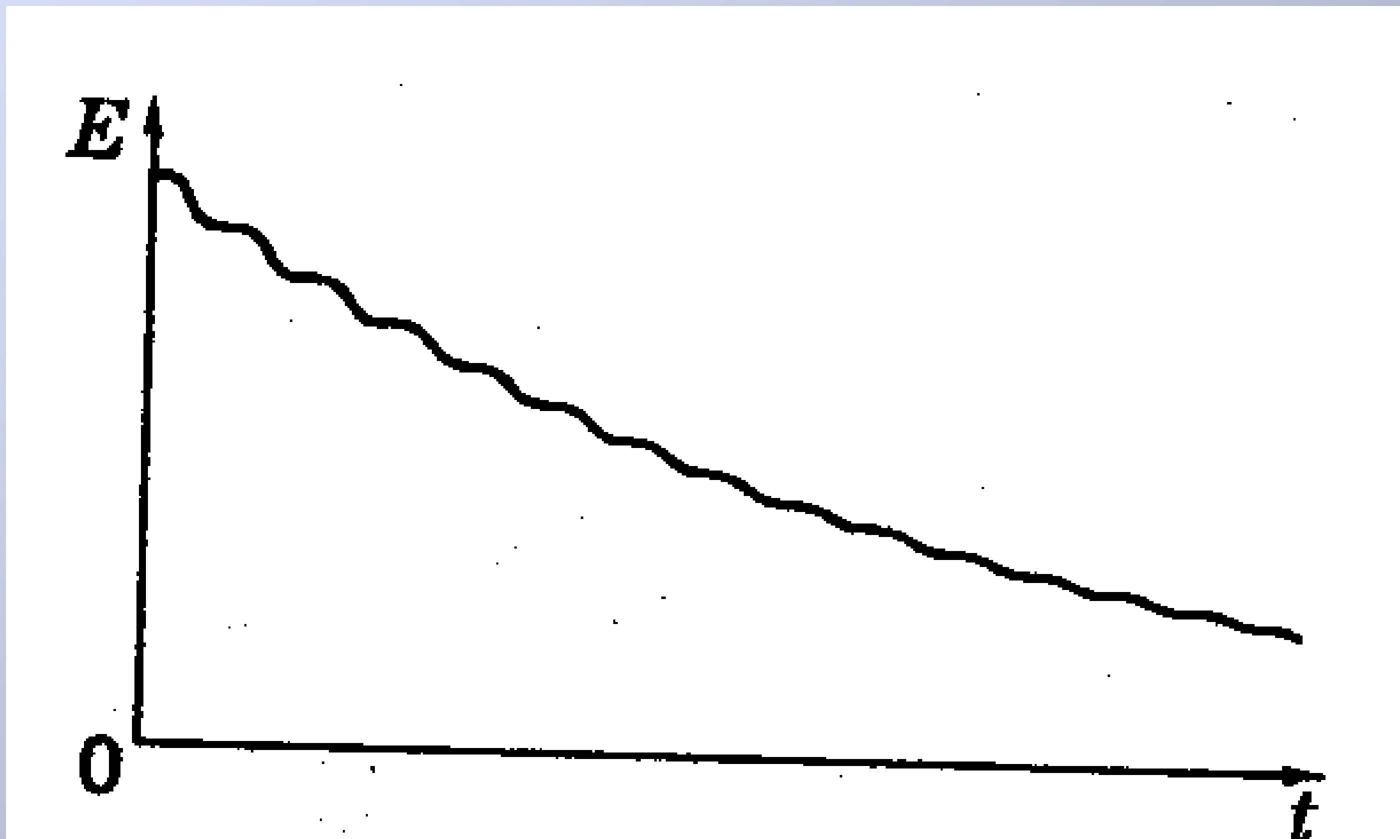
**Подставляя $\boldsymbol{v(t)}$ и $\boldsymbol{x(t)}$ в выражение для полной энергии, получаем**

$$E(t) = \frac{k}{2}A_0^2 e^{-2\delta t}[1 + \frac{\delta}{\omega_0}\sin(2\omega t + 2\varphi_0 + \Psi)]$$

**где**

$$\Psi = arctg(\frac{\delta}{\omega})$$

# Изменение во времени полной энергии затухающих колебаний



**Убывание энергии связано с работой силы трения**

$$F_{тр} = -r \cdot \dot{x}$$

**Мощность, развиваемая этой силой, равна**

$$N = \frac{dE}{dt} = \frac{dA_{тр}}{dt} = (\vec{F}_{тр} \cdot \vec{\upsilon}) = -r \cdot (\dot{x})^2$$

**Если бы трения не было, то энергия сохранялась во времени.**

**При малом затухании**

$$\delta \ll \omega_0$$

**вторым слагаемым в** $\boldsymbol{E(t)}$ **можно пренебречь**

$$E(t) \approx \frac{k}{2} A_0^2 e^{-2\delta t} = E_0 e^{-2\delta t}$$

$$E_0 = \frac{k}{2} A_0^2$$

$\boldsymbol{E_0}$ **- энергия в начальный момент времени.**

Подставим приближенную энергию в формулу для мощности

$$N(t)=\frac{dE}{dt}\approx -2\delta E$$

Скорость убывания энергии равна

$$-\frac{dE}{dt}\approx 2\delta E$$

Период колебаний $T$ мал, поэтому можно принять $dt = T$.

Подставляя, получаем изменение (убыль) энергии за период

$$-\Delta E\approx 2\delta ET$$

Учитывая, что $$Q = \frac{\pi}{T\delta}$$

получаем $$\frac{E}{-\Delta E} = \frac{1}{2\delta T} = \frac{Q}{2\pi}$$

Таким образом, при слабом затухании добротность с точностью до множителя $2\pi$ равна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент к убыли этой энергии за период колебаний.

**Пусть теперь затухание колебаний сильное.**

**Если** $$\delta = \omega_0$$

**то** $T = \infty$ **, значит движение перестает быть периодическим.**

**Если** $$\delta > \omega_0$$

**то частота** $$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

**становится мнимой величиной.**

**В этом случае общее решение уравнения затухающих колебаний имеет вид**

$$s(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}$$

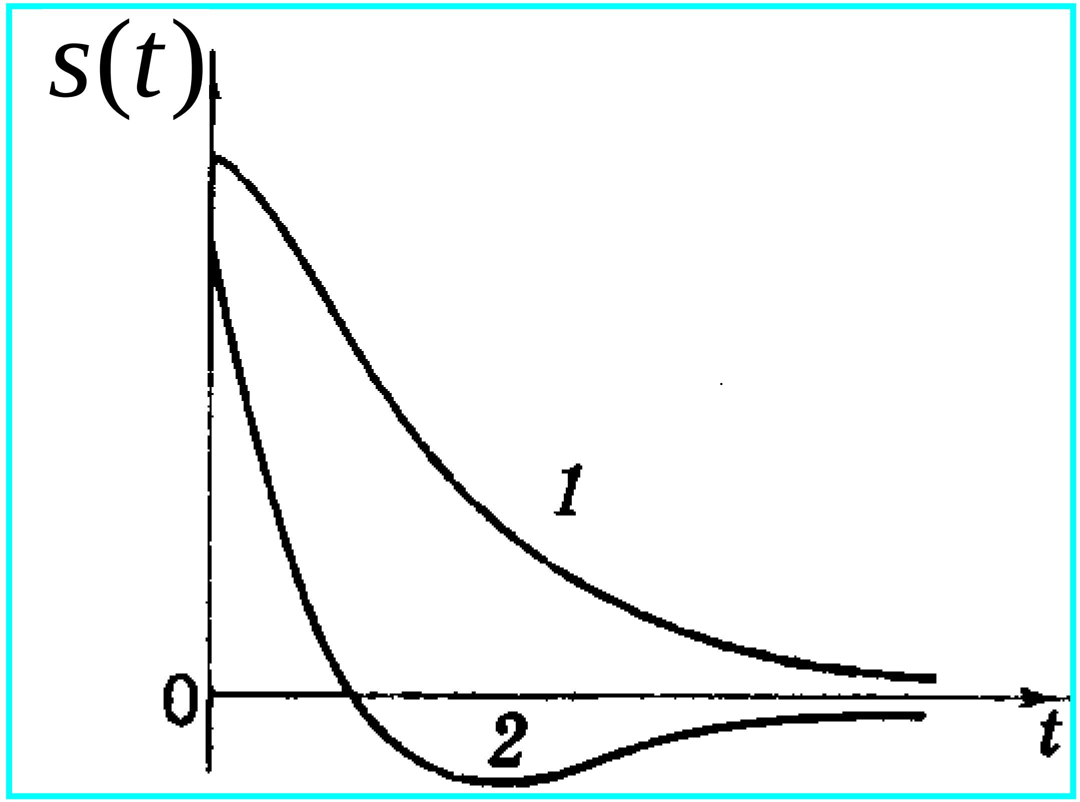
**где**

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$C_1$ **и** $C_2$ **- вещественные постоянные, зависящие от начальных условий.**

**Такое движение носит *апериодический* характер – это значит, что система выведенная из положения равновесия, возвращается в него не совершая колебаний.**
**При этом возможны два способа возвращения к положению равновесия :**




**1) – когда система выведена из положения равновесия без толчка,**
**2) – когда система выведена из положения равновесия достаточно сильным толчком, начальная скорость равна**

$$|\upsilon_0| > A_0(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})$$