

2. Дифракция света

2.1 Определение дифракции

Дифракцией (лат. **diffractus** – разломанный) называется явление огибания волнами препятствий, размеры которых сопоставимы с длинами волн.

Дифракция и интерференция - родственные явления, оба связаны с перераспределением световой энергии в неоднородных средах.

Их отличие состоит в том, что при интерференции волны, возбуждаются **конечным** числом источников света, тогда как при дифракции число таких источников **бесконечно**.

Для расчета интенсивности дифракционной картины Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением об интерференции вторичных волн.

Согласно **Френелю** интенсивность света от любого источника в некоторой точке пространства определяется квадратом амплитуды волны, являющейся суперпозицией вторичных волн, пришедших от всех элементарных участков замкнутой поверхности, охватывающей источник света. Эта *замкнутая поверхность может быть любой*.

Обычно в качестве такой поверхности выбирают одну из *волновых поверхностей*. Тогда расчет упрощается, поскольку все вторичные волны, исходящие из точек волновой поверхности когерентны друг к другу.

Френель так же предположил, что вторичные волны распространяются только в направлении первоначальной волны, а обратных вторичных волн нет.

Позднее эти гипотезы нашли свое обоснование из анализа решений уравнений **Максвелла**.

Френель предложил простой метод расчета интерференционной картины, получивший название *метода зон Френеля*.

В этом методе волновая поверхность разбивается на области, называемые *зонами*.

Зоны *выбирают* не произвольно, а *так чтобы разность хода вторичных волн, идущих от соседних зон, была равна половине длине волны $\lambda/2$* . Такие волны приходят в точку наблюдения с фазами, отличающимися на **180°** (волны находятся в противофазе), и при наложении ослабляют друг друга.

Тогда задача расчета интерференционной картины вторичных волн сводится к определению числа открытых зон **Френеля**. Это число особенно просто найти для случаев сферического и плоского фронта волны.

2.2 Виды дифракции

Различают два вида дифракции:

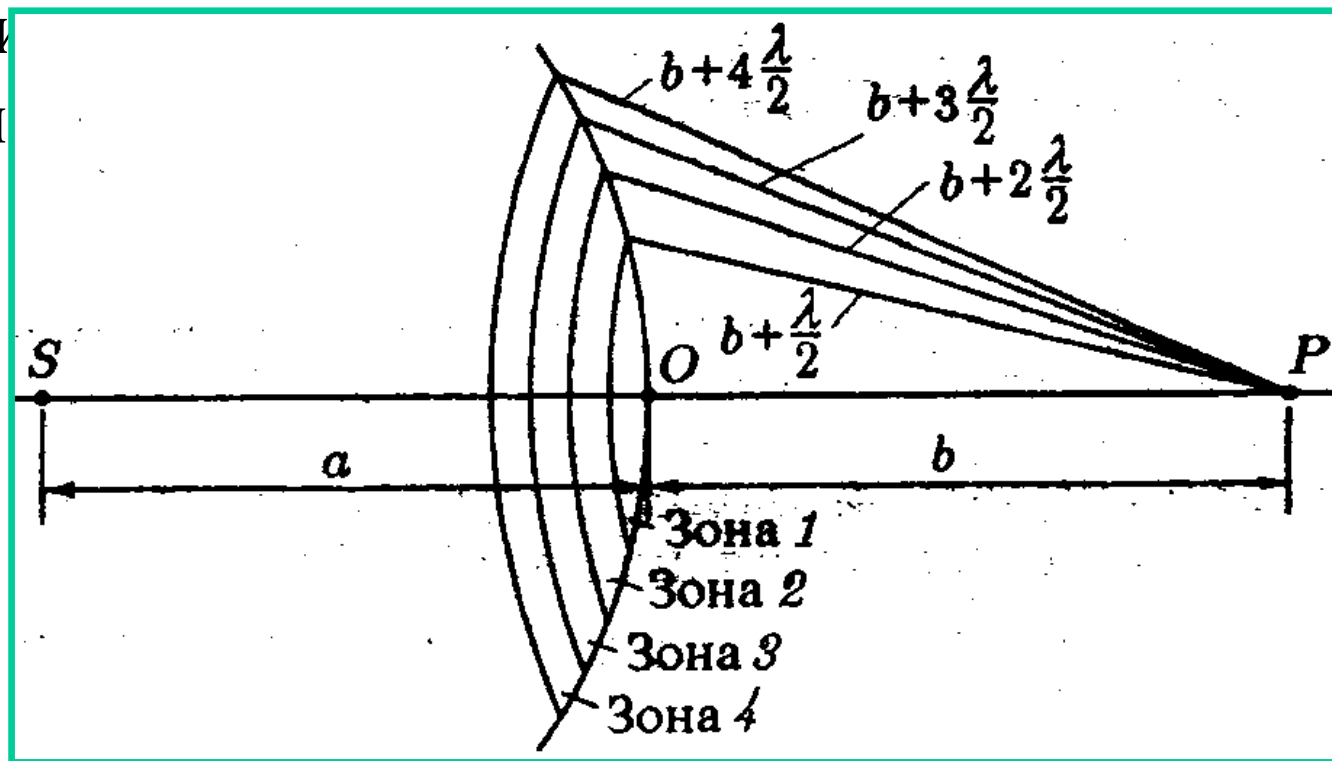
1) Если источник света и точка наблюдения находятся от препятствия на конечном расстоянии, то говорят о **дифракции Френеля**. В этом случае в дифракции участвуют лучи, сходящиеся в точку наблюдения.

2) Если источник света и точка наблюдения расположены от препятствия очень далеко, так что лучи, падающие на препятствие и лучи, идущие в точку наблюдения образуют практически параллельные пучки, то говорят, что имеет место **дифракция Фраунгофера**. Дифракцию Фраунгофера обычно наблюдают на конечном расстоянии от препятствия, собирая пучок дифрагированных лучей в фокальную плоскость линзы. Это возможно, поскольку линза не меняет разность фаз между падающими волнами.

2.3 Дифракция Френеля

2.3.1 Доказательство прямолинейности распространения света

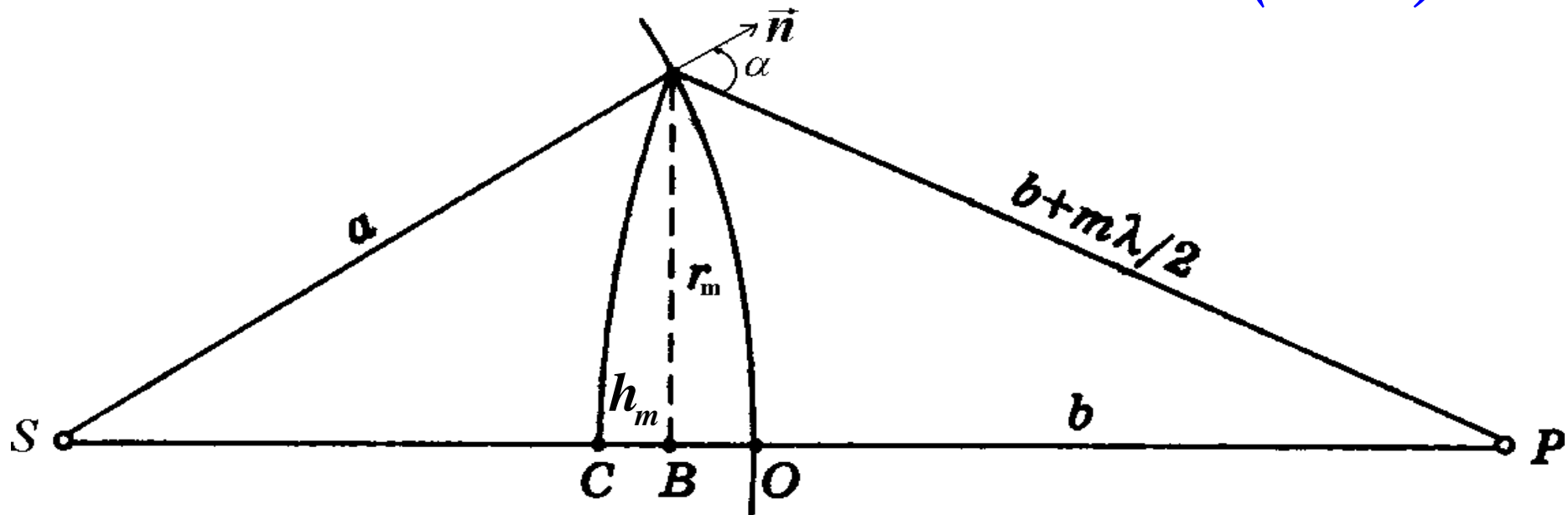
Пусть точечный источник света **S** испускает сферические электромагнитные волны с длиной волны λ . Найдем интенсивность света в точке **P**, находящейся от источника на конечном расстоянии. Разобьем волновую поверхность на кольцевые области так, чтобы расстояния от их краев до точки наблюдения **P** отличались на $\lambda/2$. Эти кольца и будут зонами Френеля для сферической волны.



Найдем площадь ΔS_m и внешний радиус r_m m -ой зоны Френеля. Площадь шарового сегмента, ограниченного m -ой зоной, равна $S_m = 2\pi a h_m$, где $h_m = OB$. Из прямоугольных треугольников следуют:

$$a^2 = (r_m)^2 + (a - h_m)^2 ; (b + m\lambda/2)^2 = (r_m)^2 + (b + h_m)^2 ; b = OP$$

Исключая из уравнений r_m , получаем $h_m = \frac{b m \lambda + m^2 \lambda^2 / 4}{2(a + b)}$



Пусть номер зоны m невелик, так что имеют место неравенства $m\lambda \ll b$, $a \gg h_m$, тогда

$$h_m \approx \frac{b m \lambda}{2(a + b)}$$

а площадь и радиус m -ой зоны Френеля равны:

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = 2\pi a(h_m - h_{m-1}) \approx \frac{\pi a b \lambda}{(a + b)}$$

$$(2.3.1) \quad r_m = \sqrt{2ah_m - h_m^2} \approx \sqrt{2ah_m} = \sqrt{\frac{abm\lambda}{(a + b)}}$$

Следовательно, площади первых зон Френеля одинаковы.

С ростом номера зоны Френеля m расстояния $b + m\lambda/2$ и углы α растут, а амплитуды волн от зон Френеля в точке наблюдения P монотонно убывают

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_m \dots ,$$

поэтому можно приближенно записать

$$A_m \approx (A_{m-1} + A_{m+1})/2$$

Учтем, что фазы колебаний волн от соседних зон отличаются на π , поэтому амплитуда суммарного колебания в точке P равна

$$\begin{aligned} A &= A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots = \\ &= A_1/2 + (A_1/2 - A_2 + A_3/2) + (A_3/2 - A_4 + A_5/2) + \dots \approx \\ &\approx A_1/2 \end{aligned}$$

Следовательно, *результатирующая амплитуда в произвольной точке определяется действием только половины первой зоны Френеля.*

Оценим радиус первой зоны для характерных расстояний $a = b = 10$ см и типичной длины волны света $\lambda = 500$ нм. Их подстановка в (2.3.1) дает радиус *первой* зоны Френеля $r_1 = 0.1$ мм.

Значит, световой поток от источника S к точке наблюдения P распространяется внутри *очень узкого канала* вдоль линии SP , то есть практически прямолинейно.

Следовательно, *принцип Гюйгенса-Френеля объясняет прямолинейный характер распространения света в однородной среде.*

Правомерность разбиения волнового фронта на зоны **Френеля** подтверждается экспериментом.

Если на пути световых волн поставить пластинку, перекрывающую все четные (или нечетные) зоны Френеля, то интенсивность света в точке **P** резко возрастет, поскольку результирующая амплитуда равна

$$A = A_1 + A_3 + A_5 + \dots \quad (\text{при закрытых четных зонах})$$

$$A = A_2 + A_4 + A_6 + \dots \quad (\text{при закрытых нечетных зонах})$$

Еще больший эффект достигается, если зоны не перекрывать, а **изменять фазу колебаний** в четных (или нечетных) зонах на π .

Для этого на пути волн ставят прозрачную пластину с необходимой толщиной в местах четных (или нечетных) зон. Такая пластина называется **фазовой зонной пластиной**.

По сравнению с зонной пластиной она увеличивает амплитуду в **2** раза

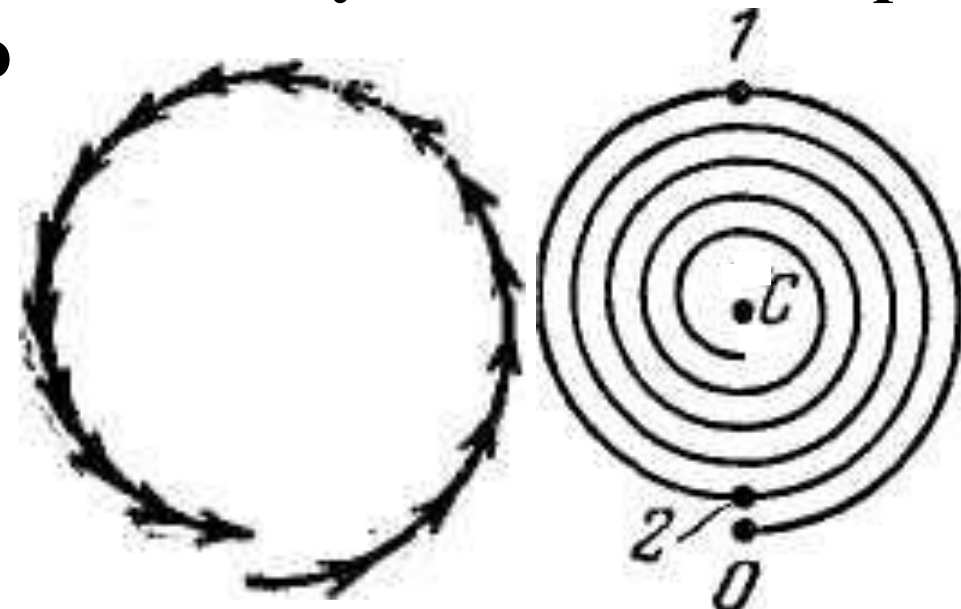
$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots,$$

а интенсивность света, соответственно, в **4** раза.

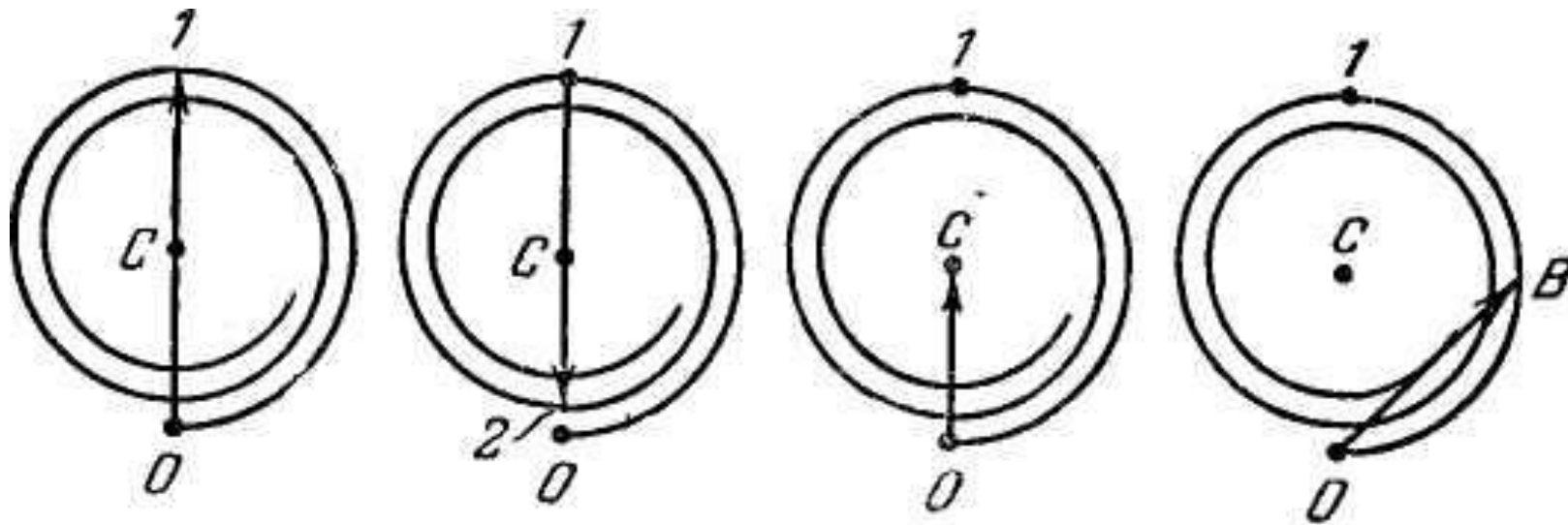
2.3.2 Применение векторной диаграммы для расчета амплитуды

Разобьем сферическую волновую поверхность на *малые кольцевые зоны* так, чтобы разность фаз между соседними зонами составляла одну и ту же малую величину φ . Колебание, создаваемое в точке наблюдения P каждой из зон, изобразим вектором, длина которого равна амплитуде, а направление относительно предыдущего вектора определяется углом поворота, равным φ . Складывая вектора получим ломанную линию. При стремлении ширины зон к нулю линия принимает вид спирали.

Фазы колебаний в точках O и 1 отличаются на π , поэтому участок спирали $O - 1$ отвечает первой зоне Френеля.



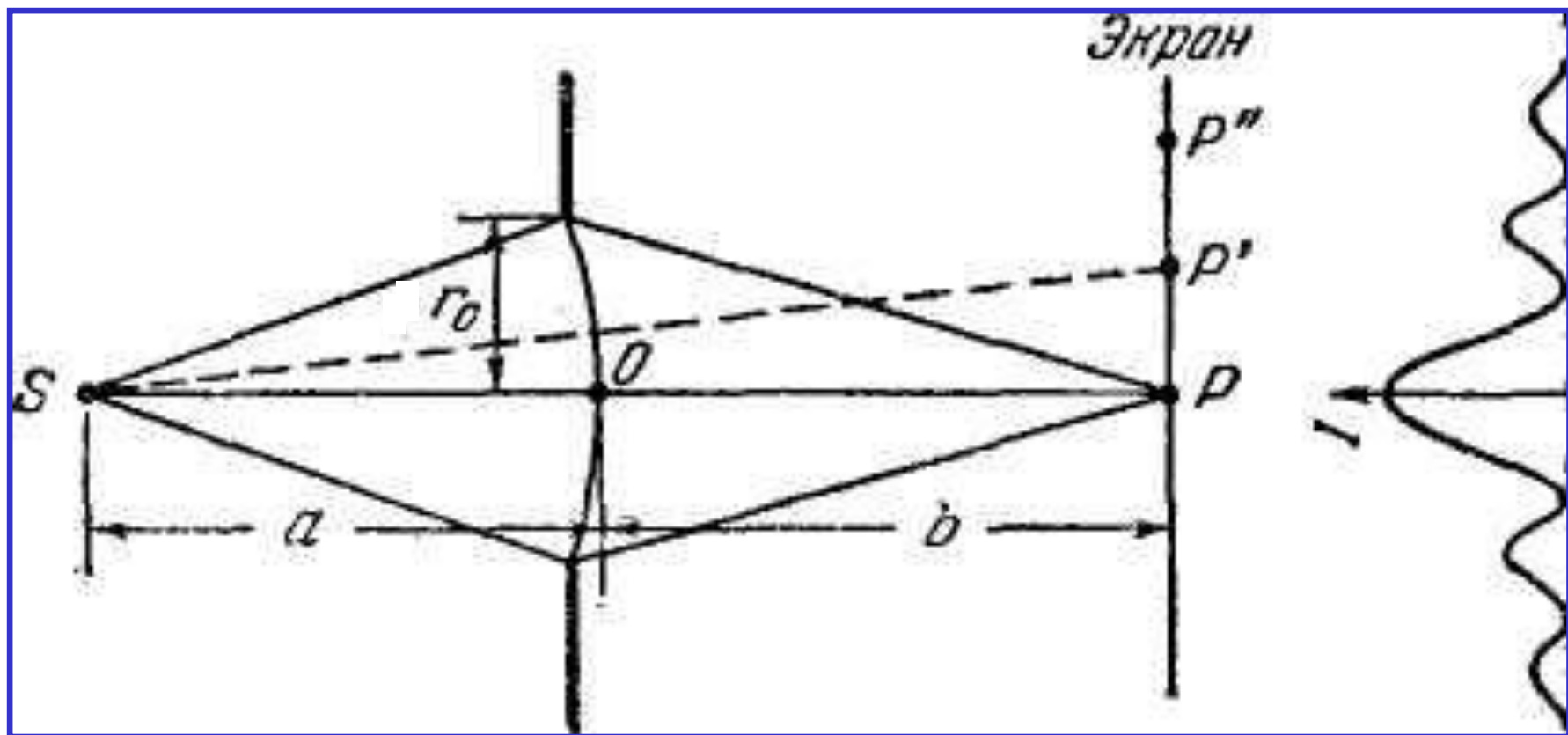
Каждой зоне Френеля соответствует полувиток на векторной диаграмме. Вектор $O-B$ – создается *половиной* первой зоны Френеля. Колебание, возбуждаемое в точке P *первой зоной Френеля* дается вектором $O-1$, второй зоной – $1-2$ и т.д. Вектор $O-C$ соответствует колебанию, создаваемому всей волновой поверхностью, его длина равна половине амплитуды A_1 , создаваемой одной центральной зоной $A = A_1/2$.



Амплитуды вторичных волн от первых зон Френеля.

2.3.3 Дифракция Френеля на круглом отверстии

Пусть точечный источник S излучает сферическую электромагнитную волну, которая проходит через круглое отверстие в экране. Участок волновой поверхности, ограниченный краями отверстия, выступает источником вторичных волн.



Из прежней формулы (2.3.1) следует, что число открытых отверстием зон Френеля равно

$$r_m = \sqrt{\frac{abm\lambda}{a+b}} \rightarrow m = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (2.3.2)$$

Амплитуда волны в точке **P** равна $A = A_1 - A_2 + \dots \pm A_m$

Как и раньше, имеет место связь амплитуд соседних зон

$$A_m \approx (A_{m-1} + A_{m+1})/2$$

Если m нечетное число, то суммирование

ряда дает $A = A_1/2 + A_m/2$

Значит, в этом случае в точке **P** интенсивность I имеет максимум.

Если m четное число, то

$$A = A_1/2 - A_m/2$$

и в точке **P** будет темное пятно.

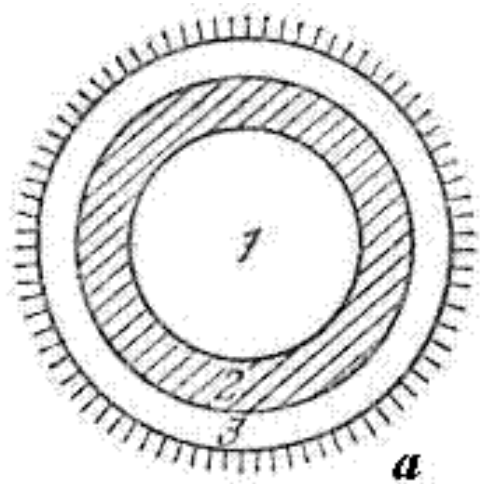


m -нечетное

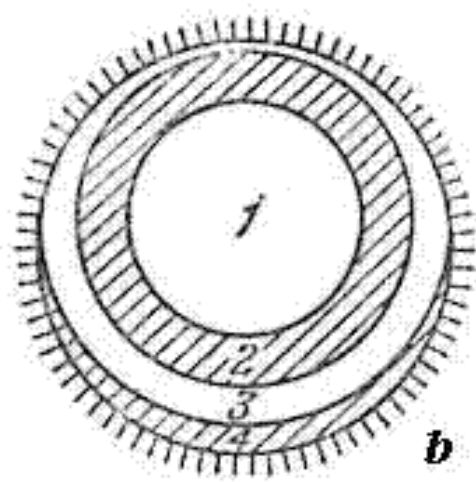


m -четное

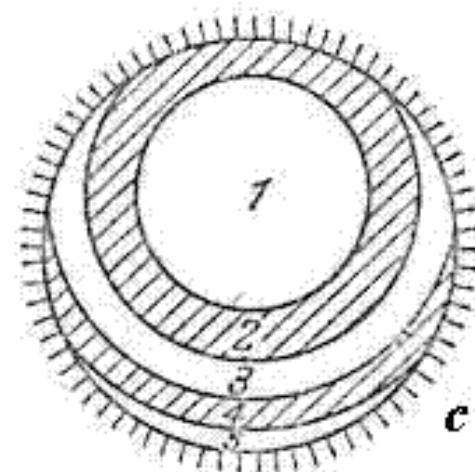
Пусть m нечетное число. Тогда при смещении из центра экрана (рис. b - точка P') открытые в точке P зоны Френеля частично закроются и частично откроются новые зоны, ослабляющие интенсивность света – возникнет *первый минимум* интенсивности. Рис. c отвечает еще более удаленной точке P'' , в которой частично закрываются 2 и 3 зоны, и частично открывается 5 зона. Действие нечетных зон становится больше действия четных зон и в точке P'' возникает *максимум*, хотя и более слабый,



P



P'



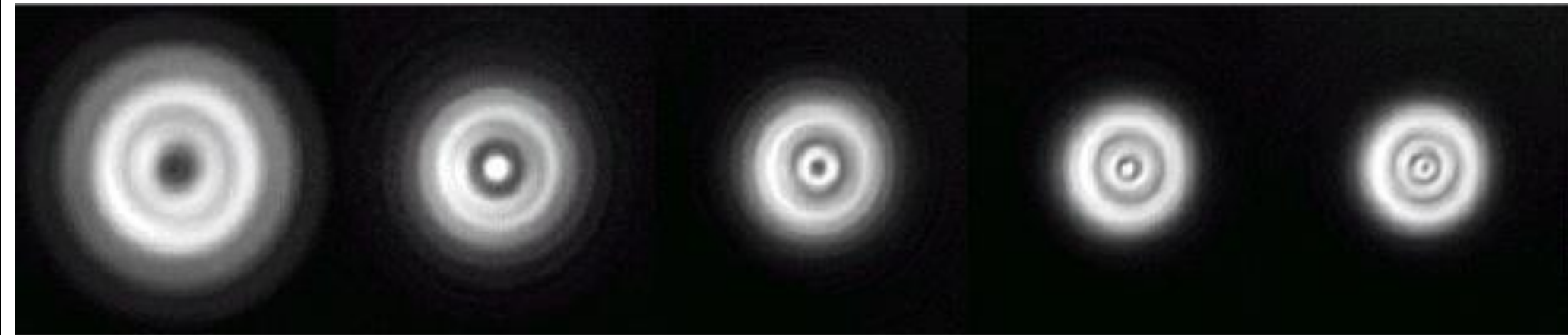
P''

Рассмотрим изменение дифракционной картины от радиуса отверстия r_0 .

Если размер отверстия **много меньше первой зоны Френеля**, то наблюдается **размытое светлое пятно без каких либо колец**.

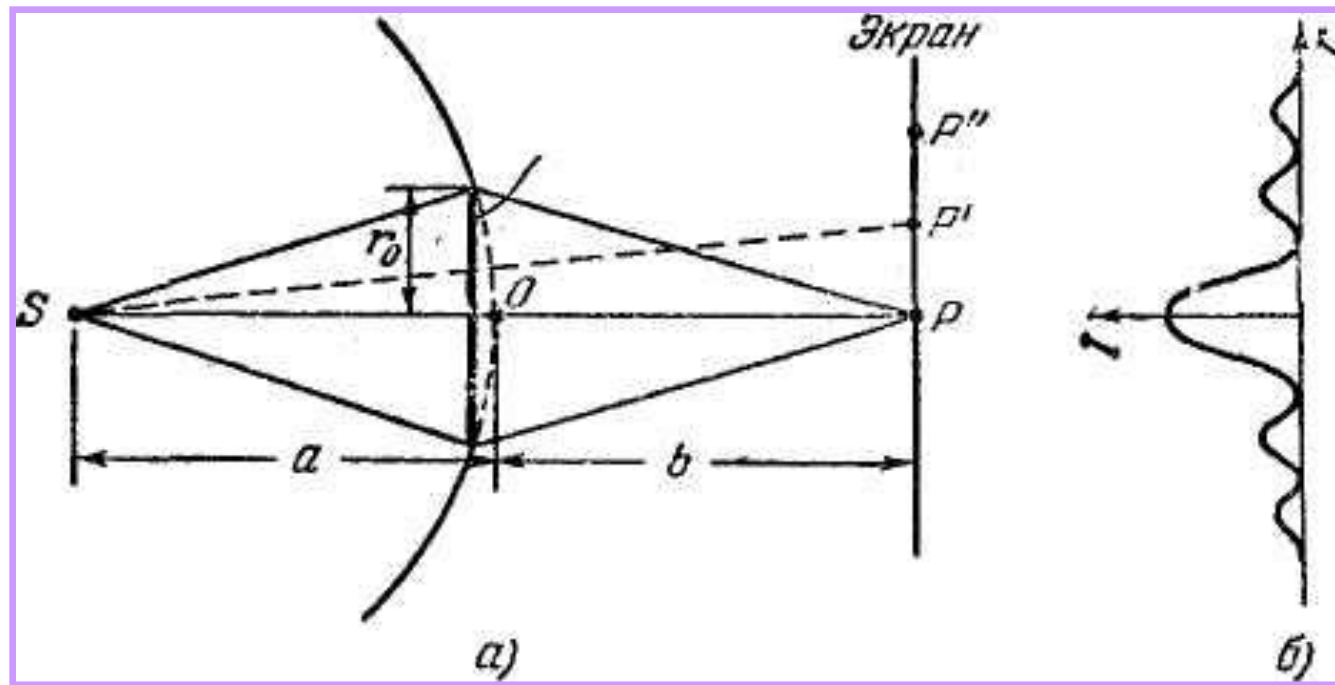
Если отверстие открывает **много зон Френеля**, то дифракционные кольца наблюдаются **в узкой области на границе света и тени**. В остальной части экрана наблюдается практически равномерное освещение, за исключением области геометрической тени, где освещённость отсутствует.

На рисунке показано изменение дифракционной картины по мере приближения экрана к отверстию (слева направо). В этом случае расстояние b – уменьшается, а число открытых зон Френеля увеличивается. На рисунке число открытых зон увеличивается с 2 до 6. Размер картины *уменьшается*, приближаясь к диаметру отверстия.



2.3.4 Дифракция Френеля на круглом диске

Пусть в качестве препятствия для сферической волны, идущей от точечного источника, выступает круглый диск. Выберем волновую поверхность таким образом, чтобы она пересекала края диска. Если диск закрывает m первых зон Френеля волновой поверхности, то амплитуда в центральной точке P равна $A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = A_{m+1}/2 + (A_{m+1}/2 - A_{m+2} + A_{m+3}/2) + \dots = A_{m+1}/2$



Поэтому, в центре геометрической тени всегда будет светлое пятно независимо от размера диска. Его называют *пятном Пуассона*. Дифракционная картина имеет вид чередующихся темных и светлых колец. В смещенной из центра точке P' диск перекрывает часть $(m+1)$ -ой зоны, но одновременно открывает часть m – ой зоны. Это вызывает уменьшение интенсивности и приводит к $\min I$.

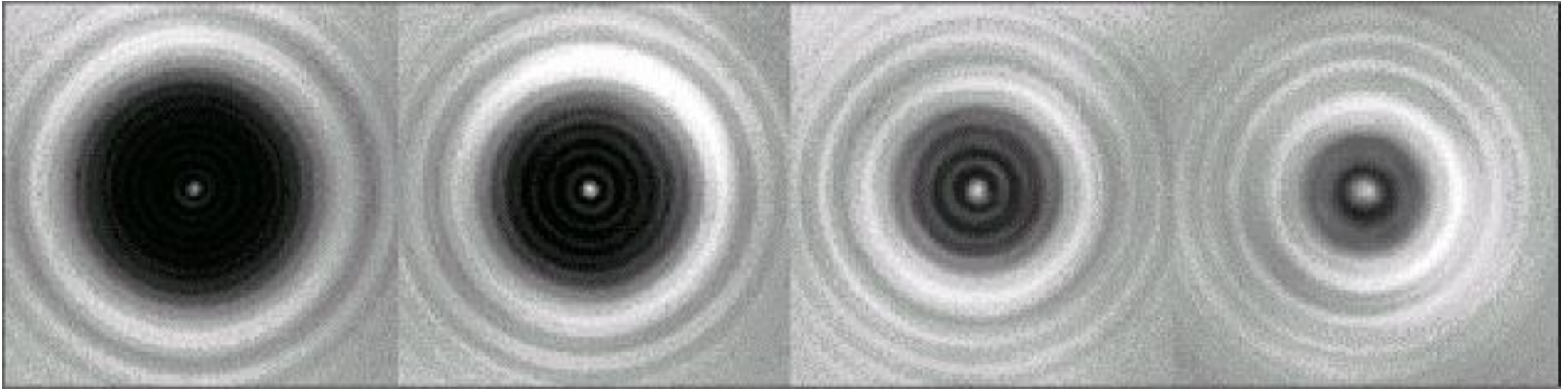
Дальнейшее смещение (точка P'') перекрывает часть $(m+2)$ – зоны, одновременно открывая часть $(m-1)$ зоны.

Возникает \max интенсивности.



На рисунке показано изменение дифракционной картины от размеров диска.

Диаметр и яркость пятна Пуассона **увеличиваются при уменьшении диаметра диска.**



$d_1 > d_2 > d_3 > d_4$

Диаметр диска уменьшается слева направо.

Если размер диска много меньше первой зоны **Френеля**, то наблюдается практически равномерное освещение экрана - диск как бы не отбрасывает тени.

Если размер диска закрывает много зон **Френеля**, то в центре дифракционной картины светлое пятно **Пуассона** почти не видно, а освещённость в области геометрической тени практически равна нулю. Дифракционные кольца наблюдаются лишь в узкой области на границе света и тени.

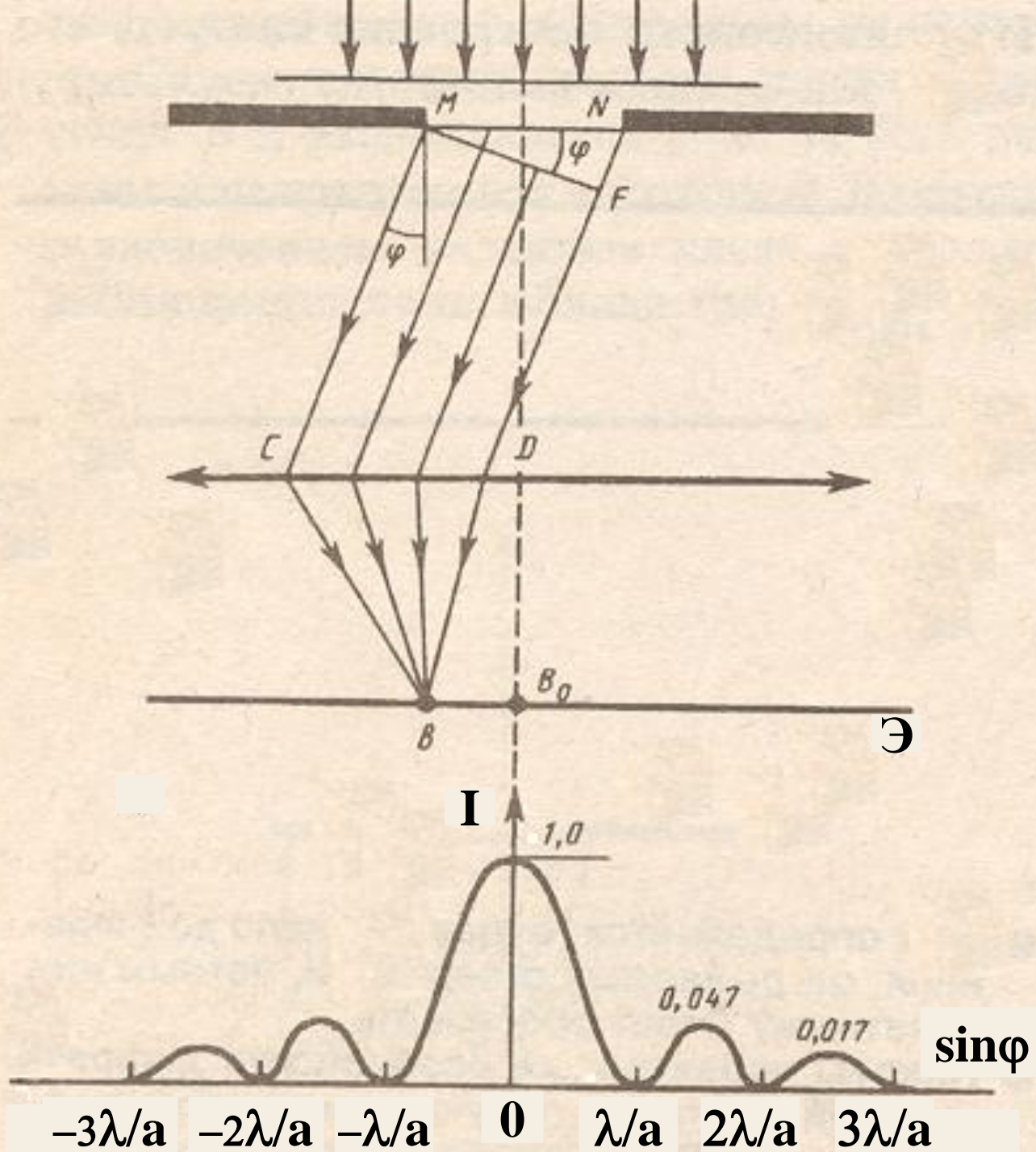
2.4 Дифракция Фраунгофера

2.4.1 Дифракция Фраунгофера на одной щели

Рассмотрим дифракцию **Фраунгофера** от бесконечно длинной узкой щели.

Пусть плоская волна падает *нормально* на экран, в котором имеется щель.

Выберем волновую поверхность, совпадающую с плоскостью щели. Открытый участок этой поверхности выступает источником вторичных волн. Дифракционную картину будем наблюдать в *фокальной плоскости* собирающей линзы.



Оптическая разность хода между крайними лучами **MC** и **ND**, идущими от щели в направлении угла φ , равна

$$\Delta = a \cdot \sin \varphi \quad (2.4.1)$$

Разобьем щель **MN** на зоны **Френеля**, имеющие вид полос, параллельных краям щели. Ширину зон выберем так, чтобы разность хода от краев этих зон была равна $\lambda/2$.

Тогда на ширине щели уместится $2\Delta/\lambda$ зон. Как следует из (2.4.1) это число зависит от угла φ .

Все точки в плоскости щели совершают колебания с одинаковой фазой. Амплитуды вторичных волн в плоскости щели тоже равны, поскольку зоны **Френеля** имеют одинаковые площади и одинаково наклонены к направлению наблюдения.

При интерференции света от каждой пары соседних зон **Френеля** результирующая амплитуда равна нулю, так как колебания от них приходят в точку ***B*** в противофазе и гасят друг друга.

Следовательно, если число зон **Френеля** *четное*

$$a \cdot \sin \varphi = \pm 2m (\lambda/2) \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.2)$$

то в точке ***B*** будет наблюдаться дифракционный *минимум*.

Если же число зон **Френеля** *нечетное*

$$a \cdot \sin \varphi = \pm (2m+1)(\lambda/2) \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.3)$$

то в точке ***B*** будет наблюдаться дифракционный *максимум*, соответствующий действию одной нескомпенсированной зоны **Френеля**.

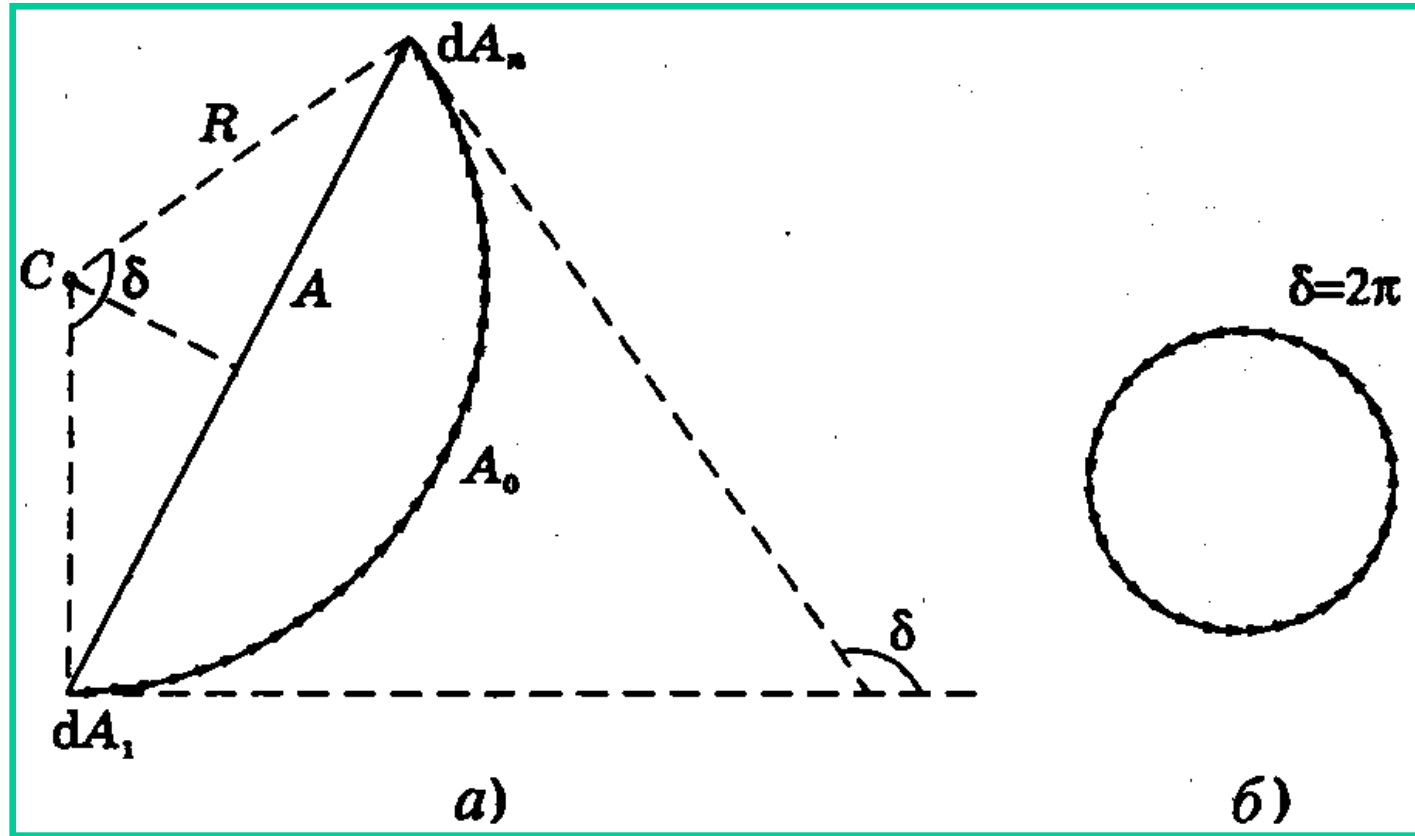
Результирующую амплитуду A в любой точке экрана B найдем из векторной диаграммы. Обозначим радиус цепочки-дуги через R . Из рисунка следует

$$A = 2R \sin(\delta/2), \quad A_0 = R\delta$$

Исключая R ,
получим

$$A = A_0 \frac{\sin(\pi a z)}{\pi a z}$$

$$z = \frac{\sin \varphi}{\lambda} \quad (2.4.4)$$



где A_0 - амплитуда при угле $\varphi = 0$.

Из формулы (2.4.4) следует, что интенсивности центрального и следующих максимумов относятся как

$$1 : 0,047 : 0,017 : 0,0083 : \dots$$

Значит, основная часть световой энергии сосредоточена в центральном максимуме, угловая полуширина которого равна λ/a .

При сужении щели центральный максимум расплывается, а его яркость уменьшается. Это же относится и к другим максимумам.

Наоборот, чем щель шире ($a > \lambda$), тем картина ярче, но дифракционные полосы уже, а число самих полос больше. При $a \gg \lambda$ в центре получается резкое изображение источника света, т.е. имеет место прямолинейное распространение света.

Положение дифракционных максимумов зависит от длины волны λ , поэтому в белом свете наблюдается совокупность картин для разных цветов, сдвинутых друг относительно друга.

Центральный максимум ($\varphi = 0$) является общим для всех длин волн, поэтому центр дифракционной картины имеет вид белой полосы.

Последующие максимумы для разных длин волн не совпадают между собой, ближе к центру располагаются максимумы, соответствующие более коротким фиолетовым волнам.

На рисунке показано изменение дифракционной картины при увеличении ширины щели.

Нулевой максимум наиболее яркий, он вдвое шире побочных максимумов. Размер области дифракционного расплывания обратно пропорционален ширине щели.



$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_4$

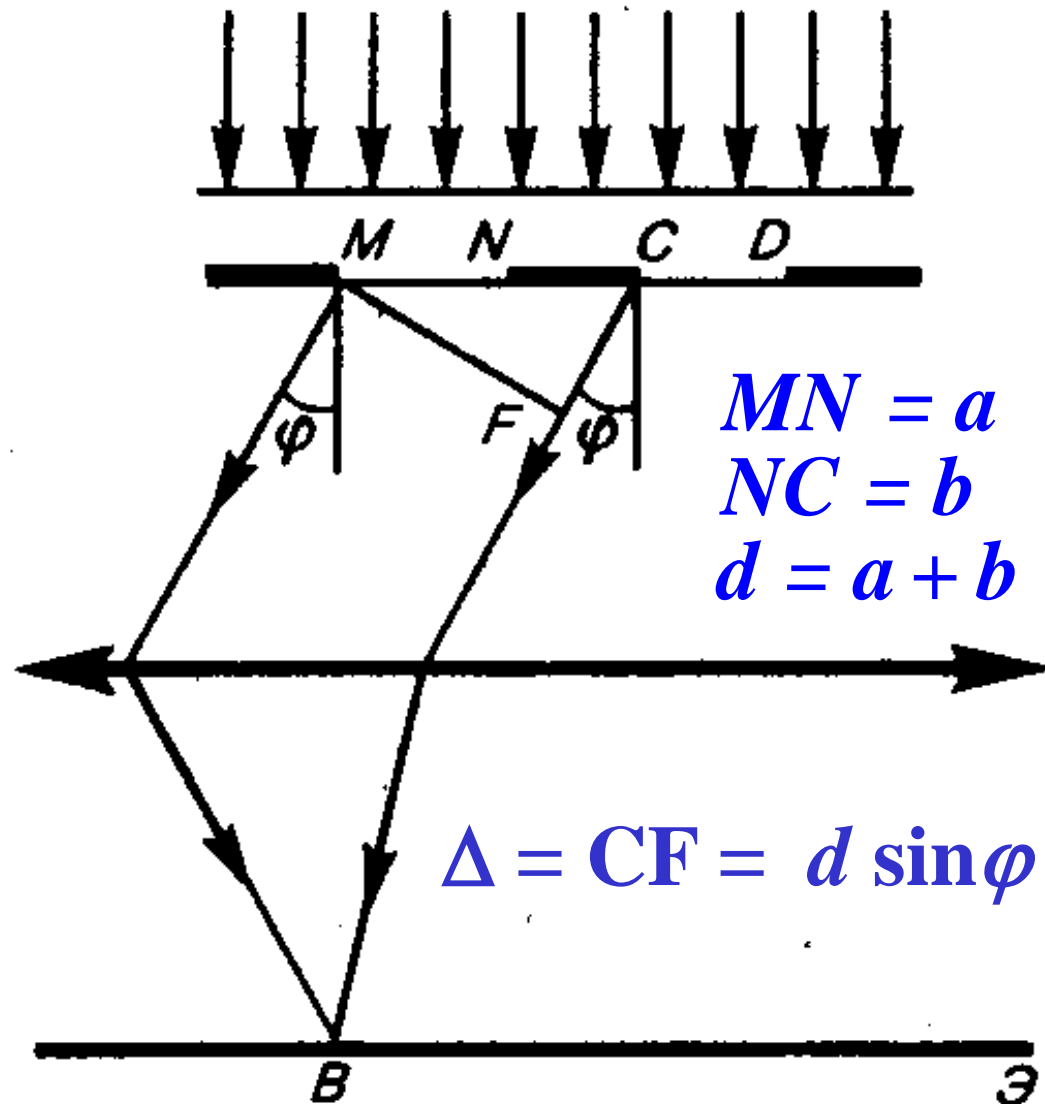
Дифракция Фраунгофера на щели по мере ее расширения (слева направо)

2.4.2 Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке

Дифракционная решетка, представляет собой систему параллельных щелей одинаковой ширины, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками, которые наносят алмазным резцом на стеклянную пластинку. Количество щелей может составлять *несколько сотен* на **1 мм**.

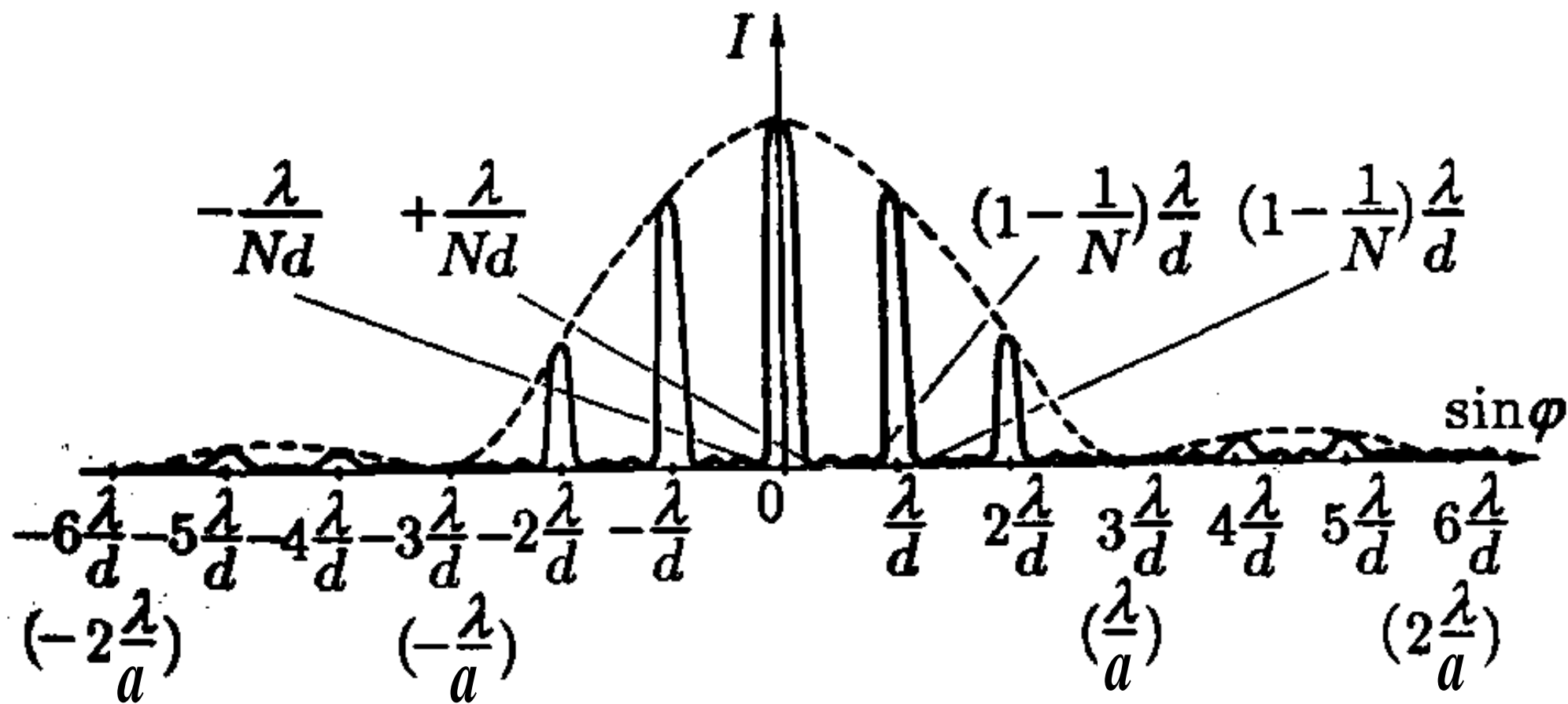
Дифракционная картина от решетки является результатом интерференции **когерентных** волн, идущих от всех щелей (**многолучевая интерференция**).

$d = a + b$ период дифракционной решетки



Главным максимумам отвечают узкие интенсивные пики, являющиеся результатом усиления волн от всех щелей.

главные max $d \sin \varphi = \pm m \lambda$ ($m = 0, 1, 2, \dots$)



Интенсивность в **главных max** равна

$$I_{max} = N^2 I_1$$

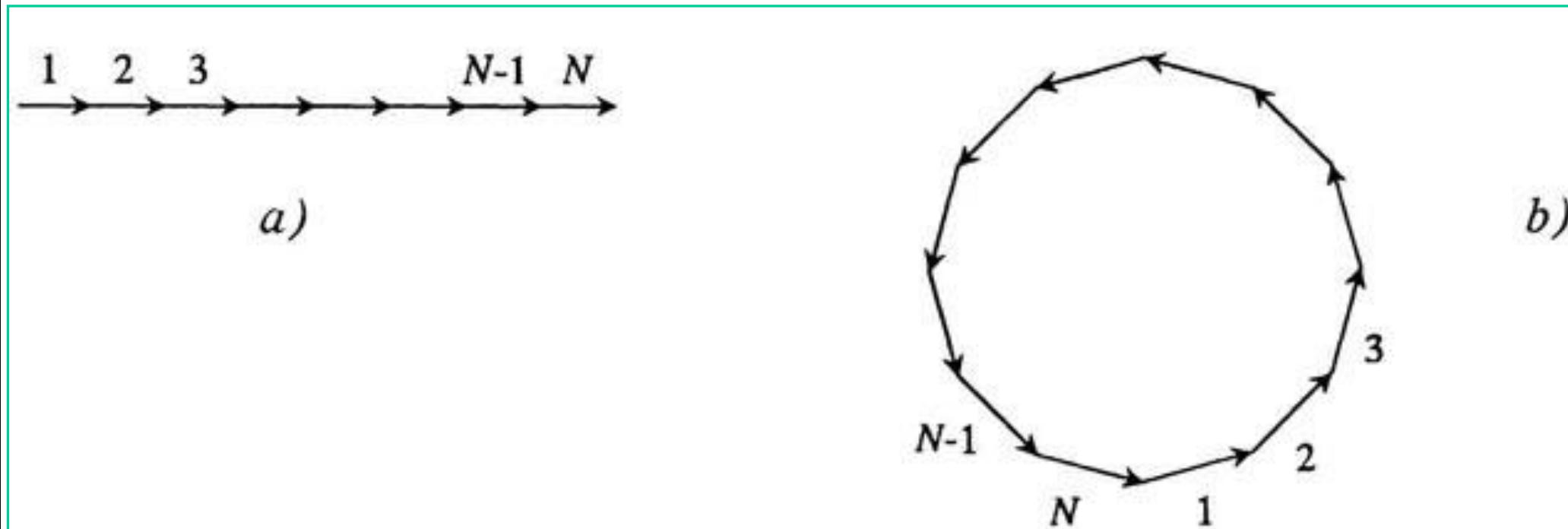
Поэтому кривая от одной щели, умноженная на N^2 , выступает **огibaющей полной интенсивности** – ей отвечает пунктирная линия на рисунке.

Минимумы интенсивности от одной щели являются главными минимумами дифракционной решетки.

Откуда условие **главных min**

$$a \cdot \sin \varphi = \pm m \lambda$$

Векторная диаграмма в главном максимуме (*a*) и в соседнем минимуме (*b*).



Амплитуда колебания в главном максимуме равна NA_1 , а интенсивность $I(\varphi) = N^2 I_1(\varphi)$, то есть она в N^2 раз больше интенсивности от одной щели.

Положение главных максимумов зависит от длины волны λ , поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального ($m = 0$), раскладываются в спектр, фиолетовая область которого обращена к центру дифракционной картины, а красная - наружу. На рисунке показаны спектры, получаемые с помощью дифракционной решетки

в белом цвете



в красном цвете



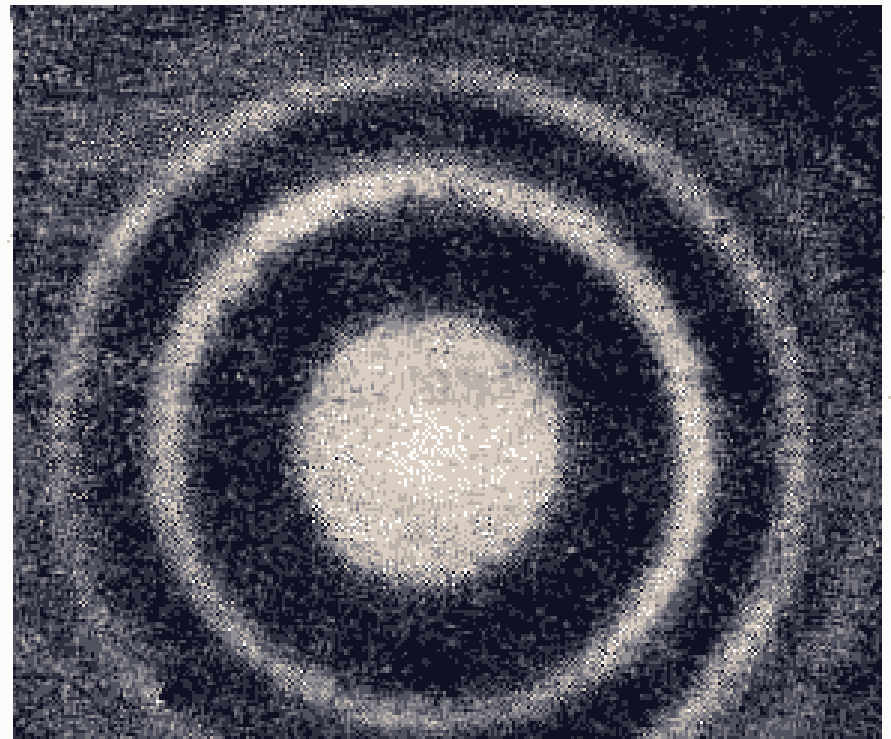
2.4.3 Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии

Расчет дифракции **Фраунгофера** на круглом отверстии достаточно сложен. Он приводит к функциям **Бесселя** первого порядка J_1 . Интенсивность света в направлении с углом φ дается формулой

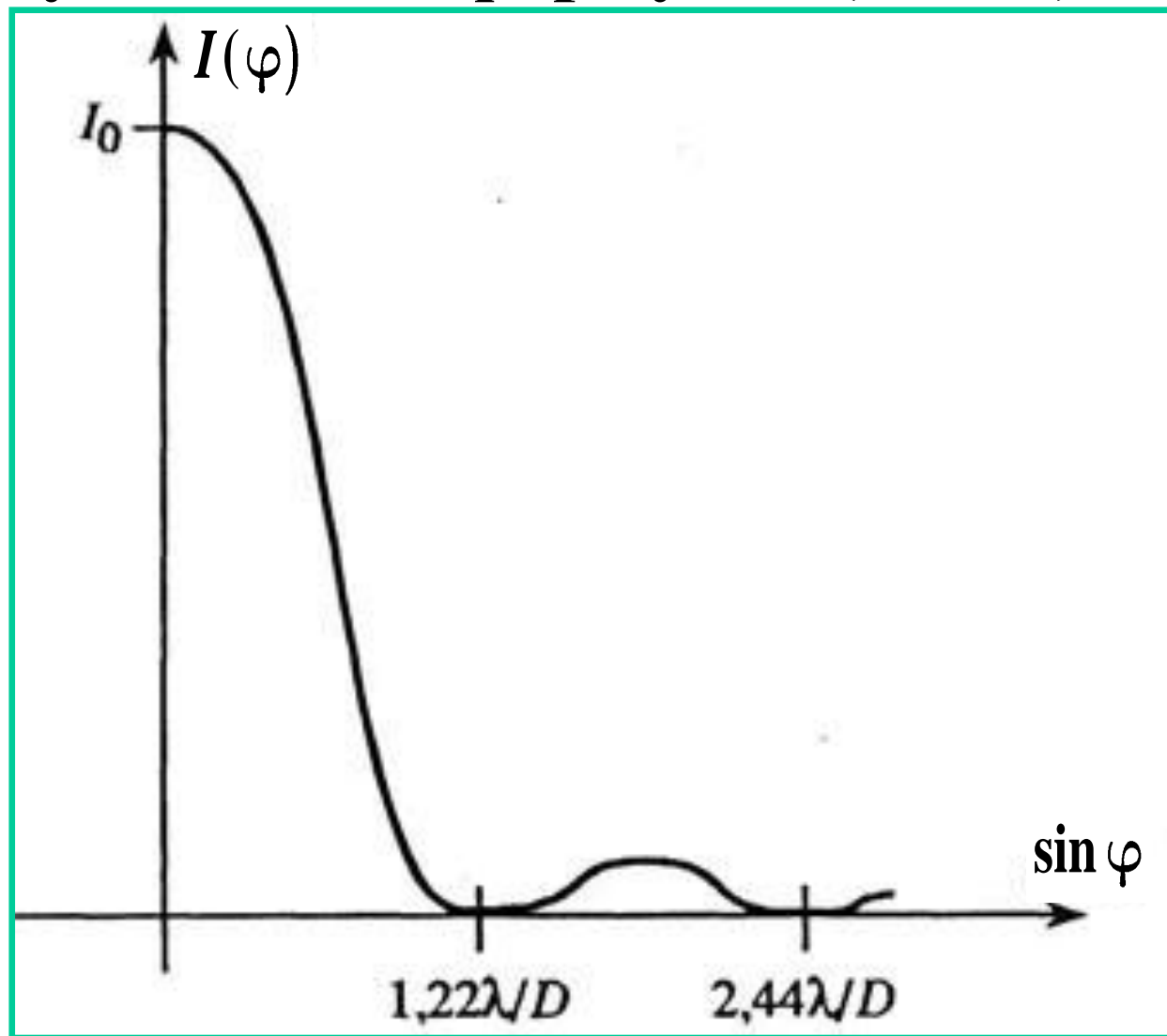
$$(2.4.14) \quad I(\varphi) = I_0 \frac{2J_1(\pi D z)}{\pi D z}, \quad z = \frac{\sin(\varphi)}{\lambda}$$

здесь I_0 - интенсивность света в направлении $\theta = 0$, D - диаметр отверстия.

Картина дифракции на круглом отверстии имеет вид концентрических колец и похожа на распределение интенсивности для одной щели. Центральное светлое пятно носит название **пятна Эйри**, в него попадает подавляющая часть светового потока (**84%**). Поэтому можно считать, что **пятно Эйри** является изображением бесконечно удаленного точечного источника, уширенное дифракцией света от краев круглого отверстия.



Распределение интенсивности света при
дифракции **Фраунгофера** на круглом отверстии,
полученное по формуле (2.4.14)



2.5 Разрешающая способность оптических приборов

Основными характеристиками спектрального прибора являются дисперсия и разрешающая сила.

Дисперсия определяет угловое или линейное расстояние между двумя спектральными линиями, отличающимися на единицу длины волны.

Угловая дисперсия характеризует степень углового разделения волн с различными длинами, она равна

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} \quad (2.5.1)$$

где $\delta\varphi$ - угловое расстояние между спектральными линиями, различающимися по длине волны на $\delta\lambda$.

В качестве примера, найдем угловую дисперсию дифракционной решетки. Для нахождения отношения

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$$

используем условие главных максимумов $d \sin \varphi = m\lambda$

Возьмем от него производную по длине волны

$$d \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} = m$$

Откуда

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}$$

(2.5.2a)

Для малых углов дифракции φ

$$D \approx \frac{m}{d} \quad (2.5.26)$$

Следовательно, угловая дисперсия дифракционной решетки обратно пропорциональна периоду решетки d и прямо пропорциональна порядку спектральной линии m .

Линейной дисперсией называют величину

$$D_{\text{лин}} \approx \frac{\delta l}{\delta \lambda} \quad (2.5.3)$$

где δl - линейное расстояние на экране между спектральными линиями, отличающимися по длине волны на $\delta \lambda$.

Найдем связь между угловой и линейной дисперсией. Пусть лучи, прошедшие через спектральный прибор, собираются линзой с *фокусом* f . Расположим экран наблюдения в фокусе линзы.

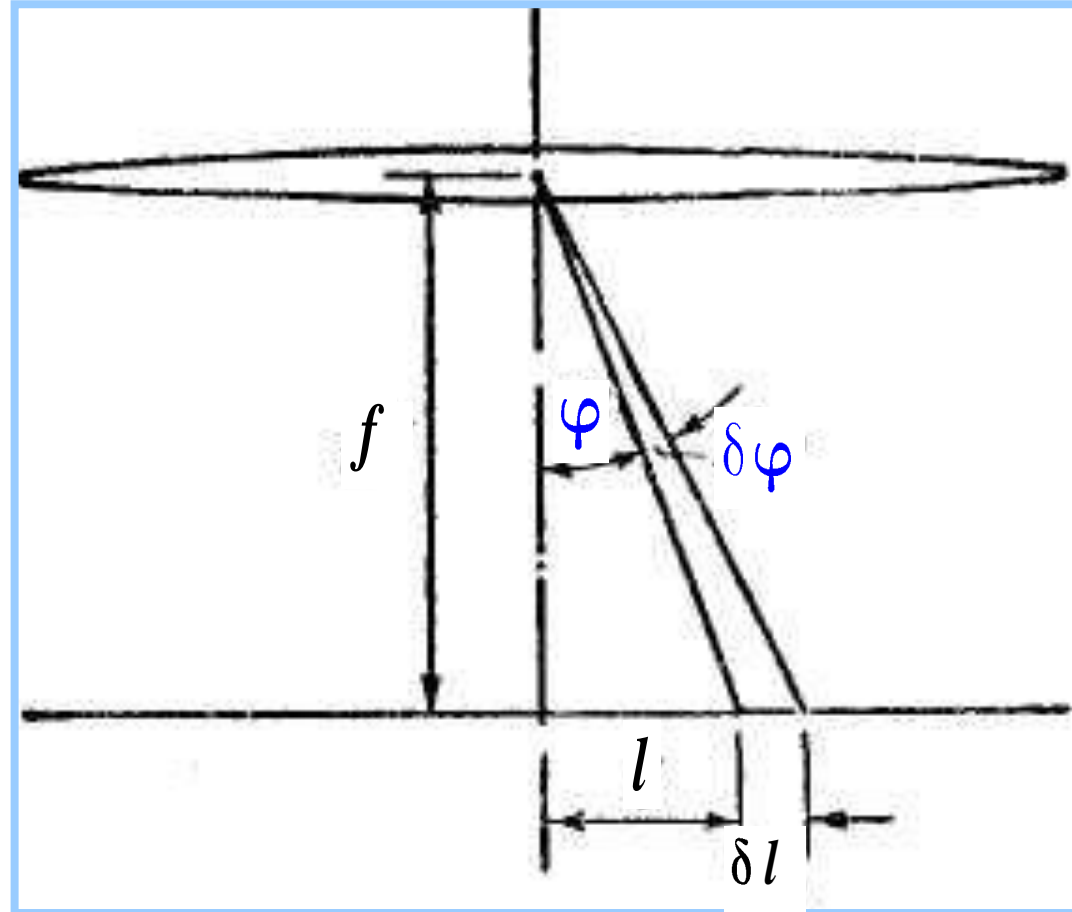
При небольших углах φ можно положить $\delta l \approx f \delta \varphi$

Подставляя в (2.5.3), получаем

$$D_{\text{лин}} = \frac{f \cdot \delta \varphi}{\delta \lambda} = f \cdot D \quad (2.5.4)$$

Следовательно, линейная

дисперсия выражается через угловую дисперсию D .



В частности, для дифракционной решетки (при малых углах дифракции φ)

$$D_{\text{лин}} = f \frac{m}{d} \quad (2.5.5)$$

Разрешающей силой оптического прибора называется величина, равная

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \quad (2.5.6)$$

где $\delta\lambda$ - минимальная разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются еще как *отдельные*. Поэтому R – равно числу линий различаемых на длине волны.

Возможность разрешения двух близких спектральных линий зависит от расстояния между ними и их ширины.

На рисунке штриховыми линиями показаны интенсивности двух соседних дифракционных максимумов, сплошной линией - результирующая интенсивность.

В случае а) оба максимума воспринимаются как один пик. В случае б) между максимумами лежит минимум. Два близких максимума воспринимаются как отдельные, если интенсивность в промежутке между ними составляет не более **80% от интенсивности максимума.**

