1. Волновые процессы

1.1 Волновое уравнение

Пусть некоторая физическая величина S описывает волновой процесс, распространяющийся в направлении оси x со скоростью υ. В качестве величины S может выступать смещение точек резинового шнура, напряженность электрического или магнитного поля и т.д.

Образование всех волновых процессов происходит по одному и тому же принципу. А именно, если в какой-то момент времени в некоторой точке среды **A** возникло возмущение, то оно через определенное время появляется в другой точке среды **B**.

Покажем, что все волновые процессы описываются функциями с одинаковым аргументом

$$S = f(t - x/\upsilon) \qquad \textbf{(1.1.1a)}$$

где t – время, x – координата точки.

Пусть в некоторой точке A с координатой x_0 в момент времени t_0 физическая величина S имела значение, равное $S(x_0,\ t_0)$. Пусть затем в момент времени t возмущение (волна) пришло в другую точку B с координатой x. Это значит, что значения физической величины в точках A и B совпадают, то есть

$$S(x_0, t_0) = S(x, t)$$

Данное равенство должно выполняться для любого волнового процесса (то есть для функции S любого вида), для любого момента времени и в любой точке пространства.

Поэтому координата и время могут входить в функцию S только в такой комбинации, при которой

$$S(x, t) = \mathrm{const}$$

Найдем явный вид этой комбинации.

Поскольку возмущение распространяется со скоростью υ, то координаты двух точек связаны выражением

$$x = x_0 + \upsilon(t - t_0) \quad \text{или} \quad x - \upsilon t = x_0 - \upsilon t_0$$

Значит, координата и время возмущения таковы, что их комбинация $x - \upsilon t = const$ или $x/\upsilon - t = const_1$ есть постоянная величина. Это и есть искомая связь координаты и времени.

Она является признаком их принадлежности к одному и тому же возмущению, то есть физической величине S. Значит S может зависеть от координаты и времени только в комбинации $t - x/\upsilon = \varphi$, которая называется **фазой волны**.

Если волна распространяется в отрицательном направлении оси x, то аргументом функции S будет $(x/\upsilon - t)$, то есть

$$S = f(x/\upsilon - t) \qquad (1.1.1b)$$

Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция S. Для этого продифференцируем формулу (1.1.1a) два раза

по координате $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\upsilon^2} f_\varphi''$

и два раза по времени $\dfrac{\partial^2 S}{\partial t^2} = f_\varphi''$

Значит

$$\boxed{\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}} \qquad (1.1.2)$$

Волновое уравнение

Такое же уравнение получается, если использовать волну, распространяющуюся в обратном направлении (1.1.1b). Обе волны являются двумя частными решениями волнового уравнения.

Колебание произвольного типа будет описываться общим решением дифференциального уравнения, являющимся суперпозицией двух частных решений

$$S(x,t) = f_1(t - x/\upsilon) + f_2(t + x/\upsilon)$$

где f_1, f_2 – произвольные функции, отвечающие волнам, распространяющимся в противоположных направлениях оси x.

Аналогично можно рассмотреть и волны, распространяющиеся вдоль других осей y, z. Волновые уравнения для них будут подобными – надо лишь в уравнении (1.1.2) заменить аргумент x на y и z.

В трехмерном случае волновое уравнение имеет вид

$$\Delta S = \nabla^2 S = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \qquad (1.1.3)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Все рассмотренные волновые уравнения справедливы лишь для однородных, изотропных сред, в которых затухание пренебрежимо мало.

При наличии затухания одномерное волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + 2\gamma \frac{\partial S}{\partial x} + \gamma^2 S = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \qquad \textbf{(1.1.4)}$$

где γ – коэффициент затухания.

Различают волны *продольные и поперечные*, в зависимости от того, происходит ли изменение величины S вдоль или поперек направления распространения волны.

1.2 Гармонические волны

Гармонические волны описывают движение гармонического осциллятора.

Уравнение гармонической волны имеет вид

$$\boxed{S(x,t) = A\cos(\omega(t - x/\upsilon))} \quad (1.2.1)$$

где A – амплитуда волны, ω - циклическая (круговая) частота колебаний, $\omega = 2\pi\nu$, ν – тактовая частота колебаний (Гц).

Гармоническая волна периодична во времени и пространстве, ее период равен 2π.

Из периодичности во времени $\omega\Delta t = 2\pi$ **находим промежуток времени, за который происходит одно колебание**

$$\Delta t = T = 2\pi/\omega$$

T – ***период колебаний***, $T = 1/\nu$.

Из периодичности в пространстве $\omega\Delta x/\upsilon = 2\pi$ **находим расстояние, на котором происходит одно колебание**

$$\Delta x = \lambda = 2\pi\upsilon/\omega = \upsilon T = \upsilon/\nu$$

λ - ***длина волны***, **расстояние, на которое волна распространяется за период колебаний** T.

Уравнение гармонической волны чаще используют в другом, более симметричном виде. Для этого представим

$$\omega(t - x/\upsilon) = \omega t - \omega x/\upsilon = \omega t - kx$$

где $k = \omega/\upsilon = 2\pi/\lambda$ **-** ***волновое число***

Волновое число равно числу длин волн, укладывающихся на отрезке длиной 2π**.**

Тогда можем записать

$$\boxed{S(x,t) = A\cos(\omega t - kx)} \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

В трехмерном случае оно имеет вид

$$\boxed{S(\vec{r},t) = A\cos(\omega t - (\vec{k}\cdot\vec{r}))} \qquad \textbf{(1.2.3)}$$

$\vec{k}$ – волновой вектор, указывающий направление распространения волны и равный

$$\vec{k} = \frac{\omega}{\upsilon}\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n} \qquad (1.2.4)$$

В отличие от волнового вектора, *фазовая скорость не является вектором*

2. Электромагнитные волны

2.1 Волновое уравнение для электромагнитных волн

Как было показано ранее, переменное электрическое поле создает вокруг себя переменное магнитное поле и наоборот. В результате этого все новые и новые области пространства захватываются электромагнитном полем, порождая волновой процесс.

Покажем, что существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла.

Рассмотрим однородную, изотропную среду с постоянными диэлектрической ε **и магнитной** μ **проницаемостями, в которой нет свободных зарядов** $\rho = 0$ **и отсутствуют токи проводимости** $\vec{j} = 0$ **.**

Выразим из материальных уравнений (2.2.12 - 2.2.14) электрическую и магнитную индукции через напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей и подставим их в уравнения Максвелла (2.2.8) - (2.2.11) , в результате эти уравнения примут вид

$$\boxed{rot\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}} \qquad (2.1.1a)$$

$$\boxed{div\vec{E} = 0} \qquad (2.1.1c)$$

$$\boxed{rot\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \qquad (2.1.1b)$$

$$\boxed{div\vec{H} = 0} \qquad (2.1.1d)$$

Применим к первому уравнению (2.1.1a) операцию *rot*

$$rot(rot\vec{E}) = [\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}]] = \qquad (2.1.2)$$

$$= -\mu\mu_0 rot(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) = -\mu\mu_0 \frac{\partial rot\vec{H}}{\partial t}$$

С другой стороны раскроем двойное векторное произведение по правилу “bac” минус “cab”

$$[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ **- оператор Лапласа.**

Но, согласно (2.1.1c) $div\vec{E} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$

поэтому $[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}]] = -\Delta\vec{E}$

Приравнивая левые и правые части и подставляя (2.1.2), получаем

волновое уравнение
для вектора $\vec{E}$

$$\boxed{\Delta\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}} \qquad (2.1.3a)$$

Аналогично, взяв ротор от уравнения (2.1.1b), получим

волновое уравнение
для вектора $\vec{H}$

$$\boxed{\Delta\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}} \qquad (2.1.3b)$$

Коэффициент справа имеет размерность скорости

$$\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 = \frac{1}{\upsilon^2}$$

υ - ***фазовая скорость электромагнитной волны в среде*.**

Следовательно, фазовая скорость света в среде равна

$$\boxed{\upsilon = c/\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 3\cdot 10^8$ **м/с - скорость света в вакууме.**

С учетом (2.1.4) волновые уравнения принимают вид

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \textbf{(2.1.5a)}$$

$$\Delta\vec{H} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \qquad \textbf{(2.1.5b)}$$

Решениями волновых уравнений (2.1.5) являются функции вида

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}(\omega t - (\vec{k}\cdot\vec{r}) + \varphi_0)\\ \vec{H}(\vec{r},t) &= \vec{H}(\omega t - (\vec{k}\cdot\vec{r}) + \varphi_0)\end{aligned}} \qquad (2.1.6)$$

где $\varphi = \omega t - (\vec{k}\cdot\vec{r}) + \varphi_0$ - фаза волны,

φ_0 - начальная фаза,

ω - круговая частота (угловая скорость),

$\vec{k}$ - волновой вектор

Рассмотрим свойства фазы волны, зафиксируем ее значение

$$\omega t-(\vec{k}\cdot\vec{r})+\varphi_0=const \qquad (2.1.8)$$

При заданном волновом векторе $\vec{k}$ это уравнение определяет поверхность, во всех точках которой фаза одна и та же. Такую поверхность называют ***волновой поверхностью***.

Поскольку в уравнение (2.1.8) входит время, то волновая поверхность движется с течением времени.

Волновая поверхность есть геометрическое место точек, до которых за время t волна доходит в одинаковой фазе.

Найдем скорость движения точек волновой поверхности.

Для этого продифференцируем уравнение (2.1.8) по времени, а результат разделим на круговую частоту ω

$$\left(\frac{\vec{k}}{\omega}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\left(\frac{\vec{k}}{\omega}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=1 \qquad (2.1.9)$$

где $\vec{n}=\vec{k}/k$ - единичный вектор, направленный вдоль волнового вектора,

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ - скорость движения точек, лежащих на волновой поверхности.

Из (2.1.9) следует, что эту скорость можно записать как

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \upsilon\vec{n}} \qquad (2.1.10)$$

Значит

$$\boxed{(\vec{n} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}) = \upsilon} \qquad (2.1.11)$$

Следовательно, *точки волновой поверхности движутся в направлении волнового вектора с фазовой скоростью* υ . Потому эта скорость и называется фазовой.

У разных точек волновой поверхности величина фазовой скорости υ, вообще говоря, разная.

Волновой вектор в каждой точке волновой поверхности перпендикулярен к плоскости, касательной к этой поверхности в данной точке. Эта плоскость называется *плоскостью волнового фронта*.

Поэтому *фазовая скорость есть скорость движения фронта волны*.

Волновой фронт разделяет область пространства, в которой имеются электромагнитные волны от области, до которой эти волны еще не дошли.

Частным случаем электромагнитных волн являются ***плоские монохроматические электромагнитные волны***, которые изменяются от координаты и времени по гармоническому закону с фиксированной частотой

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_m \cos(\omega t - (\vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}) + \varphi_0) \\ \vec{H} &= \vec{H}_m \cos(\omega t - (\vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}) + \varphi_0)\end{aligned}} \qquad (2.1.12)$$

$\vec{E}_m$ - **амплитуда напряженности электрического поля**

$\vec{H}_m$ - **амплитуда напряженности магнитного поля.**

Эти волны называются плоскими, потому что их волновые поверхности и волновой фронт представляют собой плоскости. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ колеблются в одной фазе.

Подставим (2.1.12) в уравнения Максвелла (2.1.1). Вычислим производные

$$\boldsymbol{rot}\vec{E} = [\vec{\nabla} \times \vec{E}] = \begin{Vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{Vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z =$$

$$= \{(k_y E_{mz} - k_z E_{my})\vec{e}_x - (k_x E_{mz} - k_z E_{mx})\vec{e}_y +$$

$$+ (k_x E_{my} - k_y E_{mx})\vec{e}_z\} \cdot \sin(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi_0) =$$

$$= [\vec{k} \times \vec{E}_m] \cdot \sin(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi_0)$$

Также находим

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\omega \vec{H}_m \sin(\omega t - (\vec{k}\cdot\vec{r}) + \varphi_0)$$

Подставляя эти производные в уравнение Максвелла (2.1.1а), получаем

$$rot\vec{E} = [\vec{k}\times\vec{E}_m]\cdot \sin(\omega t - (\vec{k}\cdot\vec{r}) + \varphi_0) =$$

$$= \mu\mu_0\omega\vec{H}_m \cdot \sin(\omega t - (\vec{k}\cdot\vec{r}) + \varphi_0)$$

Значит

$$\boxed{[\vec{k}\times\vec{E}_m] = \mu\mu_0\omega\vec{H}_m} \qquad \textbf{(2.1.13а)}$$

Вычислим дивергенцию

$$div\vec{E} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) =$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} =$$

$$= (k_x E_{mx} + k_y E_{my} + k_z E_{mz}) \cdot \sin(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi_0)$$

$$= (\vec{k} \cdot \vec{E}_m) \cdot \sin(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi_0) = 0$$

Следовательно

$$\boxed{(\vec{k} \cdot \vec{E}_m) = 0} \qquad \textbf{(2.1.13b)}$$

Аналогичный расчет для напряженности магнитного поля дает

$$\boxed{[\vec{k} \times \vec{H}_m] = -\varepsilon\varepsilon_0\omega\vec{E}_m} \qquad \textbf{(2.1.13c)}$$

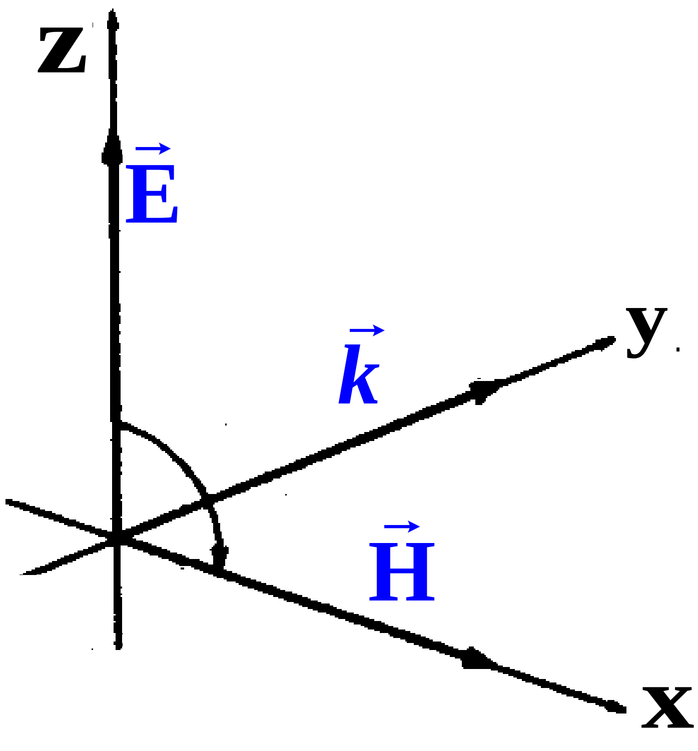
$$\boxed{(\vec{k} \cdot \vec{H}_m) = 0} \qquad \textbf{(2.1.13d)}$$

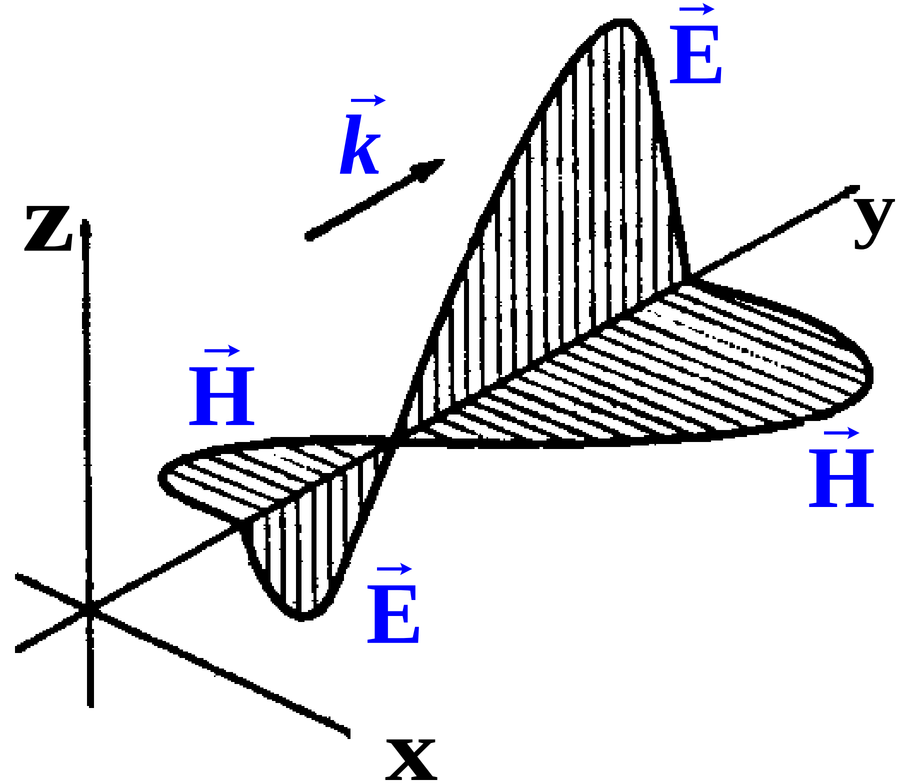
Из 4-х уравнений (2.1.13a - 2.1.13d) следует взаимная ортогональность векторов

$$\boxed{\vec{k} \perp \vec{H} \quad ; \quad \vec{k} \perp \vec{E} \quad ; \quad \vec{E} \perp \vec{H}} \qquad \textbf{(2.1.14)}$$

Поэтому плоские *электромагнитные волны являются* *поперечными волнами* - векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны друг к другу и распространяются с фазовой скоростью υ в направлении волнового вектора $\vec{k}$.

Три вектора в написанном порядке $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{k}$ образуют правовинтовую систему.





Из ортогональности векторов и формул (2.1.13a), (2.1.13c) следует связь модулей амплитуд

$$kE_m = \mu\mu_0\omega H_m \tag{2.1.15}$$

$$kH_m = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m$$

Поделив одно уравнение на другое, получаем связь модулей напряженности электрического и магнитного полей

$$\boxed{E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}} \tag{2.1.16}$$

2.2 Энергия электромагнитных волн

Электромагнитные волны переносят энергию, что проявляется в различных действиях, которые они оказывают на предметы – нагревании, давлении и т.д.

Количество энергии W, переносимое волной через некоторую поверхность за 1 сек называется потоком энергии Ф

$$\Phi = dW/dt \qquad (2.2.1)$$

$$[\Phi] = \text{Вт}$$

Через разные участки поверхности в общем случае проходит разное количество энергии.

Поэтому для характеристики неравномерного распространения энергии вводят плотность потока энергии j – она равна потоку энергии через единичную площадку, перпендикулярную направлению, вдоль которого переносится энергия

$$\mathbf{j} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S_{\perp}} \qquad (2.2.2)$$

где $\Delta S_{\perp}$ - площадка, перпендикулярная направлению распространения волны,

$\Delta\Phi$ - поток энергии, переносимый через эту площадку.

Введем плотность энергии w – количество энергии, содержащееся в 1 м^3

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} \qquad (2.2.3)$$

где ΔW - количество энергии, содержащееся в объеме ΔV

Плотность энергии электрического поля в вакууме равна

$$w_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

Аналогично, плотность энергии магнитного поля равна

$$w_H = \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

Полная плотность электромагнитного поля есть

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

Согласно (2.1.16) для вакуума

$$E\sqrt{\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu_0}$$

можем записать

$$w = w_E + w_H = \frac{(E\sqrt{\varepsilon_0})^2}{2} + \frac{(H\sqrt{\mu_0})^2}{2} =$$

$$= \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} EH = \frac{EH}{c}$$

Откуда получаем

$$j = wc = EH \qquad (2.2.6)$$

Векторы **E** и **H** взаимно перпендикулярны и образуют с с направлением волны правовинтовую систему, поэтому (2.2.6) можем переписать в виде

$$\vec{j} = [\vec{E} \times \vec{H}] \qquad (2.2.7)$$

Вектор $\vec{j}$ называется вектором Умова-Пойтинга.

Для электромагнитных волн вектор Умова-Пойтинга обозначают через $\vec{S}$

$$\boxed{\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]} \qquad (2.2.8)$$

Таким образом плотность потока энергии, переносимой электромагнитной волной, дается вектором Умова-Пойтинга.

Модуль вектора Умова Пойтинга $S = EH$ равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.