

8. Неинерциальные системы отсчета.

8.1 Силы инерции

Законы **Ньютона** выполняются только в инерциальных системах отсчета. Относительно всех инерциальных систем тело движется с одним и тем же ускорением $\vec{a}$.

Неинерциальные системы движутся относительно инерциальных систем с некоторым ускорением $\vec{a}_n$.

Поэтому в них законы **Ньютона** *не выполняются*.

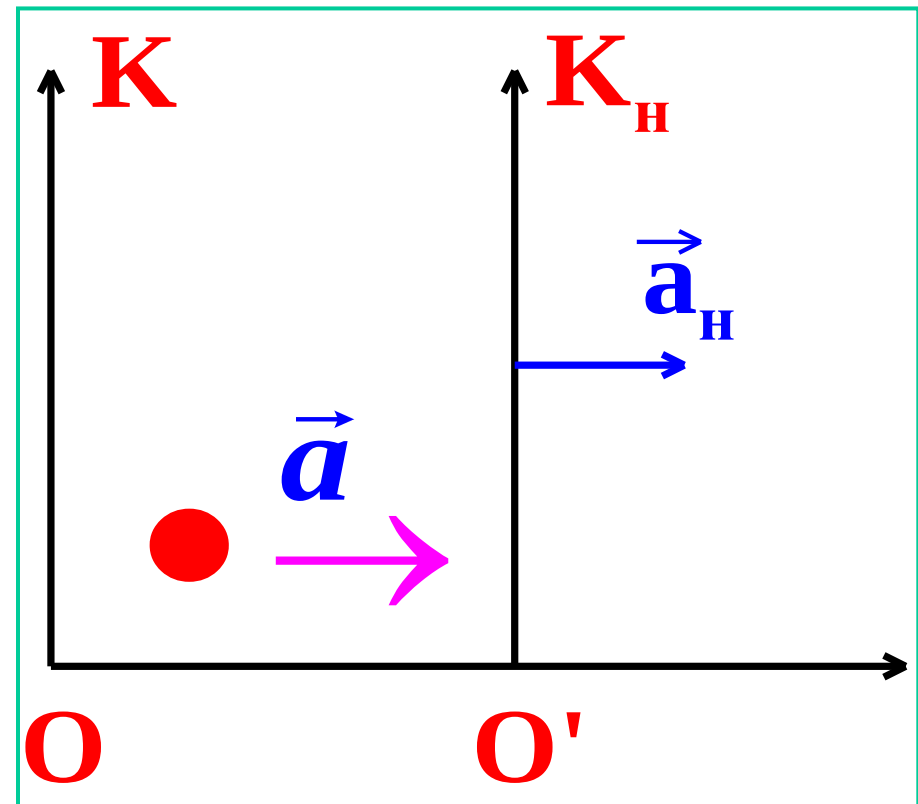
Однако, законы **Ньютона** можно применять, если ввести в рассмотрение *особые* силы – *силы инерции*.

Рассмотрим две системы отсчета K и K_n . Из них система K – инерциальная, а система K_n – *неинерциальная*.

Пусть система K_n движется относительно системы K с ускорением $\vec{a}_n$.

В инерциальной системе K уравнение **Ньютона** для тела массы m движущегося с ускорением $\vec{a}$ имеет вид

$$\vec{F} = m\vec{a}$$



Тогда относительно неинерциальной системы K_n тело будет двигаться с ускорением

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_n$$

Умножим это равенство на массу тела, получим

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_n \quad (8.1.1)$$

Это уравнение и представляет собой **2-й закон Ньютона** в неинерциальной системе отсчета K_n .

Из него следует, что в неинерциальной системе на тело как бы действует *дополнительная сила*

$$\vec{F}_u = -m\vec{a}_n \quad (8.1.2)$$

которая называется *силой инерции*.

С ее введением уравнение Ньютона в неинерциальной системе отсчета принимает вид

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_u = \vec{F} + \vec{F}_u \quad (8.1.3)$$

Сила инерции учитывает влияние ускорения самой неинерциальной системы на характер движения тела относительно этой системы.

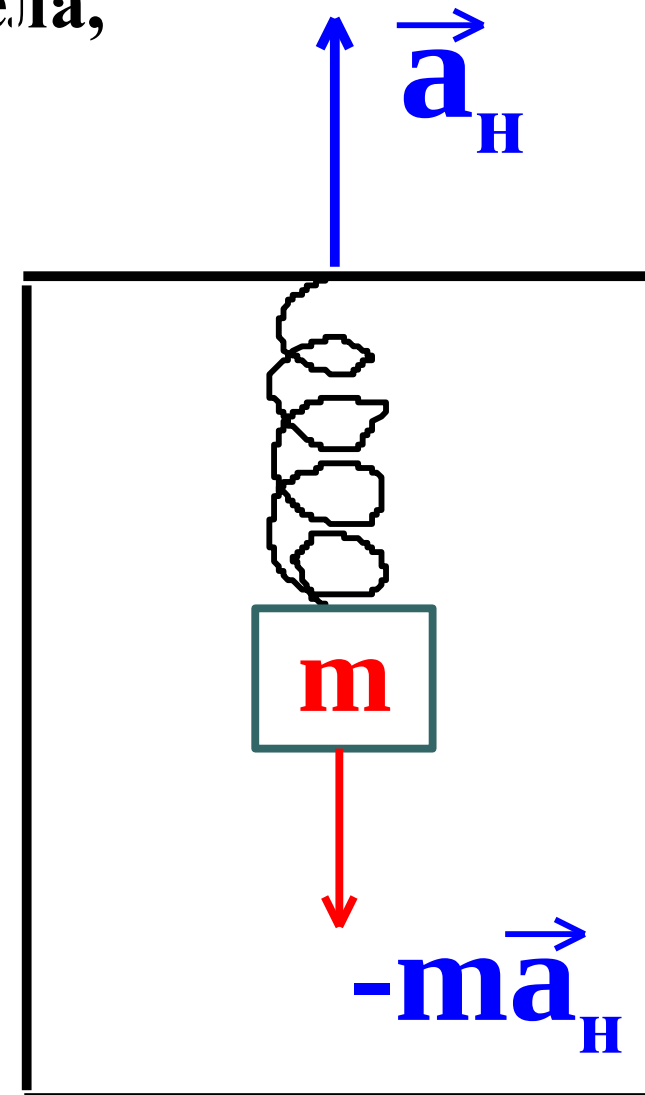
Силы инерции обнаруживают себя в реальных явлениях. Например, при ускоренном или замедленном движении поезда силы инерции вызывают падение предметов. В центрифугах они используются для разделения веществ.

Сила инерции пропорциональна массе тела, поэтому она аналогична силам тяготения.

Для иллюстрации рассмотрим кабину, которая движется с ускорением $\vec{a}_H$ вверх. Все тела, находящиеся в кабине будут вести себя так, как если бы на них действовала сила инерции $\vec{F}_u = -m\vec{a}_H$

В частности, пружина с прикрепленным на ее конце телом массы m растянется так, чтобы упругая сила уравновесила силу инерции.

Но тоже самое будет наблюдаться, когда кабина неподвижна, а на нее действует сила тяжести с напряженностью $-\vec{a}_H$.

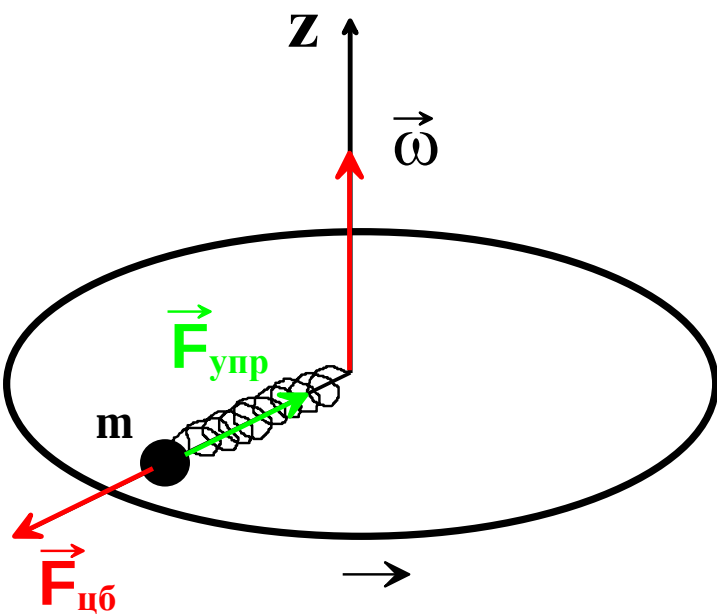


Поэтому если человек находится в кабине и у него нет возможности наблюдать за тем, что происходит за пределами кабины, то он не сможет установить, чем обусловлена сила, действующая на пружину - ускоренным движением кабины или действием гравитационного поля.

На этом основании говорят об *эквивалентности сил инерции и сил тяготения*.

8.2 Центробежная сила инерции

Пусть диск вращается с угловой скоростью ω вокруг оси Z . К центру диска прикреплена пружина, на конце которой находится груз массы m . Груз и пружина надеты на стержень. Перемещаясь вдоль стержня и растягивая пружину, груз в конце концов остановится в таком положении, в котором сила упругости в *неподвижной системе отсчета, связанной с Землей*, согласно 2-му закону Ньютона будет равна $\vec{F}_{\text{упр}} = m\vec{a}_n = -m\omega^2\vec{R}$. Где $\vec{R}$ - радиус-вектор, проведенный к грузу из центра диска, $\vec{a}_n$ - центростремительное ускорение.

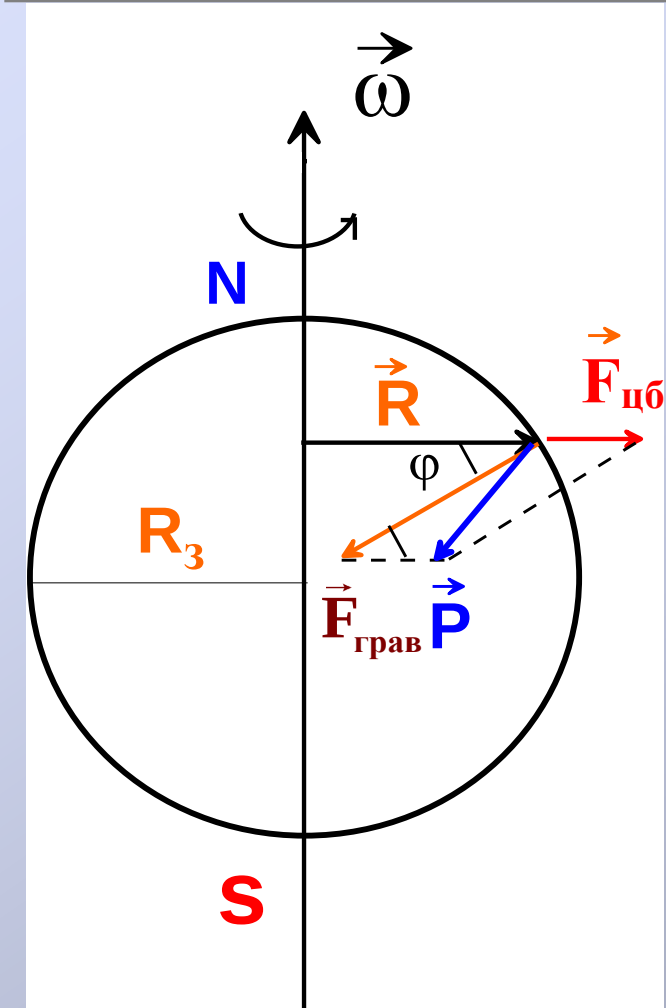


Относительно диска груз покоится. Это можно объяснить тем, что *во вращающейся системе отсчета, связанной с диском* на груз действует сила инерции

$$\vec{F}_{\text{цб}} = -\vec{F}_{\text{упр}} = m\omega^2\vec{R} \quad (8.2.1)$$

направленная вдоль радиуса от центра и компенсирующая силу упругости. Эта сила называется *центробежной силой инерции*.

Если на вращающемся диске находится человек, то на него будет действовать центробежная сила инерции, сталкивающая его с диска. Чтобы остаться в состоянии покоя человек должен приложить силу, равную $\vec{F} = -m\omega^2\vec{R}$, или испытывать действие такой же по величине силы со стороны другого тела.



Другим примером неинерциальной системы отсчета является *геоцентрическая* система, связанная с **Землей**. За счет вращения **Земли** вокруг своей оси на тело, находящееся на ее поверхности, действуют *две* силы – сила гравитации (тяготения) $\vec{F}_{\text{грав}}$ и центробежная сила инерции

$$\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\vec{R}$$

где ω – угловая скорость вращения **Земли**,
 $\vec{R}$ – радиус - вектор от оси вращения до тела, его модуль равен $R = R_3 \cdot \cos \varphi$
 где угол φ – широта, R_3 – радиус **Земли**.

Результирующая сила равна силе тяжести $\vec{P}$, действующей на тело на поверхности **Земли**

$$\vec{P} = \vec{F}_{\text{грав}} + \vec{F}_{\text{цб}} = m\vec{g}$$

где $\vec{g}$ - ускорение свободного падения.

Без учета центробежной силы сила тяжести $\vec{P}$ была бы направлена к центру **Земли**. Но центробежная сила приводит к отклонению направления силы тяжести на центр и уменьшению ее величины.

Модуль центробежной силы пропорционален расстоянию от тела до оси вращения и зависит от широты

$$F_{\text{цб}} = m\omega^2 R_3 \cos(\varphi)$$

Поэтому влияние центробежной силы на силу тяжести максимально на **экваторе** ($\varphi = 0$) и **отсутствует на полюсах** ($\varphi = \pi/2$).

Другая причина, по которой **Земля** не является инерциальной системой, - это ее движение по орбите вокруг **Солнца**.

Как уже ранее отмечалось центростремительное ускорение, связанное с движением **Земли** вокруг **Солнца** равно $a_{ор} \approx 0.006 \text{ м/сек}^2$.

Оно почти на порядок меньше ускорения, возникающего за счет вращения **Земли** вокруг своей оси

$$a_z (\text{на экваторе}) = 0.034 \text{ м/с}^2$$

Наконец, **Солнце** вместе с планетами вращается вокруг центра **Галактики** со скоростью $v_{\Gamma} \sim 300$ км/сек.

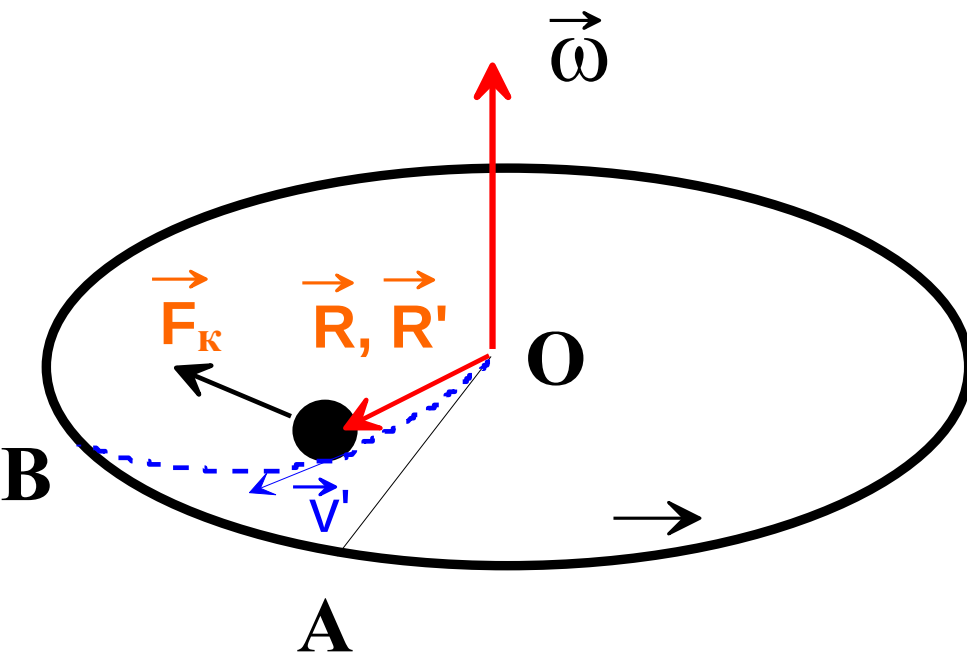
Расстояние до центра **Галактики** R_{Γ} составляет около **30** тысяч световых лет, поэтому вращательному движению солнечной системы отвечает центростремительное ускорение a_{Γ} , направленное к центру галактики и равное

$$a_{\Gamma} = \omega^2 R_{\Gamma} = \frac{v_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma}} = \frac{(3 \cdot 10^5 \text{ м/сек})^2}{3 \cdot 10^{20} \text{ м}} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м/сек}^2$$

Это значение ничтожно мало, поэтому *система отсчета, связанная с неподвижными звездами, с очень хорошей точностью может считаться инерциальной.*

8.3 Сила Кориолиса

В предыдущей задаче тело покоилось относительно вращающейся системы отсчета. Рассмотрим теперь случай, когда *тело движется относительно этой системы*. Тогда наряду с центробежной силой на тело будет действовать *еще одна сила инерции – сила Кориолиса*.



Пустим из центра диска O шарик вдоль радиуса OA со скоростью относительно диска $\vec{V}'$. Если бы диск не вращался, то шарик катился вдоль прямой OA . При вращении диска шарик будет двигаться по кривой OB , как если бы на него действовала некоторая сила $\vec{F}_K$, перпендикулярная к скорости в каждой точке траектории. Эта сила и есть *сила Кориолиса*.

Для нахождения силы **Кориолиса** введем в рассмотрение две системы координат – одну неподвижную **K**, связанную с **Землей**, а другую - подвижную **K'**, связанную с вращающимся диском. Начало координат обеих систем выберем в центре диска **O**, а оси **Z** и **Z'** совместим с осью вращения диска. В системе **K** радиус-вектор шарика равен $\vec{R}$, в системе **K'** - $\vec{R}'$. Эти вектора совпадают друг с другом в любой момент времени

$$\vec{R} = \vec{R}'$$

или в проекциях

$$R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z = R'_x \vec{e}'_x + R'_y \vec{e}'_y + R'_z \vec{e}'_z$$

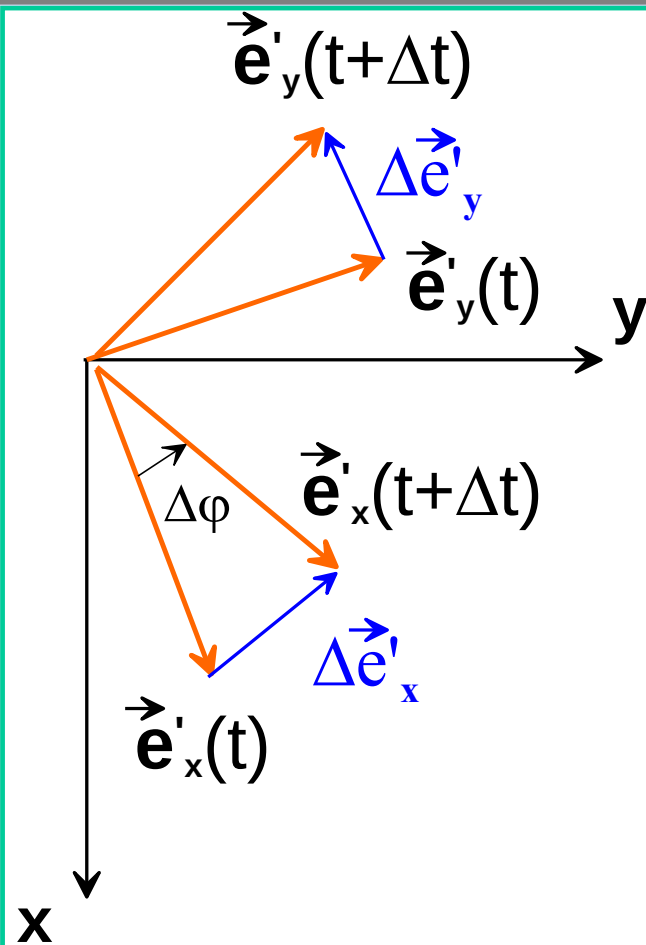
где $\vec{e}_i$ - орты системы **K**, $\vec{e}'_i$ - орты системы **K'**. Орты $\vec{e}_i$ от времени не зависят, тогда как орты $\vec{e}'_x, \vec{e}'_y$ системы **K'**, вращаются вместе с диском вокруг оси **Z'** с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Найдем связь скоростей шарика в двух системах. Для этого возьмем первую производную по времени от равенства векторов $\vec{R} = \vec{R}'$.

Так как движение происходит только в плоскости (x,y) , то

$$\frac{dR_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dR_y}{dt} \vec{e}_y = \frac{dR'_x}{dt} \vec{e}'_x + R'_x \frac{d\vec{e}'_x}{dt} + \frac{dR'_y}{dt} \vec{e}'_y + R'_y \frac{d\vec{e}'_y}{dt}$$

или

$$\vec{V} = \vec{V}' + R'_x \frac{d\vec{e}'_x}{dt} + R'_y \frac{d\vec{e}'_y}{dt}$$



где $\vec{V}, \vec{V}'$ - скорости шарика в системах K и K' соответственно. Выясним смысл последних слагаемых. Согласно определению производной

$$\frac{d\vec{e}'_x}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{e}'_x(t+\Delta t) - \vec{e}'_x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{e}'_x}{\Delta t}$$

Приращение орта $\vec{e}'_x$ за время Δt можно записать в виде $\Delta \vec{e}'_x = \Delta e'_x \left(\frac{\Delta \vec{e}'_x}{\Delta e'_x} \right)$

В скобках - единичный вектор, направленный в ту же сторону, что и $\Delta \vec{e}'_x$

Подобное же выражение получается и для приращения орта $\vec{e}'_y$

$$\Delta \vec{e}'_y = \Delta e'_y \left(\frac{\Delta \vec{e}'_y}{\Delta e'_y} \right)$$

В пределе $\Delta t \rightarrow 0$ угол поворота векторов $\vec{e}'_x$ и $\vec{e}'_y$ стремится к нулю $\Delta \varphi \rightarrow 0$, и можно считать, что $\Delta \vec{e}'_x \perp \vec{e}'_x$ и $\Delta \vec{e}'_y \perp \vec{e}'_y$

Из рисунка видно, что $\frac{\Delta \vec{e}'_x}{\Delta e'_x} = \vec{e}'_y$ и $\frac{\Delta \vec{e}'_y}{\Delta e'_y} = -\vec{e}'_x$.

Поэтому получаем

$$\frac{\Delta \vec{e}'_x}{\Delta t} = \frac{\Delta e'_x}{\Delta t} \vec{e}'_y \quad \frac{\Delta \vec{e}'_y}{\Delta t} = -\frac{\Delta e'_y}{\Delta t} \vec{e}'_x$$

С другой стороны, величины приращений ортов при повороте на угол $\Delta \varphi$ можно записать в виде

$$\Delta e'_x = e'_x \cdot \Delta \varphi = \Delta \varphi, \quad \Delta e'_y = e'_y \cdot \Delta \varphi = \Delta \varphi \quad \text{так как } e'_x = e'_y = 1$$

Поэтому $\frac{\Delta \vec{e}'_x}{\Delta t} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \omega$, $\frac{\Delta \vec{e}'_y}{\Delta t} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \omega$

В пределе $\Delta t \rightarrow 0$ получаем

$$\frac{d\vec{e}'_x}{dt} = \frac{de'_x}{dt} \vec{e}'_y = \omega \vec{e}'_y \quad , \quad \frac{d\vec{e}'_y}{dt} = -\frac{de'_y}{dt} \vec{e}'_x = -\omega \vec{e}'_x$$

Возвращаясь к формуле для скорости, можем переписать ее в виде

$$\vec{V} = \vec{V}' + \omega(R'_x \vec{e}'_y - R'_y \vec{e}'_x)$$

Используем свойство векторного произведения - оно равно детерминанту

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \text{Det} \begin{vmatrix} \vec{e}'_x & \vec{e}'_y & \vec{e}'_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{e}'_x(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{e}'_y(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{e}'_z(a_x b_y - a_y b_x)$$

В нашем случае вектор угловой скорости совпадает с осью **Z**

$\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, поэтому детерминант приобретает вид

$$\omega(R'_x \vec{e}'_y - R'_y \vec{e}'_x) = \text{Det} \begin{vmatrix} \vec{e}'_x & \vec{e}'_y & \vec{e}'_z \\ 0 & 0 & \omega \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{vmatrix} = [\vec{\omega} \times \vec{R}']$$

Отсюда получаем связь скоростей в двух системах отсчета

$$\vec{V} = \vec{V}' + [\vec{\omega} \times \vec{R}'] = \vec{V}' + [\vec{\omega} \times \vec{R}] \quad (8.3.1)$$

Второе слагаемое связано с вращением системы отсчета **K'** относительно системы **K**.

Теперь найдем связь ускорений в двух системах. Для этого продифференцируем выражение (8.3.1) по времени. Поскольку угловая скорость считается постоянной, то находим

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a} = \frac{d\vec{V}'}{dt} + [\vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt}] = \frac{d\vec{V}'}{dt} + [\vec{\omega} \times \vec{V}] \quad (8.3.2)$$

Рассмотрим производную

$$\frac{d\vec{V}'}{dt} = \frac{d(V'_x \vec{e}'_x + V'_y \vec{e}'_y)}{dt} = \frac{dV'_x}{dt} \vec{e}'_x + V'_x \frac{d\vec{e}'_x}{dt} + \frac{dV'_y}{dt} \vec{e}'_y + V'_y \frac{d\vec{e}'_y}{dt}$$

Здесь сумма $\frac{dV'_x}{dt} \vec{e}'_x + \frac{dV'_y}{dt} \vec{e}'_y = \vec{a}'$ - есть ускорение шарика относительно вращающейся системы отсчета K' .

Подставляя найденные ранее выражения для производных

$$\frac{d\vec{e}'_x}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{e}'_y}{dt},$$

получаем
$$\frac{d\vec{V}'}{dt} = \vec{a}' + V'_x \omega \vec{e}'_y - V'_y \omega \vec{e}'_x = \vec{a}' + [\vec{\omega} \times \vec{V}']$$

Используя формулу для скоростей (8.3.1), находим

$$\vec{a} = \vec{a}' + [\vec{\omega} \times \vec{V}'] + [\vec{\omega} \times \vec{V}] = \vec{a}' + 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{V}'] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{R}]]$$

Двойное векторное произведение обладает свойством

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Поэтому можем записать

$$[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{R}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{R}) - \vec{R}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = 0 - \omega^2 \vec{R}$$

Первое слагаемое **= 0** из-за ортогональности векторов $\vec{\omega} \perp \vec{R}$

В результате получаем выражение, связывающее ускорения в двух системах отсчета

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{V}'] - \omega^2 \vec{R} \quad (8.3.3)$$

Итак, ускорение частицы относительно неподвижной системы отсчета **К** равно сумме *трех ускорений*:

- 1) ускорения $\vec{a}'$ относительно вращающейся системы **К'**
- 2) *кориолисового* ускорения $\vec{a}_K = 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{V}']$
- 3) центробежного ускорения $-\omega^2 \vec{R}$, которым обладала бы частица, если бы она покоилась во вращающейся системе отсчета **К'**

Умножим равенство (8.3.3) на массу шарика m

$$m\vec{a} = m\vec{a}' + 2m[\vec{\omega} \times \vec{V}'] - m\omega^2 \vec{R}$$

Меняя местами, получаем

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - 2m[\vec{\omega} \times \vec{V}'] + m\omega^2 \vec{R}$$

В результате, формула, связывающая силы, действующие на шарик в двух системах, приобретает вид

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_K + \vec{F}_{цб}$$

где $\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{R}$ - *центробежная сила инерции*, а

$\vec{F}_K$ - *сила Кориолиса*, равная

$$\vec{F}_K = -2m[\vec{\omega} \times \vec{V}'] = 2m[\vec{V}' \times \vec{\omega}] \quad (8.3.4)$$

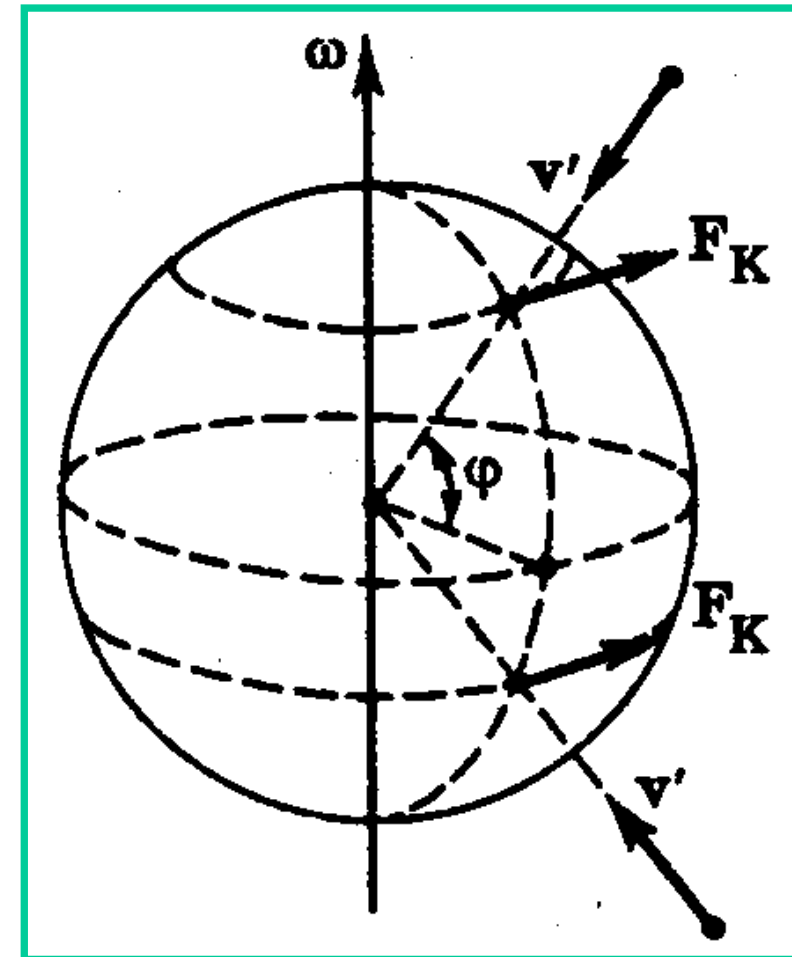
В системе K' сила *Кориолиса* перпендикулярна оси вращения и скорости движения шарика $\vec{V}'$, поэтому она *не совершает работу*. Ее роль сводится к тому, что она меняет направление вектора скорости шарика $\vec{V}'$, но не меняет величину этой скорости.

Примеры движений, в которых проявляется сила Кориолиса

При движении тела относительно **Земли** сила **Кориолиса** приводит к нескольким эффектам.

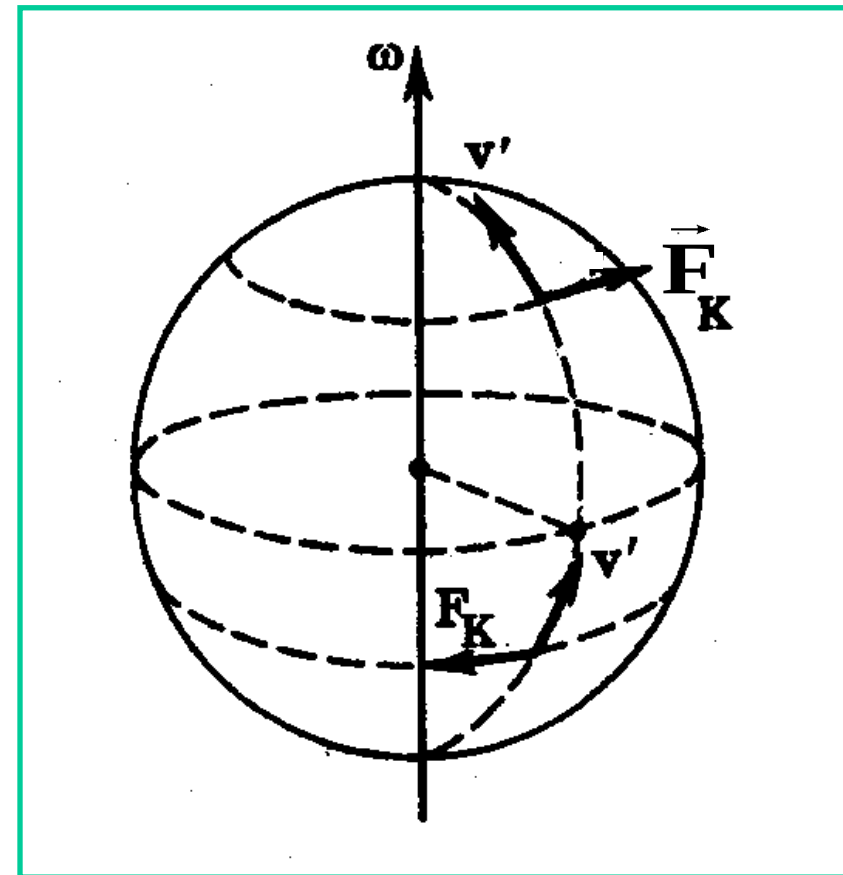
1) Отклонение свободно падающего тела от вертикали.

При свободном падении тела на него действует сила **Кориолиса**, направленная в сторону вращения **Земли**. Поэтому она приводит к **отклонению траектории тела к Востоку** от линии отвеса в любом месте Земли. Ее величина **максимальна** на экваторе и **равна нулю** на полюсах.



2) Если тело движется по поверхности Земли *вдоль меридиана* к северному полюсу, то в северном полушарии на него действует сила **Кориолиса**, направленная по ходу вращения **Земли**, а в южном полушарии - против вращения **Земли**.

Если же тело движется к южному полюсу, то в северном полушарии сила **Кориолиса** направлена против хода вращения **Земли**, а в южном полушарии – по ходу вращения **Земли**.



По этой причине:

- a) течение *Гольфстрим*, текущее на север, отклоняется вправо и обогревает **Северную часть Европы**;
- b) реки, текущие в северном полушарии как на север, так и на юг подмывают правый берег; в южном полушарии реки подмывают левый берег;
- c) в северном полушарии правые рельсы изнашиваются сильнее левых; в южном полушарии, наоборот, левые рельсы изнашиваются сильнее правых.

3) *Поворот плоскости колебаний маятника Фуко*

Силы **Кориолиса** проявляются при качаниях маятника. Если маятник находится на северном полюсе, то сила **Кориолиса** направлена *вправо* по ходу движения маятника, если он находится на южном полюсе - *влево*. В итоге его траектория имеет вид *розетки*. Плоскость качаний маятника поворачивается относительно **Земли** в *направлении часовой стрелки* и совершает за сутки один оборот. *На экваторе маятник не отклоняется от прямой, поскольку Кориолиса равна нулю из-за того, что вектор скорости параллелен оси вращения.*

