7. Гравитационное поле

7.1. Закон всемирного тяготения

Давно замечено, что звезды на небосводе сохраняют взаимное расположение, тогда как планеты описывают сложные, петлеобразные траектории. Для объяснения такого поведения небесных тел использовались два представления.

Первой планетарной моделью была геоцентрическая система Птоломея (II век до н.э.), который считал, что центром Вселенной является Земля, а движение планет происходит по малым кругам, центры которых в свою очередь движутся по большим кругам вокруг Земли.

В XVI веке Коперник на основе наблюдений Браге предложил альтернативную, гелиоцентрическую систему, в которой движение небесных тел объяснялось движением планет вокруг Солнца и суточным вращением Земли.

Кеплер сформулировал 3 закона :

1) каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце

2) радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади

3) квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит

В 1678 году Ньютон на основе законов механики и законов Кеплера открыл закон всемирного тяготения :

между любыми двумя материальными точками с массами m_1 и m_2 действует сила взаимного притяжения, пропорциональная произведению масс и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}} \qquad (7.1.1)$$

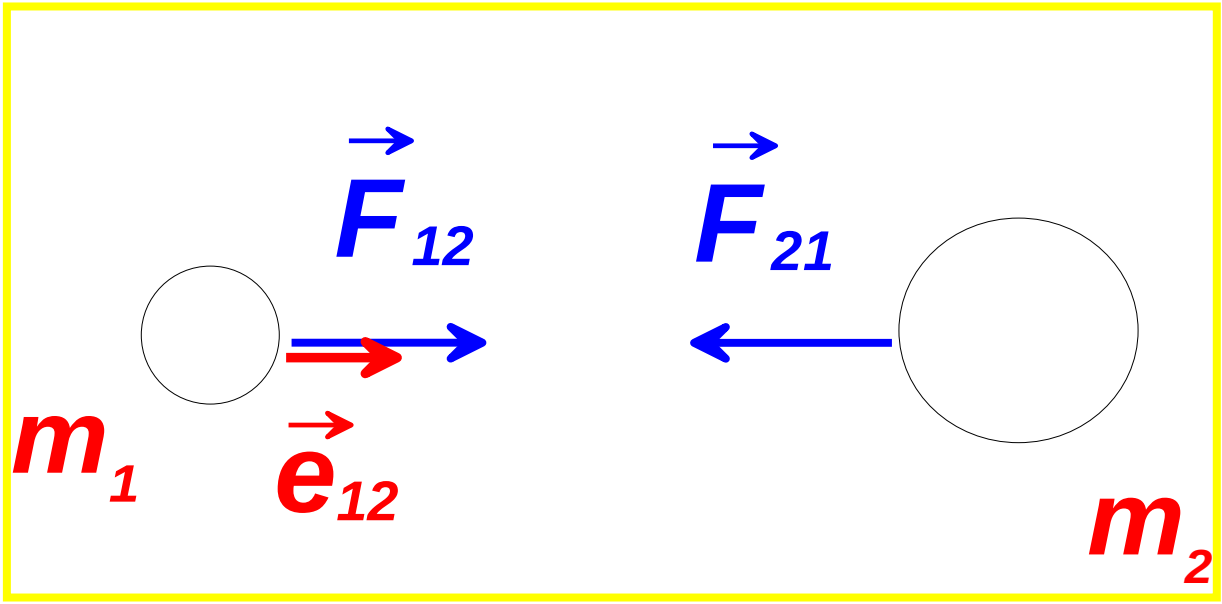
где G – гравитационная постоянная, коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц.

Гравитационная сила - *центральная сила*, она направлена вдоль линии, соединяющей две частицы.

В векторном виде гравитационную силу, действующую со стороны второго тела на первое, можно записать как

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_{12} \qquad (7.1.2)$$

где $\vec{e}_{12}$ **- единичный вектор, направленный от первого тела ко второму.**



В согласии с третьим законом Ньютона первое тело, в свою очередь, притягивает к себе второе тело с силой $\vec{F}_{21}$, равной по величине и противоположной по направлению

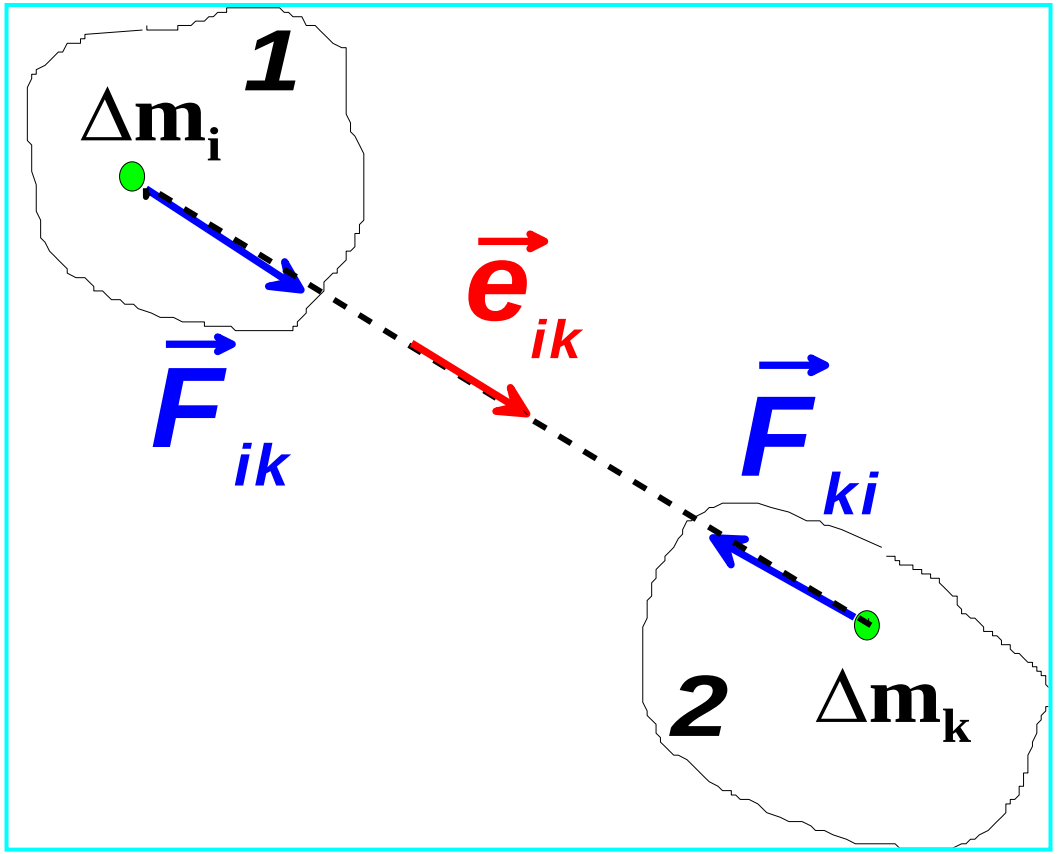
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Формулы (7.1.1) - (7.1.2) справедливы для тел, размерами которых можно пренебречь по сравнению с расстоянием между ними. То есть эти формулы, строго говоря, применимы для материальных точек.

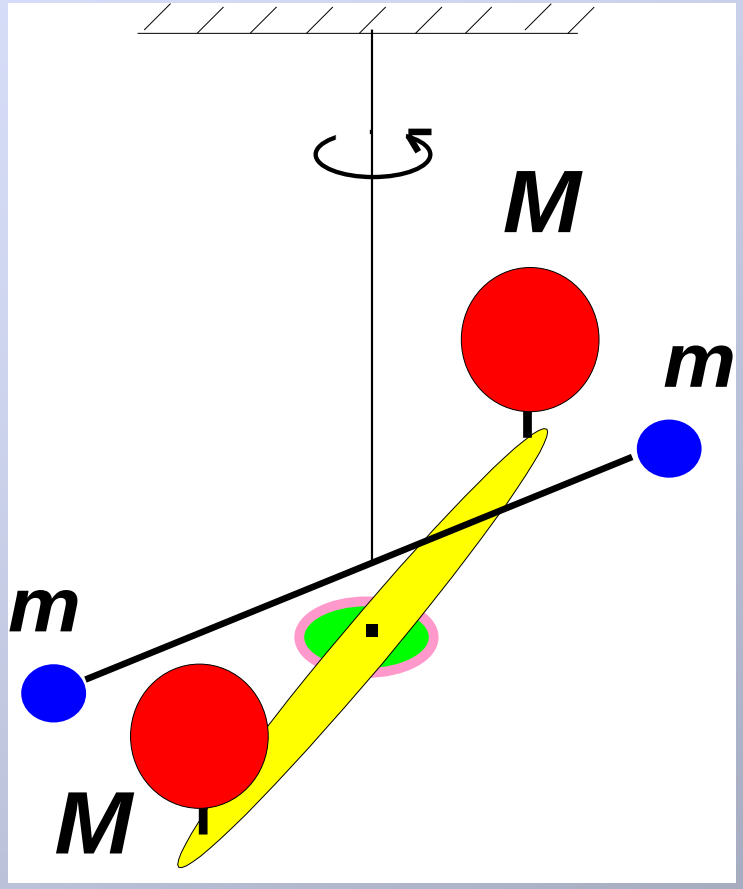
Для нахождения гравитационной силы притяжения между *протяженными* телами надо каждое из тел разбить на малые массы и просуммировать силы притяжения между всеми парами таких масс в двух телах

$$\vec{F}_{12} = \sum_i \sum_k \vec{F}_{ik} = \sum_i \sum_k G \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \vec{e}_{ik}$$

В пределе $\Delta m_i, \Delta m_k \to 0$ двойная сумма переходит в двойной интеграл, взятый по объемам двух тел.



В 1798 году Кавендиш с помощью крутильных весов определил гравитационную постоянную G. В опыте Кавендиша два одинаковых свинцовых шара с массами m = 0.729 кг укреплялись на концах легкого коромысла, подвешенного на упругой нити, а два тяжелых шара с массами по M = 158 кг располагались на подставке на той же высоте. Подставку можно было вращать, меняя расстояние между



тяжелыми и легкими шарами. По величине угла закручивания нити, определялась сила притяжения между щарами. В результате было найдено значение гравитационной постоянной

$$G = 6.672 \cdot 10^{-11}\ Н \cdot м^2/кг$$

Следовательно, два тела массой 1кг и отстоящие на расстояние 1м притягивают друг друга с силой $6.672 \cdot 10^{-11}$ Н

Малое значение постоянной *G* показывает, что сила гравитационного взаимодействия заметна только для очень больших масс. Поэтому гравитационное взаимодействие не играет существенной роли в механике атомов и молекул.

Однако движение больших тел, таких как Луна, планеты, спутники полностью определяется гравитационными силами.

Как и электрические силы, гравитационные силы обратно пропорциональны квадрату расстояния между телами. Но в отличие от электрических сил, которые могут быть как силами притяжения, так и силами отталкивания, гравитационные силы являются *только силами притяжения*.

Закон всемирного тяготения позволил объяснить и уточнить законы Кеплера. Покажем, например, как из закона всемирного тяготения вытекает *третий закон* Кеплера. Уравнение движения планеты с массой $m_{пл}$ имеет вид

$$m_{пл}\vec{a}_n = -G\frac{m_{пл}M_C}{r^2}\vec{e}_r$$

здесь $\vec{a}_n$ - нормальное ускорение планеты, направленное в сторону Солнца; $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный от Солнца к планете (поэтому в формуле знак минус);

M_C - масса Солнца; $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ - единичный вектор.

Для упрощения расчета будем считать орбиту окружностью, что хорошо выполняется для большинства планет. Пусть T – период вращения, тогда скорость движения планеты и ее нормальное ускорение на орбите равны

$$\upsilon = \frac{2\pi r}{T} \qquad a_n = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Подставляем a_n в уравнение движения планеты

$$m_{пл}\frac{4\pi^2 r}{T^2} = G\frac{m_{пл}M_C}{r^2}$$

Отсюда получаем

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_C}$$

Данное соотношение справедливо для любой планеты. Поскольку его правая часть одна и та же, то для некоторых двух планет получаем

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \quad \rightarrow \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Последнее равенство и есть третий закон Кеплера. Он является следствием того, что сила притяжения $\sim 1/r^2$.

Однако, еще Ньютон отметил, что за счет взаимного притяжения планеты никогда не движутся точно по эллипсам и *не обращаются дважды* по одной и той же орбите.

По *отклонениям* орбиты Урана астроном Леверье в 19 веке теоретически предсказал новую планету – Нептун, которую обнаружили в указанной им области неба. В 1930 году по возмущениям орбиты Нептуна был открыт Плутон.

В 2006 году астрономический конгресс принял решение *исключить Плутон* из числа планет, поскольку его размеры и масса сравнительно невелики и таких тел как он в солнечной системе много.

7.2 Гравитационное поле, напряженность гравитационного поля

Гравитационное взаимодействие осуществляется посредством гравитационного поля, которое является одной из форм существования материи.

Любое тело создает гравитационное поле в окружающем его пространстве и изменяет свойства пространства.

Это поле проявляет себя через силу, действующую на другие тела. Данная сила не зависит от того являются ли тела заряженными или нейтральными и определяется только массами тел.

При изменении положения тела, создаваемое им гравитационное поле тоже меняется. Но это изменение происходит не мгновенно.

Согласно общей теории относительности Эйнштейна, изменение напряженности гравитационного поля распространяется в пространстве со скоростью $3 \cdot 10^8$ м/с. Это изменение поля носит волновой характер, то есть согласно ОТО должны существовать гравитационные волны.

Однако, экспериментально гравитационные волны до сих пор *не обнаружены*.

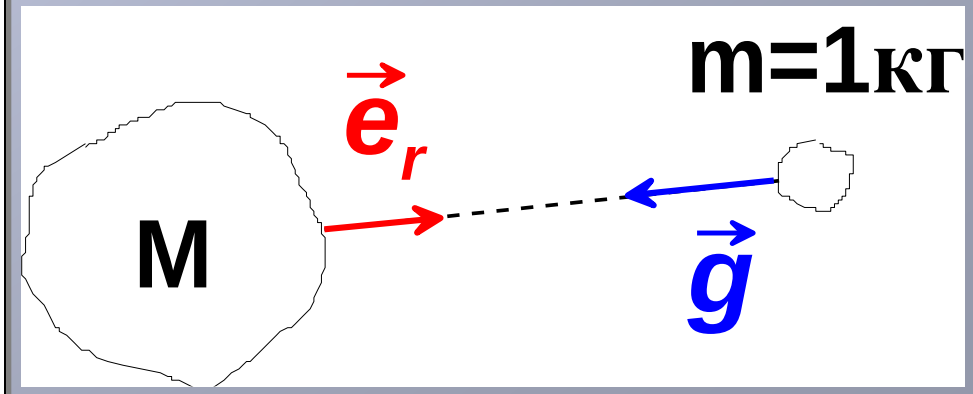
Пропорциональность силы тяготения, действующей на тело, его массе m подобна 2-ому закону Ньютона, что позволяет записать эту силу в виде

$$\vec{F} = m\vec{g} \qquad (7.2.1)$$

где $\vec{g}$ напряженность гравитационного поля, имеющая размерность ускорения. Напряженность гравитационного поля является силовой характеристикой поля тяготения и представляет из себя силу, действующую со стороны поля на *пробное тело* массой в 1 кг. Сравнивая (7.2.1) с формулой (7.1.2), получаем

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{e}_r \qquad (7.2.2)$$

где $\vec{e}_r$ - вектор единичной длины, проведенный из материальной точки с массой M в заданную точку поля, поэтому он направлен против силы тяготения и вектора $\vec{g}$.



В поле тяготения Земли величина напряженности гравитационного поля $\vec{g}$ равна *ускорению свободного падения*, среднее значение которого на поверхности Земли равно 9.81 м/с^2.

Зная радиус Земли $R_З = 6.38 \cdot 10^6$ м и гравитационную постоянную, Кавендиш впервые определил массу Земли

$$M_З = \frac{gR_З^2}{G} = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

Аналогично, по радиусу орбиты Земли $R_{ор} = 1.5 \cdot 10^{11}$ м и периоду ее вращения вокруг Солнца $T = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ с $= 3.15 \cdot 10^{7}$ с можно определить массу Солнца.

Действительно, нормальное ускорение Земли на орбите равно

$$a_{ор} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_{ор} = 0.006 \ м/с^2$$

Земля удерживается на своей орбите благодаря силе притяжения к Солнцу, уравновешивающей центробежную силу инерции. Поэтому ускорение $a_{ор}$ равно напряженности поля тяготения Солнца в месте положения Земли g_c

$$g_c = a_{ор}$$

Отсюда находим массу Солнца

$$M_C = \frac{a_{ор} R_{ор}^{\ 2}}{G} = 1.97 \cdot 10^{30} \ кг$$

С удалением от Земли сила тяготения Земли уменьшается. Вместе с ней уменьшается и напряженность ее гравитационного поля, то есть ускорение свободного падения

$$g = G\frac{M_З}{(R_З + h)^2}$$

где h - высота тела над поверхностью Земли.

Поэтому в горах ускорение свободного падения меньше, чем на уровне моря.

Необходимо также учитывать, что за счет силы Кориолиса Земля *сплюснута на полюсах* – ее радиус на экваторе на 21 км больше радиуса на полюсе:

$$R_з(\text{экватор}) = 6378 \text{ км}, \; R_з(\text{полюс}) = 6357 \text{ км}.$$

За счет этого *ускорение свободного падения на экваторе меньше, чем на полюсах* на 0.00006 м/с^2.

Кроме того, на величину и направление ускорения свободного падения влияет центробежная *сила инерции* $\vec{F}_{цб}$, связанная с вращением Земли вокруг своей оси.

Эта сила направлена в сторону, противоположную силе притяжения, и поэтому *уменьшает* ускорение свободного падения.

Сила инерции *равна нулю на полюсах*.

***На экваторе сила инерции максимальна* и приводит к уменьшению ускорения свободного падения на величину**

$$a_з = \left(\frac{2\pi}{T_з}\right)^2 R_з = 0.034\ м/с^2$$

В результате влияния всех факторов ускорение свободного падения меняется с *широтой* от 9.78 м/с^2 на экваторе до 9.83 м/с^2 на полюсах. На средних широтах ~ 45° ускорение близко к значению g = 9.81 м/с^2.

Вес тела на экваторе примерно на 0.5% меньше веса того же тела на полюсе.

Опыт показывает, что для любых тел, находящихся в одной и той же точке пространства напряженность гравитационного поля *одинаковая*. Это впервые установил Галилей в опытах по падению тел с наклонной башни - ускорение свободного падения всех тел в отсутствие сопротивления воздуха одно и тоже.

Масса, входящая в закон всемирного тяготения называется *гравитационной массой*. Тогда как во второй закон Ньютона входит *инертная масса*.

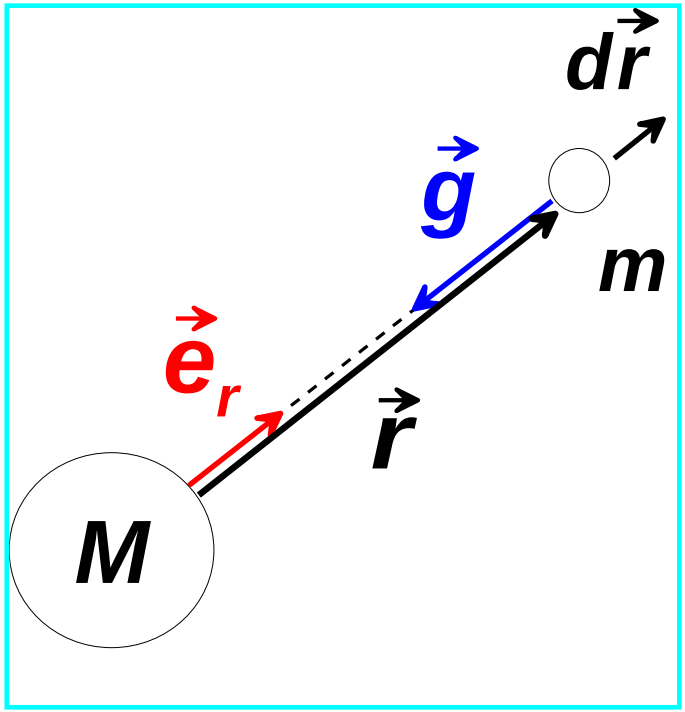
Опыты Ньютона и Кавендиша показали, что эти массы *совпадают* с точностью ~ 0.001.

Эксперименты, выполненные в 1961-1964 г. Дикке, подтвердили *эквивалентность гравитационной и инертной масс* с точностью 10^{-11}.

7.3 Работа сил тяготения. Потенциал гравитационного поля

Найдем работу, совершаемую силами поля тяготения, созданного точечной массой M, при перемещении материальной точки с массой m. Силы тяготения *центральные*, поэтому они *консервативные силы*. Их работа не зависит от вида траектории, а зависит только от начального и конечного положения тела. Работа сил тяготения по перемещению тела на малый вектор $d\vec{r}$ вдоль линии, соединяющей два тела, равна

$$dA = (m\vec{g} \cdot d\vec{r}) = -\frac{mGM}{r^2}dr = -dU$$



Последнее равенство имеет место, поскольку работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии.

Отсюда получаем

$$dU = \frac{mGM}{r^2}dr$$

При перемещении тела из *бесконечно удаленной* точки в точку, находящуюся на расстоянии r от массы M, изменение потенциальной энергии равно

$$U(r) = \int_{\infty}^{r} dU = \int_{\infty}^{r} \frac{mGM}{r^2}dr = -\frac{mGM}{r} \qquad (7.3.1)$$

Оно равно *потенциальной энергии тела* массы m в поле сил тяготения массы M, отсчитанной от потенциальной энергии тела на бесконечности, которая равна нулю. Работа сил тяготения, совершенная на этом же пути равна

$$A = -U = \frac{mGM}{r} \qquad (7.3.2)$$

Работа *положительная*, поскольку сила и перемещение в данном случае направлены в одну сторону.

Составим отношение

$$\varphi = \frac{U}{m} = -\frac{GM}{r} \qquad (7.3.3)$$

Оно равно потенциальной энергии тела единичной массы и называется **потенциалом поля тяготения**.

Потенциал поля *является энергетической характеристикой гравитационного поля*.

Рассмотрим поверхность, на которой потенциал постоянен, уравнение этой поверхности есть

$$\varphi = -\frac{GM}{r} = const$$

Такая поверхность называется **эквипотенциальной**. Из уравнения следует, что во всех ее точках $r = const$, значит данная поверхность представляет собой сферу.

Найдем *связь* между напряженностью гравитационного поля $\vec{g}$ и потенциалом гравитационного поля φ .

Учтем, что для консервативных сил имеет место

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -m\vec{\nabla}\varphi$$

С другой стороны $\vec{F} = m\vec{g}$, поэтому

$$\boxed{\vec{g} = -\vec{\nabla}\varphi} \qquad (7.3.4)$$

Знак (-) показывает, что *вектор напряженности гравитационного поля направлен в сторону убывания потенциала.*

В качестве примера, рассчитаем потенциальную энергию тела с массой m, находящегося на высоте h от Земли.

Согласно (7.3.1) она равна

$$U(R_З + h) = -\frac{mGM_З}{(R_З + h)}$$

А непосредственно на поверхности Земли $U(R_З) = -\frac{mGM_З}{R_З}$

Обычно, потенциальную энергию тела отсчитывают относительно ее значения на Земле, тогда

$$U = U(R_З + h) - U(R_З) = -\frac{mGM_З}{(R_З + h)} + \frac{mGM_З}{R_З} = \frac{mGhM_З}{R_З(R_З + h)}$$

Вблизи поверхности Земли $R_З \gg h$, поэтому $U \approx \frac{mGhM_З}{R_З^2}$.

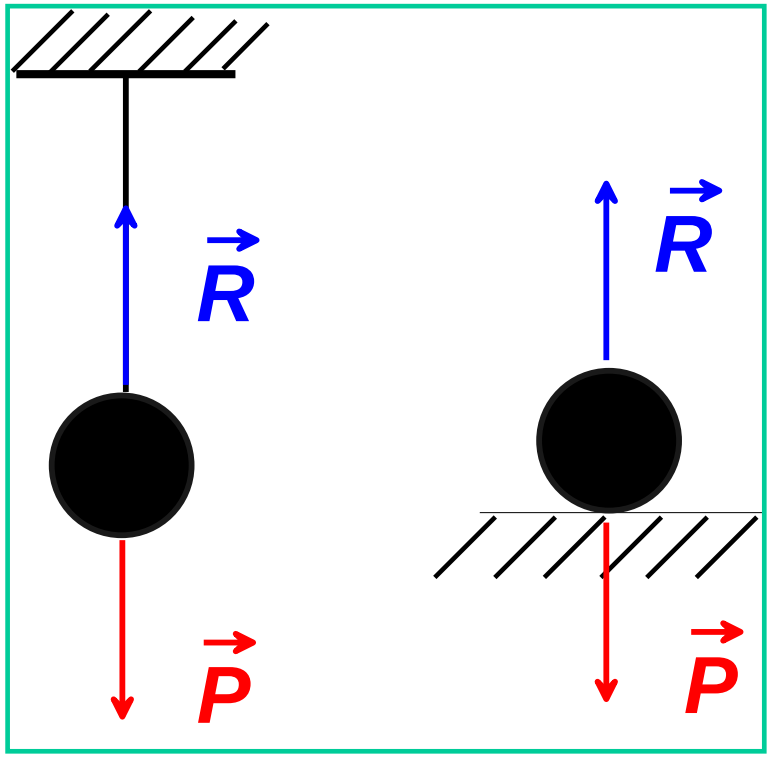
Учитывая, что $g = G\frac{M_З}{R_З^2}$ - есть ускорение свободного падения

на поверхности Земли, получаем известную формулу $U = mgh$

7.4 Сила тяжести и вес

На любое тело массой m, находящееся вблизи поверхности Земли, действуют две основные силы - гравитационная сила притяжения к Земле $\vec{F}_{грав}$ и центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб}$. Их сумма вызывает движение любого тела с одним и тем же ускорением свободного падения $\vec{g}$. Эту силу называют *силой тяжести*

$$\vec{P} = \vec{F}_{грав} + \vec{F}_{цб} = m\vec{g} \qquad (7.4.1)$$

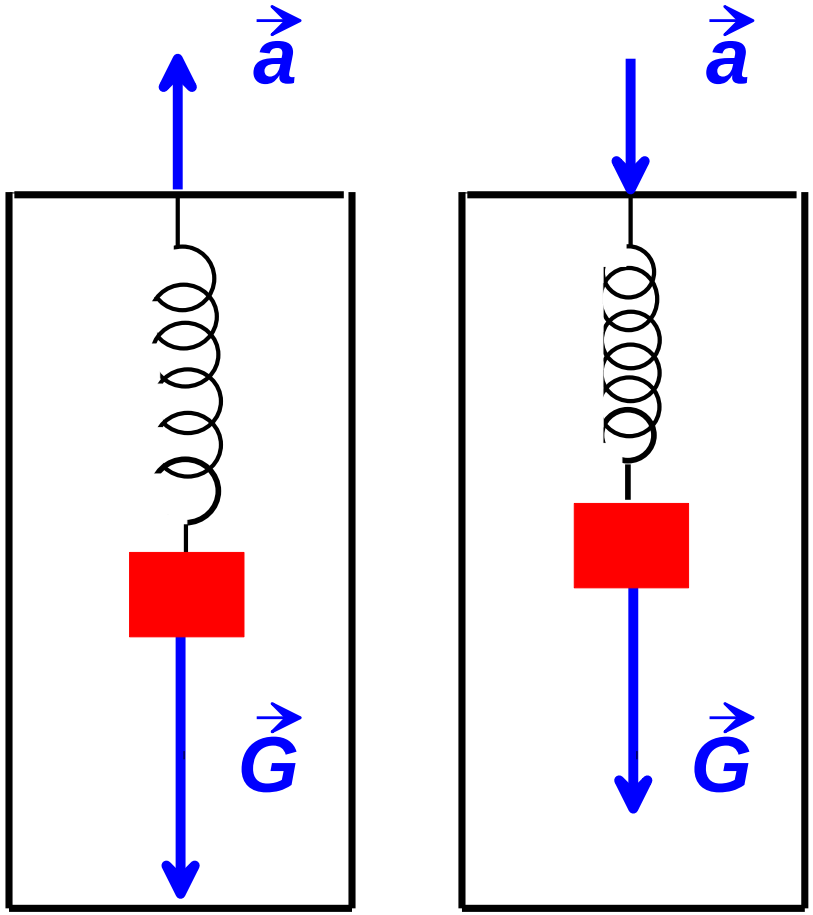


Если тело подвесить или положить на опору, то оно будет покоиться за счет того, что сила тяжести уравновешивается *реакцией опоры или подвеса* $\vec{R}$.

По третьему закону Ньютона

$$\vec{R} = -\vec{P}$$

Весом тела **называют силу** $\vec{G}$ **, с которой тело действует на опору или подвес, поэтому** $\vec{G} = -\vec{R}$ **. Если тело или подвес (опора)** ***неподвижны*** **относительно Земли, то** $\vec{G} = \vec{P}$



$G=m(g+a)$ $G=m(g-a)$

Если же тело или подвес (опора) движутся вместе относительно Земли с ускорением $\vec{a}$ **, то согласно второму закону Ньютона**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

$$\vec{G} = -\vec{R} = \vec{P} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a}) \quad (7.4.2)$$

Поэтому, если тело движется ***вверх*****, то вес тела** ***больше*** **силы тяжести**

$$G = m(g + |a|)$$

Если тело движется ***вниз*****, то вес тела** ***меньше*** **силы тяжести**

$$G = m(g - a)$$

Если тело и опора вместе падают *свободно вниз*, то $\vec{a} = \vec{g}$

$$G = m(g - g) = 0$$

Вес тела равен нулю, тело не оказывает никакого воздействия на подвес (опору). Такое состояние тела называется *невесомостью*.

В состоянии невесомости находятся все тела внутри космического корабля с выключенными двигателями, поскольку такой корабль движется как свободно падающее тело с ускорением свободного падения $\vec{g}$. Тела внутри корабля не оказывают друг на друга никакого *давления*.

Итак, *вес тела зависит от состояния движения тела и опоры (подвеса).*