

5. Динамика вращательного движения твердого тела

Твердое тело – это система материальных точек, расстояния между которыми не меняются в процессе движения.

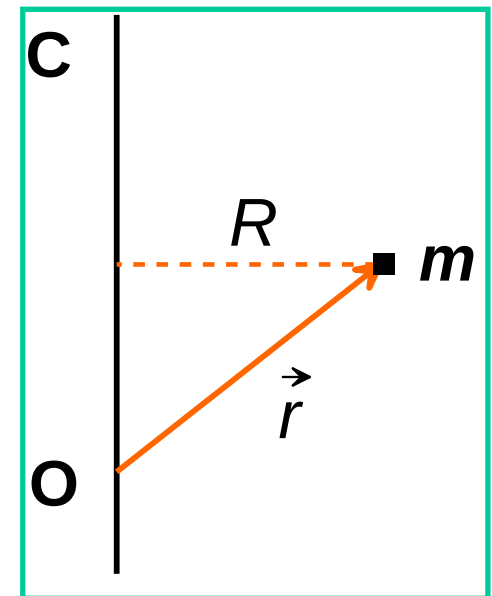
При вращательном движении твердого тела все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения. Рассмотрим основные законы вращательного движения твердого тела.

5.1 Момент инерции

Момент инерции материальной точки относительно оси вращения равен произведению массы точки на квадрат расстояния от нее до оси вращения

$$I = mR^2 \quad (5.1.1)$$

Момент инерции точки зависит только от ее кратчайшего расстояния до оси вращения.



Для системы материальных точек момент инерции равен сумме моментов инерции отдельных точек

$$I = \sum_i I_i = \sum_i m_i R_i^2$$

Если масса распределена непрерывно с плотностью $\rho(\vec{r})$, то тело можно разбить на малые объемы ΔV_i с массами $\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$. Эти объемы можно рассматривать как материальные точки. Суммируя их моменты инерции, получим момент инерции всего тела

$$I = \sum_i \Delta m_i R_i^2 = \sum_i \rho_i \Delta V_i R_i^2$$

В пределе $\Delta V_i \rightarrow 0$ сумма переходит в интеграл по объему тела

$$I = \int R^2 dm = \int R^2 \rho dV \quad (5.1.2)$$

Момент инерции твердого тела зависит от распределения в нем массы, расстояния и ориентации оси относительно тела.

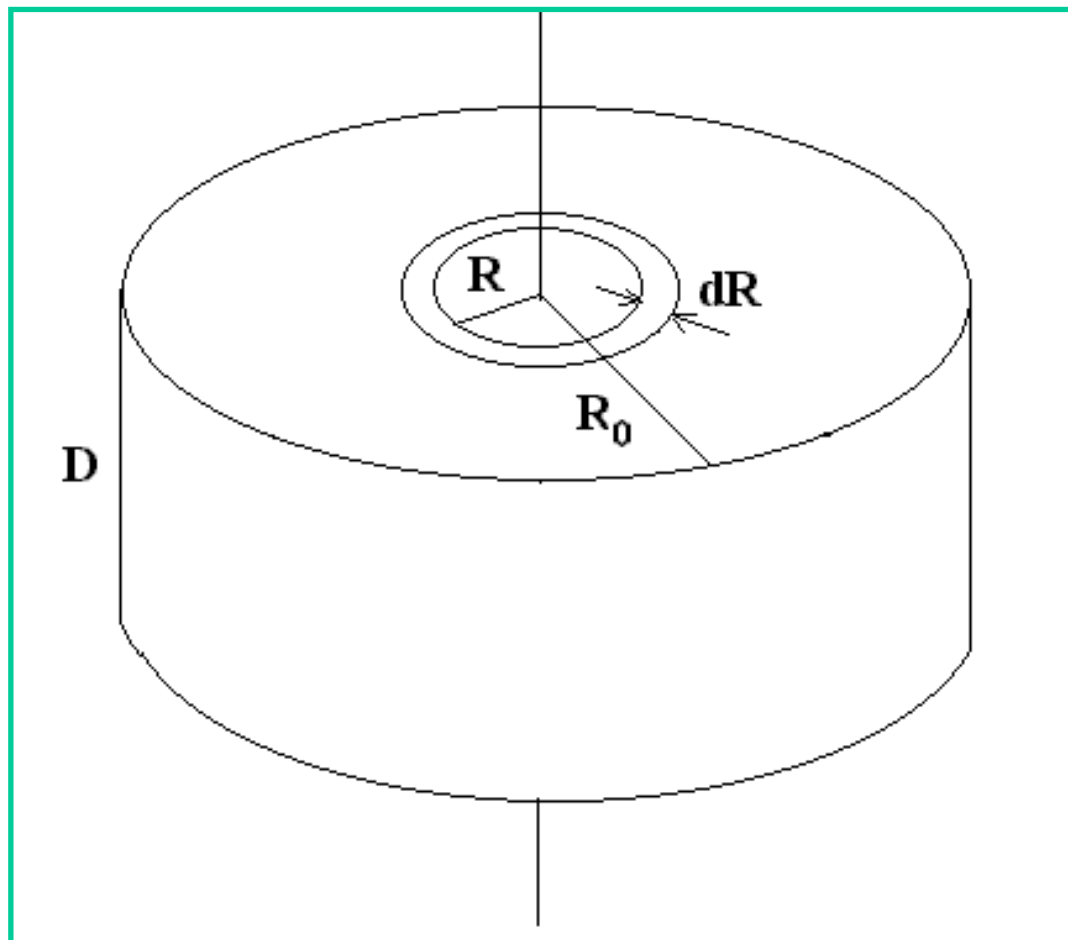
В качестве примера найдем *момент инерции однородного диска* относительно оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через его центр.

Пусть D - толщина диска, R_0 - его радиус. Поскольку диск однородный ($\rho = \text{const}$), то

$$I = \int R^2 \rho dV = \rho \int R^2 dV$$

Разобьем диск на тонкие
кольцевые слои толщиной dR
и радиусами R .
Объем каждого слоя равен

$$dV = D \cdot 2\pi R dR$$



Момент инерции диска равен сумме моментов инерции всех кольцевых слоев, поэтому он равен интегралу

$$I = D \cdot 2\pi \cdot \rho \int_0^{R_0} R^3 dR = \frac{\pi}{2} D \cdot \rho \cdot R_0^4$$

Выражая массу диска через плотность

$$m = \pi R_0^2 D \cdot \rho$$

получаем *момент инерции однородного диска или цилиндра*

$$I = \frac{1}{2} m \cdot R_0^2$$

(5.1.3a)

Аналогичные расчеты дают моменты инерции :

- 1) *стержня* длиной l (вокруг оси, проходящей через середину стержня)

$$I = \frac{1}{12} m \cdot l^2$$

(5.1.3b)

- 2) *шара* с радиусом R_0 (вокруг оси, проходящей через центр шара)

$$I = \frac{2}{5} m \cdot R_0^2$$

(5.1.3c)

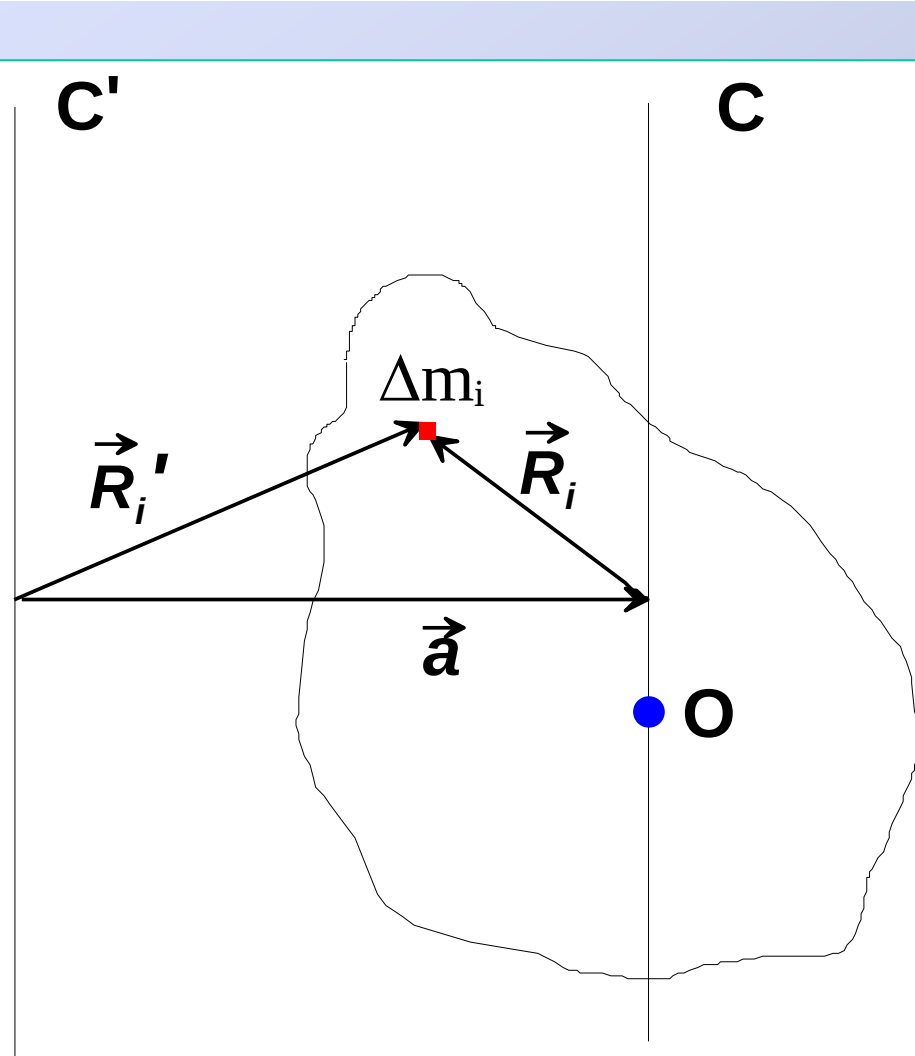
- 3) *полого тонкостенного цилиндра* с радиусом R_0 (вокруг оси симметрии цилиндра)

$$I = m \cdot R_0^2$$

(5.1.3d)

5.2 Теорема Штейнера

До сих пор момент инерции определялся относительно оси симметрии, проходящей через центр масс тела. Теперь найдем момент инерции тела *относительно произвольной оси*.



Пусть ось **C** проходит через центр масс тела **O**. Разобьем тело на малые объемы с массами Δm_i и радиус-векторами $\vec{R}_i$

, *перпендикулярными* к оси **C**.

Момент инерции относительно оси **C** равен

$$I_c = \sum_i \Delta m_i R_i^2$$

Пусть некоторая другая ось **C'** параллельна оси **C** и отстоит от нее на расстояние **a**. Введем векторы $\vec{a}$ и $\vec{R}_i'$, перпендикулярные двум осям

$$\vec{R}_i' = \vec{a} + \vec{R}_i$$

Квадрат расстояния элементарной массы Δm_i до оси **C'** равен

$$(R'_i)^2 = (\vec{a} + \vec{R}_i) \cdot (\vec{a} + \vec{R}_i) = a^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{R}_i) + R_i^2$$

Поэтому момент инерции тела относительно оси **C'** равен

$$I' = \sum_i \Delta m_i (R'_i)^2 = a^2 \sum_i \Delta m_i + 2\vec{a} \sum_i \Delta m_i \vec{R}_i + \sum_i \Delta m_i R_i^2$$

Здесь $\sum \Delta m_i = m$ - масса тела. Последнее слагаемое есть момент инерции относительно оси **C**, т.е. I_c . Сумма $\sum \Delta m_i \vec{R}_i$ равна произведению массы тела на вектор $\vec{R}_{Цм}$, направленный от оси **C** к центру масс. Поскольку центр масс лежит на оси **C**, то $\vec{R}_{Цм} = 0$, поэтому среднее слагаемое равно нулю, в результате

получаем

теорема Штейнера

$$I' = ma^2 + I_c \quad (5.2.1)$$

Момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси параллельной

5.3 Кинетическая энергия вращающегося тела

Кинетическая энергия вращающегося тела равна сумме кинетических энергий его частей

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i R_i^2 = \frac{I \omega^2}{2} \quad (5.3.1)$$

где ω - угловая скорость вращения тела вокруг оси.

Сравнивая формулу (5.3.1) с формулой для кинетической энергии поступательного движения $mv^2/2$ видим, что *при вращательном движении мерой инерции тела выступает момент инерции.*

Если тело участвует в *составном движении*, то его кинетическая энергия складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения.

Например, у *цилиндра, катящегося без скольжения по плоскости*, полная кинетическая энергия равна

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2} \quad (5.3.2)$$

где m – масса цилиндра, v_c – величина скорости его центра масс, I_c – момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс.

5.4 Момент силы

Пусть точка **O** – неподвижная точка в твердом теле, и к некоторой точке тела **A** с радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из **O**, приложена сила $\vec{F}$. Тогда векторное произведение

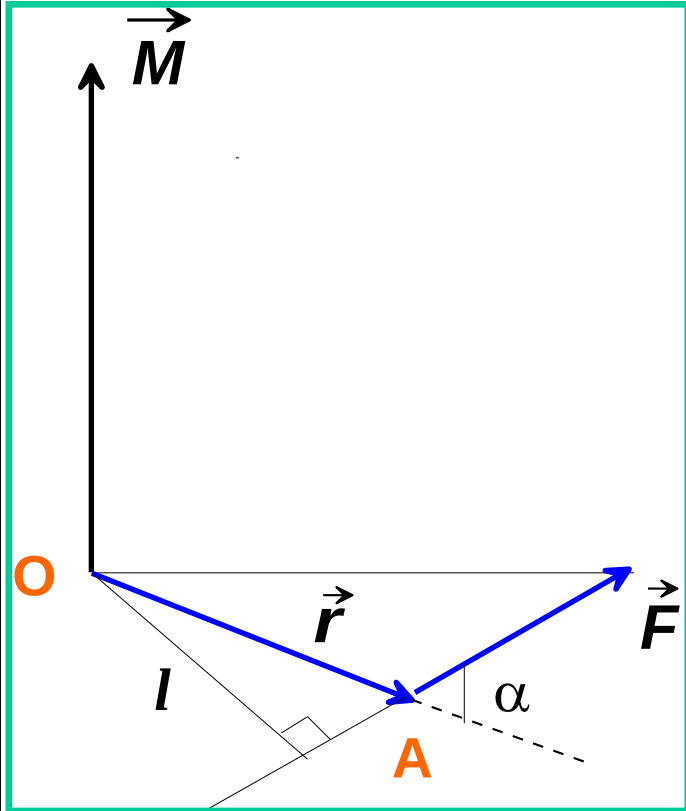
$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] \quad (5.4.1)$$

называется моментом силы $\vec{F}$ относительно неподвижной точки **O**.

Его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$. Модуль момента силы равен $M = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot l$

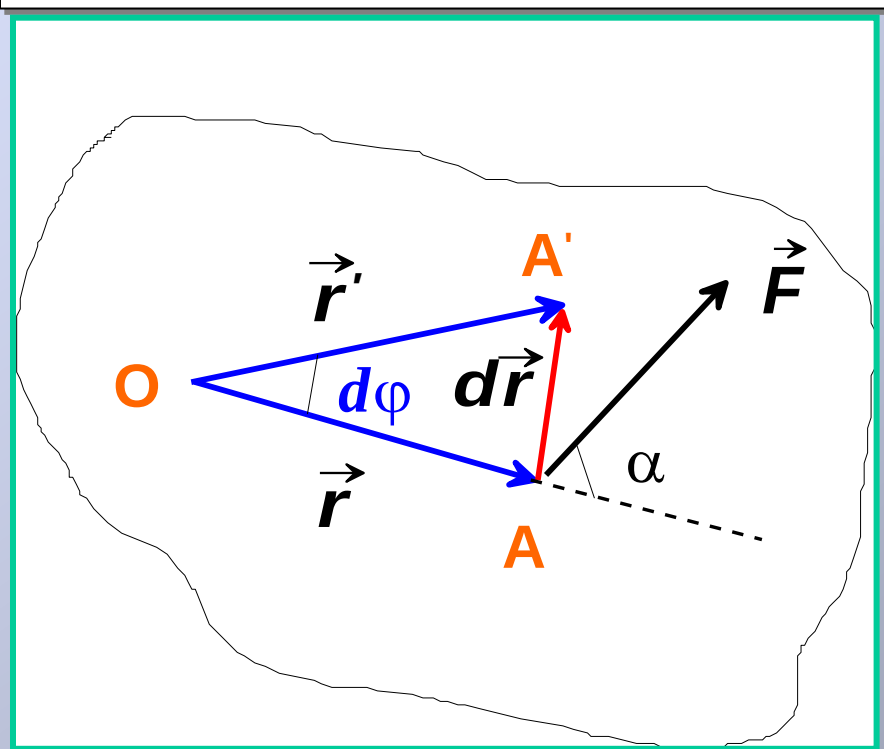
где $l = r \cdot \sin\alpha$ – *плечо силы*.

Момент силы характеризует способность силы вращать тело вокруг точки, относительно которой она берется.



5.5 Работа силы при вращательном движении твердого тела. Основное уравнение динамики вращательного движения.

Рассмотрим тело, вращающееся вокруг оси Z под действием силы $\vec{F}$, приложенной к точке тела A . Пусть эта сила лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, тогда угол $\beta = 0$ и вектор момента силы $\vec{M}$ совпадает с осью Z . Найдем работу силы при повороте тела на малый угол $d\varphi$. На рисунке ось Z выходит из листа в точке O .



Из-за малости угла $d\varphi$ можно считать, что вектор перемещения $d\vec{r}$ точки A перпендикулярен исходному вектору $\vec{r}$

$$\vec{r} \perp d\vec{r}$$

Так как тело абсолютно твердое, то элементарная работа силы dA равна работе, затраченной на поворот всего тела, что эквивалентно работе по перемещению точки A на вектор $d\vec{r}$.

Вектор перемещения $d\vec{r}$ можно записать в виде

$$d\vec{r} = dr \cdot \vec{e} \quad ; \quad \vec{e} = \frac{d\vec{r}}{dr}; \quad dr = r \cdot d\varphi; \quad d\vec{r} = \vec{e} \cdot r \cdot d\varphi$$

$\vec{e}$ - единичный вектор, направленный вдоль вектора перемещения.

Подставляя в формулу для элементарной работы, получаем

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = (\vec{F} \cdot \vec{e}) \cdot d\varphi \cdot r$$

Угол между вектором силы $\vec{F}$ и вектором $\vec{e}$ равен $(90^\circ - \alpha)$, поэтому

$$(\vec{F} \cdot \vec{e}) = F \cdot \sin\alpha$$

$$dA = F \cdot \sin\alpha \cdot r \cdot d\varphi = M_z \cdot d\varphi$$

При повороте на конечный угол работа силы $\vec{F}$ равна интегралу

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \cdot d\varphi$$

(5.4.3)

С другой стороны, элементарная работа силы по вращению тела идет на увеличение его кинетической энергии

$$dA = dT = d\left(\frac{I_z \omega^2}{2}\right) = I_z \omega d\omega$$

Следовательно

$$M_z d\varphi = I_z \omega d\omega \qquad M_z \frac{d\varphi}{dt} = I_z \omega \frac{d\omega}{dt} \qquad M_z \omega = I_z \omega \varepsilon$$

где ε – угловое ускорение.

В результате *относительно неподвижной оси*

$$M_z = I_z \cdot \varepsilon$$

(5.4.4)

Тогда **основное уравнение динамики вращательного движения** твердого тела *относительно неподвижной точки*

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}$$

Это уравнение играет такую же роль во вращательном движении, что и второй закон Ньютона в поступательном.

5.5 Момент импульса

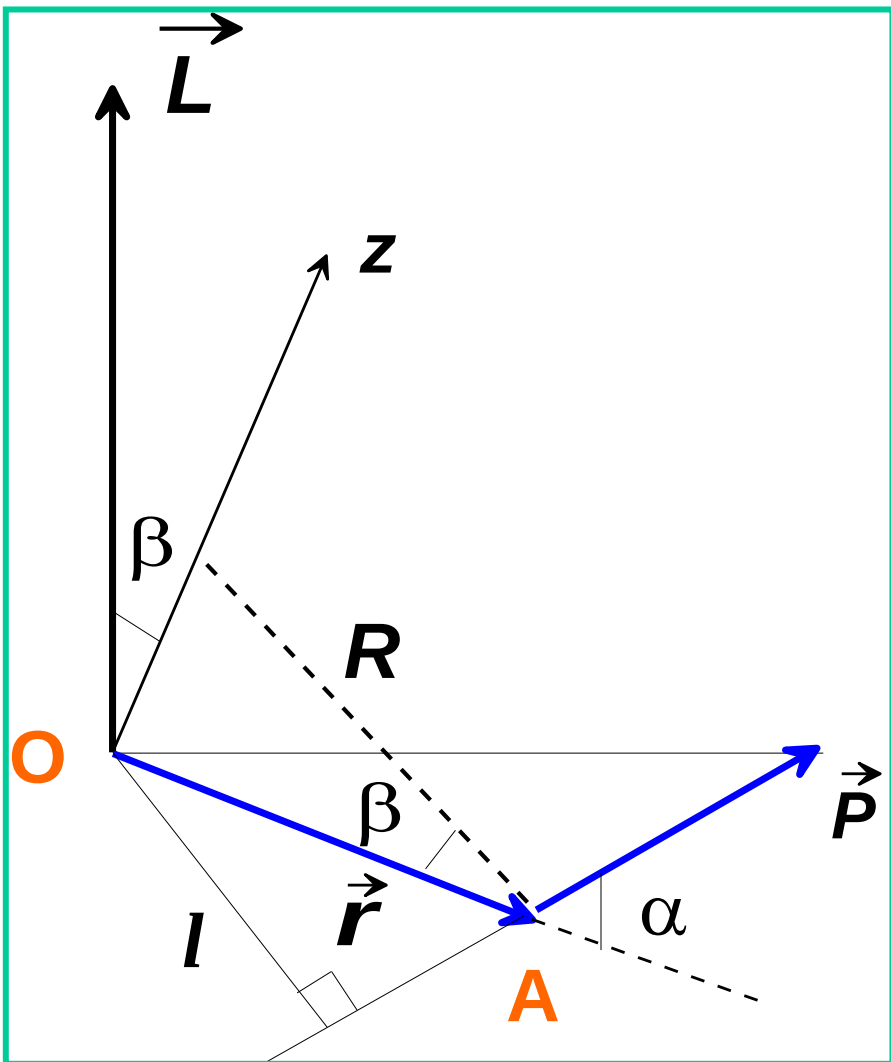
Моментом импульса материальной точки **A** относительно неподвижной точки **O** называется вектор, равный

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = [\vec{r} \times m\vec{v}] \quad (5.5.1)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки **A**.
Направление псевдовектора $\vec{L}$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$.
Модуль момента импульса равен

$$L = r \cdot p \cdot \sin \alpha = p \cdot l$$

где $l = r \cdot \sin \alpha$ - *плечо импульса*



*Моментом импульса материальной точки относительно неподвижной оси **Z*** называется величина, равная проекции вектора момента импульса на эту ось

$$L_z = [\vec{r} \times \vec{p}]_z = L \cdot \cos\beta \quad (5.5.2)$$

Для твердого тела момент импульса относительно неподвижной точки равен сумме моментов элементарных объемов, выступающих в роли материальных точек

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$$

Поэтому момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси **Z** равен сумме моментов элементарных объемов тела

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]_z = \sum_i L_i \cdot \cos \beta_i$$

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси **Z** с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Каждая точка тела движется по окружности постоянного радиуса R_i со скоростью $\vec{v}_i$, перпендикулярной этому радиусу и радиус-вектору точки $\vec{r}_i$, поэтому угол между $\vec{v}_i$ и $\vec{r}_i$ прямой $\alpha_i = \pi/2$.

Поскольку плечо силы i -ой точки равно $R_i = r_i \cdot \cos \beta_i$, то

$$[\vec{r}_i \times \vec{p}_i]_z = r_i \cdot p_i \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i = R_i \cdot p_i$$

$$L_z = \sum_i R_i \cdot p_i = \sum_i R_i \cdot m_i v_i$$

При вращательном движении все точки тела движутся с одной угловой скоростью $\vec{\omega}$, величина которой связана с линейной скоростью $v_i = \omega R_i$, поэтому

$$L_z = \sum_i m_i \cdot R_i^2 \cdot \omega = I_z \cdot \omega$$

$$\boxed{L_z = I_z \cdot \omega} \quad (5.5.3)$$

Момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению моменту инерции тела относительно той же оси на угловую скорость.

Возьмем производную по времени от последнего равенства

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I_z \omega)}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \cdot \varepsilon$$

Но согласно (5.4.4) $M_z = I_z \cdot \varepsilon$ – есть момент силы относительно оси Z , поэтому

$$\boxed{M_z = \frac{dL_z}{dt}} \quad (5.5.4)$$

Производная по времени от момента импульса твердого тела относительно некоторой оси равна моменту внешних сил относительно той же оси.

Уравнение (5.5.4) есть *другая форма уравнения динамики вращательного движения* твердого тела. Она устанавливает связь между проекциями векторов $\vec{M}$ и $\vec{L}$ на ось вращения.

Теперь найдем связь между векторами $\vec{M}$ и $\vec{L}$.

Для этого возьмем производную по времени от формулы (5.5.1) для вектора $\vec{L}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i \right] + \sum_i \left[\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right]$$

Но $\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i \right] = [\vec{v}_i \times \vec{p}_i] = m_i [\vec{v}_i \times \vec{v}_i] = 0$

поэтому $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left[\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}$

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела в векторном виде

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}} \quad (5.5.5)$$

Производная по времени от момента импульса твердого тела относительно неподвижной точки равна моменту внешних сил относительно той же точки.