4. Работа и энергия

***Энергия является количественной мерой различных форм движения и взаимодействий всех видов материи*.**

Слово энергия происходит от греческого *energeia*. Различают механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и другие формы энергии. Механическая энергия бывает двух видов – кинетической и потенциальной.

***Кинетическая энергия тела – это энергия его механического движения*.**

***Потенциальная энергия – это энергия положения, она зависит от взаимного расположения тел*.**

4.1 Кинетическая энергия и работа

Рассмотрим уравнение движения тела

$$m\dot{\vec{\upsilon}} = \vec{F}$$

Умножим его скалярно на вектор малого перемещения

$$d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$$

Получим

$$m(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}})dt = (\vec{F}\cdot d\vec{r}) \qquad \textbf{(4.1.1a)}$$

Преобразуем левую часть этой формулы. Можем записать

$$\dot{\vec{\upsilon}}dt = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}dt = d\vec{\upsilon}$$

Тогда

$$m(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}})dt = m(\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon}) = md(\frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}}{2}) =$$

$$= md(\frac{\upsilon^2}{2}) = d(\frac{m\upsilon^2}{2})$$

Следовательно $$d(\frac{m\upsilon^2}{2}) = (\vec{F}\cdot d\vec{r})$$

Величина

$$\boxed{T = \frac{m\upsilon^2}{2}} \qquad \textbf{(4.1.2a)}$$

называется *кинетической энергией* тела. Она характеризует состояние движения тела, так как зависит от скорости. Поскольку в свою очередь скорость тела зависит от системы отсчета, то *кинетическая энергия тела в разных системах имеет разное значение*.

Используя выражение для импульса $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ **, составим скалярное произведение этого вектора самого на себя**

$$(\vec{p} \cdot \vec{p}) = p^2 = m^2(\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon}) = m^2\upsilon^2$$

Поэтому кинетическую энергию можно выразить через импульс

$$T = \frac{p^2}{2m} \qquad \textbf{(4.1.2b)}$$

Теперь рассмотрим правую часть формулы (4.1.1a). Величина

$$(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = dA \qquad \textbf{(4.1.3)}$$

характеризует действие силы при бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$ **и называется *элементарной работой*.**

Уравнение (4.1.1a) теперь можно переписать в виде

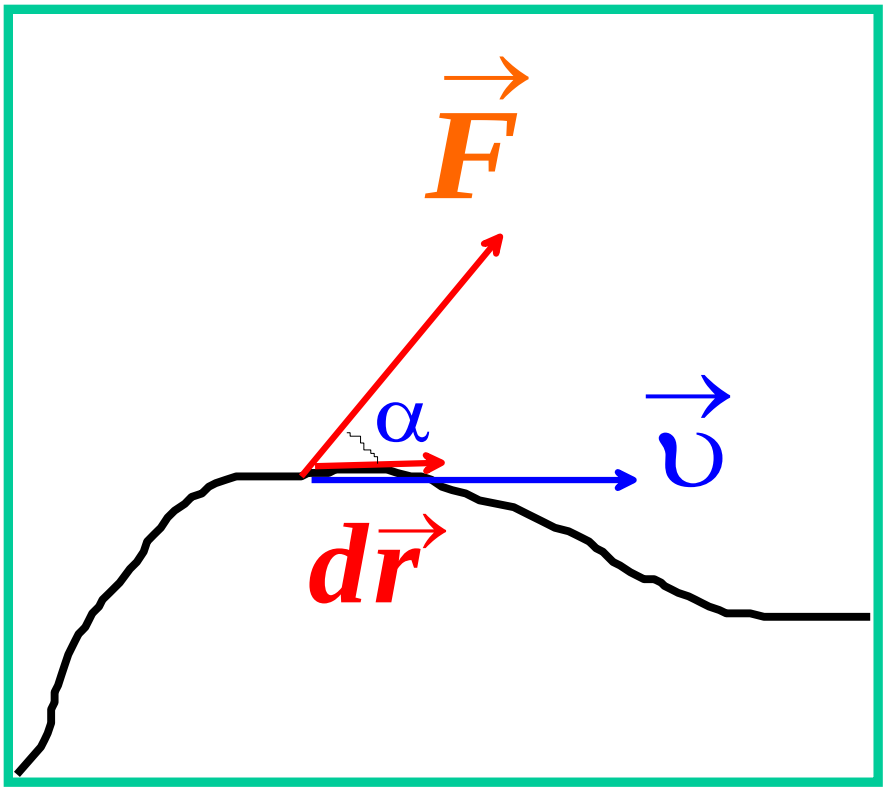
$$dA = dT \qquad (4.1.1b)$$

Следовательно, ***работа силы равна изменению кинетической энергии тела*****. Поэтому** ***работа является мерой энергии*****.**

Вернемся к формуле (4.1.3), раскроем скалярное произведение

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F dr \cos\alpha$$

α **- угол между между направлением силы и направлением перемещения.**



Вследствие малости перемещения его модуль равен элементарному пути $dr = ds$ **, поэтому**

$$dA = Fds\cos\alpha = F_s ds \qquad (4.1.4)$$

где $F_s = F\cos\alpha$ **- проекция силы на направление перемещения.**

Таким образом, ***элементарная работа равна произведению составляющей силы в направлении движения на пройденный элементарный путь*****.**

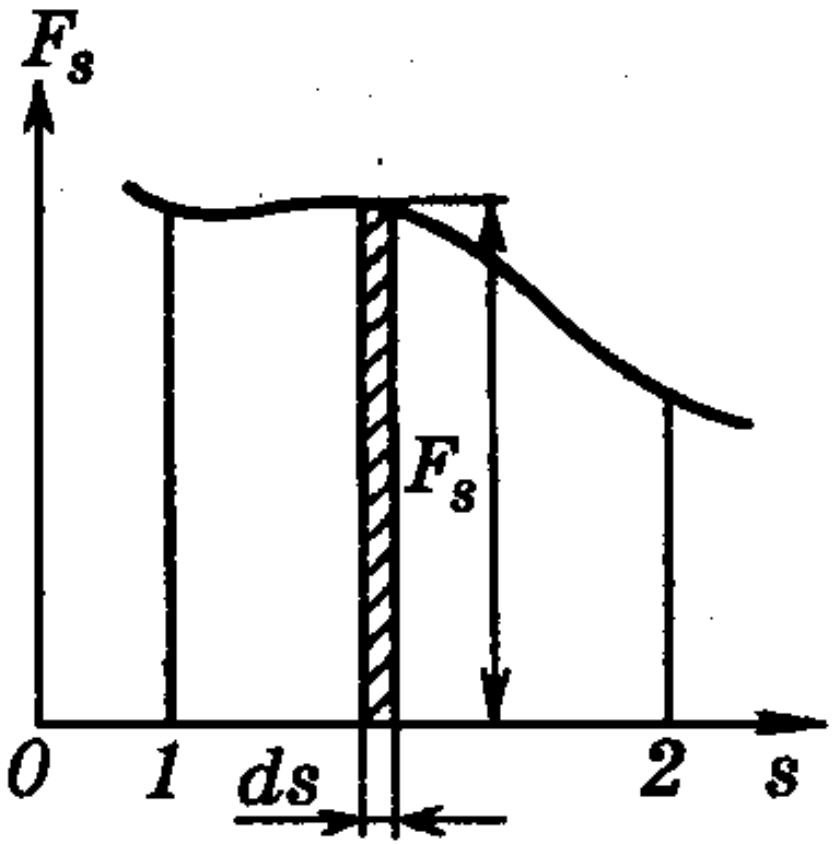
Работа является алгебраической величиной, то есть величиной со знаком.

Если угол α **острый, то** $\cos\alpha > 0$ **, сила направлена в сторону перемещения, работа положительная.**

Если угол α **тупой, то** $\cos\alpha < 0$**, сила направлена в сторону противоположную перемещению, работа отрицательная.**

Если угол прямой $\alpha = \pi/2$ **, то** $\cos\alpha = 0$ **, сила перпендикулярна перемещению, работа равна нулю.**

На конечном участке траектории работа силы между начальной точкой *1* и конечной точкой *2* равна сумме элементарных работ, поэтому она равна криволинейному интегралу по пройденному пути



$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 F_s ds \qquad \textbf{(4.1.5a)}$$

Из рисунка ясен геометрический смысл работы – ее величина *равна площади под кривой силы на пройденном пути*.

Если сила постоянна на всем пути S, то

$$A = FS\cos\alpha = F_s S \qquad (4.1.5b)$$

***В случае постоянной силы работа есть скалярная величина, равная произведению проекции силы на направление перемещения и пути, проходимого точкой приложения силы*.**

Поскольку согласно (4.1.1b) $dA = dT$, то работу можно определить и путем суммирования изменений кинетической энергии на элементарных участках пути

$$A_{12} = \int_1^2 dT = T_2 - T_1 = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} \qquad (4.1.6)$$

***Следовательно, работа силы идет на приращение кинетической энергии тела*.**

Если на тело действует одновременно несколько сил, то согласно принципу суперпозиции сил результирующая сила равна

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

Поэтому элементарная работа результирующей силы равна сумме элементарных работ отдельных сил

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \sum_i (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}) = \sum_i dA_i$$

Единицей измерения работы **является джоуль (Дж) – равный работе, совершаемой силой 1 Н на пути 1 м**

1 Дж = 1Н·1м

Для характеристики скорости совершения работы вводится понятие мощности.

Мощность – это работа, совершаемая силой в единицу времени

$$N = \frac{dA}{dt} \qquad (4.1.7a)$$

Единицей мощности **в СИ является ватт (Вт) – равный работе в 1 Дж, совершаемой за 1 сек**

$$1\,Вт = \frac{1Дж}{1сек}$$

Внесистемная единица мощности

1 *л. с.* = 736 *Вт*

Выразим работу и мощность через силу и скорость.

Подставим в (4.1.3) вектор смещения

$$d\vec{r} = \vec{\upsilon} dt$$

Получим $$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = (\vec{F} \cdot \vec{\upsilon}) dt$$

Поэтому работу на конечном участке пути можно определить по формуле

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \vec{\upsilon}) dt \qquad \textbf{(4.1.5c)}$$

Для мощности имеем

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{dA}}{\mathbf{dt}} = \frac{(\vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}})}{\mathbf{dt}} = (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\upsilon}) \qquad \textbf{(4.1.7b)}$$

4.2 Потенциальная энергия и работа

***Потенциальная энергия – это механическая энергия, зависящая от взаимного положения тел*.**

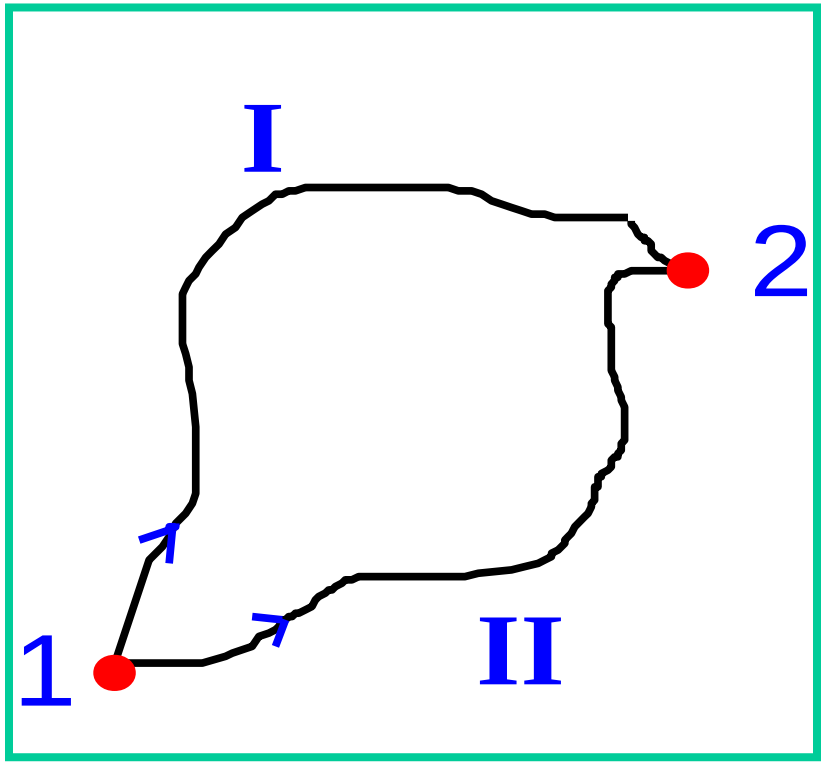
Потенциальная энергия связана со взаимодействием между телами посредством физических полей. Каждое тело создает в окружающем его пространстве силовое поле, которое проявляет себя в действии сил на другие тела (гравитационное, электрическое и т.д.).

Если поле не меняется со временем, то оно называется стационарным.

Рассмотрим движение тела в стационарном поле из одной точки пространства 1 в другую точку 2. Это движение может происходить по разным траекториям, например, по траекториям I и II.

Если работа, совершаемая силами поля при перемещении тела, не зависит от траектории, а зависит лишь от начального и конечного положений тела, то такие силы называются *консервативными* :

$$A_{\mathrm{I}}^{12} = A_{\mathrm{II}}^{12}$$

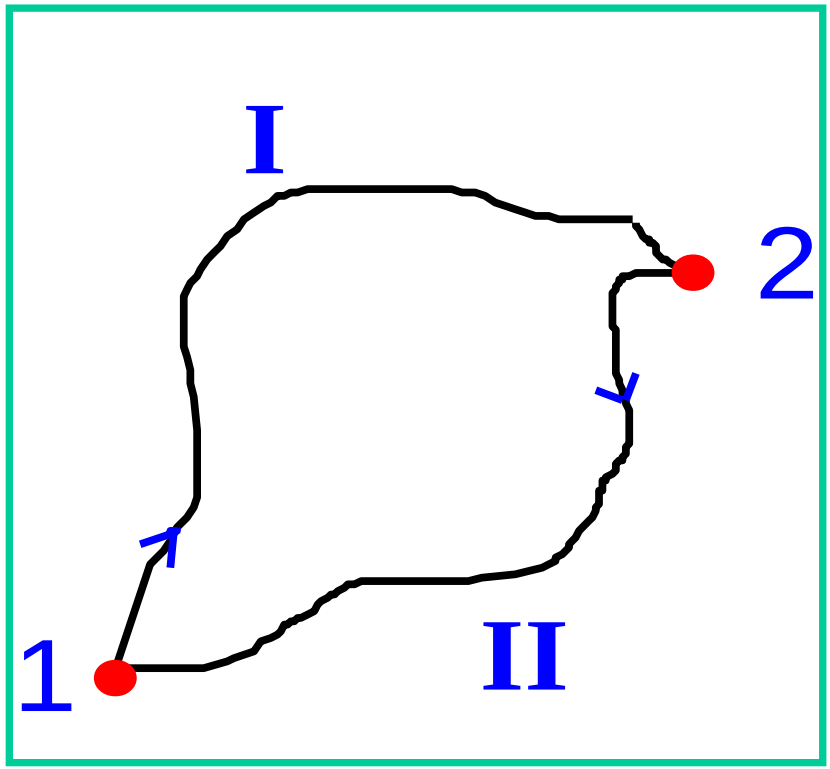


В противном случае силы являются *неконсервативными* (например, *силы трения*).

Покажем, что *работа консервативных сил на замкнутом пути равна нулю.* Для доказательства учтем, что при изменении направления движения смещение меняет свой знак, поэтому меняет знак и работа силы.

Например, для участка пути II имеем

$$A_{II}^{21} = -A_{II}^{12}$$



Поэтому работа на замкнутой траектории от точки 1 по пути I через точку 2 и снова к точке 1 по пути II будет равна

$$A = A_{I}^{12} + A_{II}^{21} = A_{I}^{12} - A_{II}^{12} = A_{I}^{12} - A_{I}^{12} = 0$$

Покажем, что сила тяжести является консервативной силой. Сила тяжести, действующая на тело массы m, равна

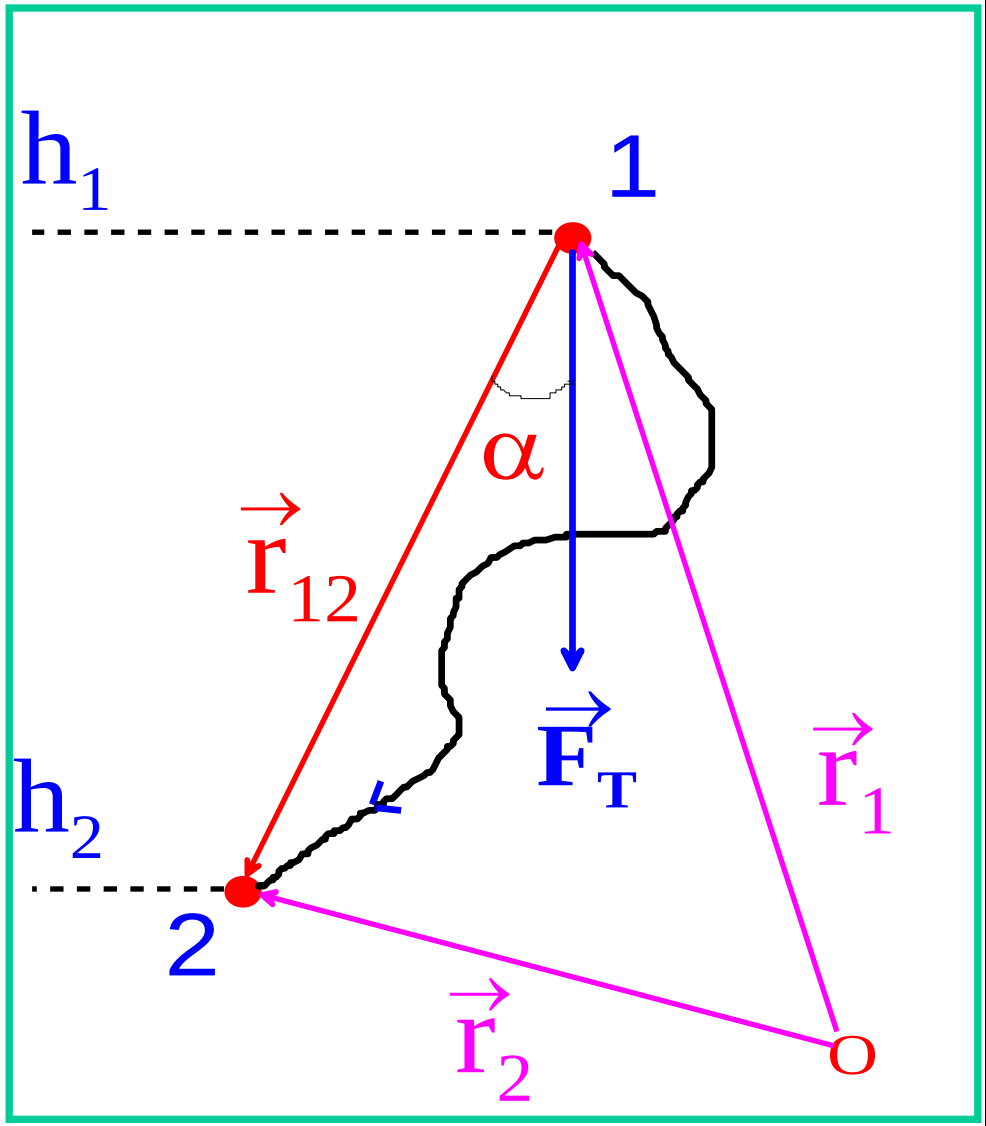
$$\vec{F}_T = m\vec{g}$$

где $\vec{g}$ - ускорение свободного падения.

Рассмотрим работу этой силы на участке между двумя произвольными точками 1 и 2 при перемещении тела вдоль некоторого пути, с вектором перемещения

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

h_1 и h_2 – высота тела над уровнем моря в начальной и конечной точках.



Работа силы тяжести на пути из точки 1 в точку 2 равна

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}_T \cdot d\vec{r}) = (\vec{F}_T \cdot \int_1^2 d\vec{r}) =$$

$$= (\vec{F}_T \cdot \vec{r}_{12}) = F_T \cdot r_{12} \cos(\alpha)$$

где $|\vec{F}_T| = F_T = mg$ **- модуль силы тяжести.**

Величина $r_{12} \cos(\alpha)$ **- есть проекция вектора перемещения на направление силы тяжести. Как следует из рисунка она равна разности высот**

$$r_{12} \cos(\alpha) = h_1 - h_2$$

В результате работа силы тяжести равна

(4.2.1)

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2)$$

Как видим, выражение (4.2.1) не зависит от формы кривой траектории. Тело может прийти из точки 1 в точку 2 по произвольной траектории – работа во всех случаях будет одной и той же.

Такой же результат получается для любого стационарного, однородного поля, силы которого во всех точках траектории одинаковы по модулю и направлению

$$\vec{F} = const$$

Консервативными являются также и силы *центрального поля*, направленные в сторону силового центра (*заряд, массу*) и имеющие величину, зависящую только от расстояния до центра.

Всем 4 типам фундаментальных взаимодействий отвечают консервативные силы.

Каждой точке поля консервативных сил можно сопоставить некоторую функцию $U(\vec{r})$, разность значений которой в точках 1 и 2 равна работе этих сил при перемещении тела

$$A_{12} = U_1 - U_2 \qquad (4.2.2)$$

Функцию $U(\vec{r})$ называют *потенциальной энергией* тела в поле консервативных сил.

Согласно (4.2.2) *работа, совершаемая консервативными силами, равна убыли потенциальной энергии тела*. Поэтому потенциальная энергия представляет собой запасенную телом энергию, которая расходуется при совершении работы. В частности, для сил тяготения из (4.2.1) следует

$$U = mgh \qquad (4.2.1а)$$

4.3 Закон сохранения энергии

Согласно (4.1.6) работа силы, действующей на тело на участке пути 1-2, идет на приращение его кинетической энергии

$$A_{12} = T_2 - T_1$$

Если силы консервативные, то их работа на том же участке пути согласно (4.2.2) равна убыли потенциальной энергии тела

$$A_{12} = U_1 - U_2$$

Приравнивая получаем $T_2 - T_1 = U_1 - U_2$

или

$$\boxed{T_2 + U_2 = T_1 + U_1} \qquad (4.3.1)$$

Значит величина, равная сумме потенциальной и кинетической энергии

$$E = T + U \qquad (4.3.2)$$

сохраняет свое значение при движении тела, движущегося в поле консервативных сил.

Величину E называют *полной механической энергией тела*.

Формула (4.3.1) выражает собой *закон сохранения энергии*.

Нетер показала, что данный закон связан с *однородностью времени*, которая проявляется в независимости физических законов от выбора начала отсчета времени.

***Закон сохранения энергии говорит, что энергия не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой* - потенциальная энергия переходит в кинетическую и наоборот.**

В этом законе проявляется неуничтожимость материи и ее движения.

4.4 Связь между силой и потенциальной энергией

Зная потенциальную энергию можно найти силу, действующую на частицу в каждой точке поля. Для установления этой связи рассмотрим движение частицы в направлении оси x.

Работа сил поля по перемещению частицы на расстояние dx равна

$$dA = F_x dx$$

С другой стороны, согласно (4.2.2), эта же работа равна убыли потенциальной энергии

$$dA = -dU$$

Поэтому

$$F_x dx = -dU$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Таким образом проекция силы на ось x равна первой производной от потенциальной энергии по координате x.

При выводе предполагалось, что другие координаты частицы не меняются $y = const$, $z = const$. Производная по x, вычисленная при таких условиях, называется *частной производной* и обозначается как

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \textbf{(4.4.1a)}$$

Аналогично определяются проекции силы на оси y и z

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad \textbf{(4.4.1b)}$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \textbf{(4.4.1c)}$$

Запишем силу в векторном виде

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$$

Подставим найденные проекции (4.4.1a - 4.4.1c) в вектор силы

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z\right) =$$

$$= -\left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)U =$$

$$= -\vec{\nabla} U$$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

где $\vec{\nabla}$ **- векторный дифференциальный оператор, называемый** ***оператором градиента*** **(оператор** ***набла*****).**

Таким образом силу можно представить в виде

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \qquad (4.4.2)$$

а элементарную работу

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -(\vec{\nabla} U \cdot d\vec{r}) =$$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right)$$

Поскольку $dA = -dU$, **то приращение потенциальной энергии равно**

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \qquad (4.4.3)$$

Выражение (4.4.3) является *полным дифференциалом потенциальной энергии*.

Известно, что полный дифференциал зависит лишь от значений функции в начальной и конечной точках и не зависит от пути, по которому происходит переход из точки в точку.

Это согласуется с потенциальным характером силового поля.

Покажем, что *потенциальная энергия определена не однозначно*.

Действительно, добавление к ней любой постоянной величины U_0 не меняет значения работы и силы поля

$$U \to U + U_0$$

$$A_{12} = (U_1 + U_0) - (U_2 + U_0) = U_1 - U_2$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\vec{\nabla}(U + U_0) = -\vec{\nabla} U$$

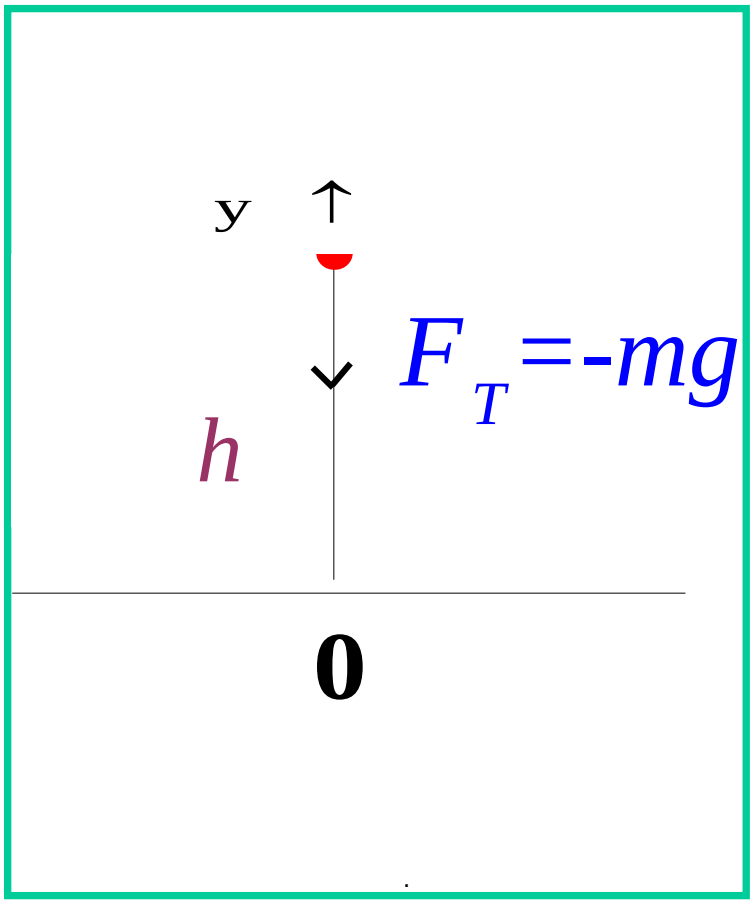
Поэтому *отсчет потенциальной энергии можно выбирать произвольно*, это никак не проявляется в механических свойствах системы.

Примеры расчета сил по заданной потенциальной энергии

1) *Поле сил тяжести*

Согласно (4.2.1а) потенциальная энергия тела на высоте h от уровня Земли равна

$$U = mgh$$



Поэтому сила тяжести, действующая на тело на высоте h, равна

$$F_T = -\frac{\partial U}{\partial h} = -mg$$

2) Кулоновское поле

Потенциальная энергия заряда Q_1 в поле заряда Q_2 равна

$$U = Q_1 Q_2 / (4\pi\varepsilon_0 r)$$

Найдем силу, действующую между зарядами

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{dr}{dx} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{x}{r}$$

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{x}{r}\vec{e}_x + \frac{y}{r}\vec{e}_y + \frac{z}{r}\vec{e}_z\right) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

3) *Упругая пружина*

Потенциальная энергия пружины

$$U = kx^2/2$$

k – *жесткость пружины*

x - *удлинение пружины*

Поэтому сила упругости, действующая на тело прикрепленное к пружине, равна

$$F_x = -dU/dx = -kx$$