

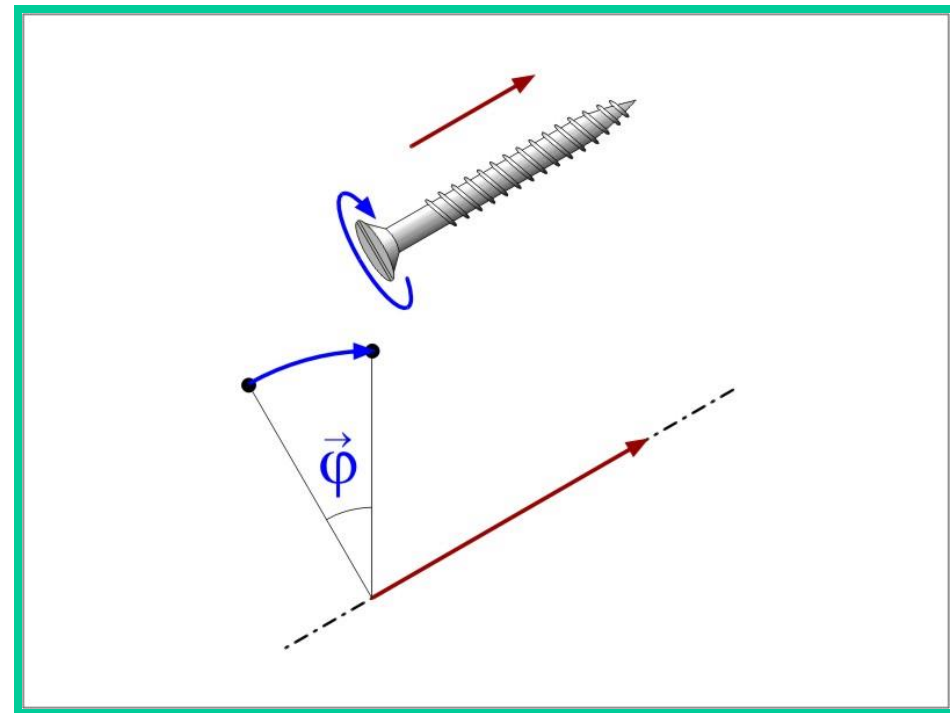
2.4 Кинематика вращательного движения

2.4.1 Угловая скорость

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Для указания направления поворота совместим **правый винт** с осью поворота так, чтобы его головка вращалась в направлении движения точек тела по окружности.

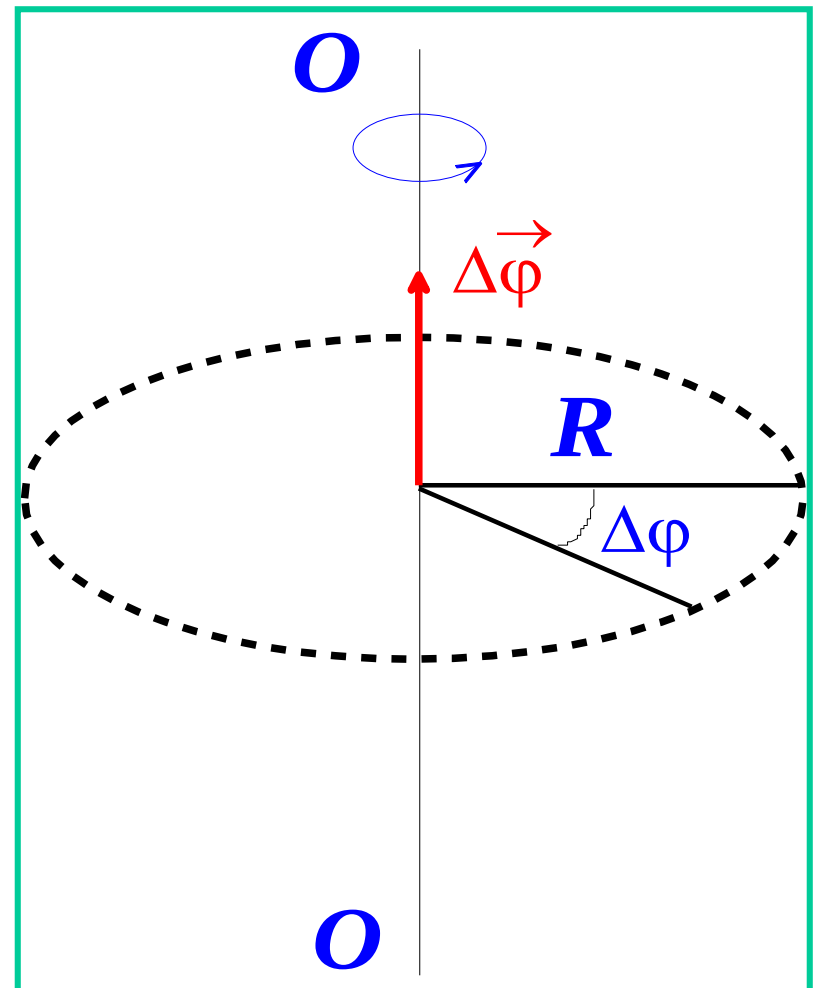
Это правило называется *правилом правого винта*:

вращение головки правого винта по часовой стрелке вызывает его перемещение в сторону острия



Пусть некоторая точка тела движется по окружности радиуса R и за время Δt поворачивается на угол $\Delta\varphi$.

Данный поворот можно описать вектором $\Delta\vec{\varphi}$, длина которого равна углу поворота, а направление совпадает с направлением оси вращения в сторону острия правого винта.

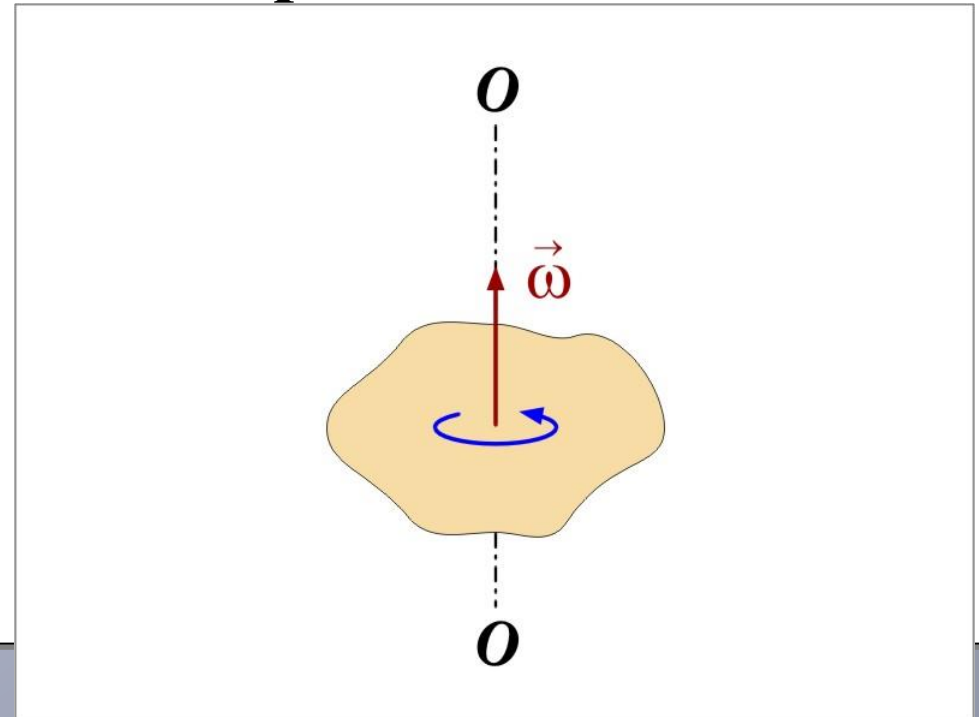


Угловой скоростью называется величина, равная первой производной угла поворота по времени

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (2.4.1)$$

Угловая скорость направлена вдоль оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта. Угловая скорость $\vec{\omega}$ характеризует быстроту вращения тела. *Единицей ее измерения* является

$$\left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right)$$



Вращение с постоянной угловой скоростью называется *равномерным*. Его можно охарактеризовать периодом и частотой вращения.

Период вращения T – это время, за которое точка совершает один полный поворот на угол 2π

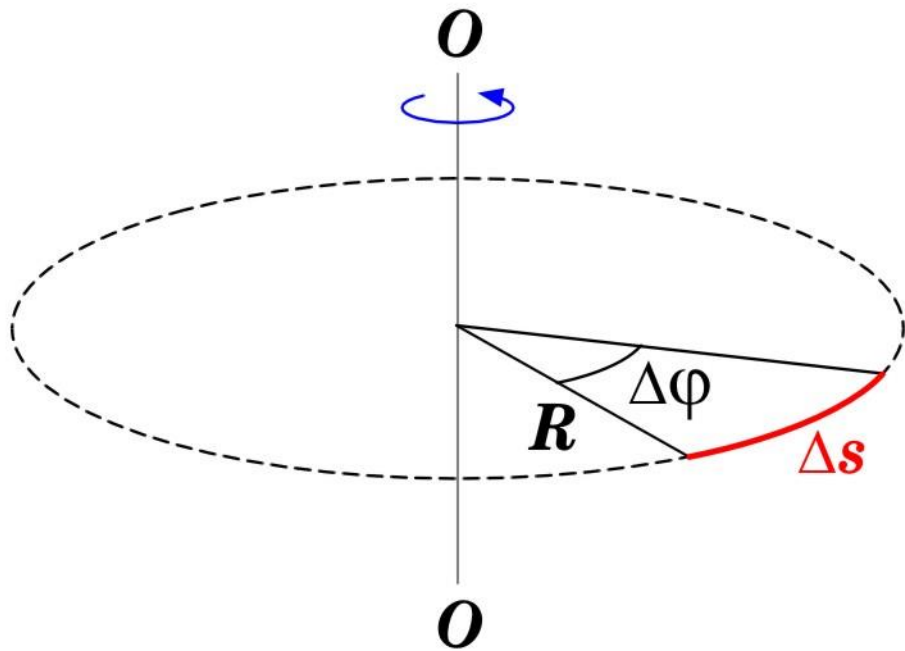
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.4.2)$$

Частота вращения ν равна числу полных поворотов за единицу времени

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.4.3)$$

Единицей измерения частоты является $\left(\frac{1}{\text{сек}} \right) = \text{Гц}$

Найдем связь между угловой и линейной скоростями. Пусть за малый промежуток времени тело повернулось на угол $\Delta\varphi$. Точка, находящаяся на расстоянии R от оси, пройдет путь $\Delta s = R\Delta\varphi$. Поэтому модуль ее линейной скорости равен



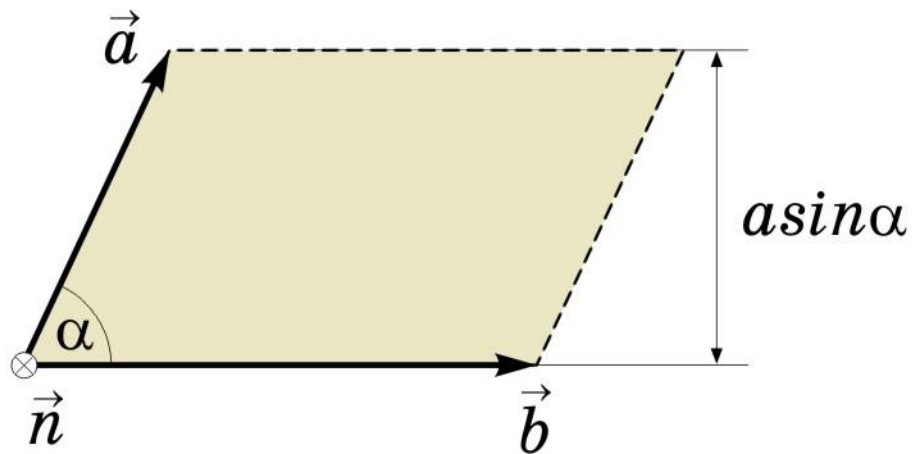
(2.4.4)

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \\ &= R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega \end{aligned}$$

Чтобы найти связь между направлениями векторов $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$, вспомним свойства векторного произведения.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый формулой

$$\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}] = ab \sin \alpha \cdot \vec{n}$$



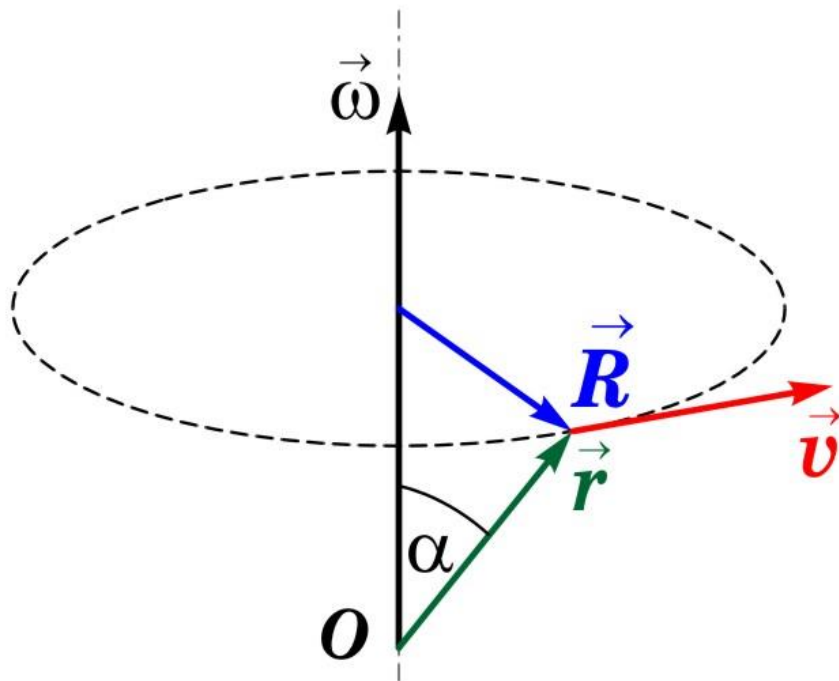
Вектор $\vec{n}$ направлен в лист.

где a и b - длины векторов, α - угол между ними, $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Направление выбирается так, чтобы при вращении правого винта от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ он смещался вдоль вектора $\vec{c}$.

Величина вектора c равна площади.

Из определения векторного произведения следует, что направление вектора $[\vec{\omega}\vec{r}]$ совпадает с направлением вектора скорости $\vec{v}$, а модуль равен $\omega r \sin \alpha = \omega R$. Поэтому с учетом (2.4.2) можем записать

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}] \quad (2.4.5)$$



Три вектора

$$\vec{v}, \vec{\omega}, \vec{R}$$

взаимно перпендикулярны
друг к другу

$$\vec{v} \perp \vec{\omega} \perp \vec{R}$$

2.4.2 Угловое ускорение

При неравномерном вращении вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ может менять как свою величину, так и свое направление за счет поворота оси вращения.

Пусть за время Δt вектор $\vec{\omega}$ получил приращение $\Delta \vec{\omega}$.

Для характеристики быстроты изменения угловой скорости вводится *угловое ускорение*

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (2.4.6)$$

Угловое ускорение имеет размерность *рад/сек²*

Если $\varepsilon > 0$, то вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен в ту же сторону, куда направлен и вектор $\vec{\omega}$. Если $\varepsilon < 0$, то эти вектора направлены навстречу друг другу.

Запишем полное ускорение точки вращающегося тела в виде (2.3.2), как сумму нормального и тангенциального ускорений $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

Найдем выражения для этих составляющих ускорения

$$\begin{aligned}\vec{a}_\tau &= \dot{v}\vec{\tau} = \frac{d(\omega R)}{dt}\vec{\tau} = R\frac{d\omega}{dt}\vec{\tau} = R\varepsilon\vec{\tau} \\ \vec{a}_n &= a_n\vec{n} = \frac{v^2}{R}\vec{n} = \omega^2 R\vec{n} = -\omega^2 \vec{R}\end{aligned}\quad (2.4.7)$$

В последнем равенстве стоит знак (-), потому что вектор нормали $\vec{n}$, направлен к центру кривизны, а вектор $\vec{R}$ направлен от этого центра. Модули ускорений равны

$$a_\tau = R\varepsilon \quad ; \quad a_n = \omega^2 R; \quad a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$