

9.8 Релятивистская динамика

Принцип относительности **Эйнштейна** требует, чтобы все законы природы имели один и тот же вид во всех инерциальных системах отсчета. Этому принципу должны удовлетворять, в том числе, законы сохранения импульса, энергии и **2-й закон динамики Ньютона**. Прежняя форма **2-го закона Ньютона**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{где} \quad \vec{p} = m_0 \vec{v}$$

не является релятивистски инвариантной, так как она меняет свой вид при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Для нахождения нового, релятивистски инвариантного уравнения динамики воспользуемся свойством инвариантности интервала между двумя событиями

$$s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}$$

Это выражение дает “длину” 4-х мерного вектора в пространстве Минковского в инерциальной системе отсчета K . Компонентами этого вектора выступают три проекции на декартовы оси и одна проекция на ось времени

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t$$

При переходе к новой инерциальной системе отсчета K' , движущейся относительно K вдоль оси y со скоростью V эти компоненты меняются согласно преобразованиям Лоренца

$$\Delta x' = \Delta x \quad \Delta z' = \Delta z \quad \Delta y' = \frac{\Delta y - V \Delta t}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V \Delta y}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

При этом интервал (длина 4-х мерного вектора) не меняется $\Delta s = \Delta s'$

Пусть некоторое физическое свойство описывается **4-х** мерным вектором с компонентами на **4-е** оси системы **K**

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z, A_t) \quad \text{где } A_t - \text{аналог } c\Delta t$$

Потребуем, чтобы при переходе к новой системе координат **K'** компоненты этого вектора преобразовывались также как и разности координат двух точек

$$A'_{x'} = A_x ; \quad A'_{y'} = A_y ; \quad A'_{y'} = \frac{A_y - V \cdot A_t}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \quad A'_{t'} = \frac{A_t - \frac{V \cdot A_y}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Тогда **“длина”** вектора $\vec{A}$ будет инвариантом, как и интервал

$$\left(A_t\right)^2 - \left(A_x\right)^2 - \left(A_y\right)^2 - \left(A_z\right)^2 = \left(A'_{t'}\right)^2 - \left(A'_{x'}\right)^2 - \left(A'_{y'}\right)^2 - \left(A'_{z'}\right)^2$$

Любой физический закон выражает связь между физическими величинами. Пусть, например, закон связывает две физические величины **A** и **B**, которые в инерциальной системе **K** изображаются 4-х мерными векторами в пространстве Минковского

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z, A_t) \quad ; \quad \vec{B} = (B_x, B_y, B_z, B_t)$$

Тогда релятивистски инвариантный закон можно записать в виде равенства этих векторов, поскольку преобразования двух векторов при переходе к новой инерциальной системе отсчета **K'** происходят по одинаковым формулам и значит равенство этих векторов, то есть физический закон, не будет менять свою форму

$$\vec{A} = \vec{B} \quad ; \quad \vec{A}' = \vec{B}'$$

в компонентах $A_x = B_x ; A_y = B_y ; A_z = B_z ; A_t = B_t$

$$A'_x = B'_x ; A'_y = B'_y ; A'_z = B'_z ; A'_t = B'_t$$

Для нахождения релятивистского выражения импульса рассмотрим частицу, которая движется со скоростью $\vec{v}$ относительно *неподвижной* инерциальной системы K . Пусть за время dt частица переместилась на вектор $d\vec{r}$.

Составим **4-х** мерный вектор с компонентами

$$(d\vec{r}, cdt)$$

Если умножить этот вектор на некоторую постоянную, то получим снова **4-х** мерный вектор. Выберем в качестве такой постоянной

$$m_0/dt_0$$

где m_0 – некоторая константа,

$$dt_0 = dt \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad \text{– собственное время, в системе отсчета, связанной с частицей.}$$

В результате умножения получим новый **4-х** мерный вектор с компонентами

$$\frac{m_0}{dt_0} (d\vec{r}, cdt) = \frac{m_0}{dt \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} (d\vec{r}, cdt) =$$

(9.8.1)

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}, c \right) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} (\vec{v}, c) = m(\vec{v}, c)$$

Здесь введено обозначение

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (9.8.2)$$

Если частица движется медленно, так что $v/c \ll 1$,

$m \approx m_0$, то пространственная составляющая 4-х мерного вектора нерелятивистской частицы $(m_0\vec{v}, m_0c)$ будет равна импульсу в ньютоновской механике

$$\vec{p} = m_0\vec{v}$$

если m_0 отождествить с массой частицы в нерелятивистской механике. Ее называют *массой покоя* - это масса частицы в системе, относительно которой частица находится в состоянии покоя.

В релятивистской механике вектор импульса вводится по аналогии согласно

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad (9.8.3)$$

m – *релятивистская масса*

Применение формулы (9.8.3) к системе тел, в частности к удару двух шаров показывает, что суммарный импульс системы сохраняется.

Вектор импульса можно записать в другом виде

$$\vec{P} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m_0 d\vec{r}}{dt \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_0 \frac{d\vec{r}}{dt_0} \quad (9.8.4)$$

где dt_0 - собственное время.

Эксперименты на ускорителях элементарных частиц подтверждают, что релятивистский импульс, определенный формулами (9.8.3-9.8.4), сохраняется во всех процессах столкновений.

При приближении скорости частицы к скорости света $v \rightarrow c$ релятивистская масса частицы m неограниченно растет.

Подставим релятивистский импульс во **2-ой закон Ньютона**,
получим **основной закон релятивистской динамики материальной точки**

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) = & (9.8.5) \\
 &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m_0 \vec{v}}{c^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]^{3/2}} \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \\
 &= m \vec{a} + m (\vec{a} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{v}}{c^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]}
 \end{aligned}$$

Из него следует, что ускорение точки $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

в общем случае *не совпадает с направлением силы*.

Значит, сопротивление тела движущей силе зависит от угла между силой и скоростью.

Поэтому в релятивистской механике масса тела перестает играть роль меры инертности тела.

9.9 Взаимосвязь массы и энергии

Найдем кинетическую энергию релятивистской частицы. Для этого используем то, что элементарная работа на малом перемещении равна приращению кинетической энергии

$$\begin{aligned} dT = dA &= (\vec{F} d\vec{r}) = (\vec{F} \vec{v}) dt = \left(\frac{d\vec{P}}{dt} \vec{v} \right) dt = (d\vec{P} \vec{v}) = \\ &= m_0 \left(d \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \right) \vec{v} \right) = \frac{m_0 (\vec{v} d\vec{v})}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} + \frac{m_0 v^2 (\vec{v} d\vec{v})}{c^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{3/2}} \end{aligned}$$

Учитывая, что $(\vec{v}d\vec{v}) = d(\frac{v^2}{2})$ после преобразований получаем

$$dT = d \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)$$

Интегрируя, находим кинетическую энергию

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \text{const}$$

Константу интегрирования найдем из условия, что кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю.

Полагаем $v = 0$

$$0 = m_0 c^2 + \text{const}$$
$$\text{const} = -m_0 c^2$$

Поэтому кинетическая энергия релятивистской частицы равна

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0 c^2 \quad (9.9.1)$$

Для малых скоростей $v \ll c$ получаем нерелятивистское выражение для кинетической энергии

$$T = m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots - 1\right) \approx \frac{m_0 v^2}{2}$$

Энергия $E_0 = m_0 c^2$ называется энергией покоя.

Энергия покоя является внутренней энергией тела, она не связана с его движением как целого. Если тело состоит из многих частиц, то энергия покоя равна сумме энергий покоя этих частиц, их кинетических энергий движения относительно центра масс и потенциальной энергии взаимодействия друг с другом.

Сумма кинетической энергии и энергии покоя дает полную энергию свободной частицы

$$E = T + E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = mc^2 \quad (9.9.2)$$

Эта формула выражает собой взаимосвязь между массой тела и его энергией. Она показывает, что всякое изменение массы тела приводит к изменению его энергии.

В полную энергию свободной частицы E не входит потенциальная энергия тела во внешнем поле.

Используя выражение для релятивистский импульса, выразим полную энергию свободной частицы через импульс

$$P^2 = \frac{m_0 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad ; \quad E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Отсюда находим релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом частицы

$$E^2 = m_0^2 c^4 + P^2 c^2$$

или

$$E = c \sqrt{m_0^2 c^2 + P^2} \quad (9.9.3)$$

9.10 Законы преобразований релятивистского импульса и энергии

Пусть, как и раньше, система **K** неподвижная, а система **K'** движется относительно нее со скоростью **V** вдоль оси **y**.

Пусть частица в системе **K** за малое время **dt** переместилась на малый вектор **d $\vec{r}$** с проекциями на декартовы оси **dx, dy, dz**.

Согласно преобразованиям Лоренца в системе **K'** частица за время **dt'** переместится на вектор **d $\vec{r}'$** с проекциями **dx', dy', dz'**

$$dx' = dx \quad dz' = dz$$

$$dy' = \frac{dy - Vdt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{Vdy}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Умножим эти уравнения на массу покоя частицы m_0 и разделим на собственное время частицы dt_0 (отсчитанное по часам неподвижным относительно частицы), а выражение с временами умножим, кроме того, на скорость света c

$$\begin{aligned}
 m_0 dx'/dt_0 &= m_0 dx/dt_0 \\
 m_0 dz'/dt_0 &= m_0 dz/dt_0 \\
 m_0 \frac{dy'}{dt_0} &= \frac{m_0 \frac{dy}{dt_0} - m_0 V \frac{dt}{dt_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \\
 c \cdot m_0 \frac{dt'}{dt_0} &= \frac{c \cdot m_0 \frac{dt}{dt_0} - m_0 \frac{V dy}{c \cdot dt_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}
 \end{aligned}
 \tag{9.10.1}$$

Учтем, что согласно (9.8.3) $\vec{P} = m_0 \frac{d\vec{r}}{dt_0}$; $\vec{P}' = m_0 \frac{d\vec{r}'}{dt_0}$

Или в компонентах

$$P_x = m_0 \frac{dx}{dt_0} ; \quad P_y = m_0 \frac{dy}{dt_0} ; \quad P_z = m_0 \frac{dz}{dt_0}$$

$$P'_x = m_0 \frac{dx'}{dt_0} ; \quad P'_y = m_0 \frac{dy'}{dt_0} ; \quad P'_z = m_0 \frac{dz'}{dt_0}$$

Так как $dx' = dx$ $dz' = dz$

то

$$P_x = P'_x ; \quad P_z = P'_z$$

Поскольку

$$dt_0 = dt \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

то полную энергию частицы в системе **К** можно записать в виде

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_0 c^2 \frac{dt}{dt_0} \rightarrow \frac{dt}{dt_0} = \frac{E}{m_0 c^2}$$

Аналогично полная энергия частицы в системе **К'** равна

$$E' = m_0 c^2 \frac{dt'}{dt_0} \rightarrow \frac{dt'}{dt_0} = \frac{E'}{m_0 c^2}$$

Тогда формулу, связывающую проекции импульсов на ось **у** в двух системах отсчета можно переписать в виде

$$P'_y = m_0 \frac{dy'}{dt_0} = \frac{m_0 \frac{dy}{dt_0} - m_0 V \frac{dt}{dt_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{P_y - m_0 V \frac{E}{m_0 c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{P_y - V \frac{E}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Теперь из формулы (9.10.1), связывающей времена в двух системах отсчета, получим формулу, связывающую полные энергии частицы в этих системах

$$\begin{aligned}
 c \cdot m_0 \frac{dt'}{dt_0} &= c \cdot m_0 \frac{E'}{m_0 c^2} = \frac{E'}{c} = \frac{c \cdot m_0 \frac{dt}{dt_0} - m_0 \frac{V dy}{c \cdot dt_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \\
 &= \frac{c \cdot m_0 \frac{E}{m_0 c^2} - \frac{VP_y}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{\frac{E}{c} - \frac{VP_y}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

**Запишем окончательные формулы, связывающие компоненты
релятивистского импульса и энергии в двух системах**

$$\begin{aligned} P'_x &= P_x \quad ; \quad P'_z = P_z & P'_y &= \frac{P_y - V \frac{E}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \\ \frac{E'}{c} &= \frac{\frac{E}{c} - \frac{VP_y}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \end{aligned} \quad (9.10.2)$$

Из формул (9.10.2) и результатов параграфа (9.8) следует, что совокупность величин

$$P_x \quad ; \quad P_y \quad ; \quad P_z \quad ; \quad \frac{E}{c} \quad \rightarrow \quad (\vec{P}, \frac{E}{c})$$

образует 4-х мерный вектор - *вектор энергии-импульса*.

Сравнивая с прежней формулой (9.8.1) для 4-х мерного вектора

$$m(\vec{v}, c)$$

видим, что они совпадают, так как $\vec{P} = m\vec{v} \quad ; \quad \frac{E}{c} = mc$

Из (9.9.3), следует, что “длина” вектора энергии-импульса является инвариантом движения

$$\left(\frac{E}{c} \right)^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2 = m_0^2 c^2 \quad (9.10.3)$$