

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н.Н. Никитенков, Н.А. Никитенкова

Синергетика для инженеров

Учебное пособие

Издательство
Томского политехнического университета
Томск 2009

ББК 22.31я73
УДК 530.145(075.8)
623

Никитенков Н.Н., Никитенкова Н.А.

Синергетика для инженеров: учебное пособие / Н.Н. Никитенков, Н.А. Никитенкова – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 168 с.

Пособие включает историко-методологическое введение; обзор основных понятий и определение основных терминов синергетики; описание экспериментов, в которых наблюдаются различные явления самоорганизации; знакомство читателя с некоторыми методами компьютерного моделирования процессов самоорганизации. В конце пособия приведен краткий словарь терминов, используемых синергетикой для описания процессов самоорганизации.

Пособие рассчитано на аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов естественнонаучных и инженерных специальностей, интересующихся современными тенденциями развития науки. Для успешного освоения материала пособия необходимы знания в объеме вузовского курса общей физики, а также знакомство с историей и методологией физики. Пособие будет полезно всем, начинающим изучение проблем, связанных с синергетикой.

ББК 22.31я73
УДК 530.145(075.8)

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Рецензенты

Доктор физ.-мат.н., профессор ГОУ ВПО «МАТИ» Борисов А.М.

Канд. физ.-мат. н., в.н.с. ИФПМ СО РАН Грабовецкая Г.П.

© Томский политехнический университет, 2009
© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2009

ВВЕДЕНИЕ

Возникшее в середине XX века направление в науке, получившее название «синергетика» (от греческого «synergeia» – совместное действие, сотрудничество, кооперация), сразу привлекло внимание широкого круга ученых, поскольку затронуло проблемы, находящиеся в фокусе внимания как естественных, так и гуманитарных наук. Можно сказать, что в рамках синергетики сделано фундаментальное открытие: *вся материя во Вселенной, начиная от физического уровня организации и заканчивая биологическим и социальным, обладает свойством самоорганизации, саморазвития.* При этом алгоритмы самоорганизации в системах разной природы, как оказалось, имеют много общего. Один из основоположников неравновесной термодинамики бельгийский физик русского происхождения И. Пригожин заговорил о *переоткрытии времени* в современной науке. То есть, если в классической физике время рассматривалось в качестве «вспомогательного параметра, нумерующего последовательность событий», то в новой науке исследуется структура и направленность времени, его необратимость в процессах самоорганизации.

Все это послужило отправной точкой для разработки новой эволюционной картины мира. Философы и историки науки заговорили о новой научной революции. Целый ряд понятий (таких как бифуркация, аттрактор, нелинейность, диссипативные структуры, обратная связь и другие), которые недавно были известны лишь узкому кругу специалистов, теперь становятся междисциплинарными. Уже только поэтому каждый грамотный специалист, в какой бы области науки он не работал, должен иметь общее представление о синергетике и выработать свою точку зрения на происходящие в науке перемены.

Поскольку синергетика является еще очень молодой и быстро развивающейся областью знаний, то не сложилось единого мнения о ее статусе. Ее считают и новой парадигмой естествознания, и новой наукой, и новой философией природы и прочим. По мнению одного из основоположников синергетики немецкого физика Г. Хакена, синергетика – это междисциплинарная наука о коллективных статических и динамических явлениях в закрытых и открытых многокомпонентных системах с «кооперативным» взаимодействием между элементами системы.

В настоящее время она представлена совокупностью разной степени разработанности естественнонаучных, гуманитарных, философских и междисциплинарных концепций. В пособии основное внимание уделено естественнонаучной составляющей синергетики, причем преимущественно аспектам, непосредственно касающимся инженерных приложений физики и химии.

При работе над пособием мы стремились описать основные исследовательские подходы в синергетике и подчеркнуть общность их основного предмета – процессов самоорганизации.

Первая глава пособия представляет собой краткий исторический очерк развития синергетики. В ней представлен обзор деятельности научных школ и их достижений, которые легли в основу создающейся в настоящее время теории самоорганизации.

Вторая глава содержит обзор основных понятий и определение основных терминов, необходимых для понимания литературы по теории самоорганизации. Эти понятия и термины пришли в синергетику преимущественно из физики: нелинейной динамики, неравновесной термодинамики, теории корпоративных процессов, теории фазовых переходов.

В третьей главе приведены описания экспериментов, в которых наблюдаются различные явления самоорганизации в открытых системах, обменивающихся энергией и/или веществом с внешней средой. Отбор явлений и опытов для включения в пособие производился по принципу простоты их демонстрации и описания, и по принципу их связи с физикой, химией и инженерными дисциплинами. Когда это возможно, приведены математические модели процессов самоорганизации.

Четвертая глава посвящена знакомству читателя с компьютерным моделированием процессов самоорганизации. Кратко описаны системы моделирования с использованием нейронных сетей и клеточных автоматов.

В «Заключении» дан анализ некоторых методологических проблем синергетики, ее последних достижений и перспектив развития. В конце пособия приведен краткий словарь терминов, используемых синергетикой и список литературы, использованной авторами при написании пособия.

Объем и задачи учебного пособия не позволили во многих случаях остановиться подробно как на некоторых интересных аспектах рассмотренных явлений, так и на явлениях самоорганизации в геологии, биологии, материаловедении, социологии и других областях. Этот недостаток мы постарались компенсировать большим количеством перекрестных ссылок по главам пособия и упоминаниями не рассмотренных явлений в соответствующих контекстах.

Пособие рассчитано на аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов естественнонаучных и инженерных специализаций, интересующихся современными тенденциями развития науки.

Для успешного освоения материала пособия необходимы знания в объеме вузовского курса общей физики, а также знакомство с историей и методологией физики.

Глава 1. Исторический экскурс: возникновение и становление синергетики

Данное учебное пособие представляет собой краткое введение в естественнонаучную составляющую синергетики. Под термином «синергетика» в настоящее время чаще всего понимают междисциплинарное направление, изучающее общие закономерности самоорганизации сложных систем. В рамках синергетики с момента ее зарождения и до настоящего времени происходит кооперирование различных наук: общей теории систем, физики, астрономии, химии, биологии, информатики, геологии, истории, социологии и других. Вместе с тем, вклад этих наук в формирование синергетики различен.

Можно выделить *основные* области научных исследований, в рамках которых синергетика начала развиваться и из которых она главным образом заимствовала методологию и понятийный аппарат. Они составляют естественнонаучный базис синергетики, к которому, на наш взгляд, относятся, прежде всего:

- 1) физика корпоративных явлений Г. Хакена,
- 2) термодинамика неравновесных процессов (Л. Онсагер, И. Пригожин);
- 3) нелинейная динамика, включая теорию нелинейных колебаний и волн.

Целью первой главы является краткое описание истории развития тех основных идей, из которых возникло то, что сегодня называют синергетикой.

1.1. Синергетика Хакена

Дату рождения синергетики (если иметь в виду появление науки с таким названием) можно считать достаточно точно установленной – это 1973 г. Конечно, предпосылки синергетики начали формироваться значительно раньше, но в 1973 г. состоялась первая конференция по проблемам самоорганизации, на которой профессор Штутгартского университета Герман Хакен сделал доклад о новой науке – синергетике (от греческого слова *synergetike* – сотрудничество, совместное действие), изучающей процессы самоорганизации в разнообразных системах.

Хакен Герман (родился 12 июля 1927 г.) – немецкий физик-теоретик, один из основателей синергетики. Изучал физику и математику в университетах Галле (1946–1948) и Эрлангена (1948–1950), получив степени доктора философии и доктора естественных наук. С 1960 г. является профессором теоретической физики университета Штутгарта. До ноября 1997 г. был директором Института теоретической физики и синергетики университета Штутгарта. С декабря 1997 г. является почетным профессором и возглавляет Центр синергетики в этом институте, а также ведет

исследования в Центре по изучению сложных систем в университете Флориды (Бока Рэтон, США). Является основателем шпрингеровской серии книг по синергетике.

Следует уточнить, что сам термин «синергетика» ранее ученые уже использовали в других контекстах. Так еще в XIX веке английский физиолог Ч. Шеррингтон, который почти одновременно с И. Павловым открыл условный рефлекс, называл синергетическим согласованное воздействие нервной системы (спинного мозга) при управлении мышечными движениями. А в XX веке С. Улам, который был участником одного из первых численных экспериментов на ЭВМ первого поколения, под «синергетикой» понимал взаимодействие между вычислительной машиной и оператором.

Основные положения доклада Хакена были опубликованы в 1975 г. в журнале «Review of Modern Physics» в виде статьи. В ней Хакен отметил, что процессы самоорганизации происходят в системах различной природы: в лазерах, атмосферных вихрях, поведении сообществ диких животных, при образовании сложных молекул в химических реакциях, галактик и даже в ряде социальных явлений. При этом в процессе перехода от менее упорядоченного состояния к более упорядоченному во всех этих системах имеют место коллективные, согласованные процессы, все они ведут себя сходным образом и подчиняются общим математическим закономерностям.

В том же 1975 г. известное западногерманское издательство «Шпрингер» заказало Хакену книгу, которая вышла в 1977 г. под названием «Синергетика» на немецком и английском языках и разошлась менее чем за год (что довольно редко бывает с научными изданиями). В 1978 г. книга была переиздана и переведена на русский и японский языки. Во введении к ней Хакен писал: «Я назвал новую дисциплину «синергетикой» не только потому, что в ней исследуются совместное действие многих элементов систем, но и потому, что для нахождения общих принципов, управляющих самоорганизацией, необходимо кооперирование многих различных дисциплин». В том же 1978 г. издательство «Шпрингер» начало издавать серию книг под названием «Синергетика», которая выходит до настоящего времени и насчитывает уже более сотни томов.

В 1978 г. престижный Сольвеевский конгресс физиков, ведущий свою историю с 1911 г. (тогда обсуждались проблемы физики ядра и квантовой механики), был полностью посвящен проблемам теории самоорганизации.

Идеи Хакена быстро распространились и были поддержаны научным сообществом. Более того, можно говорить о формировании определенной моды на исследования в этой области: лавинообразно росло число публикаций по этой тематике, широко использовалась новая терминология, предпринимались попытки распространить идеи

синергетики на все новые области исследования, проводились многочисленные конференции, симпозиумы и семинары.

Чем объяснить такой успех? *Ведь свойство различных систем (физических, химических, биологических, социальных) развиваться, усложняться, структурироваться, то есть, самоорганизовываться было известно за сотни лет до появления синергетики.* Так, физики давно изучали образование снежинок и рост кристаллов, геологи – формирование минеральных комплексов, метеорологи – возникновение вихрей в атмосфере и течений в океанах, биологи – эволюцию живых организмов и сообществ, обществоведы – развитие народов, государств. *При этом закономерности самоорганизации в системах разной природы представлялись различными, не сводимыми друг к другу.* Поэтому исследование самоорганизации как таковой и построение общей теории самоорганизации представлялось большинству ученых задачей настолько общей, что она граничила с бессмысленностью. Так, известный математик и физик Джон фон Нейман считал, что попытка найти решение этой задачи также абсурдна, как «построение теории не-слонов». А один из основателей квантовой механики Э. Шредингер в своей книге «Что такое жизнь с точки зрения физики?» в 1945 г. писал: «Все известное нам о структуре живого вещества заставляет ожидать, что деятельность живого вещества нельзя свести к обычным законам физики. И не потому, что имеется какая-нибудь «новая сила» или что-нибудь еще, управляющее поведением отдельных атомов внутри живого организма, но потому, что его структура отличается от всего изученного нами до сих пор в физической лаборатории». И он предположил, что в живом веществе могут действовать иные физические законы, чем в неживом веществе.

В истории науки чаще всего синтез научного знания осуществлялся через поиски некоторой общей идеи или универсального принципа, который мог применяться во всех или во многих областях. К таким исследованиям можно отнести теорию систем. Первые системные исследования были начаты известным австрийским (впоследствии канадским) биологом Людвигом фон Берталанфи (1901–1972) в конце 30-х гг. и опубликованы десятилетие спустя. Берталанфи был одним из основоположников *системного подхода как общенаучного метода исследования.* Он одним из первых дал определение системы как совокупности элементов, находящихся во взаимодействии, и высказал идею построения теории, которая описывала бы общие принципы устройства и поведения систем вообще, независимо от природы их элементов.

В статье «Общая теория систем: новый подход к союзу наук» (1951 г.) Берталанфи писал, что важны не поверхностные, смутные аналогии между явлениями разной природы, а строгое соответствие между всеми

элементами сравниваемых систем при их математическом описании. Основной идеей статьи был призыв к математическому обобщению законов и поиск изоморфных (т.е. сходных, аналогичных) законов в разных областях исследований. Характерно, что при этом Бергаланфи выступал против сведения химии, биологии и других наук к физике. Эти идеи очень близки синергетике и, во многих отношениях, явились той основой, на которой она и начала развиваться.

Ученые давно отмечали плодотворность поиска аналогий и изоморфных законов в разных исследуемых системах. Так в начале XX века австрийский физик Людвиг Больцман писал, что нахождение аналогий играет большую роль в науке. А в 1906 г. сербский ученый М. Петрович даже написал философско-методологическую работу об аналогиях между группами явлений и их значении в познании.

Формирование синергетики в современном виде началось с того, что в 1970 г. Грехем и Хакен в Германии и Де Джирмо и Скулли в Италии независимо друг от друга отметили аналогию между фазовыми переходами в веществе и процессами излучения в лазере.

К тому времени уже была разработана теория фазовых переходов, которая описывала явления перехода физических тел из одного состояния в другое (из одной фазы в другую) с общих позиций. Эта теория охватывала всю физику, поскольку при фазовых переходах меняются самые различные свойства тел: механические, оптические, магнитные, электрические и прочие. К фазовым переходам относятся переходы между агрегатными состояниями вещества (газ - жидкость - твердое тело), размагничивание ферромагнетика в точке Кюри при его нагревании, разрушение механической конструкции при избыточной нагрузке и многое другое.

Лазеры были изобретены в конце 50-х гг. XX века, а в 1964 г. за это изобретение была присуждена Нобелевская премия советским физикам Н.Б. Басову и А.Н. Прохорову и американцу Ч. Таунсу. Простейший твердотельный лазер состоит из легированного рубинового стержня или другого полупроводника (рабочего вещества), на торцах которого установлены зеркала (одно из которых полупрозрачное), и газоразрядной лампы накачки. Пространство между зеркалами служит для света резонатором. Под воздействием излучения лампы накачки атомы рабочего тела приходят в возбужденное состояние и начинают излучать цуги световых волн. В резонаторе между зеркалами происходит отбор тех цугов световых волн, которые идут вдоль оси рабочего тела, а остальные выходят за его пределы без усиления. Отобранные волны, отражаясь в зеркалах, проходят путь от зеркала к зеркалу много раз и усиливаются. При вспышках лампы происходит накачка энергии в лазер. При этом отдельные атомы рабочего тела излучают независимо друг от друга,

беспорядочно, несогласованно, как обычная лампа. Но при определенной мощности накачки, которую называют пороговой, наблюдается новое явление: все атомы рабочего тела лазера начинают испускать свет согласованно или, как говорят, в фазе. Цуги излучения разных атомов начинают совмещаться и усиливать друг друга, и возникает один гигантский цуг. При дальнейшей накачке интенсивность цуга возрастает. (Подробнее о работе лазера см. раздел 3.4).

Аналогия между лазерным излучением и фазовым переходом, кроме внешнего сходства процессов, заключалась в том, что при сопоставлении математического описания классических фазовых переходов и лазерного излучения, уравнения для них практически совпали. Разным в этих уравнениях был лишь физический смысл величин. Таким образом, аналогия оказалась более глубокой, чем просто внешнее сходство. Хакен в отношении этих процессов отметил, что в обоих случаях происходит самоорганизация, связанная с кооперативным (коллективным и согласованным) поведением. Действительно, коллективно самоорганизуются молекулы в узлах кристаллической решетки, коллективно выстраиваются элементарные магнитные моменты в ферромагнетике, атомы коллективно и согласованно испускают когерентное излучение в лазере. Этот аспект исследования самоорганизации Хакен назвал синергетическим.

Хакен решил расширить сферу исследований. Он обратил внимание на явление образования гидродинамических шестигранных структур, напоминающих пчелиные соты, на поверхности вязкой жидкости, налитой тонким слоем в сосуд, подогреваемый снизу, которое было открыто еще в 1900 г. французским ученым Х. Бенаром. (Подробнее об экспериментах Бенара см. раздел 3.1). Возникновение подобных структур, как выяснилось позже, не является чем-то уникальным. Оно зависит от вязкости жидкости и размеров сосуда. Анализируя это явление, Хакен обнаружил аналогию между образованием ячеек Бенара и фазовыми переходами. В случае ячеек Бенара, используя только поток тепловой энергии извне, слой вязкой жидкости самоорганизуется, образует новую структуру. Аналогичное явление происходит и в лазере: под воздействием энергетической накачки извне излучение рабочего тела лазера самоорганизуется – из хаотичного становится когерентным. То же происходит и при других фазовых переходах: изменении агрегатных состояний вещества, намагниченности, симметрии кристаллов и других. Все эти различные по своей физической природе явления можно назвать *самоорганизацией*, поскольку в них имеет место скачкообразное качественное (а не только количественное) изменение состояний, свойств, структур систем. Хакеном были отмечены следующие общие черты этих явлений.

Во-первых, согласованность, коллективность или кооперативность. Не любой коллективный процесс может привести к самоорганизации, а только самосогласованный. Коллективно и согласованно самоорганизуются вихри внутри жидкости, коллективно и согласованно излучают атомы в лазере, коллективно и согласованно самоорганизуются атомы в узлах кристаллической решетки, коллективно и согласованно выстраиваются магнитные моменты доменов в ферромагнетике.

Во-вторых, эти системы могут быть только открытыми, то есть, обмениваться с окружающей средой энергией и/или веществом. Действительно, ячейки Бенара и лазерное излучение могут существовать только при подпитке энергией соответствующих систем извне.

В-третьих, системы неравновесны. В принципе, фазовые переходы бывают равновесными и неравновесными. Так, при нагревании лед переходит в жидкое состояние – воду. На это тратится определенная энергия, но когда вода получена, то поддерживать это состояние (новую фазу) уже больше не нужно. Это равновесный переход. В последние 30–40 лет исследованы фазовые переходы, в которых одна из фаз неустойчива, то есть, может существовать только при постоянной подпитке энергией извне. Такие фазовые переходы называют неравновесными. К неравновесным фазовым переходам можно отнести и фазовые переходы в лазерах, и возникновение ячеек Бенара.

После выяснения общих черт процессов самоорганизации Хакен поставил перед собой задачу обнаружить более глубокие основания этого единства и найти математический формализм, позволяющий описать с единых позиций процессы самоорганизации разной природы.

Для решения этой задачи Хакен использовал две хорошо разработанные математические теории. Во-первых, для описания неравновесных процессов, в которых нарастают флуктуации разных параметров, он использовал стохастическую теорию, изучающую случайные процессы и оперирующую вероятностными понятиями (см. раздел 2.9). Во-вторых, для описания фазовых переходов он воспользовался хорошо разработанной математической теорией бифуркаций (см. раздел 2.4)

Новый синергетический подход не исчерпывался применением только этих двух теорий. Помимо синтеза математических описаний требовался и синтез физических моделей, описывающих различные фазовые переходы, гидродинамические и лазерные процессы. Все это делало задачу разработки теоретической синергетики весьма непростой. Так, например, явление сверхпроводимости – резкого падения сопротивления проводников почти до нуля при низких температурах – было уже давно описано в теории фазовых переходов. После некоторых преобразований эту модель удалось применить к описанию процессов неустойчивости в

лазерах. При этом оказалось, что тепловые флуктуации при описании сверхпроводимости могут быть заменены в модели для лазера флуктуациями, вызванными спонтанной эмиссией фотонов атомами. И таких примеров может быть приведено немало.

Постепенно продвигаясь по пути синтеза физических моделей и математических описаний и поиска аналогий, Хакену сначала удалось описать с общих позиций процессы в лазерах и фазовые переходы. Затем он расширил эту модель для описания ячеек Бенара и ряда других гидродинамических неустойчивостей. Эффект превзошел самые смелые ожидания! Так, для ячеек Бенара полученные Хакеном уравнения предсказывали не только само их появление, но и шестиугольную форму ячеек и даже их параметры. Этот результат уже не мог быть простым совпадением или случайностью. Связь явлений оказалась действительно глубокой. И можно было ожидать дальнейших успехов в этом направлении.

Затем интересы Хакена переместились в другую область – теорию полупроводников. И здесь явления, которые удовлетворяли условиям самоорганизации, успешно были описаны в рамках синергетического подхода. Таким же путем удалось смоделировать и ряд процессов в механике (в частности, разрушение упругих конструкций при больших нагрузках). Новым здесь стал сам универсальный подход, позволяющий во много раз сжать информацию о хорошо изученных различных явлениях и процессах, и исследовать их с общих позиций.

Таким образом, можно сказать, что синергетика, расширяя круг своих приложений, стала претендовать на открытие универсального механизма, с помощью которого осуществляются процессы самоорганизации в природе. Но ее объектом являлись не любые системы, а только те, которые являются открытыми и сильно неравновесными, и в которых происходят кооперативные процессы. В открытых системах можно менять потоки энергии и вещества и, тем самым, регулировать образование новых структур. При неравновесных процессах, начиная с какого-то критического для данной системы значения внешнего потока, из неупорядоченных и хаотических состояний за счет потери их устойчивости могут возникнуть упорядоченные состояния. Упорядоченность может быть временная, пространственная и пространственно-временная. Эволюция таких систем протекает по следующей общей схеме:

1. Период плавного эволюционного развития с линейными изменениями параметров, который подводит систему к некоторому неустойчивому критическому состоянию – точке бифуркации. В этой точке путь развития системы как бы разветвляется.

2. Выход из неустойчивого состояния скачком и переход в качественно новое состояние, характеризующееся большей сложностью и

упорядоченностью. Причем, переход системы в новое состояние осуществляется путем «выбора» из нескольких (двух и более) возможных новых устойчивых состояний. И какой из возможных путей развития будет избран – решает случай (флуктуации параметров системы). Таким образом, случайность входит в процесс самоорганизации как абсолютно неустраняемый момент ее. Можно подсчитать варианты путей развития системы, но какой именно из них реализуется на практике, предсказать в принципе невозможно. Процесс этот необратим во времени.

Резюмируя деятельность Хакена, получившую огромный резонанс в научных кругах, отметим его следующие заслуги. *Во-первых*, он сумел выделить в ряде самоорганизующихся систем одно общее свойство – согласованность (кооперативность) поведения составляющих их элементов. *Во-вторых*, ему удалось построить общую математическую модель этих явлений.

1.2. Возникновение и развитие неравновесной термодинамики.

В том же направлении (и даже опережая Хакена по времени начала исследований) в Брюсселе (Бельгия) группа ученых, под руководством физико-химика русского происхождения Ильи Пригожина, работала над решением проблемы *построения теории самоорганизации с позиций термодинамического подхода*. В настоящее время эти работы называют синергетическими, однако ни сам Пригожин, ни представители его школы этот термин по отношению к своим работам никогда не употребляли. Представители брюссельской школы добились выдающихся результатов в области создания теории самоорганизации и, естественно, предпочитали и предпочитают пользоваться собственной терминологией. Но это обстоятельство не должно закрывать от нас суть дела: школа Хакена и школа Пригожина занимались и продолжают заниматься решением одной задачи – построением теории самоорганизации систем различной природы.

1.2.1. Классическая и неравновесная термодинамика.

Прежде чем перейти к работам Пригожина и его школы, необходимо сделать небольшой экскурс в историю термодинамики. Классическая термодинамика занималась исследованием лишь замкнутых макроскопических систем в состоянии термодинамического равновесия, а также общих закономерностей, имеющих место при его установлении. Она была разработана во второй половине XIX века и в ее формировании большую роль сыграли работы С. Карно, Р. Майера, У. Томпсона, Р. Клаузиуса, Д. Гиббса, Л. Больцмана и других. До начала XX века практически все разделы физики ограничивались изучением равновесных

или близких к равновесию (*квазиравновесных*) состояний и процессов. Такая ситуация обуславливалась как определенными запросами со стороны техники того времени, так и уровнем развития самой физической науки. Прежде чем исследовать сложные и неравновесные объекты, физики должны были изучить более простые – равновесные. Естественный ход развития науки и техники привел к необходимости решать более сложные задачи.

Серьезным стимулом развития термодинамики стало решение проблемы необратимости термодинамических процессов, поставленной классической наукой еще в XIX веке. Со времени Ньютона физика утверждала обратимость во времени всех механических процессов. Обратимым время оставалось и в электродинамике, и в теории относительности Эйнштейна, и в квантовой механике. И лишь второй закон (второе начало) термодинамики утверждал, что любая замкнутая термодинамическая система (не обменивающаяся с окружающей средой энергией и веществом) со временем переходит в состояние термодинамического равновесия, и этот процесс необратим во времени. Для характеристики состояния термодинамической системы немецкий физик Р. Клаузиус ввел новое понятие – энтропия. Энтропия определяет состояние системы с точки зрения ее упорядоченности: чем меньше порядка в системе, тем выше энтропия (и наоборот). В состоянии термодинамического равновесия энтропия системы максимальна, а упорядоченность минимальна. Значит, изменение энтропии системы может служить показателем необратимости происходящих в ней процессов. Из второго закона следовало, что в природе существуют тенденция к выравниванию температур и рассеянию энергии, а время является необратимым в термодинамических процессах. Этот закон привел Клаузиуса к выводу о неизбежности «тепловой смерти» Вселенной, поскольку со временем все вещество в ней должно прийти в состояние термодинамического равновесия.

Непонятным оставалось то, как в такой Вселенной могло что-либо само по себе возникнуть и развиваться? При этом эволюция геологических, биологических и социальных систем была очевидным фактом. В научной картине мира наблюдалось явное противоречие между описанием процессов деградации термодинамических систем в физике и описанием процессов развития природных систем в геологии, биологии, истории, социологии и других науках. В естествознании конца XIX - первой половины XX веков закономерности эволюции не подтверждались только физикой и химией.

Австрийский физик Людвиг Больцман дал статистическое истолкование второго закона термодинамики. Но и оно не отменяло печального вывода о «тепловой смерти» Вселенной. Поэтому для того,

чтобы снять противоречие между выводом о неизбежности подобного события и наблюдаемыми на Земле процессами развития материальных структур, он выдвинул *флуктуационную гипотезу*. Суть ее заключалась в том, что, несмотря на то, что вся Вселенная стремится к состоянию термодинамического равновесия, в доступной нашему наблюдению части Вселенной произошла некоторая гигантская флуктуация, которая и позволила образоваться галактикам, звездам, планетам, жизни, обществу. Однако возникновение такой гигантской флуктуации неправдоподобно с точки зрения статистической физики. И это было ясно самому автору гипотезы. Больцман хотел провести идею эволюции в физику еще в 70-е гг. позапрошлого века. Он был сторонником эволюционной теории Дарвина и мечтал стать «Дарвиным в физике», но ему этого не удалось сделать. Научное сообщество тогда не поняло и не приняло его программы.

Положение стало меняться в результате проникновения в первой половине XX века в физику через космологию идеи эволюции физического мира. В 1929 г. американский астроном Эдвин Хаббл открыл явление разбегания галактик, то есть, по-существу расширения Вселенной. А в конце 40-х гг. для его объяснения американский физик русского происхождения Георгий Гамов выдвинул теорию Большого Взрыва, согласно которой наша Вселенная образовалась в результате взрыва сверхплотного и сверхгорячего сгустка материи, произошедшего 10-20 млрд. лет назад (по современным данным 13,8 млрд. лет назад). Атомы, молекулы, звезды и галактики образовались лишь на определенном этапе расширения и охлаждения Вселенной. Под напором новых научных данных росло понимание того, что практически все системы в природе являются открытыми и неравновесными: галактики, звезды, планеты, живые организмы и многое другое. Труднее привести пример закрытой системы. Исследования неравновесных термодинамических процессов требовала и развивающаяся быстрыми темпами техника. Поэтому постепенно интересы физиков смещались в эту область исследований.

1.2.2. Линейная термодинамика необратимых процессов Онсагера

Неравновесная термодинамика сформировалась в 50-е гг. XX столетия. Первый шаг в ее развитии был сделан Ларсом Онсагером (1903-1976) еще в начале 30-х гг.

Ларс Онсагер родился в Осло в 1903 г. В 1925 г. он закончил Высшую техническую школу Тронхейма, получив диплом инженера химика. Затем поехал в Швейцарию, где продолжил образование в Цюрихском университете. Здесь некоторое время работал в лаборатории нобелевского лауреата, известного физика и химика П. Дебая. В 1928 г. Онсагер эмигрировал в США, там он работал в Йельском университете, университете штата Мичиган и других заведениях. В 1968 г. он был

удостоен Нобелевской премии. В конце жизни Онсагер часто повторял: «Пока есть силы – надо жить, а жить для ученого – значит работать».

В 1931 г. была опубликована работа Онсагера «Соотношение взаимности в необратимых процессах». На основании принципа микроскопической обратимости движения частиц (который выражается в инвариантности уравнений движения частиц системы относительно времени) Онсагер пришел к выводу о равенстве средних скоростей частиц в прямом и обратном направлениях. В тех термодинамических системах, в которых имеются градиенты температуры, концентрации компонентов, химических потенциалов и другие градиенты, возникают необратимые процессы теплопроводности, диффузии, химических реакций и другие в соответствии с имеющимися градиентами. Эти процессы характеризуются тепловыми и диффузионными потоками, скоростями химических реакций и т.д., которые называются общим термином «потоки» и обозначаются J_i , а вызывающие их причины (градиенты температуры, давления или концентрации) называются «обобщенными термодинамическими силами» и обозначаются X_k . Онсагер установил, что при небольших отклонениях от термодинамического равновесия потоки (тепла и вещества) математически могут быть выражены в виде линейной комбинации обобщенных термодинамических сил:

$$J_i = \sum_{k=1}^m L_{ik} X_k \quad (i=1,2,\dots,m),$$

где L_{ik} - кинетические коэффициенты, определяющие вклад различных термодинамических сил X_k в создание потока J_i . Коэффициенты L_{ik} являются феноменологическими, их определяют опытным путем. Поскольку данное соотношение линейное, то принято говорить о линейной термодинамике необратимых процессов Онсагера. На его основе Онсагером было получено соотношение взаимности, в котором отражена симметрия кинетических коэффициентов. В нем утверждается, что в линейном соотношении недиагональные кинетические коэффициенты равны:

$$L_{ik} = L_{ki} \quad (i \neq k).$$

Таким образом, матрица кинетических коэффициентов является симметричной. Это означает, что если на поток J_i , соответствующий необратимому процессу i , действует сила X_k необратимого процесса k , то сила X_i действует на поток J_k с тем же коэффициентом. Соотношение взаимности учитывало известный в термодинамике принцип Кюри для изотропных систем (т.е. систем, свойства которых одинаковы по всем направлениям), который утверждает, что потоки и термодинамические силы разных размерностей не могут быть связаны друг с другом в одном математическом уравнении. Это, например, означает, что если причина –

векторная величина, то она может вызвать следствие – векторную величину, но не может вызвать скалярную или тензорную величину.

Необратимые процессы можно разделить на три группы:

- скалярные (химические реакции, где поток – скорость реакции, а термодинамическая сила – химическое сродство);
- векторные (диффузия, теплопроводность);
- тензорные (вязкое трение).

Гипотеза линейных связей потоков и термодинамических сил Онсагера позволила описать с общих позиций явления переноса, фазовые переходы, химические реакции. Границы применимости линейных соотношений оказалось возможным определить только экспериментальным путем. Опыты показали, что они справедливы для описания процессов диффузии и теплопроводности в достаточно широкой области параметров, а для химических реакций они справедливы только в очень узкой области, вблизи состояния химического равновесия. В области больших градиентов макропараметров соотношения Онсагера не применимы. За открытие соотношений взаимности в 1968г. Онсагеру была присуждена Нобелевская премия по химии.

На основе его теории в 40–50-е годы разрабатывалась проблема разделения изотопов методом термодиффузии, вопросы физики плазмы, биологии и другие проблемы.

1.2.3. Развитие неравновесной термодинамики Пригожиным

Решающий вклад в становление неравновесной термодинамики был внесен бельгийским физиком русского происхождения Ильей Пригожиным (1917–2003), который работал над проблемами неравновесной термодинамики с середины 40-х гг.

Илья Романович Пригожин (родился в Москве в 1917 г.). Его отец окончил Московское высшее техническое училище, мать – консерваторию. В 1920 г. семья Пригожиных эмигрировала в Берлин, а в 1928 г. переехала в Брюссель. В 1942 г. Пригожин окончил Брюссельский университет, где продолжал работать на протяжении всей своей жизни. С 1962 г. являлся директором Международного института физики и химии в Сольве (Бельгия), а с 1967 г. – директором центра статистической механики и термодинамики Техасского университета (США). В 1977 г. ему была присуждена Нобелевская премия. Являлся членом многих национальных академий и международных научных обществ. С 1982 г. был иностранным членом АН СССР, а затем РАН. Умер в 2003 г.

Пригожин выяснил, что процессам, нарушающим равновесие, в системе противостоит внутренняя релаксация. В случае разреженных газов, например, роль релаксации (сглаживания возмущений) играют процессы столкновений между молекулами. Если возмущающие процессы менее интенсивны, чем релаксационные, то говорят о локальном

равновесии, то есть о равновесии, существующем в малом объеме. При этом совсем не обязательно, чтобы в других частях системы состояние было близко к равновесию. Понятие локального равновесия можно ввести при медленном изменении внешнего воздействия и для времен, больших характерного времени элементарного релаксационного процесса, формирующего равновесие. Эта идея была высказана Пригожиным в его докторской диссертации в 1947 г. Она позволила описывать состояния неравновесной системы в области локального равновесия теми же параметрами, что и при равновесии.

Поворотным пунктом в развитии неравновесной термодинамики стала формулировка Пригожиным теоремы *«о минимуме производства энтропии в стационарном неравновесном состоянии»*.

Производством энтропии Пригожин назвал прирост энтропии в физической системе за единицу времени в результате протекающих в ней неравновесных процессов. В открытой системе существуют потоки энергии через границу системы. Полная энтропия системы может быть постоянной только при поступлении в систему извне отрицательной энтропии или негэнтропии, которая компенсирует производство энтропии внутри системы. Теорема Пригожина утверждает, что *в системе, находящейся в стационарном, достаточно близком к равновесию состоянии, производство энтропии минимально*. Теорема подчеркивает устойчивость неравновесных систем, когда удаление от равновесия невелико. В этих случаях процессы в этой системе можно считать линейными и применять термодинамику Онсагера.

Устойчивость стационарных состояний с минимальным производством энтропии связана с принципом, сформулированным в 1884 г. Ле Шателье и обобщенным в 1887 г. с точки зрения термодинамики немецким физиком Карлом Брауном. Принцип Ле Шателье–Брауна утверждает, что *система, выведенная внешним воздействием из состояния с минимальным производством энтропии, стимулирует развитие процессов, направленных на ослабление внешнего воздействия*.

В стационарных неустойчивых состояниях, когда фиксирована одна из термодинамических сил, вторая может испытывать флуктуации. При этом производство энтропии возрастет, и система может выйти из стационарного состояния в нестационарное. Однако, в силу самопроизвольного стремления к переходу в состояние с наименьшим производством энтропии, она может вновь перейти в стационарное состояние.

Общая теория устойчивости состояний была разработана русским математиком Александром Михайловичем Ляпуновым (1857–1918). *Устойчивые состояния не теряют своей устойчивости при флуктуациях физических параметров, система за счет внутренних взаимодействий способна погасить возникающие флуктуации. Неустойчивые системы,*

наоборот, при возникновении флуктуации способны усиливать их, и в результате такого нарастания амплитуд возмущений система выходит из стационарного состояния. Критерием эволюции при этом является вторая производная энтропии по времени, величина которой меньше нуля. Она указывает направление развития физической системы к устойчивому стационарному состоянию.

В случае, если потоки энергии извне приводят систему в состояние далекое от равновесия, то есть в случае открытых систем, прирост энтропии за единицу времени в единице объема был назван Пригожинным *функцией диссипации*, а системы, в которых функция диссипации отлична от нуля, были названы *диссипативными системами* (от латинского слова *dissipatio* – разгонять, рассеивать). В таких системах энергия упорядоченного движения рассеивается – переходит в энергию неупорядоченного движения и, в конечном счете, в тепло. Практически все системы в природе являются диссипативными, поскольку трение, вязкость и другие силы сопротивления приводят к диссипации (рассеянию) энергии.

Пригожин установил, что процессы, протекающие в системах, далеких от равновесия, могут привести к образованию новых пространственно-временных структур. При определенных условиях суммарное уменьшение энтропии открытой системы за счет обмена потоками с внешней средой может превысить ее внутреннее производство. Тогда появляется неустойчивость предшествующего неупорядоченного состояния системы, в ней возникают и могут возрасти до макроскопического уровня крупномасштабные флуктуации, что и приводит к возникновению упорядоченных структур. Образование этих структур происходит не из-за внешнего воздействия, а за счет внутренней перестройки системы, поэтому это явление получило название *самоорганизации*. При этом энтропия системы уменьшается. Пригожин назвал упорядоченные образования, возникающие в диссипативных системах в ходе неравновесных необратимых процессов, *диссипативными структурами*.

Состояние текущего равновесия в системе должно поддерживаться обменом системы веществом и энергией с окружающей средой, компенсирующим потери на диссипацию. Для описания процессов самоорганизации уже нельзя пользоваться представлениями линейной термодинамики необратимых процессов. Несправедливыми оказываются и линейные соотношения Онсагера между обобщенными силами и потоками, так как формирование структур происходит вдали от равновесия. Поэтому процессы самоорганизации описываются *нелинейными уравнениями* для макроскопических функций.

На основании теории диссипативных структур ученые школы Пригожина объяснили образование ячеек Бенара (см. раздел 3.1), переход от ламинарного течения к турбулентному и ряд других гидродинамических

явлений. Ячейки Бенара являются классическим примером упорядоченного образования, возникающего в диссипативной системе. При подогреве тонкого слоя вязкой жидкости в плоском сосуде поток тепла выводит эту жидкость из состояния равновесия. Пока система близка к равновесию, движения жидкости внутри нее можно описывать линейными уравнениями, а производство энтропии в ней, по теореме Пригожина, минимально. Но при дальнейшем нагревании жидкости система удаляется от равновесия и, наконец, она достигает такого состояния (его назвали порогом самоорганизации), когда во всем объеме жидкости в результате внутренней перестройки возникает ячеистая структура.

Принцип локального равновесия и теорема о минимуме производства энтропии в равновесных состояниях стали основой для дальнейшей разработки неравновесной термодинамики, а их автору Илье Романовичу Пригожину была присуждена Нобелевская премия по химии за 1977 г.

1.2.4. Исследования периодических химических реакций. Брюсселятор.

Впервые колебательную химическую реакцию, проявляющуюся в виде периодических вспышек при окислении паров фосфора, наблюдал Роберт Бойль в конце XVII века, Вслед за ним повторяющиеся вспышки неоднократно описывали многие другие исследователи. В XIX веке были обнаружены и другие колебательные реакции. Однако они не привлекли особого внимания, поскольку химическая кинетика как наука еще не существовала и никто не имел представления о том, как должна идти химическая реакция. Лишь во второй половине XIX века возникли термодинамика и химическая кинетика, положившие начало специфическому интересу к колебательным реакциям и методам их анализа.

Предсказания возможности колебаний в химических системах делались начиная с 1910 года на основе анализа системы дифференциальных уравнений в работах А. Лотки. Однако все попытки экспериментально обнаружить колебательные реакции долгое время не давали положительных результатов.

В 1921 году У. Брей опубликовал статью, в которой достаточно подробно описана первая колебательная жидкофазная реакция разложения пероксида водорода, катализируемая иодатом. Хотя эксперимент осложнялся выделением кислорода, Брей осознал связь между своим открытием и прогнозом Лотки. Однако его работа не вызывала интереса в течение примерно 40 лет. Одна из причин такого безразличия – довольно низкий уровень развития экспериментальных методов исследования механизмов сложных химических реакций. Другой причиной было широко

распространенное мнение, что второй закон термодинамики запрещает такие колебания даже вдали от равновесия. Фактически большинство химиков считали, что колебания концентрации в закрытых гомогенных системах невозможны, иначе говоря, чисто химических колебаний не бывает.

Современный этап в исследовании периодических реакций начался в 1951 году, когда московским химиком-экспериментатором Борисом Павловичем Белоусовым (подробнее см. раздел 3.3) было открыто необычное периодическое поведение химической реакции окисления лимонной кислоты броматом калия (в присутствии в качестве катализатора соли церия). Раствор реагирующих веществ, слитых в пробирку, строго периодически менял свою окраску от бесцветной (обусловленной избытком Ce^{+4}) к желтой (обусловленной избытком Ce^{3+}), затем снова к бесцветной и т.д. Ионы церия играли как роль катализатора, так и роль окрашенного индикатора реакции. Белоусов провел исследование и выяснил, что период колебаний сильно зависит от кислотности среды и температуры и может изменяться в пределах от 10 до 100 секунд. Реакция получила название «химические часы». В закрытой системе (в пробирке) колебания быстро затухали. Если же система была открытой (имелись потоки исходных реагентов и отвод продуктов реакции), то колебания продолжались без ограничений.

В это же время же английский математик А. Тьюринг теоретически сформулировал задачу о возможности образования в реакторе в условиях химической реакции устойчивых конфигураций промежуточных продуктов и в 1952 г. построил математическую модель их формирования. Ему, к сожалению, ничего не было известно о том, что такие реакции уже открыты и исследуются в Москве.

Только в 1959 г. Белоусову удалось опубликовать краткое сообщение о своем открытии в одном из нерецензируемых изданий. Тем не менее, эта публикация вскоре стала широко известна. С тех пор у нас в стране и за рубежом стали интенсивно исследовать подобные реакции. В потоке публикаций на эту тему выделялись работы молодого аспиранта А.М. Жаботинского, работавшего в Институте биофизики АН СССР. Он подробно исследовал много сходных химических реакций и классифицировал их. Вклад Жаботинского был столь значителен, что новый тип реакций стали называть реакциями Белоусова-Жаботинского.

Позже химический механизм реакции Белоусова-Жаботинского расшифровали Е. Керош, Р. Я. Филд и Р. М. Нойес. Они выяснили, что подробная схема реакции насчитывает более 20 промежуточных стадий.

В экспериментах Белоусова и Жаботинского образовывались новые структуры в жидкостях (слои разной окраски в пробирке), поэтому ими еще в начале 70-х годов заинтересовались Пригожин и его ученики.

Группа Пригожина не ставила опытов, а занималась решением чисто теоретических задач. Учеными было отмечено, что в опытах с этими реакциями не только происходило предсказанное в модели Тьюринга периодическое изменение цвета раствора, но и замирание картины изменения цвета при некоторых условиях, а также возникновение окрашенных слоев или устойчивых пространственных структур. Эти пространственные структуры сохранялись, пока не иссякал запас начальных веществ-реагентов, то есть в замкнутой системе они не могли бы существовать. Это свойство роднило их с диссипативными структурами, которые должны непрерывно «подпитываться» энергией и веществом от внешней среды. В обеих ситуациях структуры возникали в открытой системе, находящейся в неравновесном состоянии, и при наличии внешней подпитки. В обеих ситуациях эффект достигался после преодоления некоего порогового значения меняющегося параметра.

Сопоставив, таким образом, ход реакции Белоусова-Жаботинского с моделью Тьюринга, группа Пригожина переработала эту модель и создала свою, которая была названа *брюсселятором* (в честь города Брюссель, в котором работали ученые). (Подробнее модель брюсселятора представлена в разделе 3.3.4 пособия).

Был смоделирован процесс протекания периодической реакции в открытой системе между двумя видами непрерывно поступающих в реактор веществ, при условии, что количество этих веществ поддерживалось постоянным. Продукты реакции выпадали в осадок, но при этом в объеме реактора постоянно присутствовали два промежуточных вещества, которые периодически изменяли цвет раствора. Расчет давал колебательный режим при определенном соотношении поступающих реагентов. Изменение соотношений между исходными реагентами меняло характеристики колебаний концентраций промежуточных продуктов реакции. Удивительнее всего оказалось то, что уравнения, описывающие этот процесс, совпали с уравнениями автоколебательных систем (электрических или механических), изучением которых давно занимались советские физики.

Кроме того, группа Пригожина разработала специальную модель для изучения волновых явлений реакции Белоусова-Жаботинского, названную ими «реакцией в системе БМФ» (аббревиатура от слов: бромид – малоновая кислота – ферроин). Само это явление открыли в 1970 г. А.М. Жаботинский и А.Н. Заикин. В основе эксперимента снова была реакция Белоусова-Жаботинского. Но вместо химического размешивания реагентов в пробирке их растворы выливали тонким слоем в чашку Петри. Такая распределенная система оказалась очень удобной для наблюдений: в ней возникала красочная картина автоволн. По мере прохождения волны менялся ее цвет от синего к красному. В реагирующей смеси

исследователи наблюдали образование самовозбуждающихся кольцевых волн. Волна концентрации возникает в начале реакции, отражаясь от стенок реактора. Источником ее являются мелкие неоднородности среды или небольшие повышения концентрации кислоты, то есть случайные неоднородности или флуктуации. Эти флуктуации до некоторых пор гасятся силами внутренней инерции, если система устойчива, но начинают возрастать, если система неустойчива. В 1971 г. ученые наблюдали уже спиральные автоволны. Оказалось, что, помещая мелкие неоднородности в раствор, можно управлять этими волнами, делать их сферическими, кольцевыми или спиральными. (С последними достижениями в исследованиях реакции Белоусова-Жаботинского можно ознакомиться по статье: В.К. Ваган. Волны и динамические структуры в реакционно-диффузионных системах. Реакция Белоусова-Жаботинского в обращенной микроэмульсии. УФН, 2004, Т. 174, №9, С. 991–1010).

Но самое интересное заключалось в том, что процессы образования самовозбуждающихся волн во время реакции можно было описать с помощью математического формализма, применяемого при моделировании фазовых переходов! Таким образом, произошло пересечение интересов и методов школы Пригожина, школы Хакена и советской физической школы, основанной академиком А.А. Андроновым, которая разрабатывала теорию колебаний и волн.

Брюссельская школа И. Пригожина, представителями которой являются Г. Николис, И. Антониу, А. Баблоянц, В. Басиос, И. Стенгерс и другие ученые, начала с исследования процессов самоорганизации в диссипативных структурах и химических реакциях. Но затем ими была предпринята грандиозная попытка навести мосты между естественными и гуманитарными науками и сформулирована общая теория процессов самоорганизации в природе. Ученые исследовали способность систем различной природы (физических, химических, биологических и социальных) к самоорганизации и выяснили самые общие условия, необходимые для того, чтобы в них могли начаться процессы самоорганизации:

во-первых, система должна быть открытой (т.е. обмениваться с окружающей средой материей, энергией, информацией или хотя бы чем то одним из перечисленного);

во-вторых, она должна находиться вдали от точки термодинамического равновесия, т.к. в точке термодинамического равновесия она находится в состоянии максимальной дезорганизации и не способна к организации;

в-третьих, необходимо возникновение и усиление в системе флуктуаций, которые расшатывают в ней старый порядок и могут привести к новому порядку;

в-четвертых, возникновение самоорганизации опирается на положительную обратную связь (изменения, вызываемые средой в системе, накапливаются и усиливаются самой системой);

в-пятых, самоорганизация может начаться только в системе, обладающей достаточным (критическим) количеством взаимодействующих элементов;

в-шестых, процессы самоорганизации сопровождаются нарушением симметрии времени (необратимость времени) при переходе от одних структур к другим.

Вышеперечисленные условия они считали необходимыми, но недостаточными для того, чтобы начались процессы самоорганизации. Чем сложнее система, тем больше условий необходимо для начала процессов самоорганизации. Так, например, уже в химических реакциях необходимо наличие катализаторов.

Пригожин в своих последних работах развивал философию нестабильности. Особое внимание он уделял рассмотрению проблемы времени, происхождению стрелы времени, природе необратимости. Он считал, что современная теория самоорганизации опровергает детерминизм и что самоорганизация происходит на любом уровне организации материи. Природа содержит нестабильность как существенный элемент. На практике обычно имеет место не единичная бифуркация, а целые каскады бифуркаций. В результате возникают новые непредсказуемые макроструктуры. Мы не можем точно прогнозировать, что произойдет в силу непредсказуемости флуктуаций, поэтому будущее открыто. Это означает, что даже такие науки как физика и химия становятся историческими, в них появляется темпоральный, зависимый от времени элемент, наступает конец определенности, что нашло отражение в названии книги Пригожина «Конец определенности. Время, хаос и новые законы природы».

Школа Пригожина внесла огромный вклад в развитие и популяризацию идей синергетики в мире. Но их исследования воспринимаются научным сообществом неоднозначно. Прежде всего, потому что Пригожин был философствующим ученым-романтиком. В его работах, наряду с естественнонаучными концепциями, было высказано множество философских и культурологических идей и обобщений, с которыми не все соглашались. А те ученые, которые предпочитают в этой области исследований последовательно придерживаться естественнонаучного подхода с его тщательным экспериментальным и теоретическим обоснованием, часто скептически относятся к попытке Пригожина слишком широко применять на практике его теорию диссипативных структур и философию нестабильности.

В настоящее время ученики и коллеги Пригожина в Бельгии успешно продолжают вести работы в данном направлении. Во Франции его традиции продолжает развивать Эдгар Морен – президент Ассоциации сложного мышления (весьма влиятельной в Европе организации). Он еще более Пригожина увлечен философскими, культурологическими и социальными приложениями и осмыслением синергетики. Морен представляет синергетику как инженерию познания сложного и выступает с требованиями радикальной реформы социального управления, образования и всей практической деятельности человечества на основе синергетики.

1.3. Автоколебания, автоволны и самоорганизация.

Если Хакен и его ученики пришли к теории самоорганизации, изучая кооперативные процессы в лазерах и установив аналогию между ними и фазовыми переходами, а школа Пригожина изучала термодинамический аспект процессов самоорганизации, то советские физики начали изучать явления самоорганизации по двум направлениям. Первое связано с исследованием колебаний и волн. Второе – с нелинейной динамикой. Остановимся на первом.

В конце 30-х гг. XX века в научной школе, созданной академиком Леонидом Исааковичем Мандельштамом (1879–1944), сложилось направление, занимавшееся разработкой теории колебаний и волн. Эти работы продолжил академик Александр Александрович Андронов (1901–1952), сформировавший горьковскую (ныне нижегородскую) научную школу по изучению автоколебаний. После того, как работы Андронова получили известность, автоколебания стали обнаруживать не только в механике, радиотехнике, теории автоматического регулирования, но и в химии, биологии, экологии.

В это же время на физфаке МГУ теорию волн развивали Рем Викторович Хохлов (1926-1977) и Сергей Александрович Ахманов (1933–1991), создавшие к 70-м гг. свою школу нелинейной оптики. Сам термин «автоволны» был введен академиком Р. В. Хохловым.

В разработку теории колебаний, волн, автоволн и автоколебаний большой вклад внесли такие известные физики как А.Н. Колмогоров, Д.А. Франк-Каменецкий, Н.С. Пискунов, Я.Б. Зельдович и многие другие.

Экспериментальные исследования автоволн проводились в Институте биофизики АН СССР под руководством члена-корреспондента АН СССР Г.Р. Иваницкого. Наибольшую известность получили уже упоминавшиеся работы А.Н. Заикина и А.М. Жаботинского.

Автоволны – это самоподдерживающиеся волны, которые распространяются в активных средах или средах, поддерживаемых энергией.

тически. Автоволны способны поддерживать свои характеристики за счет внутренних источников среды. Они наблюдаются в химических реакциях, реакциях горения, при передаче возбуждения по нервным волокнам, мышцам, сетчатке глаза, при анализе численности популяций и т. д. Волна возбуждения движется по возбудимой среде без затухания, а потери на диссипацию полностью компенсируются подводом энергии извне.

Выяснилось, что автоволны в активных средах могут порождать как неподвижные, так и движущиеся структуры. К настоящему моменту изучено несколько типов автоволновых структур. Первый тип был назван автоволновыми структурами Тьюринга (см. раздел 3.3.3), поскольку он их первым предсказал – они образуются в виде слоев промежуточных продуктов реакции Белоусова-Жаботинского в пробирке (именно по отношению к ним Пригожин впервые употребил термин диссипативные структуры). Второй тип – это движущиеся волновые структуры при БМФ-реакциях. Третий тип – это спиральные вращающиеся автоволны, которые изучают медики и биофизики. Четвертый тип возникает при столкновении обычных волн и автоволн и описывается моделью Лоренца (см. раздел 2.5.2). Этот тип изучать очень сложно, но в природе такие явления встречаются довольно часто.

Теория автоволновых процессов описывает очень широкий круг явлений: от физики, космологии и химии, до биологии, медицины и экологии. И, по-видимому, число приложений этой теории будет только расширяться.

Особенно интересны исследования в биологии и медицине. Оказалось, что примером автоволны является нервный импульс, который распространяется без затухания по нервному волокну диаметром менее 0,025 мм и длиной до 1,5 м. Нейрофизиологические исследования показали, что обработка информации в коре головного мозга ведется не на уровне активности отдельных нейронов (как в компьютере), а на уровне взаимодействий между автоволнами возбуждения и торможения, которые охватывают обширные участки мозга. (см. подробнее раздел 1.4)

Теория колебаний и волн применима практически во всех разделах физики, химии, биологии и других наук и рассматривает диссипативные структуры лишь как один из своих объектов. В этом отношении она шире теории Пригожина. Но в работах школы Пригожина сформулирован общий термодинамический подход к разным явлениям, включая и автоволновые. И в этом плане он также претендует на широту, выходящую за пределы теории колебаний и волн. Но необходимо отметить, что современная теория самоорганизации заимствовала из них многие понятия и методы исследования. Насколько продуктивны возможности этих подходов, покажет дальнейшее развитие общей теории самоорганизации.

1.4. Физика нелинейных процессов. Нелинейная динамика.

Еще одним важным направлением исследований процессов самоорганизации как советских, так и зарубежных ученых стала физика нелинейных процессов, в частности, нелинейная динамика. Физика нелинейных процессов включает в себя исследования всех нелинейных процессов, в том числе и нелинейную оптику, теорию нелинейных волн и колебаний. Поэтому проведенное выше разделение на два направления исследования оправдано лишь как разделение исторически сложившихся конкретных разделов физики.

Уже в начале XX века число нелинейных проблем начало лавинообразно расти. Если прежде эти проблемы были связаны лишь с традиционно нелинейной механикой (задача трех тел, описание волн на поверхности жидкости и др.), то в 20–30-е годы XX столетия нелинейные задачи превратились в первоочередные задачи в акустике, физике твердого тела, статистической физике. Принципиально нелинейные задачи ставились зарождающейся радиотехникой (детектирование и генерация колебаний), возникали они и в других прикладных областях (например, в теории автоматического регулирования).

В 30-е годы уже было очевидно, что ситуации, когда линейный подход неприменим, – скорее правило, чем исключение. Стало ясно, что нелинейные проблемы из различных областей физики, и не только физики, оказываются очень сходными и требуют единого подхода и описания. Среди физиков различных специальностей начало формироваться «нелинейное мышление». Именно тогда возникла наука, описывающая нелинейные явления в *системах* различной природы – *теория нелинейных процессов*.

Сначала для решения нелинейных задач был приспособлен математический аппарат линейной физики, при этом действие нелинейности учитывалось либо малыми поправками, либо благодаря медленному изменению параметров линейного в своей основе решения. Это привело к тому, что по существу теоретики занимались в основном исследованием слабо нелинейных явлений. Эти явления, как правило, хорошо описывались с помощью привычных линейных понятий (например, пакетов гармонических волн или квазичастиц), плавно меняющихся под действием нелинейности или изменяющих друг друга при взаимодействии. Проблемы, описание которых возможно на языке слабо взаимодействующих линейных объектов составляют предмет «*квазилинейной физики*». В ее рамках были получены блестящие результаты, позволившие решить ключевые проблемы нелинейной оптики, создать теорию нелинейного развития плазменных неустойчивостей и многое другое.

Не вписывались в рамки квазилинейной физики процессы рождения и исчезновения элементарных частиц, эволюция Вселенной, возникновение случайного поведения в простых системах, переход ламинарного течения жидкости в турбулентное и, тем более, эволюция биологических организмов. Поэтому в последние десятилетия бурно развивается направление, получившее название *«физика нелинейных процессов»* или *просто нелинейная физика*.

Основными проблемами, стоящими перед нелинейной физикой, являются следующие:

1) Возникновение стохастического поведения в динамических системах, не подверженных действию флуктуаций.

2) Возникновение детерминированных структур в нелинейных средах, подверженных флуктуациям.

Эти проблемы, имеющие отношение к прогнозу погоды, нагреву плазмы, биофизике, единой теории поля, теории эволюции, управлению кризисами и рисками и другим научным проблемам, сейчас являются предметом особого внимания не только физиков и математиков, но и специалистов практически всех отраслей науки.

Часть работ в этой области проводилась и проводится по заказам государственных структур и ВПК. Так Центр нелинейных исследований в Лос-Аламосе (США) вырос из лаборатории, занимавшейся ранее разработкой ядерного оружия. Изучение диссипативных структур в разных странах развивалось под воздействием задач исследования плазмы, физики горения и взрыва. В Институте прикладной математики им. Келдыша в Москве развитие методов нелинейного анализа было во многом следствием решения оборонных задач.

При этом следует отметить, что в США ученые практически не используют (ставшие уже классическими в Европе и России) такие термины как: «параметр порядка», «диссипативные структуры», «самоорганизация», «синергетика» и другие. Они занимаются решением аналогичных (как правило, нелинейных) задач, но при этом пользуются иной терминологией. Так, например, вместо «самоорганизации» они говорят о «выходе системы на инерциальное многообразие», вместо «синергетики» – об «идеях теории сложности». За этим стоят не только амбиции различных научных школ с претензиями на приоритеты и уникальность подходов, но и особенности исследовательских традиций, исторически сложившиеся в разных странах. Если в США традиционно преобладают прикладные разработки, ученые заняты решением конкретных задач и, как правило, мало интересуются всем, что прямо их не касается, то в Европе и России естествоиспытатели более склонны к созданию фундаментальных теорий и поиску мировоззренческих обобщений.

Большой импульс развитию нелинейной физики был дан кибернетикой и появлением электронно-вычислительных машин (ЭВМ). В 60-70-е гг. быстрыми темпами развивались системный анализ и нелинейная математика, основанная на обобщении результатов расчетов на ЭВМ математических моделей объектов и систем различной природы. В это время в разных странах строились многочисленные имитационные модели в экономике, медицине, биологии, экологии. Сотни и тысячи уравнений, сотни и тысячи параметров не смущали энтузиастов. Вычислительный эксперимент дал огромный импульс развитию науки. В начале пути ученые не видели пределов и ограничений этих подходов. Но вскоре эти пределы обнаружались. Причем, пределы принципиальные и объективные, не зависящие от человека. Из теории динамического хаоса следовало, что даже для достаточно простых динамических систем (в которых будущее однозначно определяется настоящим) существует *горизонт прогноза*, заглянуть за который в общем случае нельзя, какую бы вычислительную технику мы не использовали. Теория самоорганизованной критичности показала, что для многих сложных иерархических систем типичны редкие катастрофы. Оказалось, что *наши возможности моделировать различные системы весьма ограничены*.

Примерно в то же время была создана теория, показывающая, что случайность может родиться в «неслучайной» (динамической) системе. Первое исследование связи неустойчивости и статистики было проведено еще А. Пуанкаре в 1912 г. В 1950-х этой проблемой занимался известный советский математик А.Н. Колмогоров. Близкие идеи высказывались затем Бирхгофом, Крыловым, Борном и Хопфом. В начале 60-х годов, главным образом в работах отечественных ученых Д.В. Аносова и Я.Г. Синая, были построены математические и физические модели систем с неустойчивыми траекториями. Примерно через 10 лет было *введено понятие аттрактора* – геометрического образа относительно устойчивого состояния системы в фазовом пространстве, к которому система стремится, попадая в область его притяжения. Открытие аттракторов и стохастического поведения детерминированных систем, обнаружение единства механизмов поведения в системах различной природы привели по существу к возникновению новой области науки – *теории сильно нелинейных явлений*.

В нашей стране эти исследования проводились в Москве в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша, Институте математического моделирования, на факультете вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ в школе под руководством академика А.А. Самарского и члена корреспондента РАН С.П. Курдюмова. Центры нелинейных исследований возникли и во многих других городах: в Самаре, Нижнем Новгороде, Санкт-Петербурге, Иркутске, Уфе, Томске. Большой вклад в развитие синергетики внесли академики РАН В.И. Арнольд, А.В. Гапонов-

Грехов, Н.Н. Моисеев, профессора Ю.Л. Климонтович, В.И. Кринский, В.В. Осипов, Ю.М. Романовский, Д.С. Чернавский, Г.Г. Малинецкий и многие другие. Особенно стоит отметить работы школы С.П. Курдюмова (1928-2004). В 1976 г. он предложил ныне широко известную *модель тепловых структур* (формирования в процессе горения при определенных условиях локальной зоны, зависящей только от параметров среды) (подробнее см. разд. 3.2). На ее основе Курдюмов, его коллеги и ученики создали теорию *режимов с обострением* – сценариев изменения исследуемых объектов и их параметров, когда один из параметров за короткое время обращается в бесконечность в отдельных точках или областях пространства. Такая модель позволяет описать процессы в плазме во время термоядерного синтеза, динамику свертываемости крови, рост народонаселения и другие процессы самоорганизации, обладающие свойством обострения. Исследования школы Курдюмова успешно продолжаются. Его ученики разрабатывают такие дисциплины как: теорию рисков (исследование природных и социальных систем с выделением их критических состояний, которым присуща склонность к катастрофам); теоретические основы нанотехнологии; альтернативную историю (модели развития общества при параметрах, отличных от имевших место в действительности); стратегическое планирование развития экономики и общества, и другие.

В некоторых книгах, посвященных синергетике, в развитии синергетики выделяют два этапа развития. Так в книге Г.Г. Малинецкого и А.Б. Потапова [24] первый этап условно назван «эпохой диссипативных структур». В этот период ученые «удивлялись, что сложные системы могут вести себя просто». А в таких различных явлениях как ячейки Бенара, неустойчивость Тьюринга, излучение лазера, динамика популяций тогда удалось увидеть общие механизмы. Их описание было сделано с помощью близких математических моделей. За внешним многообразием открылась внутренняя общность и простота. Важным оказалось наличие диссипативных процессов (вязкости, диффузии, теплопроводности). «Они позволяли исследуемым системам «забыть» начальные данные и независимо от их «деталей» сформировать с течением времени одни и те же или похожие распределения изучаемых переменных». Типичная задача, решаемая учеными в этот период – выяснение того, как меняется число и конфигурация возникающих структур при изменении какого-нибудь внешнего параметра и начальных данных. Математическим аппаратом синергетики на этом этапе были теория бифуркаций и теория обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных.

Этот период развития синергетики оставил нерешенными ряд вопросов. Например, каковы общие условия самоорганизации? Какие переменные в

конкретных случаях являются параметрами порядка (т.е. переменными, определяющими динамику системы)? Ответы на эти вопросы стали большим достижением последнего 10-летия.

Второй этап развития синергетики условно назван «периодом динамического хаоса». Теперь уже ученые удивлялись тому, что «простые динамические системы могут вести себя сложно». Ключевым понятием стала чувствительность к начальным данным – экспоненциальное (в среднем) разбегание двух бесконечно близких траекторий для так называемых хаотических аттракторов (о них пойдет речь в разд. 2.3, 2.5 и других). Символом этого этапа стал странный аттрактор Лоренца.

Но и этот период поставил свои вопросы. Оказалось, что большинство алгоритмов анализа данных, используемых в нелинейной динамике, эффективны только тогда, когда размерность фазового пространства системы невелика. Как следует обращаться с системами большей размерности? Как перейти от теории динамического хаоса к реальности?

Возникло противоречие между ясными и четкими представлениями нелинейной динамики и трудностью их применения на практике. За простоту идей синергетики пришлось платить большую цену. *Синергетика больше не представляется «теорией всего», как предполагали 10-20 лет назад философы и гуманитарии. Оказалось, что за общность теории приходится расплачиваться уменьшением ее конкретности и точности. Ученые, отстаивающие чистоту естественнонаучного направления в синергетике, всерьез заговорили о формировании новой парадигмы в синергетике, пусть не столь общей и простой, но зато более глубокой и конкретной.*

Нелинейная наука в настоящее время является общепризнанной и перспективной областью исследований, которая быстро развивается. Регулярно по этой тематике проводятся международные научные конференции. Серия книг по синергетике издательства «Шпрингер» продолжает выходить, количество изданного перешагнуло 100-томный рубеж. С 2002 г. по инициативе коллектива специалистов из различных вузов и НИИ Российской Федерации в московском издательстве «Едиториал УРСС» стала выходить серия книг «Синергетика – от прошлого к будущему». К настоящему времени в этой серии вышло уже более 20 книг. Ряд известных научных журналов полностью посвящены нелинейной науке: «Прикладная нелинейная динамика», «Physica. D. Nonlinear Phenomena», «Chaos», «Nonlinearity», «Physical Review E», а такие авторитетные издания как «Журнал экспериментальной и теоретической физики», «Успехи физических наук», «Успехи математических наук», «Physical Review Letters», «Physics Letters» регулярно публикуют статьи по этой тематике.

Глава 2. Основные представления и понятия синергетики

Целью этой главы является краткое описание основных понятий и представлений синергетики, введение в ее терминологию. Синергетика, как область научных исследований, изучает (или пытается изучать) общие закономерности самоорганизации в системах разной природы: от неживой материи до социума. Методы синергетики формировались, главным образом, в процессе развития нелинейной физики (в частности, нелинейной динамики), теории корпоративных процессов, неравновесной термодинамики. Многие понятия, которыми оперирует синергетика, заимствованы из перечисленных разделов физики. Часть из этих понятий являются общими для всей физики, другие специфичны для определенных разделов. Значительный блок понятий и терминов синергетики тесно связан с теорией систем и с исследованием динамических систем, поэтому мы начнем изложение материала с представлений о системах вообще и о динамических системах, в частности.

2.1. Системы. Определение, классификация.

Существует множество определений систем, но мы будем опираться на определение, которое дал в 30-е гг. XX века Л. фон Берталанфи и которое стало уже классическим:

Объект может рассматриваться как система в том случае, если он:

- 1) *состоит из подсистем, т.е. разделяется на части;*
- 2) *части должны составлять единое целое, которое обладает новыми свойствами, не сводимыми к сумме свойств частей;*
- 3) *должна существовать такая взаимосвязь элементов в системе, которую можно описать математически;*
- 4) *сама система должна быть подсистемой большей системы.*

Главное, что определяет систему – это взаимодействие и взаимосвязь частей в рамках единого целого. Если такое взаимодействие имеет место, то уже можно говорить о системе, хотя степень взаимодействия частей может быть различной. Любой природный объект, предмет или явление может быть представлен в виде определенной целостности, состоящей из частей (или элементов) и исследован как система.

Для более глубокого понимания того, что представляет собой система нужно рассмотреть понятия *структуры системы, подсистемы, элементов системы и классификацию различных систем.*

Строение системы характеризуется теми частями, из которых она состоит. Такими частями являются: подсистемы и элементы системы.

Подсистемы – это наибольшие части системы, которые обладают определенной автономностью, но в то же время подчинены системе и управляются ею. Обычно подсистемы являются особым образом

организованные системы, которые называют *иерархическими*. В иерархических системах каждый уровень организации подсистем подчинен последующему, более высокому уровню организации, но при этом обладает определенной степенью автономии.

Элементы – это наименьшие составные части системы. Но в принципе, любую составную часть системы можно рассматривать в виде элемента, если отвлечься от ее размеров.

Структура системы – это совокупность тех отношений (связей и взаимодействий) между образующими ее элементами и подсистемами, благодаря которым система сохраняет свою целостность и качественную определенность.

Каждая система характеризуется не только внутренней структурой, но единством и связями с окружающей средой, во взаимодействии с которой она и проявляет свою целостность. Иерархичность, многоуровневость, структурность – это свойства не только строения любой системы, но и ее поведения. Функционирование системы является результатом взаимодействия всех ее элементов и уровней организации, как между собой, так и с окружающей средой.

Возможны различные классификации систем. В самом общем плане все системы можно разделить на *материальные и идеальные (абстрактные)*. Материальные системы, в свою очередь, можно разделить по формам движения материи на физические, химические, геологические, биологические и социальные. Абстрактные системы являются продуктом человеческого мышления и познания и также могут быть разделены на множество различных групп (понятия, гипотезы, законы, теории и т.п.).

По характеру взаимодействия с окружающей средой все системы делят на *открытые и замкнутые (изолированные)*. Такое разделение возникло в классической термодинамике. Открытые системы обмениваются с окружающей средой веществом, энергией и информацией. Практически все реальные системы в природе являются открытыми. А замкнутые системы не взаимодействуют с окружающей средой (подробнее об открытых системах см. разд. 2.6).

Еще одной классификацией систем является их деление на *динамические и статические*. Состояние статической системы с течением времени остается неизменным, а для динамической системы характерно изменение состояния во времени. Такое разделение систем в определенной степени условно, так как все системы в мире находятся в движении и изменении.

Среди динамических систем обычно выделяют *детерминистские и стохастические (вероятностные)*. Такое разделение учитывает характер предсказания динамики поведения систем. Предсказания, основанные на изучении поведения детерминистских систем, носят однозначный, точный

и достоверный характер. К таким системам относится большинство механических систем. Стохастические системы имеют дело с массовыми или повторяющимися случайными событиями или явлениями. Поэтому предсказание их поведения носит статистический или вероятностный характер.

2.2. Динамические системы

Под *динамической системой* понимают математический объект, моделирующий реальные системы (физические, химические, биологические и др.), эволюция которых однозначно определяется начальным состоянием. Динамическая система определяется системой уравнений (дифференциальных, разностных, интегральных и т.д.), допускающих существование на бесконечном интервале времени единственность решения для каждого начального условия.

Состояние динамической системы описывают набором переменных, выбираемых из соображений естественности их интерпретации, простоты в описании, симметрии и т. п. Множество состояний динамической системы образует *фазовое пространство*, каждому состоянию отвечает точка в нём, а эволюция состояний изображается *фазовыми траекториями*. Чтобы определить близость состояний в фазовом пространстве динамической системы вводят понятие расстояния. Совокупность состояний в фиксированный момент времени характеризуется *фазовым объёмом*.

По характеру уравнений и методам исследования динамические системы делят на классы. Так, выделяют *конечномерные и бесконечномерные (с распределёнными параметрами) динамические системы* – системы с конечномерным и бесконечномерным фазовым пространством. Также выделяют *динамические системы с непрерывным временем – потоки*, и *с дискретным временем – каскады* (дискретность времени может отражать характер реального процесса: дискретность лазерных импульсов, смена поколений в генетике и т. д.). Выделяют *грубые и негрубые* динамические системы. Понятие *грубость* характеризует качество неизменности типа движения системы при малом изменении её параметров (структурную устойчивость системы).

2.2.1. Фазовое пространство (поток, траектория, объём, портрет)

Состояние системы (механической, химической, термодинамической и т.д.) или частицы задается точкой (q, p) в *фазовом пространстве* с N -мерными векторами $q = (q_1, \dots, q_N)$ и $p = (p_1, \dots, p_N)$. Их называют обобщёнными

координатами и обобщенными импульсами. Число N в этом случае называют *числом степеней свободы*, а фазовое пространство $2N$ -мерным.

Изменение состояния системы со временем t приводит к перемещению точки (q, p) в фазовом пространстве. Таким образом, образуется *фазовая траектория точки* $(q(t), p(t))$.

Фазовым потоком называют оператор \hat{T} , переводящий систему из одного состояния в момент времени $t=0$ в другое состояние в момент времени t :

$$\hat{T}(q(0), p(0))=(q(t), p(t)), \quad (2.1)$$

Фазовый поток определяется с помощью дифференциальных уравнений движения:

$$\dot{q} = Q(q, p, t); \quad \dot{p} = P(q, p, t), \quad (2.2)$$

где точка над символом означает дифференцирование по времени, Q и P – функции координат фазового пространства и времени. Решением уравнений (2.2) является *фазовая траектория системы*, зависящая от начальных условий $q_0=q(0), p_0=p(0)$:

$$q = q(t; q_0, p_0); \quad p = p(t; q_0, p_0), \quad (2.3)$$

называемая, также *фазовой кривой*. Качественные особенности эволюции динамических систем проявляются в характере фазовых траектории (кривых). Например, состоянию равновесия отвечает вырожденная траектория – точка в фазовом пространстве, периодическому движению – замкнутая траектория.

Фазовые кривые (траектории) не пересекаются, за исключением некоторых кривых, составляющих так называемое множество нулевой меры. Поэтому, с точностью до этого множества, можно сказать, что оператор в (2.1) осуществляет взаимно однозначное отображение фазовой плоскости в себя. Если фазовая кривая для $t=(-\infty, \infty)$ размещается в неограниченной области фазового пространства, движение называется *инфинитным*, если в конечной области – *финитным* (рис. 2.1).



Рис. 2.1. Схемы инфинитного (а) и финитного (б) движения в фазовом пространстве

Важной характеристикой физических систем является существование у них определенных свойств симметрии движения. Отражением этих

свойств являются *физические инварианты движения, то есть величины, не изменяющиеся со временем.*

Одним из примеров инварианта может быть *фазовый объем* (совокупность состояний в фиксированный момент времени). Рассмотрим в фазовом пространстве некоторую конечную область и множество всех

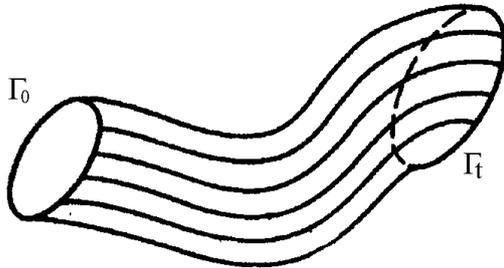


Рис. 2.2. Схема перемещения фазового объема

точек этой области как начальные условия (рис. 2.2.) Область Γ_0 можно рассматривать как совокупность начальных точек некоторого набора фазовых траекторий, то есть, как некую каплю «фазовой жидкости». С течением

времени фазовая жидкость перемещается вследствие фазового потока (2.1) или (2.2), и фазовая капля к моменту времени t занимает фазовый объем Γ_t (рис. 2.2). Если фазовый объем в результате движения сохраняется, то $\Gamma_0 = \Gamma_t$ или:

$$\Gamma_t = \text{const} \equiv \text{inv.} \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) имеет простой физический смысл. Сопоставим каждой фазовой точке, входящей в объем Γ_t , некоторую частицу. Тогда величина Γ_t определяет число частиц в фазовом объеме Γ_t а формула (2.4) выражает закон сохранения числа частиц.

Класс динамических систем, для которых имеет место сохранение фазового объема, называют гамильтоновыми. Для них уравнения движения задаются с помощью некоторой функции $H = H(p, q, t)$, называемой гамильтонианом или функцией Гамильтона. Они имеют следующий вид:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (2.5)$$

то есть, функции Q и P в уравнениях (2.2) обладают свойством:

$$\text{div} \mathbf{J} \equiv \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial p} = 0, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{J} = (\dot{q}, \dot{p})$ – вектор тока фазовой жидкости. Уравнение (2.6) выражает свойство несжимаемости фазовой жидкости.

Теорема Лиувилля: Если для функций Q и P имеет место соотношение (2.6), то:

$$\hat{T} \Gamma_0 = \Gamma_0 \quad (2.7)$$

Теорема Лиувилля определяет главный инвариант фазового пространства – фазовый объем – и связывает с ним гамильтоновский характер системы.

Эта связь, однако, действует только в одном направлении: существуют и негамильтоновы динамические системы, сохраняющие фазовый объем, например система, описываемая одним уравнением $\dot{x} = 0$. В таких системах нет структурных элементов, обладающих свойством асимптотической устойчивости при $t \rightarrow \infty$ (либо аналогичным свойством при $t \rightarrow -\infty$). *Устойчивость* – это способность систем слабо менять своё состояние под действием возмущений.

Уравнение непрерывности выражает закон сохранения числа частиц в фазовом пространстве. Если рассматривать временную эволюцию не точки в фазовом пространстве, а элемента фазового объема, то по характеру деформации границы фазового объема можно судить об

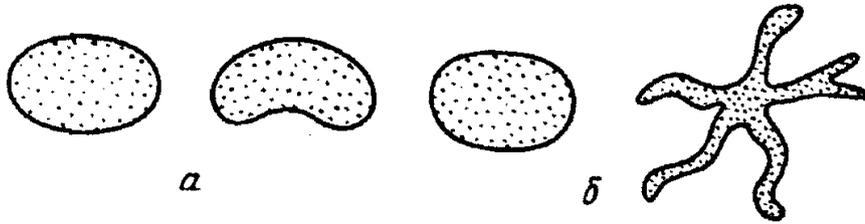


Рис. 2.3. Схема изменения элемента фазового объема при устойчивом (а) и неустойчивом (б) движении.

устойчивости или неустойчивости движения (рис. 2.3). При таком подходе используется функция распределения частиц в фазовом пространстве $f(p, q, t)$ – аналог функции распределения Максвелла для идеального газа, которая удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{\Gamma} f(p, q, t) d\Gamma = 1. \quad (2.8)$$

Уравнение непрерывности связывает функцию распределения $f(p, q, t)$ с вектором тока фазовой жидкости \mathbf{J} путем соотношения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{J}f) = 0 \quad (2.9)$$

Очевидно, что соотношение (2.9) не что иное, как дифференциальная форма закона сохранения числа частиц в фазовом пространстве.

Для гамильтоновых систем условие несжимаемости (2.6) приводит соотношение (2.9) к уравнению Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial f}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad (2.10)$$

Здесь подразумевается, что величины \dot{q} и \dot{p} выражены с помощью (2.5) как функции величин q, p, t .

Уравнение Лиувилля (2.10), так же как и уравнения движения (2.5), обратимо во времени. Среди множества возможных траекторий можно

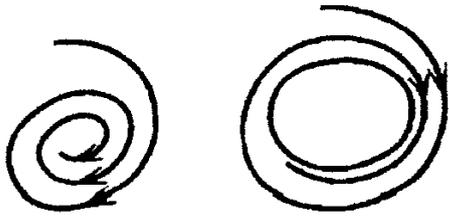


Рис. 2.4. Схемы невозможных, в соответствии с теоремой Лиувилля, траекторий

предположить существование таких, которые имеют асимптотически устойчивое положение равновесия или асимптотически устойчивый предельный цикл. Тем самым, теорема Лиувилля, исключает возможность траекторий, подобных показанным на рис. 2.4.

Совокупность всевозможных фазовых траекторий образует *фазовый портрет* динамической системы. Изучение фазовых портретов как способа геометрического представления решений обыкновенных дифференциальных уравнений было начато А. Пуанкаре в XIX веке. Поясним понятие фазового портрета на примере систем с одной степенью свободы, относящихся к числу простейших систем. Пусть гамильтониан системы имеет форму:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(q), \quad (2.11)$$

то есть, не зависит от времени, тогда энергия системы $E=H(p, q)$ является интегралом движения ($E = \text{inv}$). Это позволяет в одномерном случае ($N=1$) записать:

$$p = m\dot{q} = - \pm \sqrt{2m(E - V(q))}, \quad (2.12)$$

и, проинтегрировав (2.12), найти траекторию: $q = q(t; q_0, p_0) = q(t; q_0, E)$, где $E = H(p_0, q_0)$.

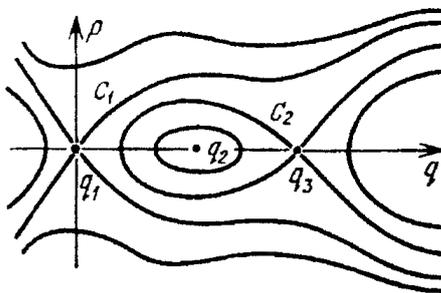
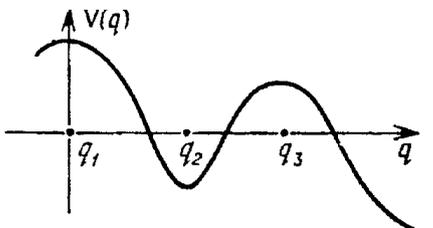


Рис. 2.5. Потенциал $V(q)$ и фазовый портрет простейшей системы; C_1 и C_2 – сепаратрисы.

Качественный анализ возможных видов траекторий системы можно, однако, произвести, не интегрируя выражения (2.12), а воспользовавшись наличием инварианта E . В зависимости от структуры потенциала $V(q)$ имеются «захваченные» в потенциальную яму траектории частиц и «пролетные» траектории. Захваченным траекториям соответствует финитное движение (периодические колебания), пролетным соответствует инфинитное движение. Различные типы траекторий разделяются на фазовой плоскости особыми кривыми, называемыми сепаратрисами (C_1 и C_2 , рис. 2.5).

Уравнения движения (2.5), учитывая (2.11), можно записать в виде:

$$\dot{p} = -\frac{dV}{dq}; \quad \dot{q} = \frac{p}{m} \quad (2.13)$$

Состояние равновесия находится из условий:

$$\dot{p} = \dot{q} = 0, p_e = 0, \quad \frac{dV(q_e)}{dq} = 0. \quad (2.14)$$

Это означает, что в положениях равновесия скорость равна нулю, а потенциал имеет экстремум (точки q_1, q_2 и q_3 на рис. 2.5).

Исследование траекторий системы в окрестности положений равновесия можно исследовать следующим образом.

Уравнение траекторий на фазовой плоскости $p=p(q)$ выражается формулой (2.12). Если разложим ее левую и правую части в окрестности положения равновесия (p_e, q_e) , то, в соответствии с (2.14) получим:

$$p - p_e = \pm(2m)^{1/2}[E - E_e - (1/2)V''(q_e)(q - q_e)^2]^{1/2} \quad (2.15)$$

где $E_e=H(p_e, q_e)$ – значение энергии в точке равновесия. Удобно переписать (2.15) в виде:

$$(p - p_e)^2 - mV''(q_e)(q - q_e)^2 = 2m(E - E_e) \quad (2.16)$$

Рассмотрим случай $V'' < 0$ (потенциальный горб). Через точку (p_e, q_e)

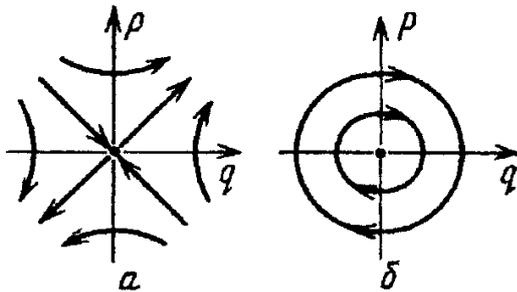
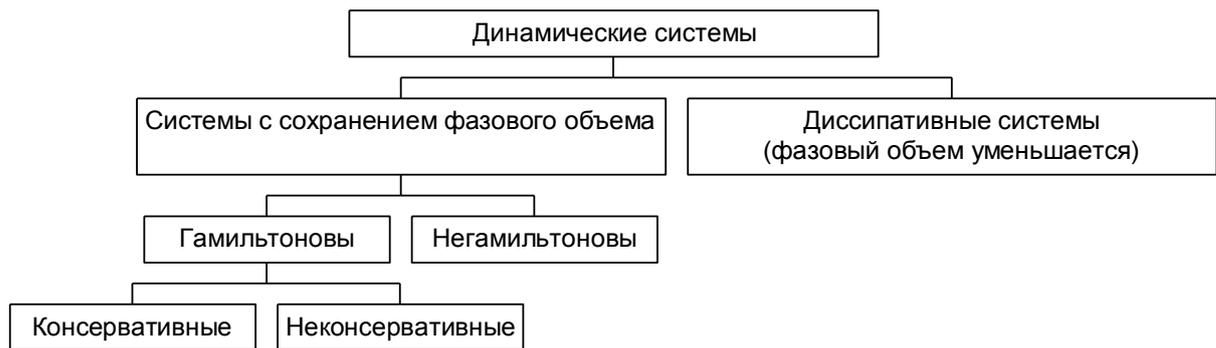


Рис. 2.6. Фазовые траектории в окрестности гиперболической (а) и эллиптической (б) точек

проходят две прямые. Эти прямые являются частями сепаратрисы и соответствуют траектории с $E=E_e$. Семейство траекторий имеет вид гипербол (рис. 2.6, а). Точка пересечения траекторий – прямых (p_e, q_e) называется *гиперболической точкой* или *седлом*. Очевидно, что движение в окрестности седла неустойчиво. Такими гиперболическими точками на рис. 2.5 являются точки q_1 и q_3 . При $V'' > 0$ точка (p_s, q_s) в центре окружностей (рис. 2.6, б) называется *эллиптической*, так как в ее окрестности семейство траекторий, согласно (2.16), имеет вид эллипсов (окружность – частный случай эллипса), причем всегда $E > E_s$. В определенном смысле движение в окрестности эллиптической точки устойчиво. Точка q_2 на рис. 2.5 является эллиптической. Траектория, проходящая в достаточно малой окрестности эллиптической точки, совершает всегда финитное движение.

2.2.2. Консервативные и диссипативные динамические системы.

Все динамические системы делят на два класса (см. схему ниже): системы, в которых фазовый объем сохраняется и в которых фазовый объем со временем уменьшается. Последние принято называть диссипативными системами. Системы с сохраняющимся фазовым объемом делятся, в свою очередь, на гамильтоновы и негамильтоновы. Если гамильтониан системы не зависит от времени (выполняется закон сохранения энергии), их называют консервативными системами.



Идея консервативности (от лат. *conservo* – сохраняю) мира была высказана еще древнегреческими мыслителями как умозраительное гипотетическое обобщение наблюдений над природой и практикой. Эта идея была обоснована теоретически и экспериментально во времена Галилея, Ньютона, Декарта и Лейбница, став следствием ряда механических законов и их опытной проверки. *Характерным для консервативной системы является ее замкнутость (изоляция от внешнего мира) и постоянство (сохранение) ряда величин.* В случае механической системы сохраняются следующие величины:

1. Полная энергия: $E = \text{кинетическая энергия} + \text{потенциальная энергия} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 + \sum_{i \neq j} V_{ij}$, где $m_i v_i$ – масса и скорость материальной точки i , V_{ij}

– потенциальная энергия взаимодействия точек i и j .

2. Полное количество движения: $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$

3. Полный момент количества движения: $\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \mathbf{v}_i$

Классическая механика изучала консервативные механические системы и предполагала обратимость во времени процессов, протекающих в таких системах. Это означает, что наблюдая обратное во времени движение ($t' = -t$) можно убедиться в справедливости тех же свойств, которые установлены для положительного направления времени. Например,

движение материальных точек происходит по тем же траекториям, но в обратном направлении. Все консервативные системы являются гамильтоновыми. Обратное, как уже отмечалось, неверно.

Наиболее простым примером консервативной системы является колеблющийся маятник, изучая который можно убедиться в существовании перечисленных законов сохранения, если только пренебречь трением в оси подвеса и сопротивлением воздуха. Примером консервативной системы может служить также солнечная система.

Однако исследования двух последних веков показали, что понятие консервативной системы, вообще говоря, является абстракцией, поскольку в любой реальной системе всегда существуют силы, приводящие к необратимым процессам, например, трение. Поэтому все реальные системы являются диссипативными. К *диссипативным* относят динамические системы, в которых энергия упорядоченного процесса со временем переходит в энергию неупорядоченного процесса, в конечном счете – в тепловую.

Диссипативные системы обладают следующими общими свойствами:

- для них характерно выделенное направление времени,
- они не инвариантны относительно обращения времени,
- они не сохраняют объем фазового пространства,
- все диссипативные процессы приводят к положительному производству энтропии.

В случае *замкнутых диссипативных систем* энтропия системы непрерывно возрастает. Именно рост энтропии устанавливает направление протекания процесса, «стрелу времени». *Диссипация энергии в открытой системе*, обусловленная процессами выхода энергии из системы, например, в виде излучения, может приводить к уменьшению энтропии рассматриваемой системы при увеличении полной энтропии системы и окружающей среды.

У диссипативных систем с неограниченным фазовым пространством часто существует ограниченная область в нём (аттрактор), куда попадает со временем любая фазовая траектория.

В XIX веке представления о консервативных и диссипативных системах привели к конфликту между науками. Так, в физике необратимость и диссипация связывались с деградацией систем, тогда как биологическая эволюция (также необратимый процесс) ассоциировалась не с деградацией, а с совершенствованием и развитием.

Для описания диссипативных систем используются нелинейные математические уравнения, т.е. уравнения, в которых искомые величины входят в состав математических функций (тригонометрических, логарифмических и т.п.) в степенях больше единицы или коэффициенты уравнений зависят от свойств среды и особенностей протекания процесса.

Нелинейные уравнения могут иметь несколько качественно различных решений. Физически это означает *возможность различных путей эволюции системы*.

Только в диссипативных и при этом открытых и неравновесных системах при определенных условиях могут возникать новые структуры, например, ячейки Бенара, страты в плазме и многое другое, о чем речь пойдет ниже.

2.3. Простое и сложное поведение динамических систем. Понятие об аттракторах. Типы аттракторов.

Понятие простого и сложного временного поведения динамических систем поясним с помощью рис. 2.7, на котором изображены схемы трех возможных областей притяжения фазовых траекторий. Если фазовое пространство двумерно (плоскость или ее часть), то можно показать саму траекторию, если нет – то ее двумерную проекцию. Возможны самопересечения *проекций* траектории, хотя сами фазовые траектории пересекаться не могут. Это следует из теоремы о единственности решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Если бы из одной



Рис. 2.7. При различных начальных данных решение дифференциальных уравнений выходит на области притяжения различных типов. На рисунке 1 – область притяжения неподвижной точки; 2 – цикла; 3 – более сложного аттрактора.

точки выходили две различные траектории, то это означало бы множественность решений системы уравнений, определяющих динамическую систему. Дальнейшее движение системы в окрестности такой точки не определено. Если же условия теоремы единственности нарушаются, то такая ситуация может возникнуть. Например: уравнение $\dot{x} = f(x) = x^{1/3}$, $x(0)=0$, имеет два решения, $x(t)=0$ и $x(t)=(2t/3)^{3/2}$, однако $f(x)$ в точке $x=0$ не дифференцируема и условия теоремы единственности нарушены.

Особые или неподвижные точки x^* системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$ (т.е. такие точки, в которых $f(x^*)=0$) не являются исключением. Функция $x(t)=x^*$ является решением, а другие траектории обычно бесконечно долго стремятся к этой точке. Так, в уравнении $\dot{x} = -x$, $x(0)=x_0$, неподвижная точка $x^*=0$, решение $x(t) = x_0 e^{-t}$, $\lim x(t) = 0$,

однако ни в какой конечный момент времени T функция $x(T) \neq 0$. В уравнении $\dot{x} = x$, $x(0) = x_0$, напротив, траектории могут покинуть окрестность особой точки за сколь угодно большое время.

Отметим, что поведение динамической системы вблизи особых точек, как правило, проще, чем поведение при произвольно взятых начальных данных. На рисунке (рис. 2.7) это выглядит таким образом, что с течением времени траектории, выходящие из различных начальных точек, стремятся собраться в некоторых выделенных, сравнительно небольших областях фазового пространства, которые затем уже не покидают.

Точку или некоторое множество точек в фазовом пространстве, к которому стремятся фазовые траектории динамической системы с течением времени называют *аттрактором* (от англ. to attract – притягивать, привлекать). При этом, каковы бы не были начальные значения переменных системы, по мере развития динамического процесса, они будут стремиться к одним и тем же значениям или множествам значений – аттракторам. То есть, аттракторы – это геометрические структуры, характеризующие поведение системы в фазовом пространстве по прошествии длительного времени.

Область, откуда траектории стремятся к *аттрактору*, называют *областью притяжения аттрактора* или *бассейном притяжения*.

Таким образом, поведение динамической системы можно разделить на два этапа: *переходное поведение*, пока траектория стремится к аттрактору, и *асимптотическое*, когда траектория находится на самом аттракторе или настолько близко к нему, что расстоянием можно пренебречь. Поскольку переходное поведение временно, а асимптотическое длится бесконечно долго, внимание исследователей обычно сосредоточено именно на последнем. Отметим, что данное описание относится к *диссипативным* системам. У *консервативных* систем нет деления на переходное и асимптотическое поведение, судьба системы при этом определяется начальными данными.

Если в фазовом пространстве имеется несколько аттракторов, то их области притяжения разделены неустойчивыми множествами точек, называемых *репеллерами*, от которых все или почти все соседние фазовые траектории отталкиваются (см. области между аттракторами на рис. 2.7).

Поведение динамических систем можно описать математически либо как непрерывное изменение состояния при непрерывном течении времени, либо как дискретные изменения в дискретные моменты времени. В первом случае математическая модель является системой обыкновенных дифференциальных уравнений или *поток*, во втором – *отображением* или *каскадом*. Простота и сложность временного поведения у них оказывается похожей, однако отображения, порождающие качественно

похожее поведение, оказываются проще потоков, поэтому некоторые эффекты предпочтительнее исследовать именно для отображений.

Для потоков простейшим видом асимптотического поведения является отсутствие всяких временных изменений. В фазовом пространстве при этом существует точка, называемая неподвижной точкой, которой и отвечает данный тип поведения (рис. 2.8). Чтобы быть аттрактором, она должна быть устойчивой, что показано при помощи траектории, стремящейся к ней.

Более сложным является периодический режим, которому отвечает предельный цикл (рис. 2.9). Простому поведению отвечают простые модели: устойчивая неподвижная точка может описываться всего одним уравнением, к примеру: $\dot{x} = -x$. Предельный цикл требует уже двух уравнений, например: $\dot{z} = (i\omega + a - |z|^2)z$, $z = x + iy$ (здесь при $a < 0$

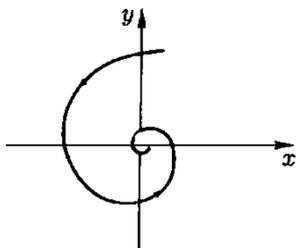


Рис. 2.8. Неподвижная точка.

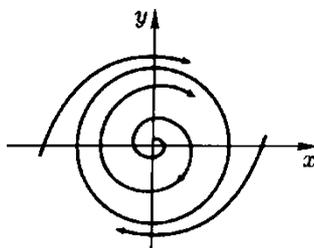


Рис. 2.9. Периодический режим.

реализуется устойчивая неподвижная точка, при $a > 0$ – предельный цикл).

Следующий шаг усложнения – квазипериодические колебания, когда в системе наблюдаются две частоты ω_1 и ω_2 причем их отношение ω_1/ω_2 – иррациональное число. Эта

ситуация реализуется только если размерность фазового пространства не меньше трех (модель должна включать не менее трех уравнений). Асимптотическое поведение соответствует заполнению траекторией поверхности *двумерного тора*, поэтому данный режим иногда для краткости называют просто 2-тор (рис. 2.10).

Простейшими примерами аттракторов являются: устойчивая особая точка, устойчивый периодический режим и устойчивый тор. *Простейшими примерами репеллеров* являются неустойчивая особая точка, неустойчивый периодический режим и неустойчивый тор. Но они могут быть и более сложными.

В системах с размерностью фазового пространстве не меньше трех могут возникать более *сложные непериодические режимы* поведения и соответствующие им так называемые *странные аттракторы*.

Степень сложности аттрактора и поведения системы может нарастать в двух направлениях.

Во-первых, может увеличиваться число независимых частот, и траектория может регулярно заполнять 3-тор, 4-тор и т.д. Во-вторых, может возникнуть режим, получивший название *динамического хаоса* (рис. 2.11), который описывается *странным аттрактором*. На вид режим не

является строго детерминированным, хотя и совершенно случайным его не назовешь. Траектория в этом случае никакой гладкой гиперповерхности в

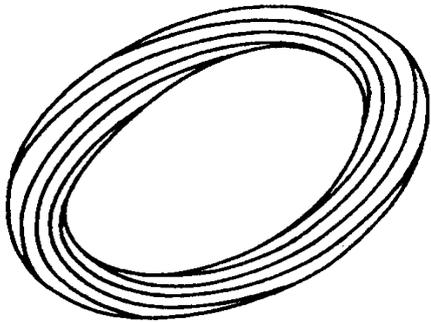


Рис.2.10. Двухчастотный режим (тор)



Рис. 2.11. Аттрактор динамического хаоса

фазовом пространстве не заполняет, аттрактор оказывается как бы «дырявым», в отличие от тора. Сложность хаотических режимов тоже может быть различной.

Похожим образом анализируется и сложность асимптотических режимов для динамических систем с *дискретным временем отображений*. Обычно их записывают в виде итерационного процесса – в виде формулы, определяющей, как следующее состояние определяется по предыдущему, $x_{n+1}=f(x_n)$. Здесь также существуют неподвижные точки $x^*=f(x^*)$ и циклы $x_2=f(x_1)$, ..., $x_m=f(x_{m+1})$, $x_1=f(x_m)$. Тору отвечает неперiodическое поведение, при котором точки регулярно заполняют одномерную кривую. Например, отображение окружности в себя $\varphi_{n+1}=\varphi_n+\alpha$, ($2\pi/\alpha$ иррациональное число) (рис. 2.12).

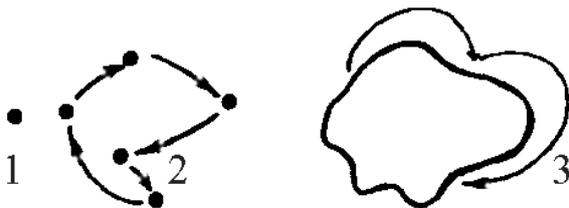


Рис. 2.12. Неподвижная точка (1), цикл (2) и аналог тора (3) в отображениях.

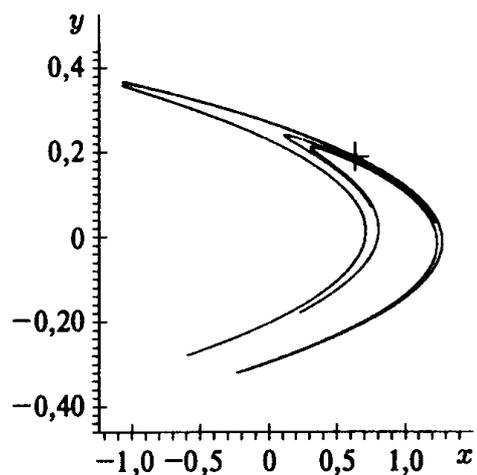


Рис. 2.13. Аттрактор Хенона. Крестиком показана одна из двух неподвижных точек.

Существуют и в этом случае хаотические режимы: если от f потребовать обратимости, то такие режимы возникают в пространстве размерности больше единицы, например: показанный на рис. 2.13. аттрактор Хенона:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} &= bx_n \\ a &= 1,4, \quad b = 0,3, \end{aligned} \quad (2.17)$$

Если от f не требовать обратимости, т.е. допускать отображение нескольких точек в одну, то хаос возможен даже в одномерном случае.

2.3.1. Понятие о фракталах. Фрактальная структура аттракторов. Закономерности хаотических режимов

Хаотические режимы обладают многими интересными закономерностями. Отметим здесь наиболее важные из них.

Во-первых, часто на асимптотической стадии фазовая траектория притягивается к множеству (аттрактору), которое обладает *фрактальной структурой*, то есть, является *фракталом* (подробно о фракталах см. разд. 3.7). Простейший и широко известный пример фрактала – канторово множество, схема построения которого приведена на рис. 2.14. (Из сплошного

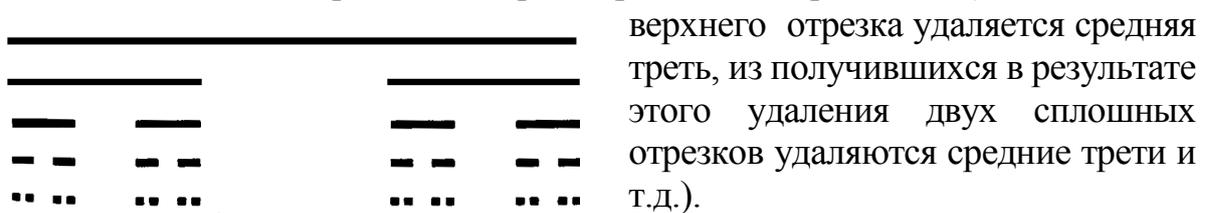


Рис. 2.14. Схема построения канторова множества (первые пять шагов).

верхнего отрезка удаляется средняя треть, из получившихся в результате этого удаления двух сплошных отрезков удаляются средние трети и т.д.). Отличительной чертой, присущей фракталам, является самоподобие – любая увеличенная часть такого множества оказывается подобна целому множеству. На рис. 2.15 показаны увеличенные детали (квадратиками выделены части, показанные в увеличенном масштабе на последующих рисунках в порядке: левый верхний – левый нижний – правый верхний – правый нижний) аттрактора Хенона (рис. 2.13). Видно, что самоподобие действительно имеет место при сравнении первой стадии увеличения с исходным графиком и после третьей стадии далее на последующих. *Аттракторы, имеющие фрактальную структуру, называют странными.* (Другое определение странного аттрактора см. разд. 2.4.).

Во-вторых, движение обычно оказывается локально неустойчивым: любые близкие траектории расходятся, не покидая при этом аттрактора. Движение оказывается неустойчивым по Ляпунову, в отличие от циклов и торов, где оно устойчиво (напомним, что решение $x(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого ε найдется δ , такое что для любо-

го решения $\tilde{x}(t)$, такого что $|\tilde{x}(0) - x(0)| < \delta$, $|\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon$, при $t > 0$; если к тому же $|\tilde{x}(0) - x(0)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то решение называют асимптотически устойчивым). Расстояние l между траекториями при малых l в среднем обычно экспоненциально увеличивается, $l \sim \exp(\lambda t)$, где $\lambda > 0$ называется старшим *показателем Ляпунова* (на самом деле показателей несколько, но самый важный среди них – наибольший). Чем больше λ , тем более хаотичным выглядит

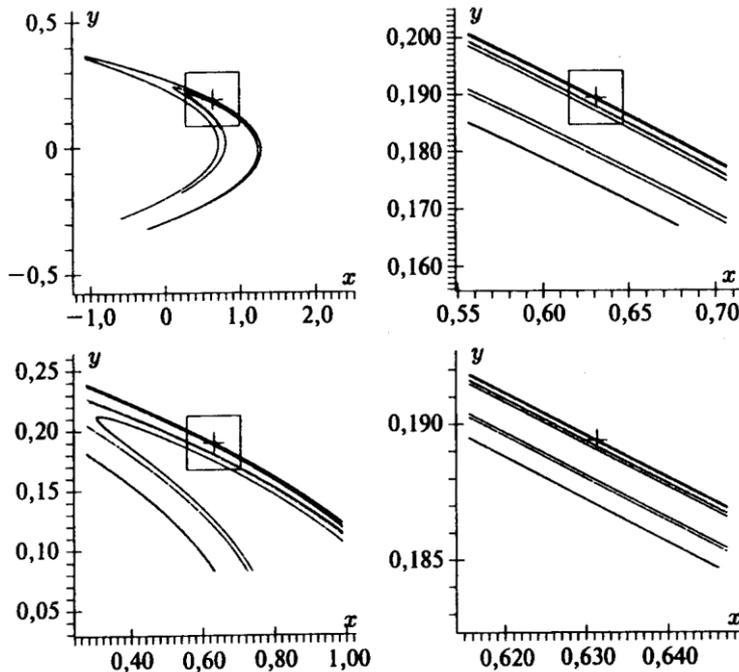


Рис.2.15. Пояснение фрактальной структуры аттрактора Хенона.

движение. На рис. 2.16 приведена зависимость расстояния между двумя траекториями отображения Хенона, первоначально очень близкими. Точками на рисунке показано изменение расстояния r между двумя первоначально очень близкими траекториями ($r=10^{-5}$) в начальный момент. Сплошная линия показывает эволюцию бесконечно близкой траектории (нормировка выбрана так, чтобы на первых

итерациях она совпадала с предыдущим случаем). Штриховая линия показывает среднюю скорость расходимости бесконечно близких траекторий $r=r_0 \exp(\lambda t)$, где $\lambda=0,418\dots$ – старший показатель Ляпунова, время изменяется дискретно, $t=n$.

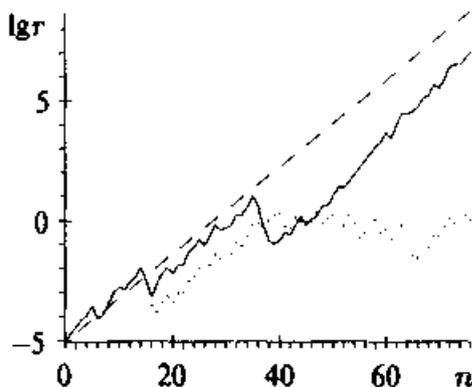


Рис. 2.16. Расходимость близких траекторий для аттрактора Хенона.

Аттракторы, динамика которых характеризуется положительным показателем Ляпунова, называют *хаотическими*.

В-третьих, если в качестве начальных данных взять не точку, а некоторый, пусть очень малый, объем в фазовом пространстве, то с течением времени система начнет этот маленький объем «каплю», размазывать по всему аттрактору, и возникает эффект *перемешивания*. Таким образом, если в

начальный момент времени мы знали состояние системы достаточно точно, с малой ошибкой, то со временем ошибка начнет нарастать, и спустя некоторое время, зависящее от скорости перемешивания (заметим, что скорость перемешивания обычно не связана каким-либо простым образом с величинами показателей Ляпунова), окажется, что о состоянии системы можно сказать лишь то, что оно «где-то на аттракторе». На больших временах характеризовать систему можно, только указав вероятность появления траектории в окрестности некоторой точки. Таким образом, мы приходим к вероятностному описанию динамического хаоса, к понятиям *инвариантной меры* и *энтропии* – степени хаотичности системы. Аттракторы, обладающие свойством перемешивания, часто называют *перемешивающими* или *стохастическими аттракторами*. Однако доказать или проверить свойство перемешивания обычно очень трудно. Тем не менее, в большинстве случаев хаотичность влечет за собой и стохастичность аттрактора.

Странные аттракторы можно разделить на *стохастические* и *хаотические*, в зависимости от того, отражают ли они стохастическое или хаотическое поведение системы. *Стохастические аттракторы* состоят из конечного или бесконечного числа седловых циклов и неустойчивых многообразий. *Хаотические аттракторы* состоят как из седловых циклов, так и из устойчивых циклов с малыми областями притяжения. В стохастическом аттракторе все фазовые траектории являются экспоненциально неустойчивыми. А в хаотическом аттракторе должна быть хотя бы одна устойчивая траектория.

Аттрактор Хенона является странным и хаотическим. Однако, это верно не для всех странных аттракторов. Существуют *странные нехаотические аттракторы*, простейшим примером которых служит инвариантное множество в так называемом логистическом отображении: $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$, x_n принадлежит интервалу $[0,1]$; при некотором $a=a_\infty$ оно имеет фрактальную структуру, но показатель Ляпунова $\lambda=0$. Бывает и наоборот, при $a=4$, $\lambda=1n2 \approx 0,693\dots$, в то время как инвариантное множество – это весь отрезок $[0,1]$ и у него нет фрактальной структуры, получаем, что хаотичность не влечет странности. Заметим, что эти ситуации в некотором смысле нетипичные.

2.3.2. Странный аттрактор Лоренца.

В диссипативных системах при стремлении траектории к аттрактору происходит сжатие фазового объёма. Фазовый объем сжимается: а) в точку, если аттрактор – узел или фокус; б) в замкнутую траекторию, соответствующую устойчивому периодическому движению, если аттрактор – предельный цикл; в) в тор, соответствующий устойчивому квазипериодическому движению, если аттрактор – двумерный тор. В трёхмерном фазовом пространстве существуют ещё и непериодические

аттракторы. Это, отличные от стационарной точки, предельного цикла и двумерного тора, так называемые *странные аттракторы*. При стремлении системы к странному аттрактору также происходит сжатие фазового объёма, приводящее к тому, что фазовые траектории с течением времени стягиваются к предельному множеству и, попав в область, занятую таким аттрактором, остаются в ней навсегда. Однако на самом аттракторе движение является неустойчивым. Иначе говоря, *поведение системы со странным аттрактором характеризуется сочетанием глобального сжатия фазового объёма с локальной неустойчивостью фазовых траекторий*. Фазовые траектории странного аттрактора очень чувствительны к начальным данным. Сочетание сильной зависимости от начальных данных с приближённым их значением обуславливает невозможность точных долговременных прогнозов относительно эволюции систем со странным аттрактором и существование так называемого *горизонта прогноза* – характерного времени, в течение которого может быть предсказано поведение системы.

Одной из таких систем, поведение которой описывается странным аттрактором, является атмосфера Земли. В 1963 году метеоролог Э. Лоренц, моделируя динамику атмосферы, получил нелинейную систему уравнений с тремя переменными, сохраняющую много характерных особенностей исходной системы. Эту модель рассмотрим здесь более подробно, так как она оказалась первым наглядным примером трёхмерной системы, обладающей странным аттрактором.

Из анализа именно этой системы Лоренц сделал вывод о существовании горизонта прогноза для систем, которые описываются с помощью странных аттракторов и, следовательно, о невозможности долговременного предсказания погоды. В метеорологии, как выяснилось в дальнейшем, горизонт прогноза не может превышать 2-3-х недель. И он не зависит от возможностей используемых компьютеров, с помощью которых ведется обработка данных, а имеет принципиальный характер.

Система уравнений Лоренца — это трехмерная система нелинейных автономных дифференциальных уравнений первого порядка, полученных путем упрощения сложных дифференциальных уравнений, описывающих формирование неустойчивости Бенара (см. ячейки Бенара, разд. 3.1.1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 + r x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - b x_3. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Здесь σ , b – безразмерные константы, r – управляющий параметр, пропорциональный разности температур ΔT в случае неустойчивости Бенара. В результате численного интегрирования системы (2.18) Э. Лоренц

обнаружил, что при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 28$ у этой динамической системы, с одной стороны, наблюдается хаотическое, нерегулярное поведение всех траекторий (рис. 2.17), а, с другой стороны, все траектории при $t \rightarrow +\infty$ притягиваются к *аттрактору*. Такое поведение решений ассоциируется с так называемыми *турбулентными* (беспорядочными, хаотическими) *течениями жидкости*.

Попытаемся описать имеющиеся представления о появлении и структуре аттрактора в системе Лоренца. Зафиксируем в (2.18) значения $\sigma=10$, $b=8/3$ и будем увеличивать r , начиная с нуля. При $r < 1$ система Лоренца имеет асимптотически устойчивую в целом стационарную точку

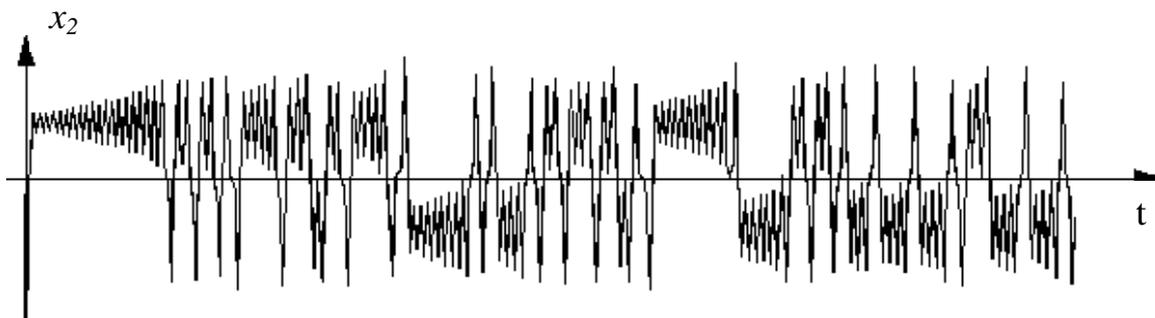


Рис. 2.17. Зависимость координаты x_2 одной из траекторий от времени.

– начало координат. К ней притягиваются все траектории (рис. 2.18). Отметим, что начальная стадия проводимого здесь анализа (вплоть до рис. 2.20) элементарна и студенты могут проделать ее сами. Когда r переваливает через единицу, происходит первая бифуркация. Начало координат теряет устойчивость и от него отделяются две новые устойчивые стационарные точки:

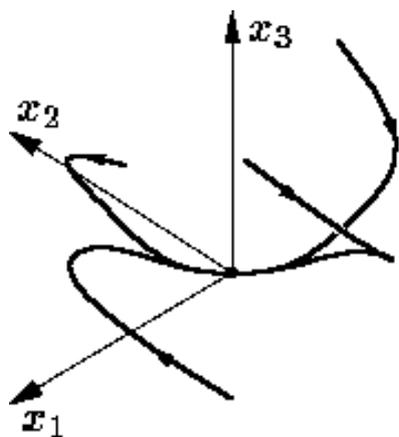


Рис. 2.18. Асимптотически устойчивая точка в системе Лоренца при $r < 1$.

$$X_1 = (\sqrt{b}(r - 1), \sqrt{b}(r - 1), r - 1)$$

и

$$X_2 = (-\sqrt{b}(r - 1), -\sqrt{b}(r - 1), r - 1)$$

У линеаризованной в нулевой стационарной точке системы существует два отрицательных и одно положительное собственное значение. В соответствии с этим у нулевой стационарной точки есть двумерный входящий ус и одномерный выходящий (рис. 2.19). У линеаризованных в точках

X_1 и X_2 систем все собственные значения отрицательны.

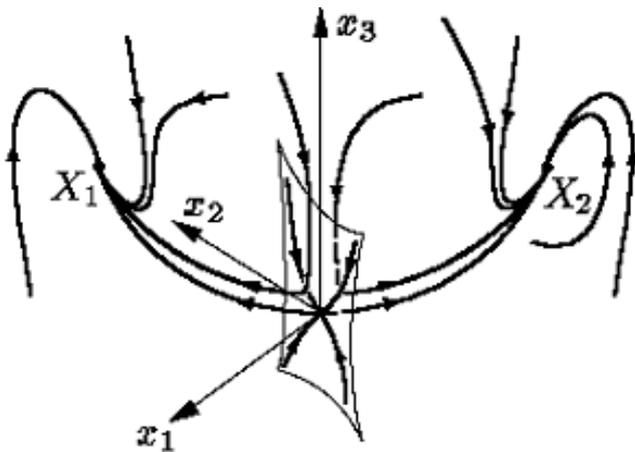


Рис. 2.19. Нулевая стационарная точка с двумерным **входящим** и одномерным **выходящим** «усами».

При возрастании параметра r пара отрицательных собственных значений этих систем превращается в пару комплексно сопряженных собственных значений. Это, в частности, соответствует тому, что выходящие усы G_1 и G_2 нулевой стационарной точки начинают закручиваться как спирали около стационарных точек X_1 и X_2 , соответственно (рис. 2.20).

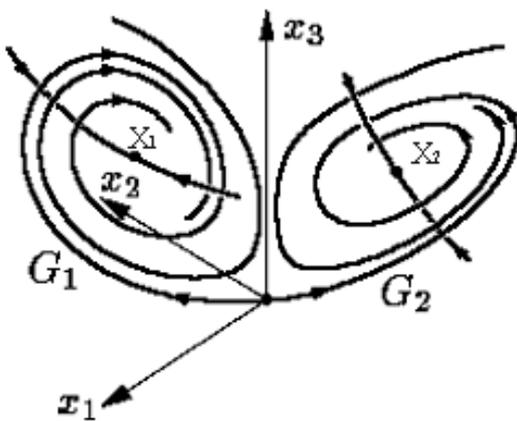


Рис. 2.20. Закручивание траекторий около стационарных точек, $r < 13.9$.

С дальнейшим ростом r стационарные точки X_1 и X_2 поднимаются выше (они лежат в плоскости $x_3 = (r-1)$), а спиралевидные траектории расширяются (см. рис. 2.21). Это происходит до тех пор, пока при $r \approx 13.92$ (это значение можно найти только численно) спирали, начинающиеся как выходящие усы нуля, попадают на его входящий ус, образуя две гомоклинические траектории Γ_1 и Γ_2 (рис. 2.21). При возрастании r в этот момент происходит бифуркация траекторий с образованием двух неустойчивых циклов Φ_1 и Φ_2 (рис. 2.22). Линейные части операторов последования, отвечающих этим циклам, имеют по одному мультипликатору большему единицы и по одному – меньшему единицы, и следовательно, по одному направлению траектории к этим циклам притягиваются, а по другому – отталкиваются.

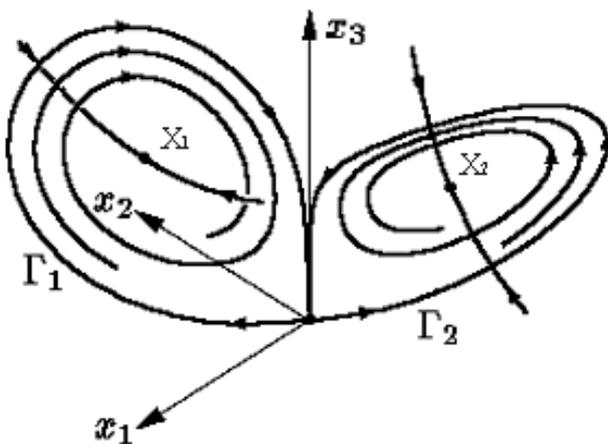


Рис. 2.21. Гомоциклические траектории системы Лоренца при $r \approx 13.92$

Выходящие усы G_1 и G_2 нулевой стационарной точки теперь уже не попадают на ее входящий ус (рис. 2.22) – они попадают в области притяжения стационарных точек X_2 и X_1 , соответственно (а не X_1 и X_2 , как было раньше) и закручиваются около них.

При $r \approx 24.06$ происходит очередная бифуркация и G_1 и G_2 попадают на притягивающие многообразия (неустойчивых) циклов Φ_2 и Φ_1 . Следующая

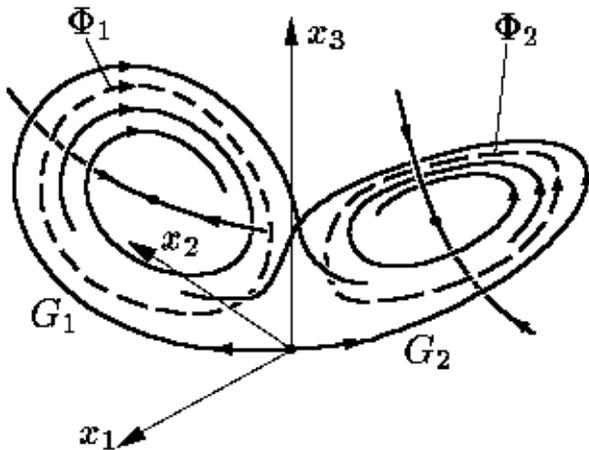


Рис. 2.22. Закручивание траекторий около стационарных точек, $r > 13.9$.

бифуркация происходит при $r = r_0 = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{(\sigma-b-1)} \approx 24.74$. В этот момент у линеаризованных в точках X_1 и X_2 систем появляется пара собственных значений на мнимой оси (при $r > r_0$ эти собственные значения имеют положительные вещественные части). Стационарные точки X_1 и X_2 поглощают неустойчивые циклы Φ_1 и Φ_2 , теряя устойчивость (бифуркация Пуанкаре – Андронова – Хопфа). Система жестко возбуждается.

Во время описанного процесса, начиная с $r = 13.92$ у системы Лоренца появляется предельное инвариантное множество (Λ), но до $r = r_0$ оно не является устойчивым, т. е. не притягивает к себе траектории. При $r \in [r_0, 50]$ это множество становится «устойчивым». Это и есть собственно аттрактор Лоренца.

Представление о том, как он выглядит может дать рис. 2.23, на котором изображена одна траектория системы Лоренца при $r = 28$: при $t \rightarrow +\infty$ она

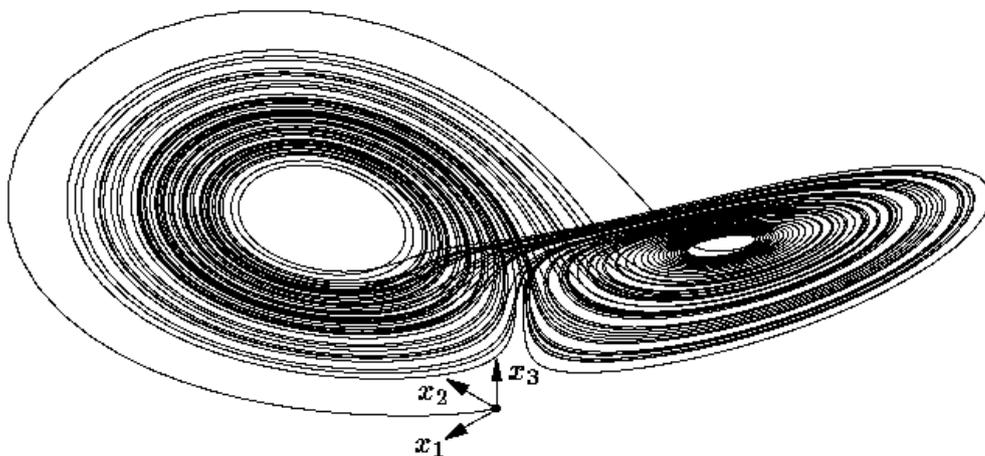


Рис. 2.23. Изображение одной траектории системы Лоренца при $r = 28$

стремится к аттрактору. Траектория делает по несколько оборотов то вокруг неустойчивой стационарной точки X_1 , то вокруг неустойчивой стационарной точки X_2 , меняя их «случайным образом». Известно, что аттрактор Лоренца обладает следующими свойствами (обоснование этих свойств к настоящему моменту содержит эмпирические этапы, основанные на результатах численных расчетов).

Во-первых, множество Λ является *аттрактором* в том смысле, что существует открытое в трехмерном фазовом пространстве (\mathbb{R}^3) множество A такое, что $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} g^t A$ (здесь g^t – оператор сдвига по траекториям системы Лоренца, \bigcap – математический знак, обозначающий пересечение). Другими словами, все траектории, начинающиеся в A (в данном случае в качестве A можно взять все \mathbb{R}^3 , исключая начало координат), притягиваются к Λ .

Во-вторых, в Λ имеется всюду плотное множество периодических траекторий, причем каждая из них неустойчива.

В-третьих, траектории, лежащие в Λ , экспоненциально расходятся («разбегаются») и поэтому при сколь угодно малом возмущении начальных данных в задаче Коши для системы Лоренца решения на большом интервале времени могут различаться очень сильно. Это свойство называют, также, чувствительной зависимостью от начальных условий.

Мерой расходимости траекторий на аттракторе являются показатели (или числа) Ляпунова (λ_i). Вычисление показателей Ляпунова возможно, в принципе для любой динамической системы, но представляет собой довольно сложную математическую задачу и требует численного моделирования. В спектре аттрактора N -мерной динамической системы существует N показателей Ляпунова. Обычно показатели Ляпунова для определенного аттрактора располагают в порядке убывания и указывают только их знак (+, -) или 0. Например, символы (+, 0, -) означают, что у некоторого аттрактора в трехмерном фазовом пространстве, в среднем, вдоль одного направления происходит экспоненциальное растяжение, вдоль другого – поток обладает нейтральной устойчивостью, вдоль третьего – траектории претерпевают экспоненциальное сжатие. Основываясь на сказанном можно идентифицировать аттракторы по знакам показателей Ляпунова (табл. 1)

Таблица 1. Идентификация аттракторов по знакам показателей Ляпунова

Тип аттрактора	Знаки показателей Ляпунова
Неподвижная точка	-, -, -
Предельный цикл	0, -, -
Тор2	0, 0, -
Странный аттрактор	+, 0, -

2.4. Бифуркации и их классификация

Основы математической теории бифуркаций были созданы А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым в начале XX века, а затем развиты А.А. Андроновым и его школой, Э. Хопфом и другими. В настоящее время она представляет собой одну из наиболее быстро развивающихся областей математики. Теория бифуркаций находит приложения в разных науках, начиная от физики и химии, заканчивая биологией и социологией.

Происхождение термина бифуркация (от лат. *bifurcus* - раздвоенный) связано с тем фактом, что динамическая система, поведение которой в равновесной области описывается системой линейных дифференциальных уравнений, имеющих единственное решение, при изменении параметров до некоторого критического значения, достигает так называемой *точки бифуркации* – точки ветвления возможных путей эволюции системы. Этот момент соответствует переходу системы в неравновесное состояние, а на уровне математического описания ему соответствует переход к нелинейным дифференциальным уравнениям и ветвление их решений.

Бифуркацией называется приобретение нового качества движения динамической системы при малом изменении ее параметров. Бифуркация соответствует перестройке характера движения или структуры реальной системы (физической, химической, биологической и т. д.). Знание основных бифуркаций позволяет упростить исследование конкретных физических систем, в частности, предсказать варианты и параметры новых движений, возникающих в точке бифуркации. Это относится как к системам с

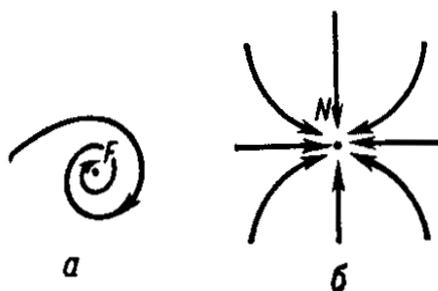


Рис. 2.24. Фазовые портреты системы $\ddot{x} + k\dot{x} + kx = 0$ при разных k : a – при $k < 2$; b – при $k > 2$.

сосредоточенными параметрами, так и к системам с распределенными параметрами.

С позиций математики, бифуркация – это смена топологической структуры разбиения фазового пространства динамической системы на траектории при малом изменении ее параметров.

Это определение опирается на понятие *топологической эквивалентности динамических систем*: две системы топологически эквивалентны, если они имеют одинаковую структуру разбиения фазового пространства на траектории, если движения одной из них могут быть сведены к движениям другой непрерывной заменой координат и времени. Примером такой эквивалентности служат движения маятника при разных величинах коэффициента трения k : при малом трении траектории на

фазовой плоскости имеют вид скручивающихся спиралей, а при большом – парабол (рис. 2.24). Эти кажущиеся, на первый взгляд, различными фазовые портреты введением новой системы координат можно свести один к другому. То есть, переход от фазового портрета рис. 2.24 *а* к рис. 2.24 *б* не представляет собой бифуркации, поскольку бифуркации – это переход от данной системы к топологически неэквивалентной.

Примером перестройки характера движения реальной системы может служить возникновение ячеек Бенара в горизонтальном слое вязкой жидкости при подогреве снизу (см. разд. 3.1). Увеличение температуры нижней поверхности вплоть до некоторой разности температур не приводит к появлению макроскопического движения жидкости; при некотором же значении $T_{кр}$ возникает ячеистая конвекция. При этом возможны два варианта конвекции (вращение конвективных валов по часовой стрелке и против нее). В математической модели возникновению таких ячеек соответствует бифуркация рождения новых состояний равновесия (соответствующих ячеистой структуре). Среди различных бифуркаций при анализе моделей физических систем особенно интересны, так называемые, локальные. Это бифуркации, при которых происходит перестройка отдельных движений динамической системы. Простейшими и наиболее важными из них являются бифуркации состояний равновесия и периодических движений.

2.4.1. Бифуркации состояний равновесия.

Основные бифуркации состояний равновесия:

1) слияние и последующее исчезновение двух состояний равновесия. Примером может служить движение шарика в потенциальной яме с «полочкой» (рис. 2.25). При сглаживании полочки (BD рис. 2.26) состояния равновесия, седло S и центр C_2 сливаются и исчезают (рис. 2.26).

2) Рождение предельного цикла из состояния равновесия. Пример такой бифуркации переход простейшего лампового генератора при соответствующем изменении управляющего напряжения от режима статических колебаний к автоколебательному режиму. В этом случае на фазовой плоскости из устойчивого фокуса в начале координат при коэффициенте затухания $\alpha \geq 0$ рождается предельный цикл, амплитуда которого при малых α имеет порядок $\sqrt{\alpha}$, а фокус становится неустойчивым. 3) Рождение из одного равновесного состояния трёх состояний равновесия (спонтанное нарушение симметрии). Например, изменению движения шарика в жёлобе при появлении на дне жёлоба бугорка соответствует бифуркация, при которой из вырожденного состояния равновесия типа центр (рис. 2.27, *а*) возникают три состояния

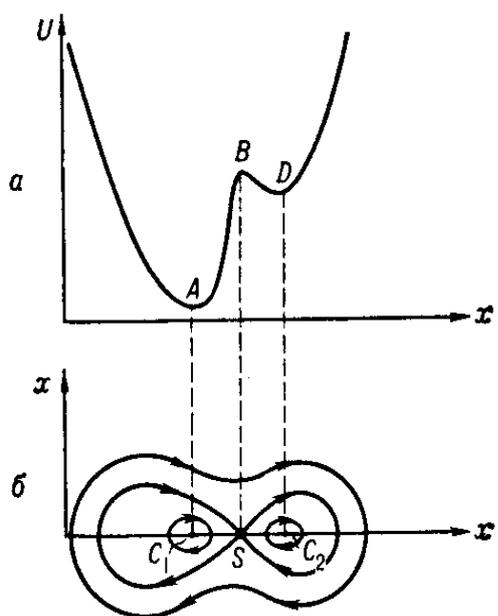


Рис. 2.25. *a* – схема движения шарика в потенциальной яме с «полочкой», *б* – его фазовый портрет

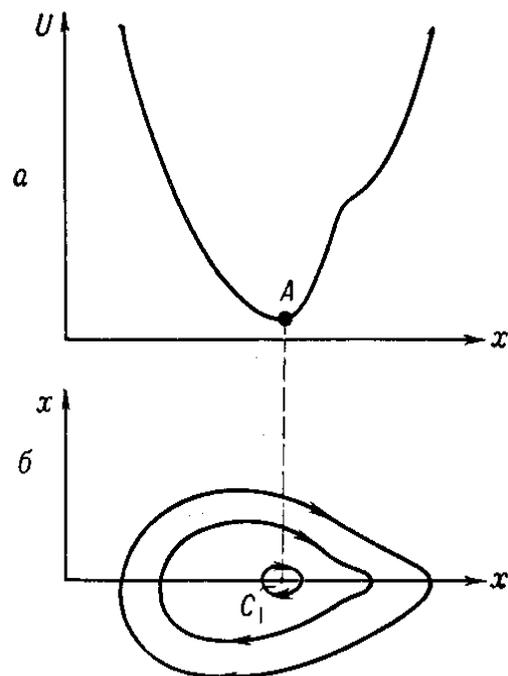


Рис. 2.26. *a* – схема движения шарика после бифуркации; *б* – фазовый портрет.

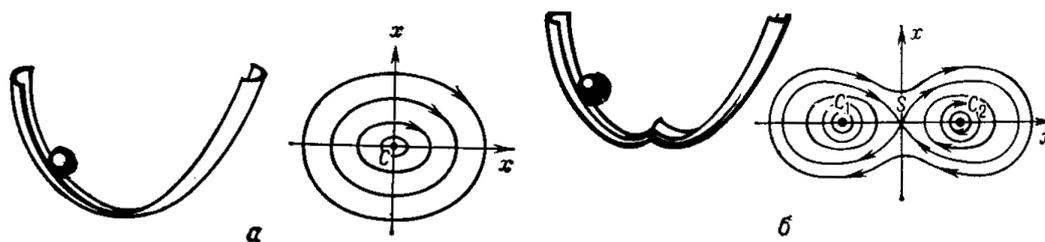


Рис. 2.27. Рождение из одного состояния равновесия трёх при малом изменении параметра (формы жёлоба): *a* – форма жёлоба и соответствующий фазовый портрет с одним состоянием равновесия типа центр, *б* – форма жёлоба с двумя минимумами и соответствующий фазовый портрет с тремя состояниями равновесия: седло *S* и два центра C_1 и C_2 .

равновесия - седло *S* и центры C_1 и C_2 (рис. 2.27, *б*).

При этом возможно существование устойчивых несимметричных движений в полностью симметричной системе.

За локальными бифуркациями можно проследить, наблюдая развитие малых возмущений в системе, которые описываются линеаризованными уравнениями. В динамической системе $\dot{x} = X(x, \mu)$ (здесь x – вектор физических переменных, μ – параметр, а $x(\mu)$ – состояние равновесия) малые возмущения ξ описываются уравнением $\dot{\xi} = A(\mu)\xi$, где $A(\mu) \equiv \partial X[x_0(\mu), \mu] / \partial x$. Если корни λ_n характеристического уравнения

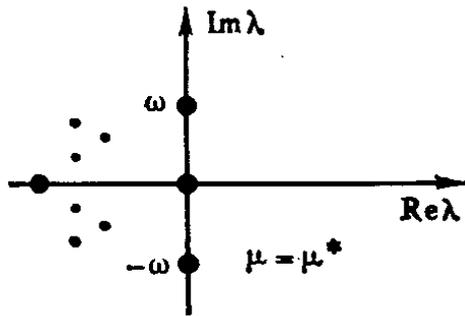


Рис. 2.28. Комплексная плоскость с изображением (точки).

$\det [A(\mu) - \lambda E] = 0$ (где E – единичная матрица) не лежат на мнимой оси комплексной плоскости (рис. 2.28), то в окрестности состояния равновесия при малых сдвигах параметров бифуркации не происходит. Она осуществляется, лишь когда при μ , равном критическому значению μ^* один или несколько корней попадает на мнимую ось комплексной плоскости. Всем бифуркациям

исчезновения или рождения состояний равновесия соответствует прохождение одного или нескольких корней через ноль. Одна из подобных возможностей представлена на рис. 2.29, где изображено рождение состояний равновесия типа седла S и узла N .

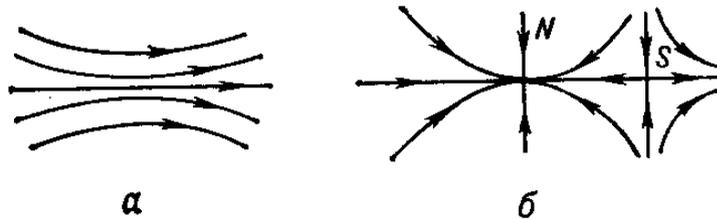


Рис. 2.29. Рождение двух состояний равновесия - седла S и узла N : a – фазовый портрет до бифуркации, b – фазовый портрет после бифуркации.

2.4.2. Бифуркации рождения периодического движения.

Известны несколько групп бифуркаций рождения периодического движения. Рассмотрим здесь только одну из них, а именно, бифуркацию

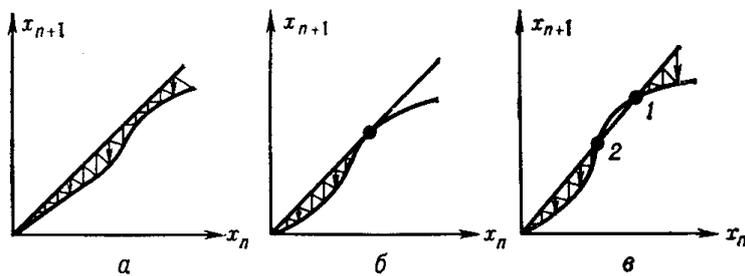


Рис. 2.30. График отображения Пуанкаре секущей $x=0$ для автогенератора с жёстким возбуждением:

a – устойчивые колебания отсутствуют – предельных циклов нет; b – момент бифуркации – график функции касается биссектрисы; v – устойчивое 1 и неустойчивое 2 движения.

исчезновения устойчивого периодического движения в момент его слияния с неустойчивым периодическим движением – это так называемая касательная бифуркация. Такая бифуркация для автогенератора с жёстким возбуждением изображена на рис. 2.30 с помощью графика

отображения Пуанкаре (как понятно из рисунка – это зависимость величины параметра x на $n+1$ шаге итераций от величины на n -м шаге). Рис. 2.30а соответствует состоянию системы, в котором устойчивые колебания отсутствуют – предельных циклов нет. Рис. 2.30б соответствует моменту бифуркации: график функциональной зависимости x_{n+1} от x_n касается биссектрисы первого квадранта – происходит рождение двух периодических движений – устойчивого 1 и неустойчивого 2 (рис. 2.30, в).

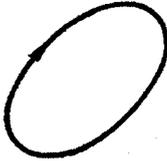
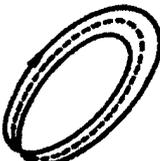
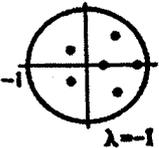
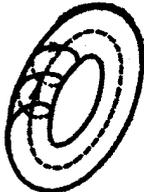
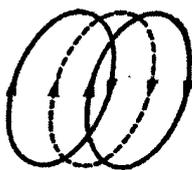
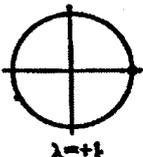
2.4.3. Бифуркации смены устойчивости периодических движений.

Важной характеристикой бифуркаций смены устойчивости периодических движений являются значения мультипликаторов в критический момент, которые представляют собой коэффициенты усиления (затухания) малых возмущений на фоне рассматриваемого периодического движения за период T . Математически *мультипликаторы* – это собственные значения матрицы $\exp RT$, характеризующей решение $Z(t) = C(T) \cdot \exp RT$ линеаризованной системы в окрестности исследуемого периодического движения $x = f(t, \mu)$, $f(t+T, \mu) \equiv f(t, \mu)$. Здесь R постоянная, $C(t)$ – периодическая матрица: $C(t+T) \equiv C(t)$. В автономной системе, описываемой уравнениями, явно независимыми от времени, один из мультипликаторов всегда равен единице, поэтому в дальнейшем говорится только об остальных. Если все остальные мультипликаторы по модулю меньше 1, то исходное периодическое движение устойчиво. Бифуркации, связанные с потерей устойчивости, происходят при значениях параметров системы, при которых один или несколько из них равны по модулю 1. В случае равенства одного из мультипликаторов единице осуществляется так называемая бифуркация удвоения периода (табл. 2, строка 1). Она характеризуется тем, что в момент бифуркации (его называют точкой бифуркации) малое по модулю возмущение через период просто меняет знак, а через следующий оборот в линейном приближении происходит замыкание траектории. В результате этой бифуркации из исходного периодического движения рождается устойчивое периодическое движение приблизительно удвоенного периода, а исходный режим становится неустойчивым.

Бесконечная цепочка бифуркаций удвоения периода – один из наиболее распространенных путей возникновения стохастического поведения в реальных системах. Появлению двухчастотных колебаний в физической системе отвечает бифуркация рождения двумерного тора из периодической траектории (табл. 2, строка 2).

В системах, зависящих от двух параметров, или в системах с определенным типом симметрии встречается бифуркация, при которой рождается сразу 2 устойчивых предельных цикла (табл. 2, строка 3). Такая

Таблица 2. Бифуркации смены устойчивости периодических движений

Наименование бифуркации	До бифуркации	После бифуркации	Мультипликаторы	Модель
Бифуркация удвоения периода			 $\lambda = -1$	Нелинейный осциллятор, периодически возбуждаемый периодической силой
Рождение двухчастотных колебаний			 $\alpha = \frac{2\pi n}{q}$ $\lambda = e^{i\alpha}$	Генератор Ван дер Поля под действием внешней силы
Рождение пары устойчивых периодических движений			 $\lambda = +1$	Вынужденные колебания упругой линейки под действием малой периодической силы

бифуркация характерна для нелинейных систем, в которых зависимость потенциальной энергии от переменной имеет два минимума, находящихся под действием внешних сил.

Бифуркации, в результате которых исчезают статические или периодические режимы (то есть состояния равновесия или предельные циклы), могут приводить к тому, что динамическая система переходит в режим стохастических колебаний.

В приложениях теории бифуркаций ставится задача – для каждой конкретной ситуации найти аналитические выражения для вариантов решений уравнений, возникающих в точках бифуркации, а также определение значений параметров, при которых начинается ветвление решений уравнений. Предварительно необходимо провести анализ устойчивости системы и поиск точек ее неустойчивости. Методы этого анализа основаны на теории устойчивости, они достаточно подробно разработаны и носят чисто технический характер.

В теории бифуркаций описано большое число бифуркационных ситуаций. В развитии реальных природных систем могут наблюдаться не отдельные бифуркации, а целые каскады бифуркаций (классическим примером может служить возникновение турбулентности и других

гидродинамических неустойчивостей). Кроме того, различают бифуркации и катастрофы. Существует даже теория катастроф. Однако, анализ связей и различий между ними выходит за пределы данного учебного пособия. (Интересующимся этими проблемами можно посоветовать прочитать работы Рене Тома и книгу Дж.М.Т. Томпсона «Неустойчивости и катастрофы в науке и технике». –М.: Мир,1985).

Не следует думать, что бифуркации обязательно представляют собой мгновенный переход системы из одного качества в другое. Бифуркации могут происходить как быстро (примером является образование ячеек Бенара), так и очень медленно и плавно (примером может служить движение шарика в потенциальной яме с «полочкой» (рис. 2.25) и последующее медленное сглаживание «полочки» (BD рис. 2.26)).

Отметим очень важную деталь в теории бифуркаций. В тот момент времени, когда система находится вблизи точки бифуркации, огромную роль начинают играть малые возмущения значений ее параметров. Они могут носить чисто как случайный характер, так и быть целенаправленными. Но именно от них зависит, по какой эволюционной ветви пойдет система, пройдя через точку бифуркации (см. раздел 2.9.). Таким образом, если поведение системы подчиняется детерминистским закономерностям до прохождения точки бифуркации, то в самой точке бифуркации решающую роль играет случай.

Вследствие этого, по словам И. Пригожина, мир становится «загадочным, непредсказуемым, неконтролируемым». В определенном отношении это так. Но полностью с этим высказыванием нельзя согласиться, поскольку для любой системы в точке бифуркации имеется не произвольный, а вполне определенный набор путей эволюции. Поэтому даже если работает случайность, то она работает в строго определенном поле возможностей. И, следовательно, говорить о полной неопределенности и, тем более, полной загадочности некорректно. Что же касается неконтролируемости, то, конечно, говорить о тотальном контроле не имеет смысла, но в некоторых процессах возможно вмешательство как подталкивание к желаемым вариантам развития.

2.5. Открытая система.

Понятие «открытая система» уже использовалось нами в главе 1 и 2. Как отмечалось, *открытой называют систему*, способную к обмену энергией и веществом и/или информацией с окружающей средой, так что потоки, входящие в систему и выходящие из нее, могут сместить ее из состояния равновесия и удерживать вдали от него.

Главное, что отличает замкнутую систему, находящуюся в состоянии внутреннего равновесия, от системы, открытой для потоков вещества и

энергии, – это поведение во времени. В *равновесном состоянии* любой поток, направленный в одну сторону, компенсируется таким же по величине потоком в обратном направлении, всякий акт рождения уравновешивается актом уничтожения, каждое событие нейтрализуется противоположным событием – в результате система остается в состоянии, инвариантном относительно обращения времени. Такая симметрия сразу нарушается, если под действием внешних потоков система смещается в состояние, достаточно далекое от равновесного.

Исследования последних 30-ти лет выявили поразительное подобие в поведении открытых диссипативных систем. Интерес к процессам в простых физических и химических открытых системах обусловлен тем, что происходящие в них вынужденные переходы от беспорядка к порядку могут служить моделью для гораздо более сложных ситуаций, имеющих место в таких процессах, какие происходят в живой природе. Во всех до сих пор изученных открытых системах при некотором критическом значении внешнего потока происходит переход к новым структурам, свойства которых даже качественно отличны от исходных, поскольку новая структура более упорядочена. Это явление подобно фазовым переходам, или критической неустойчивости в системе, далекой от равновесия. Важно здесь то, что, меняя поток извне, можно контролировать процесс и направлять эволюцию систем к состояниям, все более далеким от равновесного.

Одним из важных, интенсивно изучаемых в настоящее время типов открытых систем относят химические системы (реакторы), в которых непрерывно протекают химические реакции (извне поступают химические реагенты и во внешнюю среду отводятся продукты реакций). Биологические системы, в том числе живые организмы, можно также рассматривать, как открытые химические системы. Но вряд ли оправдано искать аналогии этим системам в общественной жизни, хотя попытки построения таких аналогий встречаются.

Свойства открытых систем описываются методами неравновесной термодинамики.

2.6. Неравновесное состояние.

В *термодинамике и статистической физике* «неравновесное состояние» – это состояние системы, выведенной из состояния термодинамического или статистического равновесия. Это понятие – одно из основных в термодинамике неравновесных процессов и статистической теории неравновесных процессов. Характерным для системы, находящейся в неравновесном состоянии является то, что в ней происходят необратимые процессы переноса (теплопроводность, диффузия и т.д.),

которые стремятся вернуть систему в состояние термодинамического (или статистического) равновесия, если система не является открытой (не обменивается веществом и энергией с внешней средой). В противном случае возможно стремление системы не к равновесному, а стационарному неравновесному состоянию, когда производство энтропии в системе компенсируется ее отводом из системы. Неравновесные состояния, время существования которых очень велико, называют *метастабильными* состояниями.

2.7. Управляющие параметры, параметры порядка и принцип подчинения

Одним из основных представлений, используемых в теории самоорганизации является представление об *управляющем параметре* (УП). УП может быть один или их несколько. Их количество фиксировано и налагается на систему извне – УП не меняются по мере изменения системы. Поведение траекторий в фазовом пространстве будет совершенно разным в зависимости от величин управляющих параметров. Примерами УП могут быть температура или величина сосуда в ячейистой конвекции жидкости (ячейки Бенара), концентрации подаваемых реагентов в химических реакторах и т.д.

Наиболее интересными являются ситуации, когда *поведение системы* изменяется не только количественно, но и качественно при изменении управляющих параметров. Если структура системы сохраняется при изменении управляющих параметров, то она называется *устойчивой* или *структурно устойчивой*. Если структура изменяется, говорят об *относительной неустойчивости*. Если возникает новый управляющий параметр, и система сама создает другие, специфичные для нового управляющего параметра структуры, то это, собственно, и называется *самоорганизацией*.

Во многих случаях поведение системы, близкое к точкам неустойчивости, может зависеть от поведения очень немногих переменных, а поведение отдельных частей системы просто определяется этими немногими факторами. Эти факторы называются *параметрами порядка* (ПП). ПП играют одну из ведущих ролей в концепции самоорганизации. Они «подчиняют» отдельные части системы и определяют их поведение.

Связь между параметрами порядка и отдельными частями системы называется *принципом подчинения*. С определением параметров порядка практически не остается проблем для описания поведения системы, поскольку, теперь вместо того, чтобы описывать поведение системы посредством описания отдельных ее частей, нужно описывать поведение

только параметров порядка. То есть получается своего рода информационное сжатие.

По замечанию Г. Хакена «параметр порядка действует подобно кукловоду, который задает танец марионеток, но решающее различие между кукловодом и параметром порядка заключается в том, что отдельные части в свою очередь сами генерируют параметр порядка своим коллективным поведением». Мы говорим здесь о круговой причинной связи. В технических системах такая круговая причинная связь известна как обратная связь. Однако, в отличие от технических систем, в которых параметр порядка фиксирован с самого начала (инженером), например, в форме устройства управления, в нелинейных диссипативных системах параметры порядка создаются отдельными частями самой системы.

Таким образом, макроскопическое поведение системы описывается несколькими величинами, в частности, параметрами порядка и управляющими параметрами. Имеется некоторое критическое значение управляющего параметра (являющегося функцией поступления в систему энергии и/или вещества), при котором система спонтанно переходит в новое (упорядоченное) состояние. В этом новом состоянии поведение элементов системы становится согласованным (когерентным). Новое состояние существует только при определенной интенсивности обмена энергией/веществом с окружающей средой (то есть при определенной величине *управляющего параметра*). При увеличении интенсивности обмена система проходит через ряд следующих критических переходов, в результате которых ее структура может усложняться.

2.8. Флуктуации и их роль в самоорганизации

Флуктуациями (от лат. fluctuatio - колебание) называются случайные отклонения физических величин от их средних значений. Основы теории флуктуаций были заложены в работах Дж. У. Гиббса (1902), А. Эйнштейна (1905-1906) и М. Смолуховского (1906).

Флуктуациям подвержены любые физические (и не только) величины, зависящие от случайных факторов. Количественная характеристика флуктуаций основана на методах математической статистики и теории вероятностей. Простейшей мерой флуктуации величины x служит её дисперсия σ_x^2 , то есть средний квадрат отклонения величины x от среднего значения \bar{x} :

$$\sigma_x^2 = \overline{(x - \bar{x})^2},$$

где черта сверху означает статистическое усреднение. Эквивалентной мерой флуктуаций является среднеквадратичное отклонение σ_x , равное

корню квадратному из дисперсии, или его относительная величина равная $\delta = \sigma_x / \bar{x}$.

В статистической физике флуктуации вызываются хаотическим тепловым движением образующих систему частиц. Рассмотрим изолированный сосуд с газом, находящимся в состоянии термодинамического равновесия, в котором находятся N молекул. Разделим этот сосуд на две равные части. Тогда в одной половине останется A молекул. A - случайная переменная и можно ожидать, что ее значение достаточно близко к $N/2$. Закон больших чисел (основная теорема теории вероятностей) позволяет оценить ошибку, вносимую флуктуациями. В соответствии с этим законом, при измерении A мы можем ожидать значение порядка $N/2 \pm \sqrt{N/2}$. При большом N ошибка $\sqrt{N/2}$, вносимая флуктуациями, может быть достаточно большой. Например, если $N \sim 10^{20}$, то $\sqrt{N} \sim 10^{10}$. Но относительная ошибка, вносимая флуктуациями, порядка $(\sqrt{N/2})/(N/2)$ или $1/\sqrt{N}$. Она стремится к нулю при больших значениях N . Как только система становится достаточно большой, закон больших чисел позволяет отличить средние значения от флуктуаций (тогда флуктуации становятся пренебрежимо малыми величинами).

Для выделенных очень малых объёмов флуктуации могут быть обнаружены по рассеянию света или рентгеновских лучей. Например, при рассеянии света случайные изменения плотности среды из-за флуктуаций вызывают случайные изменения по объёму показателя преломления, поэтому в однородной по составу среде или даже в химически чистом веществе рассеяние света может происходить так же, как и в мутной среде.

Флуктуации имеют принципиальное значение, ограничивая пределы применимости термодинамических понятий только большими (содержащими много частиц) системами, для которых флуктуации значительно меньше самих флуктуирующих величин. Существование флуктуации уточняет смысл второго начала термодинамики. Утверждение о необратимом переходе изолированной системы в состояние термодинамического равновесия с течением времени, сопровождающегося ростом энтропии, остаётся справедливым. При этом в системе оказываются возможными флуктуации из равновесного состояния в неравновесное, обладающего меньшей энтропией; однако такие флуктуации не отменяют эволюции системы в целом к состоянию термодинамического равновесия. Для средних величин остаётся справедливым закон возрастания энтропии в изолированной системе.

С помощью распределений Гиббса можно вычислить флуктуации в состоянии статистического равновесия для систем, находящихся в

различных физических условиях; при этом флуктуации выражаются через равновесные термодинамические параметры и производные термодинамических потенциалов. Например, для системы с постоянным объёмом V и постоянным числом частиц N , находящейся в контакте с термостатом, имеющим температуру T , распределение Гиббса даёт для флуктуации энергии E :

$$\Delta E = (kT)^2 c_v (\overline{E^2}),$$

где c_v – теплоёмкость при постоянном объёме. В данном случае флуктуирует величина энергии. Её относительные квадратичные флуктуации $\overline{\Delta E^2} / \overline{E^2}$ пропорциональны величине $1/N$ (нормальные флуктуации) и, следовательно, очень малы. В точках фазовых переходов флуктуации сильно возрастают, и их относительная величина может убывать с увеличением N намного медленнее. Для более детальной характеристики флуктуации нужно знать функцию распределения их вероятностей.

Флуктуации давления проявляются в броуновском движении взвешенных в жидкости (или газе) малых частиц под влиянием ударов молекул окружающей среды.

Флуктуации играют ведущую роль в неравновесных процессах. В общем случае существует связь между флуктуациями физических величин в равновесном состоянии и неравновесными свойствами системы при внешнем возмущении, определяемая флуктуационно-диссипативной теоремой. Она была установлена в 1951 г. Т. Уэлтоном и Х. Каленом (США) В соответствии с этой теоремой, реакция системы на некоторое возмущение под влиянием силы f , которая зависит от времени как $\cos \omega t$, и входит как дополнительный член $- f \hat{x}$ в гамильтониан системы (физической величине x соответствует оператор \hat{x}), приводит к изменению среднего значения (\overline{x}) величины x на величину $\delta_x = \alpha(\omega) f$, где $\alpha(\omega)$ – называется обобщенной восприимчивостью системы и определяет ее неравновесные свойства.

Флуктуации становятся очень большими в критической точке эволюции системы. В случае неравновесной системы, когда эволюционирующая система достигает точки бифуркации, флуктуации параметров системы становятся огромными и вынуждают систему выбрать ту ветвь, по которой будет происходить ее дальнейшая эволюция. Переход через точку бифуркации зависит от флуктуации - такого же случайного процесса, как и бросание монеты. Флуктуации, таким образом, определяют исход эволюции системы. Вместо того, чтобы оставаться малыми поправками к средним значениям, флуктуации существенно изменяют средние значения. Желая подчеркнуть новизну этой ситуации, Илья

Пригожин в книге «Порядок из хаоса» предложил назвать ситуацию, возникающую после воздействия флуктуации на ситуацию в точке бифуркации «порядком через флуктуацию». Флуктуация микроскопических параметров системы может, таким образом, породить новую структуру на макроскопическом уровне.

В равновесных системах, как уже отмечалось, действует закон больших чисел. Этот закон позволяет считать флуктуации пренебрежимо малыми. Кроме того, он позволяет вычислить корреляции между числом молекул в двух разных точках пространства, находящихся на заданном расстоянии друг от друга. В равновесном состоянии частицы ведут себя независимо, так что взаимодействием между ними можно пренебречь.

Исследования показали, что в неравновесной области ситуация коренным образом изменяется. Во-первых, при приближении к точке бифуркации флуктуации становятся аномально большими и закон больших чисел нарушается. Амплитуды флуктуаций имеют такой же порядок величины, как и средние значения параметров. Следовательно, между ними стираются различия. Кроме того, в случае, например, реакций Белоусова-Жаботинского или ячеек Бенара (см. гл. 3), в системе появляются дальнедействующие корреляции, которые организуют систему еще до того, как в ней произойдет переход через точку бифуркации и возникнет новый макроскопический порядок. Частицы, находящиеся на макроскопических расстояниях друг от друга, становятся зависимыми друг от друга. Последствия локальных флуктуаций как бы разносятся по всей системе. Любопытно отметить, что такие дальнедействующие корреляции возникают и при переходе системы из равновесного состояния в неравновесное – оно осуществляется по типу фазового перехода. Разница заключается лишь в том, что амплитуды дальнедействующих корреляций сначала малы, но по мере удаления от равновесного состояния нарастают и в точках бифуркации могут достигать очень большой величины.

2.9. Обратные связи и их роль в самоорганизации

Для понимания механизмов самоорганизации большую роль играет понятие обратной связи. Термин «обратная связь» впервые появился, по-видимому, в радиоэлектронике. Он был введен для обозначения электрического воздействия анодной цепи лампового усилителя на цепь сетки усиливающей лампы. Затем этот термин стал использоваться для обозначения воздействия управляемого процесса на управляющее воздействие в системе автоматического регулирования. Л.И. Мандельштам и А.А. Андронов использовали термин «обратная связь» в теории нелинейных колебаний для общей характеристики особенностей нелинейного взаимодействия различных процессов в динамических

системах. Позже этот термин стали использовать для описания эффектов воздействия (самовоздействия) результатов каких-либо процессов на характер их протекания в системах различной природы (физических, химических, биологических и социальных), осуществляемых или с помощью внешней цепи, или в силу особенностей их внутреннего устройства.

В настоящее время термин «обратная связь» стал общенаучным понятием. *Обратной связью принято называть воздействие результатов какого-либо процесса на интенсивность его протекания в этой системе (то есть самовоздействие, саморегулирование), которое может осуществляться как с помощью внешней по отношению к системе цепи, так и с помощью процессов протекающих внутри системы.* Если при этом интенсивность процесса в системе возрастает, то обратная связь называется *положительной*, если уменьшается – *отрицательной*.

Примером систем с *положительными обратными связями* являются химические и ядерные цепные реакции. Так, химическая реакция окисления идет с выделением тепла. А скорость этой реакции прямо пропорциональна температуре. Таким образом, по мере протекания окисления, скорость реакции будет расти, а реакция - самоускоряться (вплоть до взрыва в некоторых случаях).

На принципе *положительной обратной связи* основана работа лазера (подробнее о самоорганизации в лазерах см. разд. 3.4). Обычный лазер состоит из лампы накачки, рабочего тела и двух зеркал, расположенных на торцах рабочего тела и образующих резонатор. Лампа накачки облучает рабочее тело (активную среду) лазера. В результате атомы рабочего тела лазера возбуждаются и при возникновении инверсии населенностей, возникает вынужденное излучение. Поскольку часть вынужденного излучения посредством резонатора возвращается в активную среду лазера, то возникает *положительная обратная связь*, в результате которой дополнительно усиливаются моды первичного излучения лампы накачки с определенной длиной волны. Обратная связь в лазерах *положительна* только для излучения с определенными длинами волн, зависящими от размеров резонатора, содержащего активное вещество.

Примером систем с *отрицательной обратной связью* являются многие системы автоматического регулирования, так как их задачей является уменьшение отклонения системы от заданного режима ее работы при внешних воздействиях. Так действует в самолете автопилот, который поддерживает заданное положение самолета, высоту, скорость и направление полета в соответствии с данными приборов (компыаса, высотомера, спидометра и т.д.). Организмы теплокровных животных также поддерживают постоянную температуру своего тела при изменении температуры внешней среды с помощью механизма отрицательной

обратной связи. Отрицательная обратная связь стабилизирует процессы в системе, сводит к минимуму воздействие внешних или внутренних процессов, способных нарушить нормальное функционирование системы.

Обратная связь может быть *непрерывной*, в случае постоянного самовоздействия, или *прерывистой*, если оно происходит периодически, по заданной схеме или в произвольном режиме. Обратная связь может быть *полной*, если она охватывает всю систему, или *локальной*, если она имеет место в определенной части системы.

В радиоэлектронике используется термин «*запаздывающая обратная связь*» для цепей с обратной связью, включающих линию задержки. В биологии обратную связь характеризуют по функциональному назначению соответствующих подсистем (обратная связь для регулирования гормональных процессов, обратная связь для регулирования иммунных процессов и т.д.), по способу ее реализации (биохимическая обратная связь, кинетическая обратная связь и т.д.).

Процессы с обратными связями играют большую роль во многих природных процессах. Например, в жизнедеятельности организмов они обеспечивают формирование биоритмов и таких периодических процессов как дыхание, сердцебиение т.д. Обратные связи могут вызывать колебание численности популяций. В частности, в системе «хищник-жертва» обратная связь осуществляется за счет увеличения (уменьшения) числа хищников при увеличении (уменьшении) числа жертв, которые служат им пищей.

В обществе в условиях стихийного рынка существует положительная обратная связь между спросом на товары и предложением товаров, которая, как известно, может приводить к периодическим кризисам перепроизводства.

Анализ обратных связей можно провести с учетом числа степеней свободы и типа преобразования сигнала в системах с обратной связью.

В *сосредоточенных системах* обратные связи носят локальный характер, т.к. осуществляются между величинами, локализованными в одной точке пространства. В таких системах обратные связи осуществляются через установление зависимости скоростей изменения величин dx_i/dt от значений самих величин x_i , характеризующих процесс в данный момент времени. Математически такая связь описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$dx_i/dt = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.32)$$

где F_i – некоторые функции (в общем случае нелинейные), а n – размерность фазового пространства. Величина x_i оказывает воздействие на dx_i/dt , а dx_i/dt оказывает воздействие на x_i , определяя их приращение dx_i за

время dt . В результате получается самовоздействие – величина x_i влияет на саму себя.

Важным элементом анализа системы указанных дифференциальных уравнений является исследование бифуркации стационарных решений при изменении параметров задачи.

Новые динамические свойства систем с обратными связями возникают при увеличении числа степеней свободы. Так для систем, описываемых двумя уравнениями (2.32) на фазовой плоскости наряду с особыми точками – состояниями равновесия системы, могут также возникать особые траектории – предельные циклы, отвечающие автоколебаниям.

Автоколебания являются общим свойством нелинейных систем с положительными обратными связями. Колебания в газовом разряде неоновой лампы, завывания водопроводной трубы во время открывания крана, звучание органных труб и струн смычковых инструментов отличаются лишь по физическим механизмам формирования обратных связей между различными степенями свободы соответствующих систем и разными видами нелинейности.

С ростом числа степеней свободы усложнение динамики системы с обратными связями может происходить за счет бифуркаций периодических движений, приводящих, в частности, к появлению странного аттрактора. Поведение фазовых траекторий на таком аттракторе и вблизи него хаотично. Поэтому с появлением странного аттрактора связывают возникновение в системах хаотичного поведения. Странный аттрактор и хаотическое поведение системы могут возникать у системы, описываемой всего тремя уравнениями (2.32) в трехмерном фазовом пространстве (см. аттрактор Лоренца, разд. 2.5.2).

В системах с распределенными параметрами обратная связь носит нелокальный характер, потому что взаимовлияние осуществляется между величинами, находящимися в различных точках пространства. Во многих физических и химических системах такое взаимовлияние вызвано необратимыми процессами переноса (например, диффузией или теплопроводностью). В таких системах нелокальная обратная связь математически описывается в виде системы уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \nabla(D_{ij}\nabla u_i) + F_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n), \quad (2.33)$$

где D_{ij} – матрица коэффициента диффузии (в общем случае нелинейная и неортогональная), u_i – переменная, описывающая поведение системы.

В случае одномерной и однокомпонентной среды уравнение (2.33) преобразуется в уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u) \quad (2.34)$$

Эта математическая модель применима для описания многих процессов в физике, химии, биологии, экологии и т.д. Она рассматривалась в 30-е гг. XX века А.Н. Колмогоровым, Н.С. Пискуновым, П.Г. Петровским для моделирования распространения эпидемий, Я.Б. Зельдовичем и Д.А. Франк-Каменецким для моделирования волны горения. Причиной сложного поведения системы, моделируемой с помощью уравнения (2.34) является положительная обратная связь между потоком $-J = D\partial u/\partial x$ и самой величиной u . Для стационарной волны такое переключение осуществляется в соответствии с уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \Psi(j, u) \quad (2.34)$$

В многокомпонентных средах ($n > 1$) уравнения (2.32) описывают обратные связи между различными потоками j_k . Наличие обратных связей между потоками вблизи положения равновесия в термодинамических системах, как уже упоминалось, впервые было отмечено Ларсом Онсагером.

В случае двухкомпонентной ($n=2$) системы, математическая модель одномерной системы с постоянной диффузией может быть описана системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= D_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + F_1(u_1, u_2) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= D_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + F_2(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Эта модель описывает системы, в которых обратная связь формируется между скоростями изменения величин $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, потоками $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ и самими величинами u_i . На основе этой модели А. Тьюринг (1952) описал формирование стационарных неоднородных структур. С ее помощью также были описаны структуры, возникавшие в реакциях Белоусова-Жаботинского (разд.3.3) и т.д.

Нелинейная положительная обратная связь играет решающую роль в механизмах образования режимов с обострениями (разд. 3.2), которые исследуются школой С.П. Курдюмова. Режимы с обострением – это режимы сверхбыстрого нарастания процессов в открытых нелинейных средах, при которых характерные параметры системы (температура, плотность, давление и т.д.) могут неограниченно возрасть за небольшой промежуток времени. Исследование данных режимов

позволяет моделировать такие разные процессы как: гравитационный коллапс, вспышки инфекционных болезней, взрывы, рост народонаселения, автокаталитические реакции и т.д. Во всех этих процессах имеют место нелинейные положительные обратные связи, которые ведут к режимам с обострением.

Глава 3. Самоорганизация в инженерных и природных системах

В третьей главе приведены примеры самоорганизации в открытых диссипативных системах. Вначале рассмотрим пример самоорганизации в открытых термодинамических системах. Такой выбор продиктован, во-первых, тем, что это были исторически первые эксперименты, в которых наблюдалась и получила теоретическое объяснение самоорганизация, а во-вторых, относительной простотой этих экспериментов. Затем рассмотрим более сложные примеры самоорганизации.

3.1. Конвективная неустойчивость

3.1.1. Ячейки Бенара и их разновидности

В 1900 году Х. Бенар поставил простой эксперимент, который привел к открытию ряда интересных свойств открытых систем. Наблюдаемые в различных вариантах этого эксперимента структуры, названные позже ячейками Бенара, стали классическим примером самоорганизации.

В первых экспериментах Бенар использовал тонкий слой китового спермацетового масла, но позже выяснилось, что для данного эксперимента подходят и другие вязкие жидкости (чаще других используют силиконовое масло). Вязкая жидкость наливалась тонким слоем в сосуд круглой или прямоугольной формы. При этом латеральные размеры сосуда намного превышали толщину слоя масла.

В начале эксперимента жидкость находится в состоянии термодинамического равновесия. Затем нижний слой жидкости равномерно нагревают, а ее верхняя поверхность поддерживается при постоянной температуре T_1 , которая ниже, чем температура нагревателя T_2 . Через некоторое время устанавливается разность температур между верхней и нижней поверхностями жидкости $\Delta T = T_2 - T_1$ (градиент температуры), в результате чего возникает поток тепла снизу вверх. Если градиент температуры мал, то перенос тепла осуществляется на микроскопическом уровне: в результате столкновения «быстрых молекул» с «медленными молекулами» осуществляется передача тепла от нижних слоев к верхним без макроскопического движения жидкости. Это известное явление теплопроводности. Под «микроскопическим движением» имеется в виду, что молекулы участвуют только в тепловом движении, и никаких направленных потоков жидкости нет.

Возрастая, градиент температуры достигает значения, которое называют *критическим* (ΔT_c), и тогда скачком устанавливается макроскопическое движение жидкости – возникают упорядоченные потоки, ведущие к образованию четкой структуры: на одних участках нагретая жидкость

поднимается вверх, охлаждается у верхней поверхности и опускается вниз на других участках. Эта структура по внешнему виду напоминает

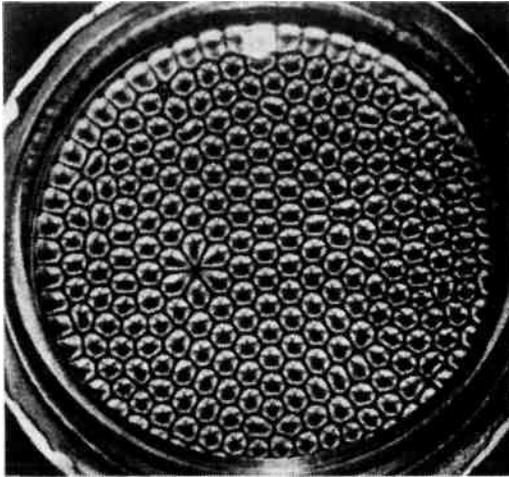


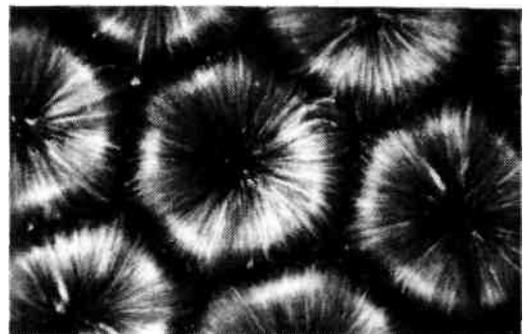
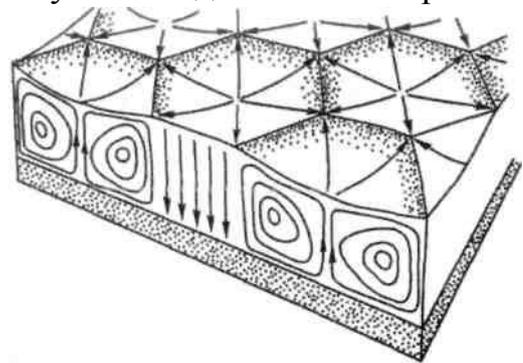
Рис. 3.1. Фото ячеек Бенара в тонком слое силиконового масла. Вид сверху.

шестигранные ячейки пчелиных сот (рис. 3.1). Рис. 3.2. демонстрирует качественное объяснение этого явления и фотографию ячеек Бенара, полученных в тонком слое силиконового масла с добавлением алюминиевых опилок. Вследствие теплового расширения жидкость расслаивается, причем часть жидкости, находящаяся ближе к нижней плоскости, характеризуется пониженной плотностью по сравнению с верхними слоями. Это приводит к градиенту плотности, направленному против силы тяжести. Ясно, что такая структура неустойчива. Рассмотрим, например, малый элемент объема жидкости вблизи нижней плоскости (заштрихованный кружок слева на рис. 3.3). Представим, что этот элемент объема вследствие возмущения немного смещается вверх. Находясь теперь в более холодной и, следовательно, в более плотной среде, этот элемент будет испытывать направленную вверх архимедову силу, которая будет стремиться усилить движение вверх. С

шестигранные ячейки пчелиных сот (рис. 3.1). Рис. 3.2. демонстрирует качественное объяснение этого явления и фотографию ячеек Бенара, полученных в тонком слое силиконового масла с добавлением алюминиевых опилок. Вследствие теплового расширения жидкость расслаивается, причем часть жидкости, находящаяся ближе к нижней плоскости, характеризуется пониженной плотностью по сравнению с верхними слоями. Это приводит к градиенту плотности, направленному против силы тяжести. Ясно, что такая структура неустойчива. Рассмотрим, например, малый элемент объема жидкости вблизи нижней плоскости (заштрихованный кружок слева на рис. 3.3). Представим, что этот элемент объема вследствие возмущения немного смещается вверх. Находясь теперь в более холодной и, следовательно, в более плотной среде, этот элемент будет испытывать направленную вверх архимедову силу, которая будет стремиться усилить движение вверх. С

Рис. 3.2. Возникновение шестигранных ячеек Бенара в тонком слое жидкости. Сверху – линии тока жидкости в режиме конвекции Бенара.

Снизу – снимок конвекции Бенара. Видны шестигранные конвективные ячейки в слое силиконового масла толщиной 1 мм с добавлением алюминиевых опилок. Слой равномерно нагрет снизу. Освещенные алюминиевые опилки позволяют визуально проследить подъем жидкости в центре каждой ячейки и ее опускание на краях



другой стороны, если находящийся вначале у верхней плоскости малый

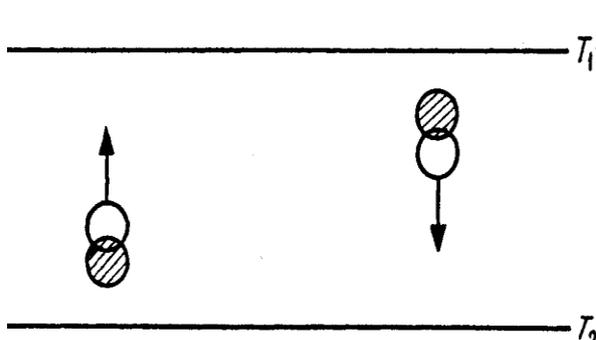


Рис. 3.3. К объяснению природы тепловой конвекции

объем жидкости (заштрихованный кружок справа на рис. 3.3) смещается вниз, то он попадает в область пониженной плотности, и архимедова сила будет ускорять нисходящее движение. Таким образом, в жидкости возникают восходящие и нисходящие потоки, что и наблюдается в эксперименте.

Характерный размер ячеек по порядку величины сравним с толщиной слоя жидкости, которая в

лабораторных условиях бывает от нескольких миллиметров до нескольких сантиметров. Аналогичное явление наблюдается и в атмосфере, где можно наблюдать ячеистые структуры в облаках, размеры которых достигают нескольких сот метров.

На фотографии конвекции Бенара (рис. 3.1) можно заметить нерегулярности в расположении шестигранных ячеек. Так, мелкая выемка на дне сосуда приводит к возникновению ячеек в форме лепестков цветка (область слева от центра). Это показывает, насколько картина ячеек Бенара чувствительна к малейшим нарушениям начальных условий.

Ячейки Бенара существуют лишь в некоторой области значений ΔT превышающих ΔT_c , потом их характеристики начинают изменяться. После перехода через другое критическое значение ΔT_{c1} структура течения станет размытой и возникнет новый режим, характеризующийся неупорядоченной зависимостью переменных от времени. Этот режим предшествует режиму турбулентности.

Таким образом, неравновесность явилась причиной упорядочивания хаотического теплового движения молекул в системе, и трансформирования части энергии, сообщаемой внешней средой, в упорядоченную структуру, получившую название ячеек Бенара.

3.1.2. Неустойчивость Релея-Бенара

В 1910 году Бенар модифицировал описанный в разделе 3.1.1 эксперимент. В его новом варианте слой вязкой жидкости помещается между двумя горизонтальными параллельными плоскостями, латеральные размеры которых значительно превосходят толщину слоя (рис. 3.4). Когда разность температур между плоскостями $\Delta T = T_2 - T_1 = 0$, тогда, как и в первом варианте эксперимента, система будет находиться в состоянии термодинамического равновесия.

При нагревании слоя жидкости *равномерно* снизу в систему поступает энергия в виде тепла и условие равновесия $\Delta T = T_2 - T_1 = 0$ нарушается ($\Delta T > 0$). Пока ΔT мало, система находится в состоянии, при котором перенос тепла в слое жидкости осуществляется от нижней плоскости к верхней и далее во внешнюю среду путем теплопроводности. Отличие этого состояния от равновесного состоит в том, что температура, плотность и давление уже не будут однородными. Они практически линейно изменяются от теплой области (внизу) к холодной (вверху).

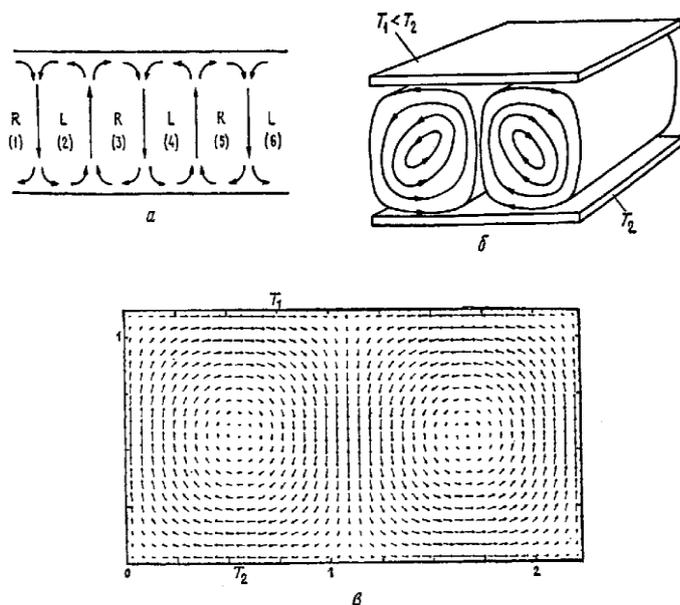


Рис. 3.4. Ячейки Бенара в вертикальном разрезе. В двух соседних ячейках направления вращения противоположные.

При дальнейшем нагревании (увеличении ΔT до некоторого критического ΔT_c), объем вещества скачком приходит в движение. В этих условиях жидкость образует структуры, изображенные на рис. 3.4б — это так называемые конвективные валы. Их возникновение объясняется так же, как и в первом варианте эксперимента (ячейки) — появлением конвективных упорядоченных потоков жидкости.

Причина, по которой упорядоченные структуры не наблюдаются при малых ΔT , связана, во-первых, со *стабилизирующим влиянием вязкости жидкости*: возникающие внутренние силы трения, направлены против конвективного движения; во-вторых, со *стабилизирующим влиянием теплопроводности*: благодаря ей разность температур между смещенной каплей (рис. 3.3) и ее окружением стремится исчезнуть.

Рис. 3.4 демонстрирует сложность возникающего движения: в некоторой точке жидкость движется вверх, проходит вдоль плоскости 1 Рис. 3.4в, затем идет вниз, движется мимо плоскости 2, идет опять вверх и т.д. Ячейки выстраиваются вдоль горизонтальной оси, при этом жидкость в ячейках последовательно начинает вращаться или по часовой стрелке (R), или против (L). Заметим, что направление вращения в конкретной ячейке непредсказуемо. Лишь случайные флуктуации в виде тех или иных возмущений, имеющих место в момент проведения эксперимента, решают, каким будет направление движения в данной ячейке — право- или лево-вращательным. Таким образом, вдали от равновесия система может вести

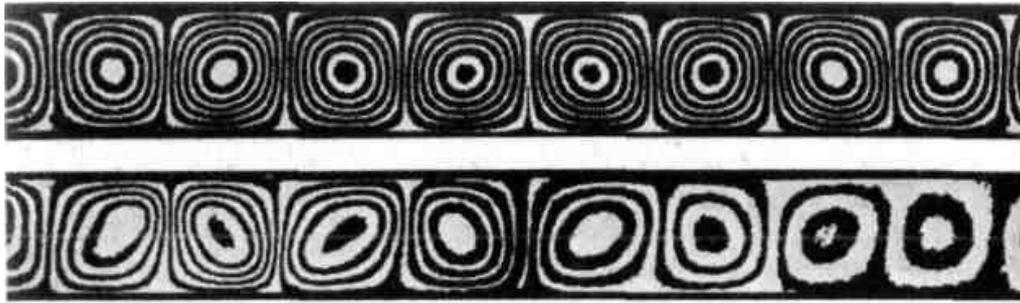


Рис. 3.5. Картины конвективной неустойчивости в силиконовом масле в прямоугольном ящике с относительными размерами сторон 10:4:1, подогреваемом снизу.

Верхний ряд – равномерный нагрев; нижний – неравномерный (амплитуды движения изменяются в направлении справа налево).

себя несколькими различными способами или, выражаясь математическим языком, при одних и тех же значениях параметров возможно несколько различных решений.

Интересны эффекты, возникающие при неравномерном подогреве масла. Рис. 3.5 демонстрирует картину конвекции в слое силиконового масла в прямоугольном ящике, подогреваемом снизу. На фото сверху показана классическая картина конвекции Бенара: равномерный нагрев создает валики, ось которых параллельна более короткой стороне ящика. На нижней фотографии разность температур возрастает вдоль длины ящика справа налево. Благодаря этому также возрастает амплитуда движений слева направо, и однородная картина шестигранных ячеек, которая наблюдается на верхнем рисунке при равномерном нагреве, разрушается.

Поскольку описанные выше неустойчивости впервые наблюдались в экспериментах Х. Бенара, но первое теоретическое объяснение они получили в работах Р. Релея (1916 г.), то поэтому в названии данного явления отмечены имена обоих ученых.

Как показал Релей, количественно оценить и объяснить процесс возникновения конвекции Бенара можно следующим образом. Рассмотрим второй вариант эксперимента, в котором жидкость находится между двумя пластинами и подогревается снизу (рис. 3.4). При этом более холодная и плотная жидкость, находящаяся в верхней части слоя, будет опускаться вниз, а более теплая и легкая жидкость в нижнем слое будет стремиться подняться вверх. После того, как два элемента жидкости переместятся из заштрихованных положений в незаштрихованные (рис. 3.3), разность температур между ними уменьшится из-за теплопроводности среды (коэффициент теплопроводности D_T), причем характерное время процесса изменения температуры составит величину:

$$\tau_{\text{тепл}} \sim \frac{d^2}{D_T} \quad (3.1)$$

Характерное время перемещения элементов жидкости зависит от сил, действующих на элемент жидкости, то есть от *архимедовой силы*, зависящей от разности температур, и *силы вязкого трения*. Это характерное время τ_m составляет величину порядка:

$$\tau_m \sim \frac{\eta}{\rho_0 g d \alpha \Delta T} \quad (3.2)$$

где η – коэффициент динамической вязкости, α – коэффициент теплового расширения, ρ_0 – средняя плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, d – расстояние между пластинами. Условие наступления конвекции состоит в том, что время $\tau_{\text{тепл}}$ (время жизни причины) должно быть больше, чем τ_m (времени внешнего проявления эффекта). Отсюда Релей получил условие затухания конвекции:

$$\frac{\rho_0 \alpha g d^3 \Delta T}{\eta D_T} \geq \text{const} \quad (3.3)$$

Величина, выражаемая левой частью соотношения (3.3), называется числом Релея (Ra) и является безразмерной мерой разности температур. Неравенство означает, что существует критическое число Релея Ra_c (что эквивалентно критической разности температур ΔT_c), выше которого состояние покоя теряет устойчивость и начинается конвекция.

Уравнения эволюции, которые описывают конвективные явления, связывают скорость v элемента жидкости с возмущением температуры θ . Возмущение θ – это разность между температурой в конвективном режиме и температурой, которую имела бы жидкость в отсутствие конвекции. Значит, в состоянии покоя всюду в жидкости $\theta=0$. Уравнения эволюции конвективных явлений в жидкости были выведены в XIX веке путем рассмотрения локального *баланса импульса* (уравнение Навье-Стокса), *массы* (уравнение непрерывности) и *тепла*. Ряд приближений, приемлемых для описания тепловой конвекции в известных экспериментальных условиях, приводят к следующим уравнениям:

1) уравнение Навье-Стокса:

$$\text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right) = -\nabla p + \theta \lambda + \nabla^2 v \quad (3.4)$$

2) уравнение несжимаемости жидкости (если все скорости малы по сравнению со скоростью звука):

$$\nabla v = 0 \quad (3.5)$$

3) распространение тепла

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \nabla \theta = Ra \lambda \cdot v + \nabla^2 \theta \quad (3.6)$$

В уравнениях (3.4)–(3.6) v – скорость элемента жидкости; ∇ – оператор дифференцирования по пространственным координатам (в декартовой системе координат $\nabla = \frac{d}{dx} \mathbf{i} + \frac{d}{dy} \mathbf{j} + \frac{d}{dz} \mathbf{k}$); точкой обозначено скалярное произведение; p – гидростатическое давление, λ – единичный вектор,

направленный вдоль вертикальной оси (направления силы тяжести), Pr – отношение кинематической вязкости к теплопроводности:

$$Pr = \frac{\nu}{D_T}.$$

Число Pr – называют числом Прандтля – это величина безразмерная, зависящая от природы жидкости (в частности, от ее вязкости и, в меньшей степени, от температуры).

В уравнениях (3.4)–(3.6) есть два нелинейных члена: $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ и $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta$. Их относительная значимость зависит от значения Pr . Если число Pr мало (как, например, для жидкого гелия, где $Pr < 1$), то доминирует член $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$. В этом случае можно ожидать, что вторичные неустойчивости, которые развиваются в жидкости, находящейся в режиме стационарной конвекции, по существу имеют гидродинамическое происхождение. Они обусловлены неоднородностью поля скоростей и возникают вследствие естественной тенденции поля гидродинамических скоростей к однородности. Но в жидкостях с большими числами Прандтля, например, в силиконовом масле ($Pr > 100$), член $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta$ становится доминирующим и тогда вторичные неустойчивости имеют главным образом тепловое происхождение. Между этими двумя экстремальными вариантами существуют такие жидкости, как вода, у которых $Pr = 5–10$ (в зависимости от температуры). В таких жидкостях гидродинамические и тепловые эффекты, конкурируя, порождают более сложные режимы.

С позиций теории бифуркаций эксперимент Бенара можно описать следующим образом. За порогом конвекции в жидкости образуется регулярная структура валов с параллельными горизонтальными осями (рис. 3.4). В вертикальной плоскости наблюдается последовательность чередующихся восходящих и нисходящих потоков. Потоки расположены на равных расстояниях, которые приблизительно равны расстоянию между пластинами d . Два соседних вала вращаются в противоположные стороны. Очевидно, что если направление вращения каждого вала изменить на противоположное, то не произойдет никаких принципиальных изменений в геометрических и динамических свойствах движущейся жидкости. Именно поэтому оба направления вращения валов равновероятны. Этот переход системы в одно из двух возможных состояний конвекции можно описать с помощью следующей бифуркационной диаграммы. На рис. 3.6 построен график зависимости скорости v в некоторой точке слоя как функция числа Релея Ra . При $Ra < Ra_c$ единственное возможное состояние есть состояние покоя. На пороге неустойчивости ($Ra = Ra_c$) происходит бифуркация. Выше порога при любом заданном значении Ra экспериментально реализуемы два конвективных состояния с равными, но противоположно направленными скоростями.

При $Ra > Ra_c$, конвективные валы имеют стационарную конфигурацию: скорость и температура описываются функциями, не зависящими от времени. С точки зрения теории динамических систем переход при $Ra = Ra_c$ является бифуркацией между двумя стационарными состояниями: состоянием покоя и конвективным состоянием. Конечно, пространственная

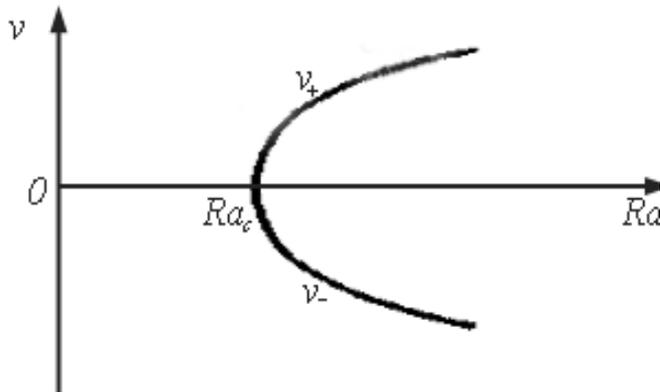


Рис. 3.6. Бифуркационная диаграмма вблизи порога Ra_c неустойчивости тепловой конвекции. В идеальном эксперименте конвективные валы, возникающие при Ra_c , с равной вероятностью вращаются как в одну, так и в другую сторону. Это отражается в существовании двух ветвей, обозначенных символами v_+ и v_- .

структура этих состояний является различной.

Если слой жидкости между пластинами достаточно широк, то конвективные валы могут образовывать в горизонтальной плоскости самые разнообразные конвективные структуры. Процесс отбора возникающих структур представляет собой сложную проблему, которая в настоящее время находится в стадии изучения. В случае прямоугольных кювет структура может состоять из прямолинейных эквидистан-

тных (расположенных на равных расстояниях) валов, оси которых параллельны более коротким сторонам прямоугольной кюветы.

При дальнейшем увеличении разности температур ΔT между нижним и верхним слоем жидкости конвективная структура сначала становится более сложной, но сохраняет определенную регулярность. Однако при еще большем увеличении ΔT она разрушается. На смену ей приходит турбулентное, постоянно изменяющееся движение жидкости. Это сложное поведение жидкости обусловлено множеством возможных пространственных структур, каждая из которых эволюционирует по-своему. Их взаимодействие и порождает турбулентный режим.

При более высоких значениях Ra возникают и другие неустойчивости, которые в значительной мере зависят от условий эксперимента. Разнообразии их столь велико, что для описания всех неустойчивостей вряд ли хватило бы одной книги.

3.2. Локализация тепла. Тепловые структуры.

Режимы с обострением.

Исследование диссипативных тепловых структур при горении давно привлекало ученых, поскольку представляет как большой практический,

так и теоретический интерес. В конце XX века оно получило объяснение в рамках одного из перспективных направлений в теории самоорганизации, а именно, в теории режимов с обострением. Это направление разрабатывается в Москве школой академика С.П. Курдюмова.

В математическом смысле режим с обострением – это такой динамический закон, когда одна или несколько моделируемых величин обращается в бесконечность за конечный промежуток времени. В реальности вместо ухода в бесконечность в этом случае наблюдается фазовый переход или бифуркации, приводящие к каким-либо катастрофическим событиям (пример приведен в конце данного раздела).

При развитии процесса горения в нелинейной среде имеют место два конкурирующих процесса. Это усиление горения нелинейного источника за счет положительной обратной связи, и диссипативный процесс теплопроводности, нелинейность которого определяется коэффициентом теплопроводности.

Процесс горения, некоторые процессы в плазме (в том числе термоядерного реактора), ряд эффектов в биологических системах и химические реакции на определенной стадии можно описывать нелинейным дифференциальным уравнением:

$$T_t = (k(T)T_x)_x + Q(T). \quad (3.7)$$

Или в развернутом виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k(T)\text{grad}T) + Q(T) \quad (3.7a)$$

Первоначально соотношения (3.7) рассматривались только как уравнение теплопроводности. Ниже рассматривается горение при нелинейных теплопроводности и источнике, то есть:

$$k(T) = k_0 T^\sigma \quad Q(T) = q_0 T^\beta \quad (3.8)$$

В (3.7)–(3.8) $T(x,t)$ – температура среды; $Q(T)$ – нелинейный источник, который моделирует процесс поступления тепла в среду и отвечает за положительную обратную связь в системе; $k(T)$ – коэффициент теплопроводности горячей среды; $k(T)$ и $Q(T)$ – в соответствии с (3.8) – степенные функции температуры; k_0 и q_0 – постоянные коэффициенты, показатели σ и β определяют скорость роста $k(T)$ и $Q(T)$ с увеличением температуры. Результаты компьютерного моделирования процесса на основе (3.7), (3.8) показаны на рис. 3.7. Сначала максимальная температура падает (момент времени t_2), но затем она начинает расти (t_3, t_4, t_5). В

отличие от решения линейного уравнения теплопроводности здесь на каждый момент времени можно указать четкую границу между областью, где температура равна нулю, и областью, где она отлична от нуля; эту границу называют конечным тепловым фронтом. Такое поведение обусловлено нелинейностью коэффициента теплопроводности. Далее фронт распространяется и в некоторый момент времени (см. t_4, t_5 на рис. 3.7, а) останавливается. Тепло оказывается локализованным в ограниченной области размером L_f . После этого полуширина нагретой области

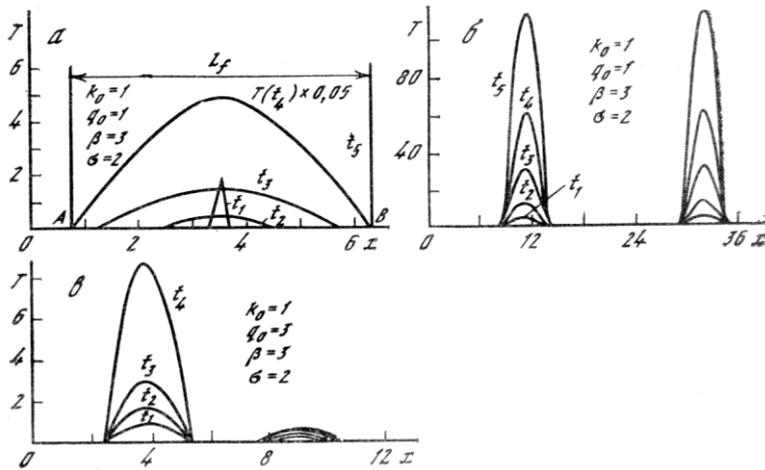


Рис. 3.7. Результаты компьютерного моделирования распространения тепла:

а – формирование диссипативной тепловой структуры (S-режим); $t_1=0; t_2=19,59; t_3=73,03; t_4=74,95; t_5=74,96$;

б – эффект локализации тепла. Две тепловые структуры в нелинейной среде развиваются независимо: $t_1=0; t_2=3,56 \cdot 10^{-2}; t_3=3,93 \cdot 10^{-2}; t_4=3,93 \cdot 10^{-2}; t_5=4 \cdot 10^{-2}$;

в – развивается структура с минимальным временем обострения, остальная часть профиля «замирает» при $t \rightarrow t_f$; $t_1=0; t_2=0,147; t_3=0,22; t_4=0,245$;

остается постоянной, а её максимальная температура увеличивается до бесконечности за ограниченное время t_f . Суть таких режимов состоит в том, что один из процессов развивается гораздо быстрее всех остальных, которые по сравнению с ним как бы замирают. За время, характерное для развития этого процесса остальные величины не успевают существенно измениться. Такие процессы и получили название – *режимы с обострением*. (Конечно, в природе нет ни

материальных точек, ни абсолютно твердых тел, ни режимов с обострением, но только опираясь на такие абстрактные понятия, можно средствами математики моделировать реальные процессы).

Эффект локализации тепла – явление, не имеющее аналога в линейных системах. Проведенный расчет (рис. 3.7) позволяет предсказать следующее. Если на расстоянии, большем L_f задать два одинаковых начальных профиля, например таких, как показано на рис. 3.7, б ($t=0$), то они никак не будут влиять друг на друга. Если один из профилей по амплитуде несколько меньше другого, то он просто «замирает» при $t \rightarrow t_f$, а второй неограниченно растет (рис. 3.7, в). Это типичная картина для режимов с обострением. Поэтому в нелинейной среде, которая описывается уравнением (3.7), необходимо рассматривать только самые быстрые процессы с минимальными временами обострения.

Если менять амплитуду и полуширину начального распределения, то изменится время обострения, а величина области локализации и форма той части профиля, где горение идет интенсивно, сохранится. То есть нелинейная среда «забывает» детали начального распределения, от которого зависит только значение времени обострения t_f . «Забывание» деталей начальных данных характерно для большинства систем, изучаемых синергетикой. В решаемой здесь задаче то распределение, которое формируется на стадии интенсивного горения, не зависит ни от краевых условий, ни от начальных данных.

Из расчетов следует также, что в пределах области локализации температура растет по одному закону, то есть, горение идет согласованно. Это и позволяет говорить о диссипативной тепловой структуре.

Выясним, каковы форма диссипативной структуры, длина области локализации L_f и по какому закону растет температура среды. Применим к уравнению (3.7) метод разделения переменных. То есть решение уравнения (3.7) ищем в виде:

$$T(x,t)=g(t)f(\xi), \quad \xi=x/\varphi(t) \quad (3.9)$$

Подставив (3.9) в (3.7), можно получить соотношения:

$$\begin{aligned} g(t) &= \bar{A}_1 \left(1 - t/t_f\right)^{-1/\beta-1}, \\ \varphi(t) &= \bar{A}_2 \left(1 - t/t_f\right)^{0,5\beta-\sigma-1/\beta-1}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

и нелинейное уравнение для определения функции $f(\xi)$:

$$\frac{1}{\beta-1} \frac{f}{t_1} + \frac{\beta-\sigma-1}{2} \frac{f_\xi \xi}{\beta-1} = f^\sigma f_{\xi\xi} + f^\beta, \quad (3.11)$$

где \bar{A}_1 и \bar{A}_2 – константы, определяемые параметрами β , σ , k_0 , q_0 .

Функция $g(t)$ задает закон роста максимальной температуры нагретой области, $\varphi(t)$ – закон изменения полуширины профиля температуры. Из (3.10) следует, что при $\beta=\sigma+1$ полуширина профиля температуры $T(x,t)$ остается постоянной, рис. 3.7, а иллюстрирует этот вывод.

Функция $f(\xi)$ определяет форму структуры. При $\beta=\sigma+1$ уравнение (3.11) можно решить аналитически, то есть, не прибегая к помощи компьютера. Решение, описывающее локализованную структуру, имеет вид:

$$f(\xi) = \left[\cos^2 \left(\frac{\pi \xi}{L_f} \right) \right]^{1/(\sigma+1)}, \quad (3.12)$$

где $L_f = \frac{2\pi}{\sigma} \sqrt{\sigma+1} \sqrt{\frac{k_0}{q_0}}$ – величина области локализации при любых σ ,

k_0 , q_0 . Форма структуры и величина L_f совпадают с тем, что дают компьютерные расчеты (рис. 3.7, а).

Из формулы (3.9) следует, что распределение температуры с течением времени, остается подобным себе: оно просто растягивается в определенное число раз вдоль осей x и T . Такие решения получили название «автомодельных» (английский эквивалент этого термина «самоподобные решения»). При исследовании различных уравнений часто используются решения вида $f(x-ct)$, относящиеся к этому же классу, которые описывают бегущие волны.

Для рассматриваемой здесь нелинейной задачи (3.7)–(3.8) не действует принцип суперпозиции. Здесь нельзя составить общее решение из известного набора частных решений, как это можно сделать в случае линейного уравнения теплопроводности. Действительно, если изменить начальные данные в несколько раз, то это приведет не к умножению решения на постоянную величину, а к процессу, идущему в совершенно другом темпе, с другим временем обострения. Кроме того, из проведенных расчетов и результата (3.10), (3.12) следует, что любое распределение при $t \rightarrow t_f$ выходит на автомодельное решение. И хотя принцип суперпозиции не действует, можно предсказать, какие структуры возникнут на стадии интенсивного горения.

Рассмотрим поведение системы при фиксации начального распределения, но при изменении параметров нелинейной среды β и σ .

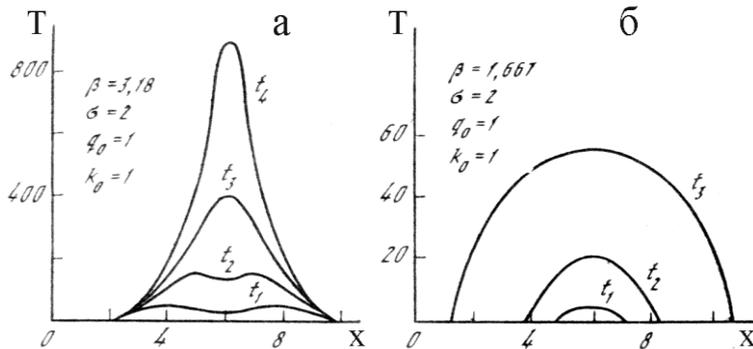


Рис. 3.8. Тепловые структуры:

а – LS-режим с обострением; процесс локализован, полуширина распределения температуры сокращается со временем; $t_1=0,0$; $t_2=2,15 \cdot 10^{-4}$; $t_3=2,38 \cdot 10^{-4}$; $t_4=2,44 \cdot 10^{-4}$;

б – тепловые волны растущей амплитуды, HS-режим с обострением; $t_1=0,0$; $t_2=0,69$; $t_3=0,875$

но возрастает, в этом случае говорят, что имеет место HS-режим. Когда $\beta=\sigma+1$, полуширина постоянна, говорят, что наблюдается S-режим. Результаты компьютерных расчетов (рис. 3.8) показывают также, что если $\beta>\sigma+1$ (LS-режим), то полуширина профиля сокращается, процесс локализован, формируется диссипативная структура. Когда $\beta<\sigma+1$ (HS-режим), наблюдаются тепловые волны, растущие в режиме с обострением. В обоих случаях имеет место «забывание» деталей начальных условий.

распределения, но при изменении параметров нелинейной среды β и σ . Тогда из (3.9), (3.10) следует: 1) если $\beta>\sigma+1$, то $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_f$ и 2) если $\beta<\sigma+1$, то $\varphi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_f$. В первом случае полуширина распределения температуры должна сокращаться, реализуется режим, который называют LS-режимом с обострением; во втором случае полуширина распределения температуры неограниченно

Таким образом, **HS-режим** – один из типов развертывания процессов в режиме с обострением в открытой нелинейной среде, когда отсутствует локализация, происходит размывание структур. Это – режим неограниченно разбегающейся от центра волны. Данный режим имеет место в том случае, когда диссипативный, размывающий фактор интенсивнее, чем фактор локализации, работа нелинейного источника энергии.

LS-режим – такой тип развертывания процессов в режиме с обострением, когда происходит все более интенсивное развитие процесса во все более узкой области вблизи максимума. Это – «сходящиеся волны горения», эффективная область локализации которых сокращается. Он имеет место тогда, когда фактор, создающий неоднородности в среде (действие нелинейных объемных источников), работает значительно сильнее, чем рассеивающий фактор. Основная особенность LS-режима состоит в том, что он развивается медленнее HS-режима. («L» – «lower», означает низкий). «Тепловая энергия» слабее «размазывается» по пространству, чем в случае HS-режима. LS-режим в открытой нелинейной среде имеет ряд качественно различных решений, их множественность обуславливает спектр структур разной сложности – режим «горения», развития процесса с обострением, когда на асимптотической стадии процесс локализуется и развивается внутри некоторой фундаментальной длины L.

В общем плане режимы с обострением рассматриваются как промежуточная асимптотика, дающая описание реальных процессов в некотором интервале масштабов.

Такая асимптотика характерна для широкого класса систем с сильной положительной обратной связью. В качестве экспериментального подтверждения существования таких режимов часто приводят данные из теории управления или теории катастроф. Так на рис. 3.9 представлены характеристики, описывающие две сложно организованные иерархические системы: фондовый рынок и тектонический разлом – незадолго перед катастрофой. В обоих случаях наблюдается быстрый катастрофический рост, на который накладываются ускоряющиеся колебания. Сглаженные кривые хорошо описываются формулой:

$$I(t) = A + B(t_f - t)^{-\alpha} [1 + c \cdot \cos(\omega \log(t_f - t) - \varphi)]$$

здесь t_f – момент времени обострения, ω – частота колебаний результатов (см. рис. 3.9.), A, B, c, α – параметры.

Приведенные данные показывают, что разные катастрофические события могут развиваться по одним законам. В связи с анализом режимов с обострением возникают две нерешенные проблемы: *во-первых*, до сих пор не поняты системные механизмы возникновения положительной обратной связи и отсутствуют соответствующие динамические модели; *во-вторых*, в отличие от традиционных, ранее изучавшихся моделей

(например, в настоящем разделе), описывающих режимы с обострением, на рис. 3.9 наблюдаются колебания. Частота этих колебаний меняется, и

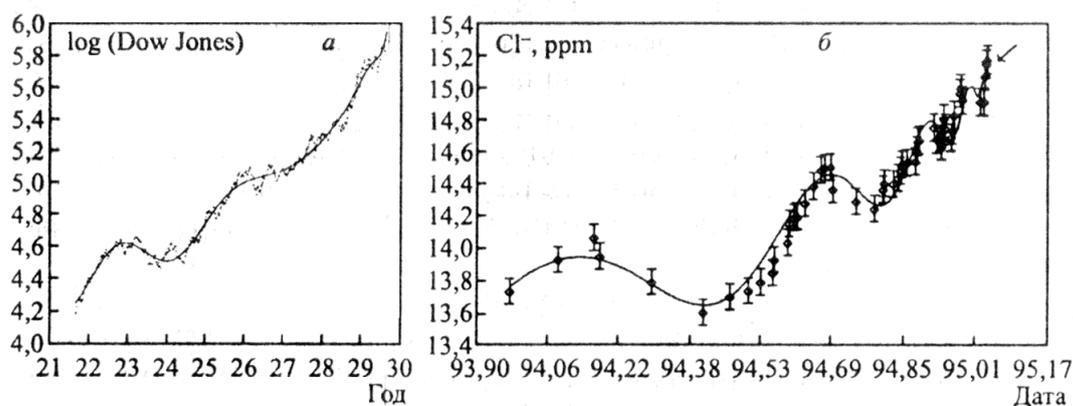


Рис. 3.9. Вид зависимостей от времени, возникающих перед катастрофами в сложных системах:

a – зависимость логарифма индекса Доу-Джонса перед Великой депрессией с 1921 по 1930 год;

б – зависимость от времени логарифма концентрации ионов хлора в атмосфере в районе землетрясения пред катастрофическим землетрясением в Кобе в 1995 году, даты указаны в сотых долях года. Точки – данные измерений, сплошная кривая – результат сглаживания экспериментальных данных.

(Иллюстрации взяты из работы: Режимы с обострением: эволюция идеи / Под. ред. Г.Г. Малинецкого. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – с.10.)

это изменение может рассматриваться как важный предвестник надвигающейся катастрофы. Поэтому важно понять природу колебаний, наблюдающихся в сложных иерархических системах при приближении к моменту катастрофы. Видимо, с ответами на эти вопросы будет связано дальнейшее развитие теории.

Теория режимов с обострением оказалась применимой и к анализу демографических процессов. Хорошо известно, что согласно исследованиям монаха и экономиста Мальтуса, численность населения Земли растет в геометрической прогрессии (по экспоненциальному закону). Но как показали недавно проведенные С.П. Капицей демографические, исторические и антропологические исследования, Мальтус был неправ. На самом деле, практически на всем протяжении истории человечества скорость роста народонаселения была не постоянной, а все время ускорялась. То есть зависимость гиперболическая, что соответствует модели теории режимов с обострением:

$$N \sim \frac{1}{t_f - t},$$

где момент обострения t_f соответствует 2025 году. Это значит, что к этому времени население Земли должно стать неограниченно большим. Но

в последние десятилетия скорость роста народонаселения стала уменьшаться – происходит глобальный демографический переход, в результате которого население Земли в XXI веке должно стабилизироваться на уровне 10-12 млрд. человек.

Для объяснения этого перехода С.П. Капица выдвинул гипотезу *демографического императива*, в соответствии с которой единственным параметром порядка в развитии цивилизации, которому подчиняются, в конечном счете, все остальные переменные, является N – число людей на планете. А квадратичный закон роста населения $\frac{dN}{dt} = \alpha N^2$ он объяснил информационным взаимодействием (число потенциальных связей между людьми $\sim N^2$). Демографический спад Капица объяснил тем, что когда характерное время информационного взаимодействия становится порядка времени смены поколений, то информационное взаимодействие уже не успевает подстраиваться под происходящие изменения, а поэтому человечество не успевает развиваться в прежнем режиме.

3.3. Явления самоорганизации в химии

В разделах 3.1 и 3.2 были рассмотрены явления самоорганизации, обусловленные обменом энергией между системой и окружающей средой. В настоящем разделе рассматриваются ситуации, когда химически активная система обменивается с внешней средой веществом.

Под явлениями самоорганизации в химии традиционно понимают химические реакции каталитического окисления различных восстановителей, протекающие в автоколебательном режиме. При этом наблюдаются колебания концентраций окисленной и восстановленной форм катализатора и множество пространственно-временных диссипативных структур.

3.3.1. Реакция Белоусова-Жаботинского (БЖ)

Современная история исследований колебательных химических реакций в жидкой фазе началась в 1951 году, когда советский химик Б.П. Белоусов открыл периодическое поведение химической реакции при окислении лимонной кислоты броматом калия (в присутствии в качестве катализатора соли церия). Он обнаружил колебания концентраций окисленной и восстановительной форм церия в реакции взаимодействия лимонной кислоты с броматом калия. Раствор регулярно менял свою окраску от бесцветной (обусловленной наличием Ce^{4+}) к желтой (обусловленной Ce^{3+}), затем снова к бесцветной и т.д. Белоусов провел подробное исследование этой реакции и, в частности, показал, что период

колебаний сильно уменьшается с повышением кислотности среды и температуры. Реакция была удобна для лабораторных исследований. Колебания можно было легко наблюдать визуально, а их период находился в пределах 10-100 секунд, совпадая с естественным масштабом времени человека-наблюдателя. Позже Белоусов открыл аналогичную периодическую реакцию, в которой были получены более яркие цвета. Так, при смешивании в пробирке растворов серной и малоновой кислот, сульфата церия и бромида калия при добавлении в качестве индикатора ферроина реагирующая смесь начинает периодически менять цвет с голубого (обусловленного Fe^{3+}) на красный (обусловленный Fe^{2+}). В пробирке колебания быстро затухают. Но в открытой системе, изображенной на рис. 3.10, они могут продолжаться сколь угодно долго.

Допустим, что реакция протекает в условиях, показанных на рис. 3.10. Благодаря интенсивному переносу веществ (реагентов), которые поступая в реактор перемешиваются, в каждый момент времени система остается практически однородной в пространстве.

Такое экспериментальное устройство позволяет также довольно легко управлять удаленностью системы от равновесия: достаточно изменить скорости, с которыми химические вещества поступают в систему (или

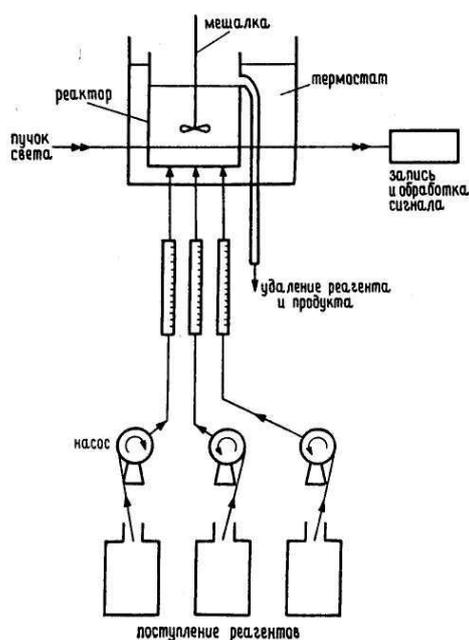


Рис. 3.10. Схема открытой химической системы (химический реактор).

выбывают из нее), меняя тем самым время пребывания этих веществ в реакционном объеме. Очень большие времена пребывания реагентов приводят по существу к реализации замкнутой системы, и в таких условиях можно ожидать, что поведение системы будет подобно равновесному, подчиняющемуся принципу детального равновесия. Путем уменьшения времени пребывания, не допускается выравнивания скоростей прямой и обратной реакций. При этом поведение системы будет неравновесным. Именно это и показывает эксперимент. В случае очень больших времен пребывания в

системе достигается однородное стационарное состояние – концентрации остаются постоянными во времени. Это привычное для химиков состояние наделено всеми качественными свойствами химического равновесия. Оно является аналогом режима теплопроводности, реализуемого в системе Бенара (разд. 3.1) при небольшой разности температур между пластинами.

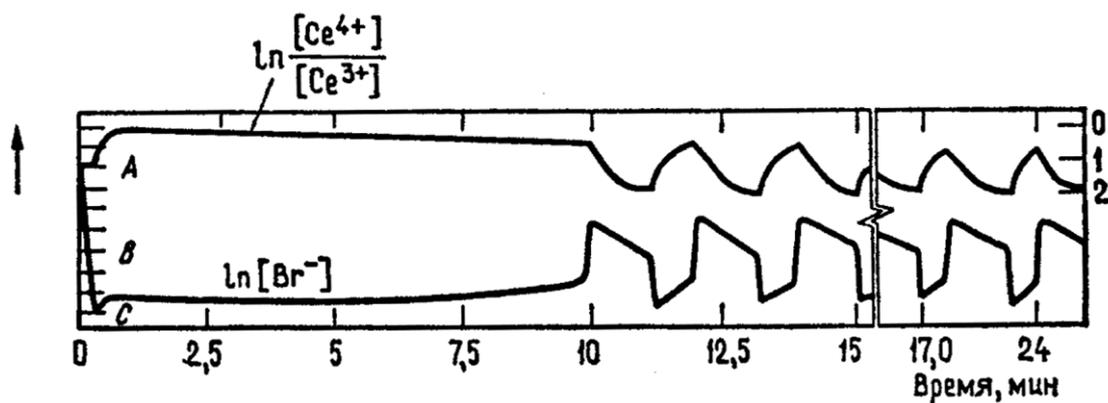


Рис. 3.11. Зависимость логарифма концентраций от времени в ходе реакции Белоусова-Жаботинского. Измерено потенциометрическим методом. Начальные значения концентраций: $\text{CH}_2(\text{COOH})_2=0,032 \text{ M}$, $\text{KBrO}_3=0,063 \text{ M}$, $\text{Ce}(\text{NH}_4)_2(\text{NO}_3)_5=0,01 \text{ M}$, $\text{H}_2\text{SO}_4=0,8 \text{ M}$, $\text{KBr}=1,5 \cdot 10^{-5} \text{ M}$.

Если теперь уменьшить время пребывания, получится совершенно иной тип поведения. А именно, в какой-то момент времени вся система внезапно окрашивается в голубой цвет (если в качестве красящего вещества используется ферроин), что указывает на избыток ионов Fe^{3+} . Спустя время от долей минуты до несколько минут (в зависимости от параметров эксперимента) голубой цвет сменяется красным, указывая на избыток ионов Fe^{2+} . Этот процесс так и продолжается: голубой, красный, голубой, красный и т. д. Эта ритмическая смена цвета с регулярными периодом и амплитудой, зависит лишь от параметров системы и тем самым является собственной характеристикой системы. Эти колебания можно рассматривать как *химические часы* – устройство для измерения времени с помощью внутренней динамики системы. Изменение концентраций при этом показано на рис. 3.11. Используя понятие времени, можно сказать, что в режиме однородного стационарного состояния (которое асимптотически устойчиво!) для системы не существует выделенного направления времени. В периодическом же режиме время проявляется в виде фазы периодического движения и соответственно в заранее заданной последовательности максимумов различных концентраций, сменяющих друг друга. Такой переход называют *нарушением временной симметрии*.

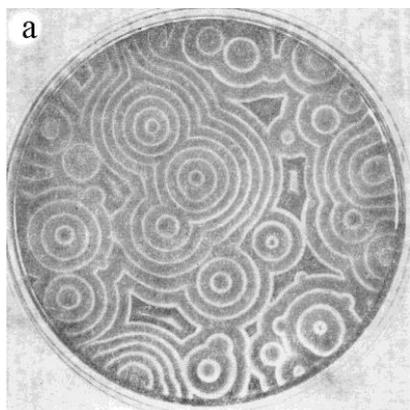
С точки зрения теории колебаний существование незатухающих колебаний в системе как в целом предполагает, что ее отдельные части действуют согласованным образом путем строгого поддержания между ними определенных соотношений между фазами, в противном случае внешние возмущения сделали бы колебания невозможными. Иными словами, как и при формировании ячеек Бенара (разд. 3.1), неравновесность приводит к *крупномасштабным корреляциям*.

Детальные эксперименты показывают, что в случае, когда время нахождения реагентов в реакционном объеме имеет промежуточное значение по отношению к временам, характерным для двух осцилляторных режимов, система демонстрирует сложное непериодическое поведение. Появление такой *химической турбулентности* иллюстрирует тенденцию многих неравновесных систем (как природных, так и инженерных) к хаотической эволюции при соблюдении определенных условий. Кроме того, оно выявляет следующее важное свойство химических систем: если в гидродинамике и в большинстве других физических примеров сложное поведение неизменно связано с пространственной неоднородностью, то *в химии даже пространственно однородные системы могут иметь сложное поведение во времени*. Причина такой особенности состоит в том, что химические системы наделены механизмами типа автокатализа, которые связаны с особыми молекулярными структурами и особой реакционной способностью определенных компонентов, что позволяет таким системам переходить в новые состояния +путем усиления (или ослабления) влияния слабых возмущений.

3.3.2. Реакция Белоусова-Жаботинского в неоднородной системе. Химические автоволны.

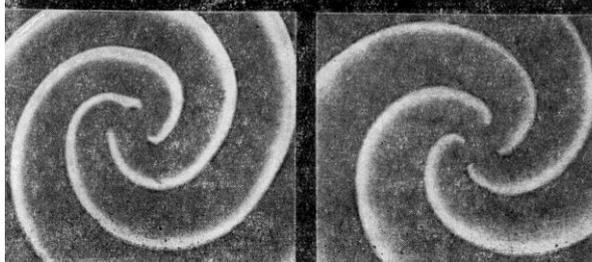
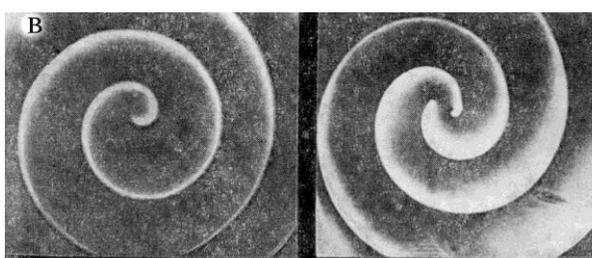
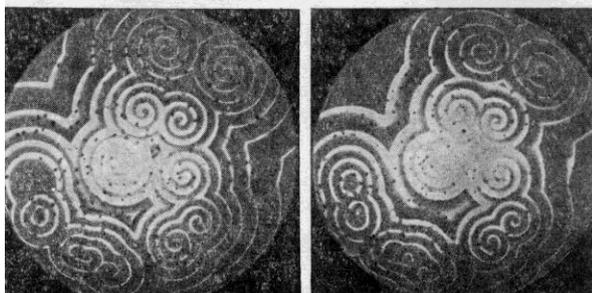
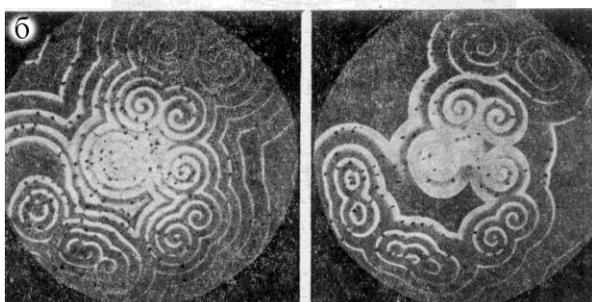
Если реакция Белоусова-Жаботинского протекает без перемешивания, то это приводит к развитию пространственных неоднородностей. Для постановки такого эксперимента достаточно чашки Петри, в которую тонким слоем наливают реагенты. При этом на поверхности неоднородной системы можно наблюдать регулярные пространственно-временные картины в виде распространяющихся волновых фронтов. Плоское изображение пространственно-временных картин (рис. 3.12) дает лишь слабое представление об их красоте и динамике развития. Показанные на рисунке волны создаются в тонком слое реагирующих веществ. Можно выделить следующие виды волн (рис. 3.12): *кольцевые фронты* (а), имеющие почти цилиндрическую симметрию относительно оси, перпендикулярной плоскости слоя, и напоминающие мишень для пулевой стрельбы, и *спиральные фронты* (б), вращающиеся в пространстве по или против часовой стрелки. Можно также получить, хотя и при специфических условиях, *многозаходные спирали*, показанные на рис. 3.12в. В любом из этих случаев волновые фронты распространяются на макроскопические расстояния без искажений и с заданной скоростью, что эквивалентно некоторому химическому сообщению, посылаемому из центра излучения волн. Здесь снова имеет место рождение сложного.

Образование волновых фронтов можно связывать с нарушением пространственной симметрии. Нарушение симметрии в случае картины типа мишени, показанной на рис. 3.12, а, весьма сходно с нарушением симметрии в задаче Бенара:



по существу, и там и здесь система теряет

инвариантность вдоль определенного направления в пространстве. С другой стороны, нарушение симметрии, связанное с образованием спиралей (рис. 3.12, б, в), носит совершенно иной характер, поскольку оно связано с понятием *хиральности* (упрощенно — направлением вращения).



Этот тип асимметрии вещества всегда интересовал ученых. Так, наблюдение над морфологической асимметрией живых организмов позволило ввести понятия правого и левого еще философами античного мира. А основатель биохимии Луи Пастер (1822–1895 гг.) исследовал оптическую асимметрию органических молекул, которая проявляется как вращение ими вектора поляризации света в выделенном направлении (вправо или влево). Он открыл, что характерной особенностью всех белковых молекул, входящих в состав живых организмов (человека, животных, растений и т.д.), является то, что все они являются левовращающими вектор поляризации света изомерами. А в неживой природе существуют только правовращающие свет изомеры белков. Пастер назвал это свойство хиральностью и считал его одним из фундаментальных характеристик жизни. Поэтому тем более удивительно наблюдать, как это

Рис. 3.12. Химические волны

свойство естественным образом возникают из внутренней динамики достаточно простых физико-химических систем.

Описанное выше поведение не является исключительной особенностью реакций Белоусова-Жаботинского. Оно присуще также множеству других реакций в гомогенной фазе с участием столь же простых веществ.

3.3.3. Химические реакции в сочетании с диффузией. Структуры Тьюринга.

В 1952 году А.М. Тьюринг теоретически установил, что в первоначально однородной среде, в которой протекают химические реакции с диффузией, может установиться периодическое в пространстве и стационарное во времени распределение концентраций.

Реакция Белоусова-Жаботинского (БЖ) – первая из химических систем, в которой экспериментально были обнаружены структуры Тьюринга еще в конце 50-х гг. Причем они наблюдались при комнатной температуре в очень простых экспериментальных условиях без использования специального реактора, непрерывно снабжающего реакционный слой новыми реагентами. Простейшие структуры Тьюринга представляют собой горизонтальные, различным образом окрашенные слои реакционной смеси, образующиеся в пробирке в процессе реакции БЖ. Но если система замкнута, то слои со временем исчезают.

Более сложную картину получили в 90-е гг. в устройстве, состоящем из двух плоских оптических стекол, разделенных тонкой (80-100 мкм) тефлоновой прокладкой с внутренним диаметром 25 мм и внешним 50 мм. Внутренняя область реактора (диаметром 25 мм) заполнена реакционной аэрозольной микроэмульсией (АМ) так, что свободного места (пузырей воздуха) нет (АМ – физическая среда, в которой могут диффундировать, сталкиваться, сливаться и разделяться капельки воды нанометрового диаметра). Оптические стекла слегка сжаты. За структурами в реакторе наблюдают через стереомикроскоп, снабженный цифровой (CCD) камерой, соединенной с компьютером. Освещение реактора производится через интерференционный фильтр с длиной волны пропускания, соответствующей максимуму поглощения используемого катализатора. Типичные стационарные во времени структуры Тьюринга показаны на рис. 3.13, *а-в*. Они имеют форму пятен (*а*), пятен с полосами (*б*) и лабиринта (*в*). Во всех случаях характерный пространственный размер структур Тьюринга около 0,2 мм. На рисунке 3.13, *б* показаны структуры, образующиеся из набегающих триггерных волн, которые вначале, когда они вплотную приближаются к зоне структур Тьюринга, как бы застывают и образуют полосы, а затем медленно (минуты и десятки минут) разваливаются на пятна. Так как эксперимент проводится в закрытом реакторе без

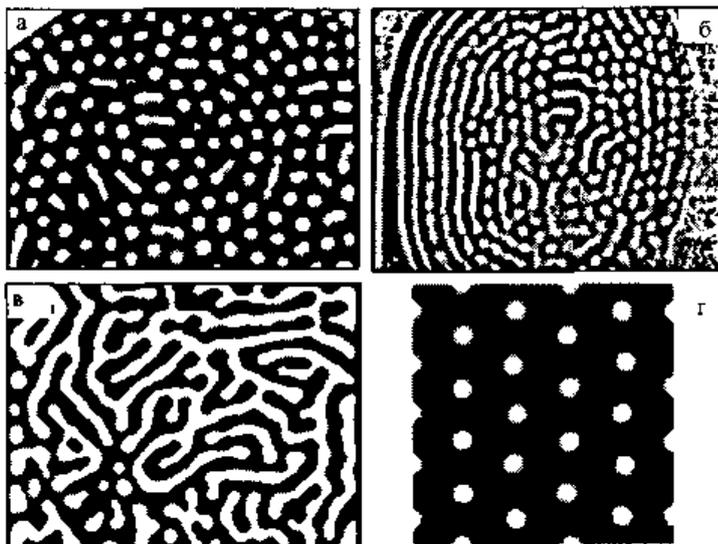


Рис. 3.13. Структуры Тьюринга в системе «реакция Белоусова-Жаботинского с АМ» (а–в). Размер кадра: (а, в) – 2,6x1,9 мм, (б) – 3,8x2,8 мм, (г) – 50x50 (безразмерные единицы, переход к сантиметрам осуществляется умножением на $(10^{-5})^{1/2}$). Черный цвет соответствует большей концентрации ферроина, белый – большей концентрации ферриина.

процесс подстройки (или перестройки) пятен к правильной геометрической форме занимает большое время, которого у закрытой системы нет. Однако в некоторых опытах наблюдались идеально правильные гексагональные структуры Тьюринга.

На сегодня известны три базовых вида структур Тьюринга: гексагональные пятна, полосы и структуры типа пчелиных сот, которые можно рассматривать как инвертированные гексагональные пятна. Эти структуры были обнаружены в эксперименте с хлорид-йодидной системой и в соответствующих компьютерных моделях. Недавно стали появляться сообщения и о более сложных формах структур Тьюринга с такими названиями, как «черный глаз», «белый глаз» и другие. Их образование связано со взаимодействием простейших форм структур Тьюринга (обладающих различными длинами волн), реализующихся в соседних тонких слоях. Из общетеоретических соображений можно сказать, что если лабиринтные структуры, показанные на рис. 3.13в, являются стабильными, то должно существовать бесконечно много различных форм структур Тьюринга. Это аналогично получению регулярных колебаний с любым наперед заданным периодом из хаотических колебаний.

Структуры Тьюринга представляют интерес не только для химиков. Они связаны непосредственно с проблемой морфогенеза, которая является одной из центральных в биологии. Тьюринг пытался с помощью своей модели объяснить, почему некоторые живые организмы (например,

снабжения свежими реагентами, то все структуры живут ограниченное время (несколько часов), а затем плавно исчезают. На рисунке 3.13г приведены для сравнения структуры Тьюринга, полученные путем компьютерного моделирования системы, аналогичной описанной.

Из сравнения видно, что экспериментальные структуры не являются во многих случаях столь правильными гексагональными пятнами, как модельные. Это, по-видимому, обусловлено тем, что

кишечнополостные, черви, многоножки и другие) имеют близкое к периодическому строение. С ее помощью он пытался выяснить механизм возникновения пятен на шкуре животных.

Наибольшую трудность в решении проблемы морфогенеза представляет ответ на вопрос: «Откуда первоначально недифференцированные клетки узнают, каким образом им далее дифференцироваться?» В опытах, произведенных на эмбрионах, показано, что клетка из центральной части тела после пересадки в голову развивалась в глаз. Отсюда следует, что в ДНК отдельных клеток информации о дальнейшей дифференциации нет, клетка получает ее от соседних клеток, после чего начинается дифференциация. Тьюринг предположил, что носителем такой информации служит химическая структура – *морфоген*, возникающая благодаря совместному действию химических реакций и диффузии. В настоящее время выдвинута гипотеза, что при достаточно высокой концентрации морфогенов в работу включаются гены, что и ведет к дифференциации клеток. Следует отметить, что существование морфогенов до сих пор окончательно не доказано, существуют лишь косвенные подтверждения.

На основе подхода Тьюринга был разработан *целый класс моделей реакционно-диффузионного типа*. Эти модели применимы, когда размер изучаемой пространственной структуры много больше размера отдельных клеток. Одна из наиболее известных реакционно-диффузионных моделей морфогенеза принадлежит А. Гиреру и Х. Мейнхардту (модель ГМ). Она основана на гипотезе, что все клетки развивающегося организма могут продуцировать два морфогена: активатор и ингибитор, способные диффундировать в другие клетки. В случае идеального перемешивания морфогенов (когда диффузии нет) система достигнет однородного стационарного состояния. Диффузия морфогенов с одинаковыми скоростями приведет к такому же состоянию. Но при разной скорости диффузии морфогенов любое незначительное пространственное возмущение может привести к неустойчивости, и начинает формироваться некоторая пространственная структура. Такую неустойчивость называют диффузионной, а механизм образования структур – активаторно-ингибиторным.

Модель ГМ описывается системой уравнений:

$$\frac{da}{dt} = \rho_0 \rho + \frac{C_p a^2}{h} - \mu a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial r^2}$$

$$\frac{dh}{dt} = C' a^2 - \beta h + D_h \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}$$

Здесь a и h – продукция активатора и ингибитора; D_a и D_h – коэффициенты диффузии активатора и ингибитора, причем $D_h > D_a$; μa и βh – отток (распад) активатора и ингибитора; r – координата; C , C' , β и μ – постоянные. Процесс продуцирования активатора является автокаталитической реакцией второго порядка (продукт реакции является катализатором этой же реакции). В то же время продуцирование активатора подавляется ингибитором. Оба эти процесса выражаются слагаемым Cra^2/h . Считается, что продукция самого ингибитора тоже является функцией квадрата продукции активатора. Предполагается, также, что имеет место фоновая, постоянная (не автокаталитическая) продукция активатора $\rho_0\rho$.

Эту систему уравнений можно решить только численно. На рис. 3.14 приведены результаты компьютерного моделирования динамики трехмерной модели А. Гирера и Х. Мейнхардта. На нем показаны распределения концентраций активатора и ингибитора в разные моменты времени. Если считать, что активатор стимулирует образование каких-либо морфологических структур (например, головной области, щетинок на покровах тела, лапок и т.д.), а ингибитор их подавляет, то результаты

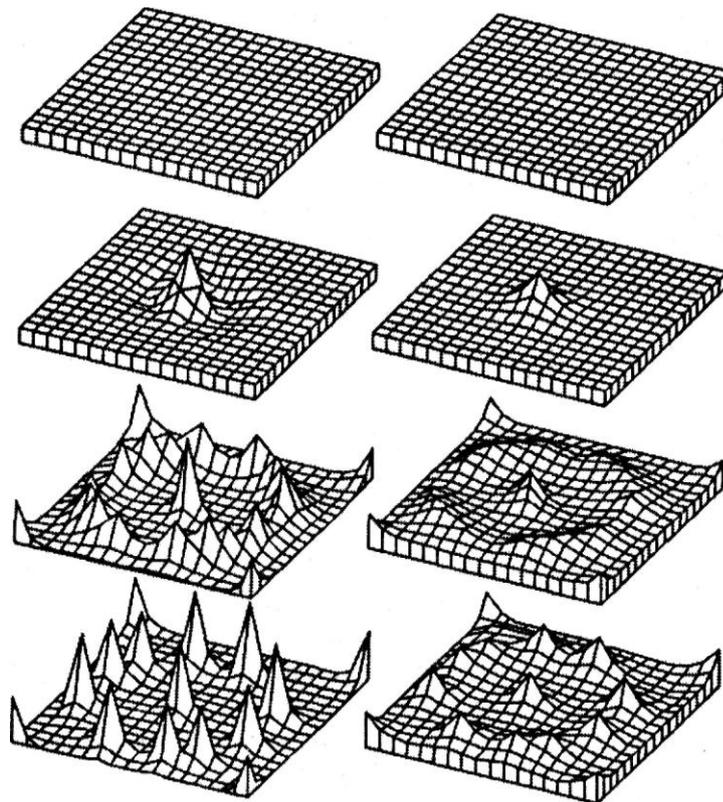


Рис. 3.14. Результаты компьютерного моделирования динамики изменения концентрации активатора (левая колонка) и ингибитора (правая колонка). моделирования динамики модели ГМ можно интерпретировать как возникновение периодичности в образовании упомянутых структур и

наличие «зон запрета». Полагая, что клетки тонко различают концентрацию морфогена, реагируя образованием определенной структуры, можно предположить, что модель ГМ описывает сколь угодно детальный морфогенез и дифференцировку.

Модель, претендующую на то, чтобы описать универсальный механизм формирования структуры окраски шкуры у млекопитающих, предложил Дж. Марри (*Marri Дж.* Отчего у леопарда пятна на шкуре. // В мире науки. 1988. № 5). Такие структуры, прежде всего, зависят от геометрии и размеров области, в которой протекает соответствующая реакция. Последующий рост млекопитающего может исказить первоначальную структуру окраски.

Наиболее простым примером являются структуры, возникающие на хвостах животных. На рис. 3.15 изображены структуры, полученные с помощью реакционно-диффузионной модели для сужающихся цилиндров



Рис. 3.15. Узоры на хвосте у леопарда (слева), гепарда и ягуара (в середине) и генетты (справа), а также структуры, полученные с помощью реакционно-диффузионной модели для сужающихся цилиндров разного диаметра (показаны справа на каждом рисунке).

разного диаметра, а также для сравнения показаны узоры на хвостах у крупных млекопитающих. Видно, что с сужением области моделирования на поверхности возникают только кольцеобразные полосы, но с увеличением радиуса цилиндра на поверхности могут возникать и пятна. Результаты численного расчета, представленные на рис. 3.15, получены при одинаковых параметрах модели, но разных геометриях и размерах анализируемой области. Результаты реакционно-диффузионной модели довольно хорошо соотносятся с типичными узорами на шкуре у леопарда, гепарда, ягуара и генетты.

Из модели также следуют запреты на структуры определенного типа, которые обусловлены размерами и формой зародыша. В частности, модель допускает, что пятнистое животное может иметь полосатый хвост, но у

полосатого животного не может быть пятнистого хвоста. Чтобы изучить влияние размеров в случае более сложной геометрии, были рассчитаны структуры для обобщенной формы животного, состоящей из тела, головы, четырех конечностей и хвоста при постепенном увеличении размеров животного (рис. 3.16). При малых размерах не возникало никаких структур. По мере увеличения размеров происходили последовательные бифуркации: различные узоры внезапно возникали и исчезали. При увеличении размеров структуры получались более сложными и с большим числом пятен. Однако при очень больших размерах шкуры структура узора делается столь мелкой, что окраска становится почти однородной по цвету.

Если реакционно-диффузионная модель верна, то для объяснения влияния размеров зародыша на структуру раскраски его шкуры огромное значение имеет момент времени активации соответствующего морфогена. Марри для простоты предположил, что константы скоростей реакции и диффузионные коэффициенты примерно одинаковы для разных животных (что неочевидно). Если морфоген активируется генетически на ранней стадии развития, тогда окраска многих небольших животных, имеющих короткие сроки беременности, должна быть однородной по цвету. Чаще всего это соответствует действительности. Для поверхностей большей площади в момент активации существует возможность того, что животное наполовину будет черным, а наполовину белым. Примерами служат муравьед и безоаровый козел. По мере увеличения размеров возрастает сложность возникающего рисунка. На практике наблюдается нарастание сложности окраски от безоарового козла к зебре, а затем к леопарду и гепарду. Наконец, шкуры у очень больших животных снова должны быть однородными по цвету, что имеет место у слонов, носорогов и бегемотов.

Реакционно-диффузионная модель дает структуры, которые однозначно зависят от начальных условий, геометрии и размеров. При заданных геометрии и размерах получающиеся структуры для разных начальных условий в общем качественно одинаковы, но имеют свои особенности. Например, если структура пятнистая, то меняется только распределение пятен. Этот результат согласуется с тем, что внутри одного вида узор на шкуре каждого отдельного животного отличается незначительными особенностями.

Еще раз отметим, что все структуры были получены Марри только за счет изменения размеров и геометрии реакционной области при фиксации всех других параметров. Даже в этих условиях получено много разнообразных структур. Модель дает объяснение различным аномалиям в раскраске, наблюдаемых у различных животных. Величина аномалий зависит от того, насколько близко произошло изменение значения параметра к бифуркационной точке, в которой происходит качественное изменение структуры.

На раскраску шкуры животных, конечно, влияют и другие факторы: температура, влажность, питание, гормоны, интенсивность обмена веществ

и прочее. Их влияние, вероятно, можно моделировать. Но в данном случае важно то, что реакционно-диффузионная модель получает множество подтверждений. Это не значит, что формирование окраски шкур животных может быть объяснено только этой относительно простой моделью. Она должна совершенствоваться. А экспериментальные исследования помогут доказать или опровергнуть ее.

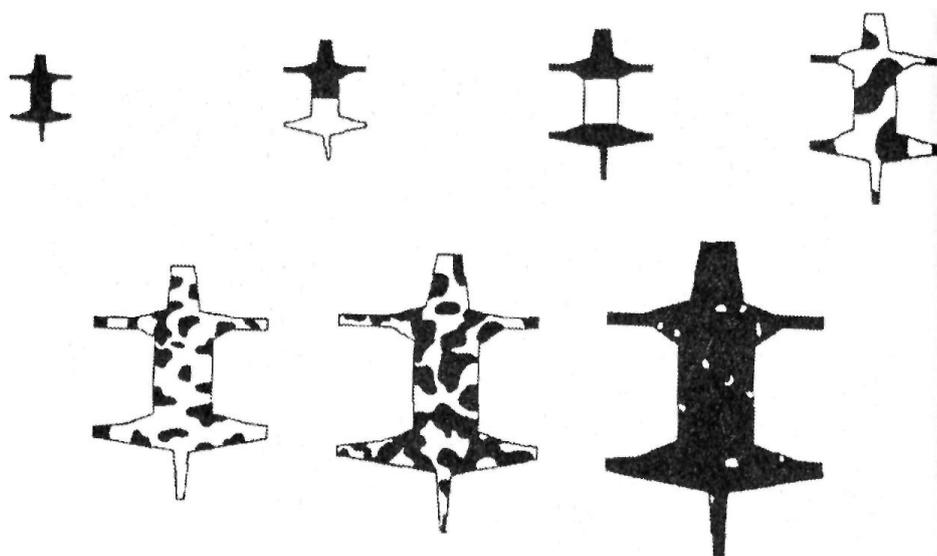


Рис. 3.16. Изменение структуры раскраски при изменении размеров животного. Структуры раскраски получены для обобщенной формы животного. Увеличение размеров при фиксированных остальных параметрах дает поразительное разнообразие структур. Реакционно-диффузионная модель, предложенная Марри, согласуется с теми наблюдениями, что маленькие животные (мыши, крысы) имеют равномерно окрашенные шкуры, животные промежуточных размеров (зебры, леопарды, гепарды) — узорчатые шкуры, а окраска крупных животных (слонов, носорогов) снова однородна

3.3.4. Модель брюсселятора

Описанные выше варианты реакции Белоусова-Жаботинского уже на протяжении многих лет служат толчком для развития моделей, описывающих эффекты, возникающие в химических реакторах. Одной из самых известных моделей, разработанной еще на ранних стадиях изучения реакции, является модель Брюсселятора (название связано с ее разработкой брюссельской научной школой И. Пригожина). Модель была призвана описать распределение по пространству и изменение со временем реагентов сравнительно узкого класса химических реакций. Однако при ее

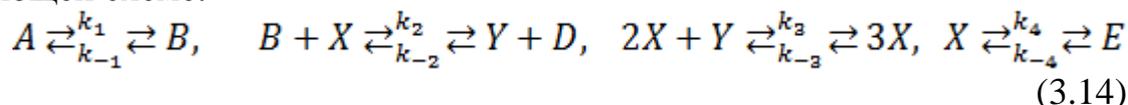
исследовании удалось выяснить свойства диссипативных структур во многих нелинейных системах, в том числе не имеющих отношения к химии.

В соответствии с законом действующих масс, если смешать два химически реагирующих вещества, X и Y , то получится вещество Z ($X + Y \rightarrow Z$). Скорость изменения концентрации вещества Z пропорциональна произведению концентраций веществ X и Y , с коэффициентом пропорциональности, называемом «постоянная реакции k ». Обозначая через X , Y концентрации исходных веществ, через Z продукт их реакции, можно записать:

$$\frac{dz}{dt} = k\tilde{X}\tilde{Y} \quad (3.13)$$

То есть, для того чтобы реакция шла, молекулы X должны сталкиваться с молекулами Y . Вероятность таких столкновений пропорциональна числу молекул X и Y в единице объема (т.е. их концентрациям \tilde{X} и \tilde{Y}). Коэффициент пропорциональности k зависит от размеров молекул, их внутренних степеней свободы, скоростей и т.д. Если в реакции молекулы X числом n взаимодействуют с одной молекулой Y , то изменение концентрации вещества Z пропорционально $X^n Y$.

Пусть в некотором химическом реакторе превращения идут по следующей схеме:



Пусть концентрации веществ A и B в реакторе поддерживаются постоянными, а вещества D и E каким-то образом из реактора удаляются, то есть, в объеме реактора происходит непрерывный обмен веществом (система является открытой). Пусть скорости обратных реакций много меньше скоростей прямых реакций, условно: $(k_{-1}, k_{-2}, k_{-3}, k_{-4}) \ll (k_1, k_2, k_3, k_4)$. Тогда, если обозначить через \tilde{X} концентрацию вещества X , через \tilde{A} – концентрацию вещества A и т.д., из закона действующих масс получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t &= k_1\tilde{A} - (k_2\tilde{B} + k_4)\tilde{X} + k_2\tilde{X}^2\tilde{Y} + \tilde{D}_1\tilde{X}_{xx} \\ \tilde{Y}_t &= k_2\tilde{X}\tilde{B} - k_2\tilde{X}^2\tilde{Y} + \tilde{D}_2\tilde{Y}_{xx} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Множители $\tilde{D}_1\tilde{X}_{xx}$, $\tilde{D}_2\tilde{Y}_{xx}$ в (3.15) учитывают диффузию реагентов \tilde{X}_{xx} и \tilde{Y}_{xx} , концентрации которых в разных точках реактора вследствие диффузии могут быть различными (D_1 , D_2 – соответствующие коэффициенты диффузии). Перейдем к другой системе единиц, сделав в (3.15) замену переменных следующим образом:

$$X = \sqrt{\frac{k_2}{k_4}} \tilde{X}, \quad Y = \sqrt{\frac{k_2}{k_4}} \tilde{Y}, \quad A = \sqrt{\frac{k_1^2 k_3}{k_4^3}} \tilde{A}$$

$$B = \frac{B k_2}{k_4}, \quad D_1 = \frac{D_1}{k_4}, \quad D_2 = \frac{D_2}{k_4} \quad (3.16)$$

тогда легко записать систему уравнений в частных производных, которую, собственно и называют моделью брюсселятора:

$$\begin{aligned} X_t &= A - (B + 1)X + X^2 Y + D_1 X_{xx} \\ Y_t &= BX - X^2 Y + D_2 Y_{xx} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Поскольку вещества X и Y остаются в реакторе, требуется выполнение следующих краевых условий:

$$X_x(0,t) = X_x(l,t) = 0, \quad Y_x(0,t) = Y_x(l,t) = 0, \quad (3.18)$$

l – характерный размер реактора.

Поведение решений

Выявим у системы (3.15) простые решения, например стационарные и однородные по пространству. Для этого все производные в (3.15) положим равными нулю, тогда (3.15) превращается в систему обычных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A - (B + 1)X + X^2 Y &= 0, \\ BX - X^2 Y &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Единственное решение полученной системы алгебраических уравнений (3.19): $X=A$, $Y=B/A$. Данное решение играет особую роль. Рассмотрим, например, как меняется поведение решения, если менять концентрацию вещества B и начальные распределения концентраций $X(x,0)$, $Y(x,0)$.

Если концентрация вещества B невелика, то независимо от начальных условий через определенное время установятся концентрации $X(x,t)=A$, $Y(x,t)=B/A$. Оказывается, такое решение (устойчивое стационарное), на которое независимо от начальных данных выходят изучаемые распределения параметров при небольших внешних воздействиях есть у многих нелинейных систем. Оно получило название *термодинамической ветви*.

На первый взгляд такая картина будет иметь место при любых B . Однако, если зафиксировать начальные концентрации $X(x, 0)$, $Y(x, 0)$ и

увеличивать значение B , то начиная с некоторого критического значения B_0 происходит выход на немонотонные стационарные распределения концентраций, например такие, как показаны на рис. 3.17 и 3.18.

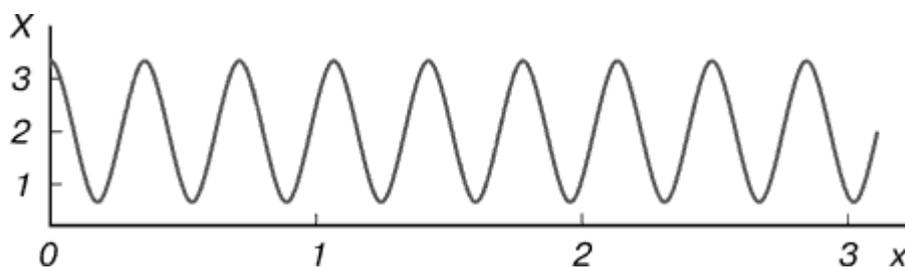


Рис. 3.17. Стационарные диссипативные структуры, возникающие в модели брюсселятора. Параметры нелинейной среды: $A=2$; $B=4,6$; $D_1=1,6 \cdot 10^{-3}$; $D_2=8,0 \cdot 10^{-3}$.

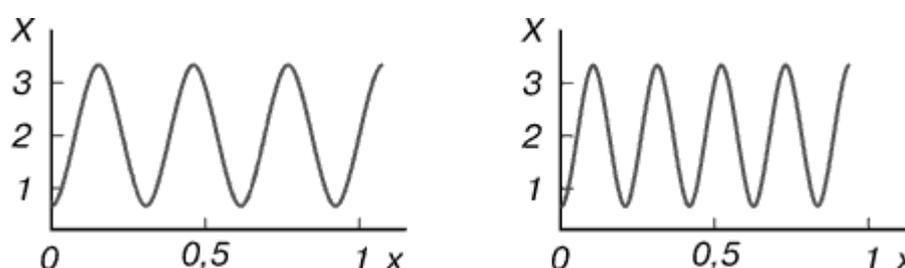


Рис. 3.18. Распределение концентрации X . Два различных типа структур, возможных в одной и той же нелинейной среде при задании различных начальных данных. Параметры нелинейной среды: $A = 2$; $B = 4,6$; $D_1 = 1,6 \cdot 10^{-3}$; $D_2 = 8,0 \cdot 10^{-3}$.

Именно для таких стационарных неоднородных по пространству устойчивых решений, возникающих вне термодинамической ветви, И. Пригожиным было введено понятие диссипативной структуры.

Подчеркнем неожиданность полученного результата. Кажется очевидным, что в реакторе распределение реагирующих веществ по горизонтали будет однородным (поскольку сила тяжести направлена по вертикали). Модель брюсселятора показывает, что это не так: в среде могут возникать структуры путем сосредоточения одних реагентов в одних частях реактора, других – в других. В связи с этим встает множество вопросов, например:

– как отражаются на структурах константы реакций?

– какая концентрация веществ является оптимальной для образования структур?

Ясно, что ответы на такие вопросы важны для многих задач химической технологии. Возвращаясь к модели брюсселятора, заметим, что стационарное решение $X=A$, $Y=B/A$ удовлетворяет краевой задаче при любых B . Следовательно, при $B > B_0$ появляется несколько стационарных решений, то есть, происходит ветвление решений – бифуркация.

До настоящего момента для анализа решений фиксировались начальные концентрации и изменялось значение B . Теперь поступим по-

другому: зафиксируем какое-нибудь значение $B > B_0$ и будем менять профили начальных концентраций $X(x,0)$, $Y(x,0)$. При некоторых значениях B можно наблюдать следующий эффект: при одних начальных данных имеет место выход на одно стационарное решение, при других – на другое. Два стационарных решения, возможных при одних и тех же параметрах, показаны на рис. 3.18. Причем выход на одно и тот же стационарное решение происходит с целого класса начальных концентраций, то есть так же, как в модели тепловых структур (разд. 3.2) имеет место «забывание» начальных данных.

Роль флуктуаций

Если решение $X=A$, $Y=B/A$ получено идеально точно, то оно меняться не будет. Однако расчеты на ЭВМ дают другую картину. Даже очень малые отклонения, которые, как правило, всегда имеют место, быстро нарастают, и далее происходит выход на один из неоднородных устойчивых стационаров. Такие отклонения, называемые флуктуациями, всегда есть в физических, химических и биологических системах. Расчеты на ЭВМ показывают, что флуктуации, в отличие от равновесных процессов, изучаемых классической термодинамикой, определяют всю дальнейшую судьбу нелинейной системы. Термодинамическая ветвь здесь неустойчива.

Этот процесс можно пояснить таким примером. Представим себе маленький шарик в желобе, форма которого показана на рис. 3.19. Если

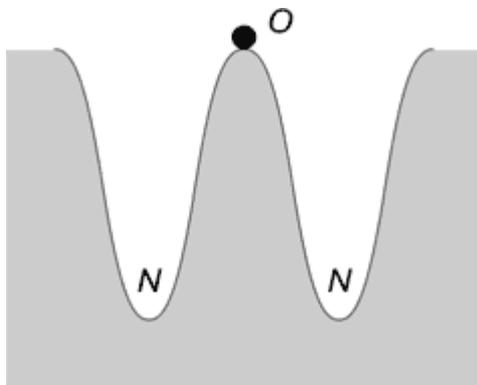


Рис. 3.19. Иллюстрация неустойчивости: флуктуация выводит шарик из неустойчивого равновесия (точка O) в устойчивое состояние равновесия (точки M или N).

поставить его на вершину горба, в точку O , то в соответствии с законами механики он может оставаться на вершине (это соответствует стационарному решению уравнений, описывающих движение шарика), но флуктуации выведут его из равновесия и он начнет двигаться. Постепенно из-за трения энергия шарика будет уменьшаться, и, в конце концов, он остановится на дне желоба в точке M или N . В какой именно точке он окажется, зависит от знака флуктуации, которая вывела шарик из равновесия.

Роль точки O у нас играла термодинамическая ветвь, роль равновесных положений M и N – стационарные устойчивые решения, такие, как показаны на рис. 3.19. Можно сказать, что *причиной возникновения структур являются внутренние свойства системы, а поводом – вносимые флуктуации*. Такое поведение характерно для многих нелинейных неравновесных систем. Флуктуации можно учесть, добавив в правую часть

уравнения (3.14) случайные функции. Они могут отражать процессы, в детали которых сейчас вникать не будем. Отвлекаясь от их конкретного вида, приведем простейший пример случайной функции. Будем бросать монету с интервалом времени Δt и считать, что если в момент времени t выпадает орел, то $F(t) = \alpha$, $\alpha \ll 1$ до момента $t + \Delta t$, если решка – $F(t) = -\alpha$; в момент времени $t + \Delta t$ мы опять бросаем монету. Возможный вид

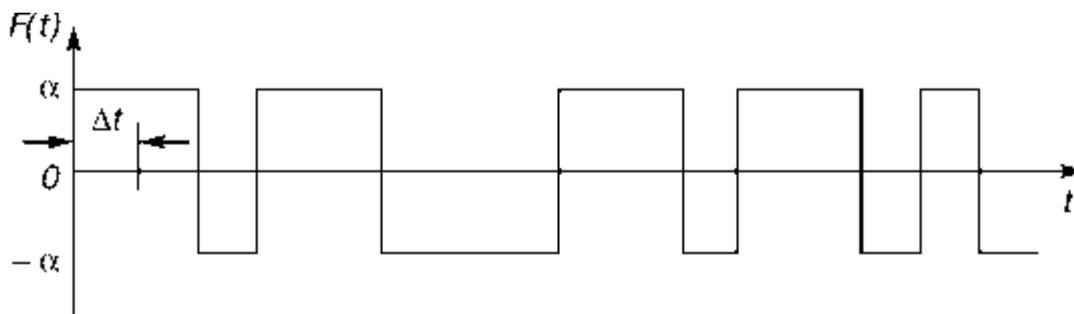


Рис. 3.20. Возможный вид случайной функции $F(t)$.

функции, полученной таким образом, показан на рис. 3.20. «Возможный» потому, что точно неизвестно, когда выпадает орел, а когда решка. Функция действительно случайная. И, бросая монету, можно получить функцию сходную с изображенной здесь.

В необходимости учитывать флуктуации, которые, нарастая, могут изменить основные характеристики процессов, кроется одно из важных отличий сложных систем от простых (нелинейных от линейных). Даже слабое воздействие на нелинейную систему в окрестности B_0 может определить ее дальнейшую судьбу, в то время как вдали от B_0 влияние этого воздействия не ощущается. Здесь имеет место *резонансное возбуждение – воздействие, согласованное с внутренними свойствами нелинейной системы и сильно влияющее на нее.*

Одной из основных причин интереса к модели брюсселятора состоит в том, что она отражает общие черты многих систем, где возникают структуры и возможны явления самоорганизации. Необходимые условия такого поведения обычно формулируют следующим образом:

1. Система является открытой, то есть возможен обмен энергией и веществом с окружающей средой.
2. Макроскопические процессы происходят согласованно (кооперативно, когерентно). В рассмотренных нами примерах такое согласование обеспечивали диффузионные процессы.
3. Отклонения от равновесия превышают критическое значение, т.е. рассматриваются состояния, лежащие вне термодинамической ветви.
4. Процессы рассматриваются в таком диапазоне параметров, когда для их описания необходимы нелинейные математические модели.

3.4. Кооперативная самоорганизация при работе лазера

В качестве примера физической системы, упорядоченность которой является следствием внешнего воздействия, рассмотрим лазер.

При самом грубом описании лазер это некая трубка, в которую поступает свет от некогерентного источника (обычной лампы), а выходит из нее узконаправленный когерентный световой пучок; при этом выделяется некоторое количество тепла (рис. 3.21). Термин «*когерентность*» означает существование устойчивых пространственно-временных соотношений, типичных для волнового движения. Этим соотношениям удовлетворяют как электромагнитное поле внутри лазерного резонатора, так и выходящий световой пучок. Свет от обычной лампы, конечно, не когерентный, так как между отдельными актами излучения нет корреляций.

По своей принципиальной схеме лазер – это м система состоящая из активных атомов, т. е. из атомов, поглощающих и испускающих свет определенной частоты, которая заключена между двумя зеркалами (в оптическом резонаторе). Как показано на рис. 3.22, одно из двух зеркал полупрозрачное, поэтому часть образовавшегося в резонаторе излучения может выходить наружу. Когда поступающее в оптический резонатор излучение от внешнего источника (оптическая накачка) по своей

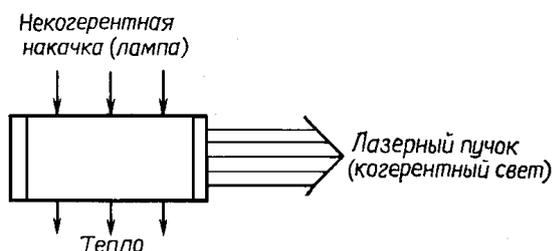


Рис. 3.21. Простейшая схема лазера

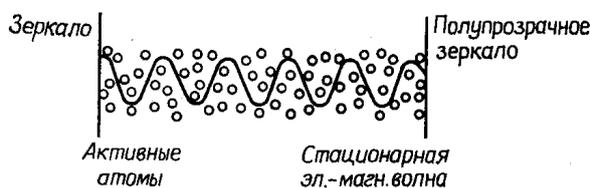


Рис. 3.22. Схема генерации стоячей электромагнитной волны

мощности превышает некоторое пороговое значение, в оптическом резонаторе устанавливается стоячая электромагнитная волна. В этих условиях лазер открытая система, поддерживаемая в стационарном термодинамическом состоянии упорядочения вдали от равновесия. Если выключить лампу, система вернется в равновесное состояние.

Для того, чтобы пояснить, что означает когерентность в отношении актов излучения рассмотрим работу лазера, исходя из спектра его уровней и их относительных заселенностей (рис. 3.23). Рис. 3.23а отвечает ситуации, когда накачка выключена. При этом основной нижний уровень густо заселен; для простоты рассматривается только один возбужденный уровень, который в данном случае почти пуст. Электроны могут переходить с одного уровня на другой, излучая или поглощая свет в

соответствии с законами обычной спектроскопии. Если накачка включена, но мощность ее не достигает пороговой, ситуация изменится, как показано на рис. 3.23б, где пустыми кружками отмечены места, освободившиеся в результате того, что находившиеся на них электроны поглотили энергию накачки и перешли на верхний уровень.

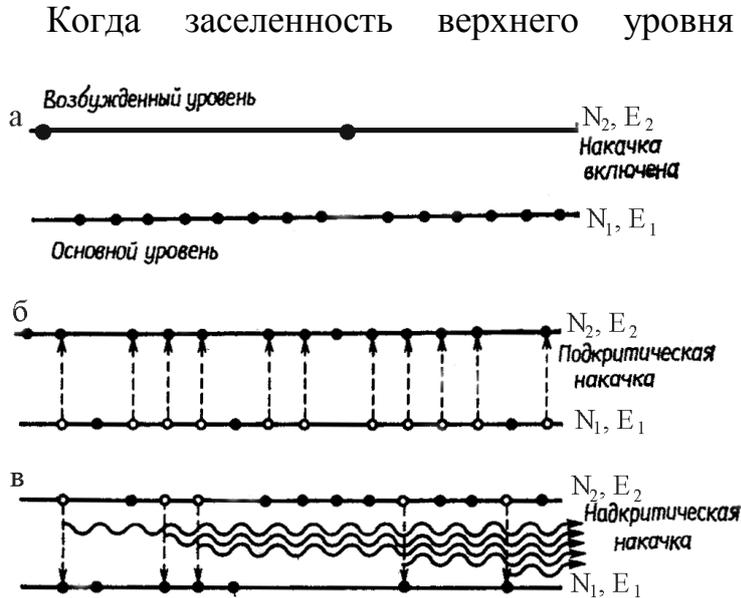


Рис. 3.23. Схема возникновения вынужденного излучения: N_i, E_i ($i=1,2$) – населенности и энергии уровней.

Когда заселенность верхнего уровня становится критической, наблюдается кооперативный эффект (рис. 3.23в): при переходах на основной уровень испущенный каким-либо одним электроном фотон вызывает испускание второго фотона, затем оба фотона вызывают испускание третьего и т. д. Такой процесс называется эйнштейновским вынужденным излучением. Другими словами, при достижении критического порога акты испускания фотонов становятся

коррелированными.

В состоянии равновесия населенности уровней N_1 и N_2 (см. рис. 3.23) удовлетворяют уравнению Больцмана:

$$N^2 \sim N_1 \exp \frac{-E_2 + E_1}{kT}, \quad (3.20)$$

где E_1 и E_2 – энергии уровней. Пусть атомы активной среды возбуждаются с помощью внешней накачки на частоте $\nu = (E_2 - E_1)/h$. Скорость изменения числа фотонов dx/dt в полости, занимаемой рабочим телом в каждый момент времени можно рассматривать как разность между *приростом* (увеличением числа фотонов в полости, испущенных в результате переходов возбужденных атомов в нижнее энергетическое состояние) и *убылью* (уменьшением числа фотонов в полости за счет утечки через полупрозрачные стенки полости). Прирост A пропорционален числу фотонов в полости и числу атомов N , возбуждаемых в единицу времени, и, следовательно, пропорционален произведению этих величин. Таким образом, $A = GNx$, где G – коэффициент пропорциональности, характеризующий восприимчивость активной среды и интенсивность

источника накачки. Убыль B просто пропорциональна числу фотонов в полости: $B=\tau x$, где τ – коэффициент, характеризующий степень прозрачности отражающих зеркал. Таким образом:

$$dx/dt=GNx-\tau x \quad (3.21)$$

Поскольку с испусканием фотонов число возбужденных атомов убывает, можно записать $N=N_0-\alpha x$, где N_0 – число возбуждаемых накачкой (в единицу времени) атомов, α – коэффициент, описывающий восприимчивость активной среды. Из (3.21) можно получить уравнение:

$$dx/dt=G(N_0-\alpha x)x-\tau x \quad \text{или} \quad dx/dt=-K_1x-K_2x^2 \quad (3.22)$$

где $K_1=\tau-GN_0$, $K_2=G\alpha$, K_2 – всегда положителен. Из сказанного следует, что 1) если $K_1>0$ (или $GN_0<\tau$), то накачка слабая (соотношение (3.20) выполнено),

2) если $K_1\leq 0$ (или $GN_0\geq\tau$) – накачка сильная (достигается инверсия населенности, соотношение (3.20) нарушается).

Таким образом, процесс вынужденного упорядочения в лазере можно описывать либо обычным путем, то есть, пользуясь понятием временного распределения атомов между различными энергетическими уровнями, либо в терминах корреляций между элементарными событиями (последний подход важен тем, что позволяет провести различие между неравновесными и равновесными переходами). Элементарным событием в данном случае является переход атома из возбужденного состояния в основное. В лазере указанная корреляция имеет пространственно-временную природу, так как в отражательном резонаторе возбуждается собственная мода колебаний, которая предопределена его размерами.

Описанный подход можно обобщить и на процессы с элементарными событиями других типов, например, на химические реакции с образованием новых веществ.

Вообще говоря, физическое событие – это любое изменение состояния системы; оно происходит, когда система покидает одну ячейку своего фазового пространства и появляется в другой. Как известно из статистической механики, только в условиях термодинамического равновесия каждый такой переход уравновешивается обратным переходом сразу и непосредственно. *Этот факт называется принципом детального равновесия.* Таким образом, в рассматриваемом случае именно в неравновесном состоянии за критическим порогом устанавливается корреляция между большим числом событий. Иными словами, нарушается полная симметрия (изотропия), которая была присуща равновесной функции распределения событий и формируется новое распределение с

более низкой симметрией, свойственной этим событиям, а значит, новое состояние будет более упорядоченным.

Кооперативный эффект, в который вовлекаются события, можно описать и в приближении среднего поля, но внутреннее поле уже не будет пространственным, поскольку в газовом лазере, например, атомы не занимают фиксированных позиций. Понятие среднего поля следует обобщить и включить в него пространственно-временные корреляции, характерные для стоячей электромагнитной волны. Поскольку скорость света огромна, можно рассматривать только зависимость этой волны от времени. Можно считать, что электроны возвращаются в основное состояние одновременно, так как возвраты индуцируют друг друга и вызывают появление электромагнитного поля внутри резонатора. Сделав такое допущение, можно построить безразмерный параметр, характеризующий кооперативный эффект, из величин с размерностью времени (это такие важные величины, как время затухания вынужденного излучения, нормальное время распада возбужденных состояний и время выхода излучения из резонатора) и, пользуясь одним этим параметром, описать переход. В равновесных критических явлениях, внутреннее поле создаёт пространственные корреляции в противовес тепловому беспорядку. Близкая картина возникает и теперь: *внутреннее поле создает корреляции во времени между определенными событиями в противовес случайному характеру других событий.*

Периодичность стоячей волны, управляющей актами излучения в лазерном резонаторе сопоставима с пространственной периодичностью кристаллической решетки, определяющей, например, свойства бинарного сплава. В обоих случаях порядок – это то, что неявно содержится в ограничении, наложенном на элементы системы. В первом случае такое ограничение есть требование пространственной инвариантности распределения вещества, а во втором – инвариантность во времени для событий.

Кооперативный переход, лежащий в основе работы лазера, сопровождается явлениями, позволяющими установить еще более тесную аналогию с переходами в состоянии равновесия. Интересно отметить, что флуктуации интенсивности когерентного излучения возрастают симметрично по обе стороны от критической точки. Более того, вблизи критической точки интенсивность когерентного излучения растет по тому же закону, что и функция расстояния до критической точки.

В качестве параметра порядка в данном случае можно выбрать напряженность электрического поля, ибо именно эта величина регулирует процесс перехода от беспорядка к порядку. И наконец, заметим, что вблизи точки перехода ширина лазерной линии значительно уменьшается, что указывает на увеличение времени релаксации системы.

Обобщение и аналогии с критическими явлениями

Прежде всего, убедимся в том, что принципы, лежащие в основе работы лазера, являются общими для перехода от беспорядка к порядку в неравновесном состоянии под действием внешних потоков. Для этого обратимся к неустойчивости Релея-Бенара (разд. 3.1). Ячейки возникают в слое жидкости, помещенном между горячей нижней пластинкой и холодной верхней (рис. 3.4), когда градиент температуры превышает критическое значение, в жидкости возникает макроскопическая структура, сильно зависящая от окружающих условий. Если слой жидкости тонок, структура состоит из цилиндрических вихрей (ячеек). Локальная скорость жидкости в вихрях оказывается синусоидальной функцией координаты с максимальным значением, определяемым градиентом температуры. Здесь, безусловно, имеет место пространственно-временное упорядочение, наведенное внешним тепловым потоком в системе, которая во всех других отношениях совершенно однородна. Возникающие конвективные структуры имеют более сложное происхождение, чем выше описанные явления в лазере. Однако то и другое – явления сходные и типичные для открытых систем хотя бы потому, что в том и другом случае имеет место переход к дальнему порядку вслед за разрывом или скачком в поведении системы.

3.5. Нелинейные волны и солитоны

Из курса общей физики известно, что если в какой-либо точке упругой среды (твердой, жидкой или газообразной) возбудить колебания, то они будут передаваться в другие точки этой среды. Эта передача возбуждений обусловлена взаимосвязью близких участков среды друг с другом. При этом колебания, возбужденные в одном месте, распространяются в пространстве с определенной скоростью. Волной принято называть процесс распространения колебаний от одной точки к другой.

Природа волн различна. В простейшем случае связи между участками в среде могут быть обусловлены силами упругости, которые возникают из-за деформаций в среде. При этом в твердой упругой среде могут распространяться как продольные волны, при которых смещения частиц среды осуществляются в направлении распространения волны, так и поперечные волны, у которых смещения частиц перпендикулярны распространению волны. В жидкости или газе в отличие от твердых тел нет сил сопротивления сдвигу, поэтому могут распространяться только продольные волны. Хорошо известный пример продольных волн – звуковые волны, возникающие из-за упругости воздуха.

Особое место занимают электромагнитные волны, передача возбуждений в этом случае происходит вследствие колебаний электрического и магнитного полей. Среда, в которой распространяются электромагнитные волны, как правило, оказывает существенное влияние на процесс распространения, однако электромагнитные волны в отличие от упругих могут распространяться даже в вакууме. Связь между различными участками в пространстве при распространении таких волн обусловлена тем, что изменение электрического поля вызывает появление магнитного поля и наоборот.

Очень важным и интересным типом волн являются волны на поверхности воды. Это один из распространенных видов волн, который каждый наблюдает с детства. Если на поверхности достаточно глубокого бассейна, наполненного водой, создать возмущение (бросить камень), то по поверхности воды начнут распространяться волны. Возникновение их объясняется тем, что частицы жидкости, которые находятся вблизи впадины (созданной камнем), будут стремиться заполнить впадину, находясь под действием силы тяжести. Развитие этого явления со временем ведет к распространению волны на воде. Частицы жидкости в такой волне двигаются не вверх-вниз, а приблизительно по окружностям, поэтому волны на воде не являются ни продольными, ни поперечными. Они как бы смесь тех и других. С глубиной радиусы окружностей, по которым двигаются частицы жидкости, уменьшаются до тех пор, пока они не станут равными нулю.

Если анализировать скорость распространения волны на воде, то оказывается, что она зависит от ее длины. Скорость длинных волн пропорциональна корню квадратному из ускорения свободного падения, умноженному на длину волны. Причиной возникновения таких волн является сила тяжести. Для коротких волн восстанавливающая сила обусловлена силой поверхностного натяжения, и потому скорость таких волн пропорциональна корню квадратному из частного, в числителе которого стоит коэффициент поверхностного натяжения, а в знаменателе – произведение длины волны на плотность воды. Для волн средней длины скорость распространения зависит от перечисленных выше параметров. Из сказанного ясно, что волны на воде – явление весьма сложное, а потому издавна привлекают внимание исследователей.

3.5.1. Открытие солитона

Любопытную волну на воде наблюдал шотландец Джон Скотт Рассел в 1834 году. Он изучал перемещения баржи, которую тянула по каналу пара лошадей. Однажды он заметил, что при неожиданной остановке баржи масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась, а

собралась у носовой части судна, а затем оторвалась от него и покатила по каналу с большой скоростью в виде уединенного возвышения, не меняя своей формы и не снижая скорости.

На протяжении всей жизни Рассел неоднократно возвращался к наблюдению за этой волной, поскольку верил, что открытая им уединенная волна играет важную роль во многих природных явлениях. Он установил следующие свойства этой волны:

- 1) она движется с постоянной скоростью и без изменения формы;
- 2) зависимость скорости C этой волны от глубины канала h и ее высоты

a :

$$C = \sqrt{g(a+h)}$$

где g – ускорение свободного падения, причем $a < h$;

- 3) возможен распад одной большой волны на несколько волн;
- 4) в экспериментах наблюдаются только волны возвышения.

Рассел также обратил внимание на то, что открытые им уединенные волны проходят друг через друга без каких-либо изменений. Однако на это последнее важное свойство он не обратил существенного внимания.

Работа Рассела, опубликованная в 1844 году как “Доклад о волнах”, была подвергнута критике, смысл которой заключался в том, что «этого не может быть». Но прежде всего, была подвергнута сомнению правильность наблюдений Рассела. После столь негативного отношения к открытию уединенной волны долгое время о ней просто не вспоминали.

Позже опыты Рассела были повторены другими исследователями и получили подтверждение. Дж. Буссинеск в 1872 году и Дж.У. Рэлей в 1876 году независимо друг от друга вывели аналитическую формулу для возвышения свободной поверхности на воде в виде квадрата гиперболического секанса и вычислили скорость распространения уединенной волны на воде.

3.5.2. Линейные и нелинейные волны

В качестве математических моделей при описании распространения волн в различных средах часто используют уравнения в частных производных. Простейшее волновое уравнение имеет вид:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (3.23)$$

Характеристика волны u в этом уравнении зависит от пространственной координаты x и времени t , а двойные индексы у переменной u обозначают соответствующие вторую производную по времени (u_{tt}) и вторую производную по координате x (u_{xx}). Уравнение (3.23) описывает плоскую одномерную волну, аналогом которой может служить, например, волна, распространяющаяся по струне. В (3.23) в качестве u можно принять плотность воздуха, если речь идет, например, о

звуковой волне в воздухе. Если рассматривают электромагнитные волны, то под u понимают напряженность электрического и/или магнитного поля.

Решение волнового уравнения (3.23), которое впервые было получено Ж. Даламбером в 1748 году, имеет вид:

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct), \quad (3.24)$$

функции f и g находят из начальных условий для u . Уравнение (3.23) содержит вторую производную от u по t , поэтому для него следует задавать два начальных условия: значение u при $t = 0$ и производную u_t при $t = 0$.

Решения волнового уравнения (3.23) подчиняются принципу суперпозиции. То есть, если взять два любых решения этого уравнения, то их сумма снова будет решением этого же уравнения. Это свойство соответствует линейности явления, которое оно описывает. Для нелинейных уравнений это свойство не выполняется, что соответствует существенным отличиям в описании ими процессов. В частности, из выражения для скорости уединенной волны, которую наблюдал Рассел, следует, что ее значение зависит от амплитуды, а для волны, описываемой уравнением (3.23), такой зависимости нет.

Непосредственной подстановкой в уравнение (3.23) можно убедиться, что зависимость:

$$u(x,t) = a \cos(kx - \omega t), \quad (3.25)$$

где a , k и ω – постоянные, при $\omega = \pm k$ является решением уравнения (3.23). В этом решении a – амплитуда, k – волновое число, а ω – частота. Приведенное решение представляет собой монохроматическую волну, переносимую в среде с фазовой скоростью

$$c_p = \frac{\omega}{k} \quad (3.26)$$

На практике монохроматическую волну создать трудно, и обычно имеют дело с цугом (пакетом) волн, в котором каждая волна распространяется со своей скоростью, а скорость распространения пакета характеризуется групповой скоростью

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (3.27)$$

Определить, с каким (линейным или нелинейным) явлением имеет дело исследователь, не просто, но если сформулирована математическая модель явления, решение этого вопроса упрощается, поскольку можно проверить выполнение принципа суперпозиции решений.

Отметим, что волны на воде можно анализировать, используя хорошо известные нелинейные уравнения гидродинамики. Поэтому и волны на

воде в общем случае являются нелинейными. И лишь в предельном случае малых амплитуд эти волны могут считаться линейными. Распространение звука тоже не во всех случаях описывается линейным уравнением. Еще Рассел при обосновании своих наблюдений по уединенной волне отметил, что звук от выстрела пушки распространяется в воздухе быстрее, чем команда произвести этот выстрел. Это объясняется тем, что распространение мощного звука описывается уже не волновым уравнением, а уравнениями газовой динамики.

3.5.3. Уравнение Кортевега–де Фриса

Окончательная ясность в проблеме, которая возникла после опытов Рассела по уединенной волне, наступила с появлением работы датских ученых Д.Д. Кортевега и Г. де Фриса, посвященной наблюдениям Рассела. В 1895 году эти ученые вывели уравнение для описания длинных волн на воде. Кортевег и де Фрис, используя уравнения гидродинамики, рассмотрели отклонение $u(x, t)$ от положения равновесия поверхности воды при отсутствии вихрей и при постоянстве плотности воды. Они также предположили, что при распространении волны выполняются два условия для безразмерных параметров

$$\varepsilon = \frac{a}{h} \ll 1, \quad \delta = \frac{h}{l} \ll 1 \quad (3.28)$$

Здесь a – амплитуда волны, h – глубина бассейна, в котором рассматриваются волны, l – длина волны (рис. 3.21).

Суть приближений состояла в том, что амплитуда рассматриваемых волн была много меньше, чем глубина бассейна, но в то же время длина волны была много больше, чем

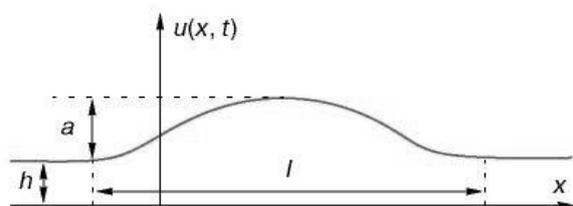


Рис. 3.24. Уединенная волна, распространяющаяся по каналу, и ее параметры

глубина бассейна. Таким образом, Кортевег и де Фрис рассматривали длинные волны.

Уравнение, которое было ими получено, имеет вид

$$u_t + 6uu_x + u_{xx} = 0. \quad (3.29)$$

Это уравнение, как и (3.23), является уравнением в частных производных. Решить уравнение такого типа – значит найти зависимость u от x и t , после подстановки которой в уравнение получается тождество.

Уравнение (3.29) имеет волновое решение, известное с конца XIX века. Оно выражается через специальную эллиптическую функцию, которая носит имя Карла Якоби. При некоторых условиях эллиптическая функция Якоби переходит в секанс гиперболический и решение имеет вид:

$$u(x, t) = 2k^2 ch^{-2}[k(x - 4k^2 t) + \varphi_0], \quad (3.30)$$

где φ_0 – произвольная постоянная.

Решение (3.30) уравнения (3.29) является предельным случаем бесконечно большого периода волны, который соответствует уединенной волне.

Решение (3.30) уравнения Кортевега–де Фриса является бегущей волной. Это означает, что оно зависит от координаты x и времени t через переменную $\xi = x - c_0 t$. Эта переменная характеризует положение точки, движущейся со скоростью волны c_0 , то есть она обозначает положение наблюдателя, который постоянно находится на гребне волны. Таким образом, уравнение Кортевега–де Фриса в отличие от решения (3.24) волнового решения (3.23) имеет волну, распространяющуюся лишь в одном направлении. Однако оно учитывает и проявление более сложных эффектов вследствие дополнительных слагаемых uu_x и u_{xx} .

В действительности это уравнение является приближенным, поскольку при его выводе использованы малые параметры ε и δ (3.28). Если пренебречь влиянием этих параметров, устремляя их к нулю, получится одну из частей решения (3.23).

Конечно, при выводе уравнения для длинных волн на воде влияние параметров ε и δ может быть учтено более точно, но тогда получится уравнение, содержащее гораздо больше слагаемых, чем уравнение (3.29), и с производными более высокого порядка. Из сказанного следует, что решение уравнения Кортевега–де Фриса для описания волн справедливо только на определенном расстоянии от места образования волны и на определенном промежутке времени. На очень больших расстояниях нелинейные волны уже не будут описываться уравнением Кортевега–де Фриса, и для описания процесса потребуются более точная модель. Уравнение Кортевега–де Фриса в этом смысле следует рассматривать как некоторое приближение (математическую модель), соответствующее с определенной степенью точности реальному процессу распространения волн на воде.

Используя специальный подход, можно убедиться, что принцип суперпозиции решений для уравнения Кортевега–де Фриса не выполняется, и поэтому это уравнение является нелинейным и описывает нелинейные волны.

3.5.4. Солитоны Кортевега–де Фриса

После описанной работы Кортевега и де Фриса об уединенной волне забыли еще почти на 60 лет. Возвращение к ее открытию произошло в какой-то степени случайно и вначале, казалось, не имело к нему никакого отношения. Виновником этого события стал выдающийся физик XX столетия Энрико Ферми. В 1952 году Ферми попросил двух молодых физиков С. Улама и Д. Паста решить одну из нелинейных задач на ЭВМ. Они должны были рассчитать колебания 64 грузиков, связанных друг с другом пружинками, которые при отклонении от положения равновесия на Δl приобретали возвращающую силу, равную $k\Delta l + \alpha(\Delta l)^2$. Здесь k и α – постоянные коэффициенты. При этом нелинейная добавка предполагалась малой по сравнению с основной силой $k\Delta l$. Создавая начальное колебание, исследователи хотели посмотреть, как эта начальная мода будет распределяться по всем другим модам. После проведения расчетов этой задачи на ЭВМ ожидаемого результата они не получили, но обнаружили, что перекачивание энергии в две или три моды на начальном этапе расчетов действительно происходит, но затем наблюдается возврат к начальному состоянию. После расчетов и поиска аналогий, было установлено, что уравнение, которое использовали Ферми, Паста и Улам, при уменьшении расстояния между грузиками и при неограниченном росте их числа переходит в уравнение Кортевега–де Фриса. То есть, по существу, задача, предложенная Ферми, сводилась к численному решению уравнения Кортевега–де Фриса, предложенного в 1895 году для описания уединенной волны Рассела. Примерно в те же годы было показано, что для описания ионно-звуковых волн в плазме можно также использовать уравнение Кортевега–де Фриса. Стало ясно, что это уравнение встречается во многих областях физики и, следовательно, уединенная волна, которая описывается этим уравнением, является широко распространенным явлением. Продолжая вычислительные эксперименты по моделированию распространения таких волн, Крускал и Забуски рассмотрели их столкновение. Остановимся подробнее на обсуждении этого факта.

Пусть имеются две уединенные волны, описываемые уравнением Кортевега–де Фриса, которые различаются амплитудами и движутся друг за другом в одном направлении (рис. 3.25). Из формулы для уединенных волн (3.30) следует, что скорость движения таких волн тем выше, чем больше их амплитуда, а ширина пика уменьшается с ростом амплитуды. Таким образом, высокие уединенные волны движутся быстрее. Волна с большей амплитудой догонит движущуюся впереди волну с меньшей амплитудой. Далее в течение некоторого времени две волны будут двигаться вместе как единое целое, взаимодействуя между собой, а затем они разъединятся. Замечательным свойством этих волн является то, что

после своего взаимодействия

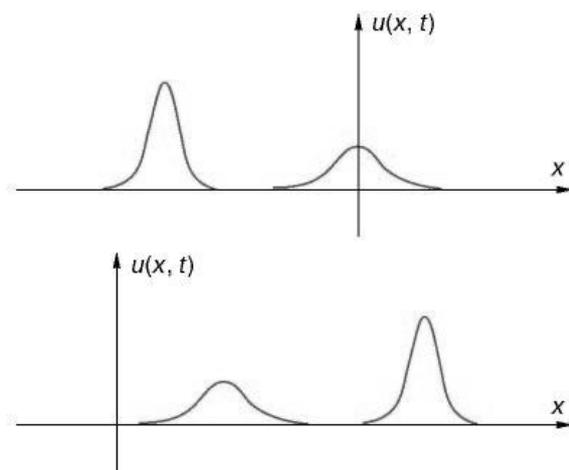


Рис. 3.25. Два солитона, описываемые уравнением Кортевега–де Фриса, до взаимодействия (вверху) и после (внизу)

форма и скорость этих волн восстанавливаются. Обе волны после столкновения лишь смещаются на некоторое расстояние по сравнению с тем, как если бы они двигались без взаимодействия.

Процесс, у которого после взаимодействия волн сохраняются форма и скорость, напоминает упругое столкновение двух частиц. Поэтому такие уединенные волны назвали солитонами (от англ. solitary – уединенный). Это название созвучно электрону, протону и другим элементарным частицам; в настоящее время оно общепринято.

Солитоны и в самом деле ведут себя как частицы. Большая волна не проходит через малую при их взаимодействии. Когда уединенные волны соприкасаются, то большая волна замедляется и уменьшается, а волна, которая была малой, наоборот, ускоряется и подрастает. И когда малая волна дорастает до размеров большой, а большая уменьшается до размеров малой, солитоны разделяются и больший уходит вперед. Таким образом, солитоны ведут себя как упругие теннисные мячи.

Дадим определение солитона. *Солитоном называется нелинейная уединенная волна, которая сохраняет свою форму и скорость при собственном движении и столкновении с себе подобными уединенными волнами, то есть представляет собой устойчивое образование.* Единственным результатом взаимодействия солитонов может быть некоторый сдвиг фаз.

3.5.5. Групповой солитон

Выше уже говорилось, что на практике волны, как правило, распространяются группами. Подобные группы волн на воде люди наблюдали с незапамятных времен. На вопрос о том, почему для волн на воде типичны «стаи» волн, удалось ответить Т. Бенжамену и Дж. Фейеру только в 1967 году. Теоретическими расчетами они показали, что простая периодическая волна на глубокой воде неустойчива, из-за этой неустойчивости волны на воде разбиваются на группы. Уравнение, с помощью которого описывается распространение групп волн на воде,

было получено В.Е. Захаровым в 1968 году. К тому времени это уравнение уже было известно в физике и носило название нелинейного уравнения Шрёдингера. Оно имеет вид:

$$iu_t = -u_{xx} - |u|^2 u \quad (3.31)$$

В 1971 году В.Е. Захаров и А.Б. Шабат показали, что это нелинейное уравнение имеет решения также в виде солитонов, более того, нелинейное уравнение Шрёдингера (3.31), так же как и уравнение Кортевега–де Фриса (3.29), может быть проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния. Солитоны нелинейного уравнения Шрёдингера отличаются от обсуждаемых выше солитонов Кортевега–де Фриса тем, что они соответствуют форме огибающей группы волн. Внешне они напоминают модулированные радиоволны. Эти солитоны называются групповыми солитонами, а иногда солитонами огибающей. Это название отражает сохраняемость при взаимодействии огибающей волнового пакета (аналог штриховой линии, представленной на рис. 3.26), хотя сами волны под огибающей двигаются со скоростью, отличной от групповой. При этом форма огибающей описывается соотношением:

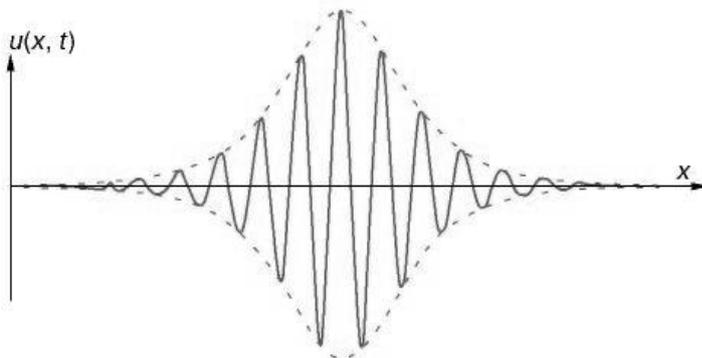


Рис. 3.26. Пример группового солитона (штриховая линия).

(девятый вал). Если в группе волн образовалось большее количество волн, то произойдет ее распад на несколько групп.

Обобщенное или нелинейное уравнение Шрёдингера (10) описывает совокупность явлений в физике волновых процессов. Например, оно используется для описания эффекта самофокусировки при воздействии мощного лазерного луча на нелинейную диэлектрическую среду и для описания распространения нелинейных волн в плазме.

где a_0 – амплитуда, а l – половина размера солитона. Обычно под огибающей солитона находится от 14 до 20 волн, причем средняя волна самая большая. С этим связан хорошо известный факт, что самая высокая волна в группе на воде находится между седьмой и десятой

3.5.6. Топологический солитон

Солитон Кортевега–де Фриса и групповой солитон, конечно, не исчерпывает всего многообразия этих объектов. Не менее популярным, чем перечисленные выше солитоны, является так называемый топологический солитон. Этот солитон появляется во всех процессах, которые описываются нелинейным уравнением вида

$$u_{xt} = \sin u \quad (3.32)$$

где u_{xt} обозначает вторую производную от u по x и t . Уравнение (3.32) также нелинейное из-за $\sin u$. Оно впервые появилось в прошлом веке в геометрии Лобачевского при описании поверхностей постоянной отрицательной кривизны и в настоящее время называется уравнением \sin -Гордона.

Уравнение аналогичное (3.32) было использовано Я.И. Френкелем и Т.А. Конторовой для описания дислокаций в кристалле. Они нашли решение, которое имело свойства солитона, но четкого понимания, что оно описывает движение дислокации, в то время еще не было.

В 1962 году английские физики Дж. Перринг и Т. Скирма при анализе взаимодействия элементарных частиц выполнили численные расчеты уравнения \sin -Гордона. Согласно их расчетам, выполненным на ЭВМ, уединенные волны, являющиеся решениями уравнения \sin -Гордона, не изменяли своих свойств после взаимодействия. Однако в отличие от Крускала и Забуски они не ввели понятие солитона, хотя их работа и опередила на три года вычислительный эксперимент с уединенной волной Кортевега–де Фриса.

Приблизительно в то же время, когда проводились исследования по численному решению распространения солитонов Кортевега–де Фриса, солитоны появились при анализе распространения ультракоротких (10^{-12} с) световых импульсов в оптических средах. В 1965 году С.Л. Макколл и Е.Л. Хан открыли интересный и неожиданный эффект, названный самонаведенной прозрачностью. Впоследствии этот эффект был детально изучен теоретически и экспериментально и получил соответствующее объяснение. Явление самонаведенной прозрачности относится к категории эффектов самовоздействия и проявляется довольно своеобразно при нелинейном взаимодействии импульса с оптической средой, что приводит к сохранению его формы.

В настоящее время нелинейные волны и солитоны не только интенсивно изучаются физиками и математиками, но и находят применение в технике. Например, при исследованиях линий передачи

сигналов с нелинейными элементами (диоды, катушки сопротивления), пограничного слоя, атмосфер планет (Большое красное пятно Юпитера), волн цунами, волновых процессов в плазме, в теории поля, физике твердого тела, теплофизике экстремальных состояний веществ, при изучении новых материалов (например, джозефсоновских контактов, состоящих из разделенных диэлектриком двух слоев сверхпроводящего металла), при создании моделей решеток кристаллов, в оптике, биологии и многих других. Есть данные для утверждения, что бегущие по нервам импульсы – солитоны.

3.6. Структуры в турбулентности. Вихри Тейлора.

В качестве классического примера образования структур все возрастающей сложности рассмотрим переход ламинарного течения в турбулентное.

Термин «турбулентность» (от латинского turbo – вихрь, turbulentus – беспорядочный) ввел еще в XIX веке английский физик Кельвин (У. Томсон). Он применил для характеристики динамических процессов не только в жидкости, но и в газе и плазме, а также в смешанных средах. Примерами смешанных сред в инженерных конструкциях являются: жидкость и газ в турбине, частично ионизированный газ в магнито-гидродинамических генераторах, газ с твердыми и жидкими частицами в ракетных двигателях твердого топлива. Турбулентность может присутствовать в любой из перечисленных выше комбинаций рабочих сред, это общее понятие, отражающее свойство многих подвижных сред. Проблемы описания перехода к турбулентности важны для инженерной практики, для гидро- и аэромеханики. Они решались многими физиками и математиками на протяжении последних 200 лет. Гидродинамические теории турбулентности в XX веке развивали русские ученые Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин, А.Н. Колмогоров и другие. Наиболее известная теория перехода к турбулентности была создана в 40-е гг. XX века отечественным физиком Л. Д. Ландау и немецким математиком Е. Хопфом.

3.6.1. Составляющие турбулентного течения жидкости

С точки зрения физики, турбулентное движение (течение) представляет собой сложный волновой динамический процесс, *составляющими которого являются три вида движения: поступательное, вращательное и деформационное.* В чистом виде каждое из них встречается редко. Как правило, они взаимосвязаны и образуют сложную интерференцию различных конфигураций.

Наиболее простой вид движения (течения) – *поступательное прямолинейное*. Для вязких жидкостей таким видом течения является ламинарное или послойное, когда соседние линии тока параллельны.

Более сложным видом турбулентного течения является *вращательное течение*, которое в теории соответствует оператору «ротор», а в механической интерпретацией – вихрю. В качестве наглядной интерпретации можно представить мгновенное вращение жидкой (газообразной) сферы малого диаметра вокруг ее центра. Вихрь имеет размерность угловой скорости и характеризует угловое перемещение среды. Наличие вихрей в потоке может значительно усложнить общую турбулентную картину течения.

Винтовые течения являются векторным сложением двух течений: поступательного и вращательного (вихревого). Причем вращательное движение может осуществляться как по закону твердого тела, так и по законам вязкой жидкости. Для большинства реально функционирующих приборов и конструкций этот закон близок к комбинированному: непосредственно у оси вращения выполняются законы вращения твердого тела, а на периферии – вязкой жидкости, что приводит к некоторому отклонению от идеального винтового течения (например, течение за вращающимся винтом моторной лодки).

Рассматривая различные виды вихревых течений, следует отметить одно их общее свойство, а именно, свойство парности. В потоке жидкости или газа вихри могут устойчиво существовать только в том случае, если они образуют пару из двух вихрей, вращающихся в противоположном направлении, с уравновешенными левым и правым моментами количества движения, обладающими свойствами симметрии.

Деформационная составляющая турбулентного течения является наиболее сложной в математическом описании и не достаточно хорошо изучена в настоящее время. Деформационную составляющую скорости потока можно записать в виде произведения тензора скоростей деформаций и дифференциала радиус-вектора. При этом под скоростью деформации понимается суммарное перемещение элемента потока в единицу времени.

Для турбулентного потока наиболее характерным деформационным движением является кручение. В отличие от вихревого и винтового течения, кручение обладает свойством упругости потока по аналогии с твердым телом. Кручение потока может наблюдаться либо в местах его соприкосновения со стенкой, либо на границе потоков с сильно различающимися свойствами. Воздействие на поток кручения приводит к образованию вихревых жгутов, которые также как и вихри являются парными. Такие жгуты внешне похожи на скрутку двух электрических проводов.

3.6.2. Вихревые структуры. Вихри Тейлора.

Фотографий, иллюстрирующих кручение потока, в настоящее время очень мало. Это объясняется большими техническими сложностями фотографирования таких объектов. Тем не менее, на рис. 3.27 представлены некоторые уникальные фотографии. На рис. 3.27а фотография получена методом горячей визуализации. На ней распознаются попарно закрученные жгуты потока топлива, постепенно расплетающиеся с увеличением степени расширения сопла и переходящие в косо направленные волновые образования.

Фотография струи гелия в потоке воздуха (рис. 3.27б) была сделана А.А. Павельевым и О.И. Навозновым в 1972 году. Особый интерес представляет область кручения, следующая за ламинарной областью в

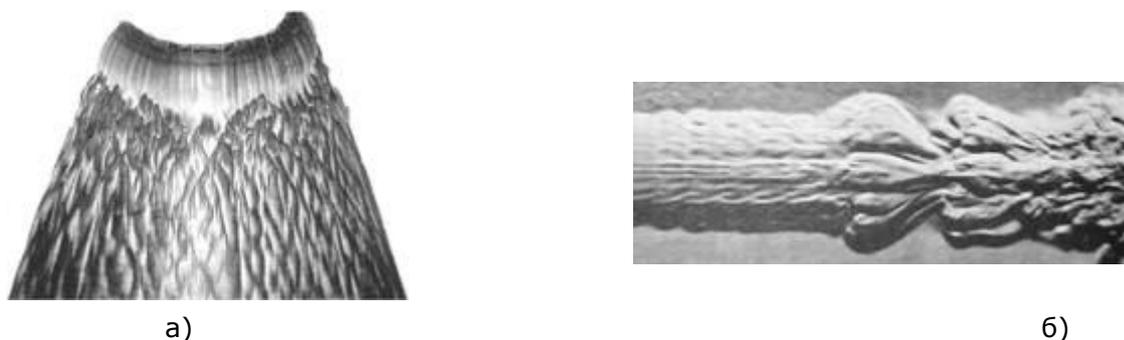


Рис. 3.27. Кручение потока.

самом начале струи.

Рассмотрим классический эксперимент по образованию вихревых структур, выполненный Дж. И. Тейлором. Поскольку образование вихревой структуры происходит тогда, когда предшествующее состояние не может существовать далее, то есть становится *неустойчивым*, а сама по себе такая структура также не может поддерживаться в устойчивом состоянии бесконечно долгое время, то такие явления часто называют *неустойчивостями* (неустойчивость Тейлора, неустойчивость Релея-Бенара и т.д.).

В эксперименте Тейлора изучается движение жидкости в промежутке между двумя коаксиальными цилиндрами. Внутренний цилиндр вращается, а наружный закрепляется неподвижно. Стенки внешнего цилиндра сделаны из прозрачного материала, чтобы можно было непосредственно наблюдать возникающие структуры. При малых скоростях вращения жидкость образует коаксиальные линии тока. Это вполне понятно, так как внутренний цилиндр увлекает за собой жидкость за счет трения между поверхностью цилиндра и жидкостью. При возрастании скорости (обычно измеряемой в безразмерных числах Тейлора) движение жидкости образует стационарные структуры – так называемые *вихри Тейлора*, в которых

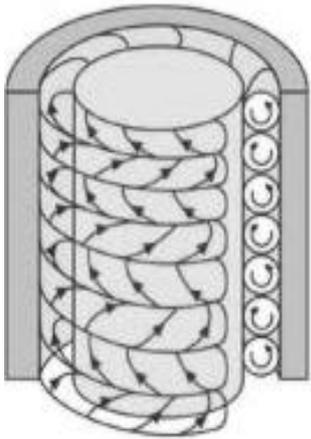


Рис. 3.28. Вихри Тейлора

жидкость периодически движется то наружу, то внутрь в горизонтальных слоях (рис. 3.28). Вихри имеют регулярную чередующуюся структуру с правым и левым вращением и с осями, параллельными направлению скорости вращения внутреннего цилиндра.

Когда скорость вращения цилиндра возрастает до второго критического значения, вихри Тейлора начинают осциллировать с одной основной частотой, а при еще более высоких значениях – с двумя основными частотами. Иногда наблюдаются еще более сложные структуры. Наконец, при дальнейшем увеличении числа Тейлора наступает хаотическое движение жидкости.

Измерить скорость жидкости так, чтобы не исказить ее течение – достаточно непростое дело. Технически это стало возможным после изобретения лазера. Волна, отражающаяся от движущегося объекта, в соответствии с эффектом Доплера, изменяет свою частоту. Измерив сдвиг частоты отраженного от движущейся жидкости излучения лазера, можно определить ее скорость. Иерархия неустойчивостей, возникающих при увеличении скорости вращения жидкости, показана на фотографиях рис. 3.29. Некоторые особенности, присущие образованию вихрей Тейлора, характерны для самоорганизующихся систем. Когда изменяется управляющий параметр (скорость вращения), система может образовывать иерархию структур, не обусловленную внешними воздействиями. Кроме того, структуры могут усложняться во времени и в пространстве.

Еще один класс структур, имеющих важное практическое значение, возникает при обтекании жидкостью или газом движущихся объектов: автомашин, самолетов, космических кораблей и морских судов.

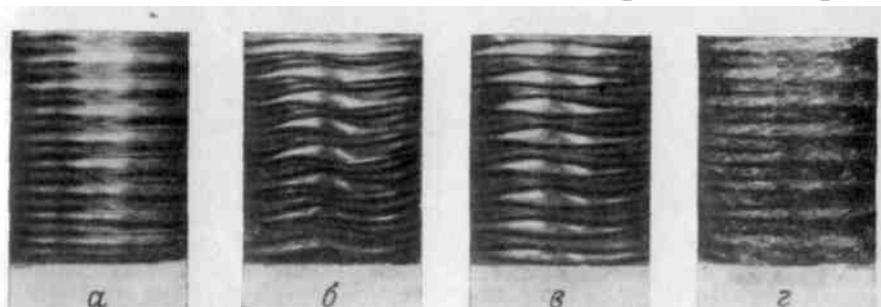


Рис. 3.29. Иерархия неустойчивостей в вихрях Тейлора: *a* – образование вихрей Тейлора; *b* – появление волн на вихрях Тейлора; *в* – более сложное волновое движение на вихрях Тейлора; *г* – хаотическое движение на вихрях Тейлора.

Характер движения жидкости в гидродинамике описывают с помощью безразмерного параметра – числа Рейнольдса Re , введенного в 1883 г.

Рейнольдсом O . Параметр Re связан с режимом течения вязкой жидкости или газа и характеризует соотношение между инерционными силами и силами вязкости. $Re = \rho v l / \mu$, где ρ – плотность, v – скорость потока, l – поперечный размер обтекаемого предмета, μ – коэффициент динамической вязкости жидкости (или газа). Для каждой жидкости существует такое критическое значение числа Рейнольдса, при превышении которого течение жидкости из ламинарного превращается в турбулентное. Отсюда напрашивается мысль об аналогии между ламинарным течением жидкости, переходящем в турбулентное при увеличении Re , и термодинамической ветвью (см. разд. 3.3.4), теряющей устойчивость. После каскада бифуркаций в этой системе образуется ряд усложняющихся структур, а затем происходит переход к хаосу. Представление о таком механизме возникновения турбулентности было дано в работах Л.Д. Ландау, оно основывалось на математической теории бифуркаций Е. Хопфа.

Вот некоторые выводы из теории бифуркаций Хопфа в системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

Первая бифуркация Хопфа приводит к тому, что из особой точки рождается предельный цикл с частотой ω_1 .

В результате второй бифуркации Хопфа решение уравнений становится похожим на спираль, которая наматывается на тор (тогда говорят о появлении инвариантного тора). В таком решении можно выделить уже две независимые частоты ω_1 и ω_2 . Если при этом отношение ω_1/ω_2 является иррациональным числом, то решение будет непериодическим и заполнит всю поверхность тора.

После третьей бифуркации Хопфа появится инвариантный тор большей размерности и решение с частотой ω_3 будет накручиваться на спираль, образовавшуюся после предыдущей бифуркации.

Очевидно, что в математической модели число таких бифуркаций принципиально не ограничено. Но решение становится очень сложным. При малых значениях числа Re формируется стационарная картина движения жидкости, соответствующая ламинарному течению (рис. 3.30а). При небольшом нарушении равновесия путем создания, например, градиента давления, жидкость начнет двигаться в сторону меньших давлений, при этом ее движение будет происходить как бы слоями, параллельными направлению течения (ламинарное течение). Потoki и термодинамические силы связаны линейными соотношениями, производство энтропии в стационарном состоянии (течении) минимально. Когда скорость потока возрастает и Re достигает критического значения, тогда линейная зависимость потоков и сил нарушается, хотя картина носит еще стационарный характер.

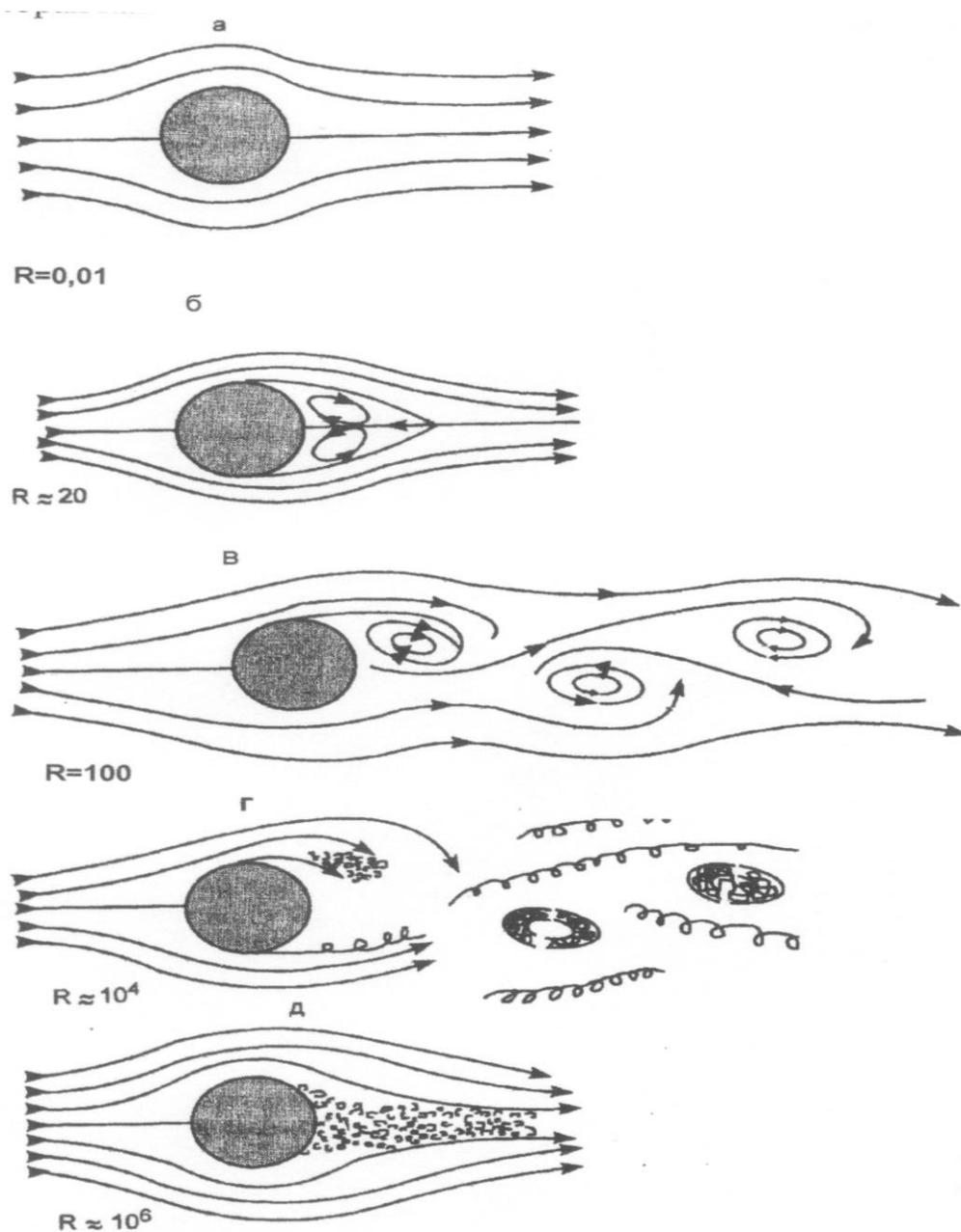


Рис. 3.30. Обтекание цилиндра жидкостью при различных скоростях

В этом случае говорят о первой бифуркации Хопфа. В точке бифуркации поведение системы «разветвляется», становится неоднозначным. При переходе через точку бифуркации, в системе возникает новая структура – появляется пара вихрей (рис. 3.30 б). При дальнейшем увеличении скорости потока некоторые из малых возмущений перестают затухать, система теряет устойчивость и переходит в новый режим через вторую бифуркацию Хопфа, а вихри начинают осциллировать (рис. 3.30в). При еще большем увеличении числа Рейнольдса этот периодический режим вновь теряет устойчивость, система переходит через

следующую точку бифуркации, в ней возникают незатухающие колебания с частотой, определяемой величиной Re , возрастает число корреляций и параметров, характеризующих систему, а движение жидкости становится очень сложным (рис. 3.30г).

При дальнейшем возрастании скорости система проходит через еще одну точку бифуркации, и между отдельными областями течения возникают новые корреляции, новые макроскопические связи, появляются новые частоты. При этом интервал частот сокращается, и появляющиеся новые движения имеют все более мелкие масштабы. Таким образом, по теории Ландау, турбулентное движение является результатом бесконечного каскада бифуркаций (рис. 3.30д). В нем существенно усложняется структура течения и одновременно увеличивается его внутренняя упорядоченность.

Поскольку течение жидкости описывается динамическими уравнениями, переход к турбулентности считается возникновением динамического хаоса. Однако этот неустойчивый, хаотический режим существенно отличается от того хаоса, который имел место в состоянии равновесия. Турбулентное течение имеет внутреннюю упорядоченность, которую можно уловить при исследовании мельчайших деталей динамики. Поэтому можно сказать, что хаотический турбулентный режим имеет более сложную структуру, чем упорядоченный ламинарный.

Но в самом ли деле на практике при переходе от ламинарного течения жидкости к турбулентному всегда наблюдается бесконечное множество бифуркаций? Современная техника позволяет экспериментально исследовать структуру турбулентных потоков жидкости. Например, она позволяет выяснить, наблюдается ли в реальной системе многочастотный режим и сколько в нем частот. Как правило, в экспериментах не удается найти течения более чем с тремя независимыми частотами. Как найти этому объяснение?

Его предложили в 1971 году известные математики Д. Рюэль и Ф. Такенс. Они рассмотрели турбулентность с трехчастотным режимом, описываемую системой дифференциальных уравнений. Пусть частоты: $\varphi_1 = \omega_1 t$, $\varphi_2 = \omega_2 t$, $\varphi_3 = \omega_3 t$, где φ_n – углы в соответствующем пространстве $n = 1, 2, 3$, а $f(\varphi_n) = f(\varphi_n + 2\pi)$, где $f(\varphi_n)$ – любая из функций, входящая в дифференциальные уравнения. Рюэль и Такенс доказали, что если сколь угодно мало изменить правые части дифференциальных уравнений, то их решение качественно изменится. Вместо трехчастотного режима появится странный аттрактор, а поведение системы станет хаотическим. Следовательно, реальный ход событий может быть следующим: две бифуркации Хопфа и динамический хаос, наступающий после третьей бифуркации.

Эксперименты показывают, что даже в простейших системах турбулентность может возникать различным образом. Турбулентность преподносит много проблем, которые требуют решения. Так, например, во многих работах по гидродинамике уже давно описывалось такое странное явление: если за ламинарным потоком наблюдать достаточно долго, то в упорядоченном потоке иногда появляются вихри, поведение которых представляется на первый взгляд случайным, потом картина вновь становится упорядоченной и т.д. Такое явление было названо перемежаемостью (ламинарный режим с «островками» турбулентности). Модель, объясняющая это явление, была предложена в 1980 году П. Менневилем и И. Помо. Они исследовали поведение решений системы Лоренца в определенном диапазоне параметров. Было обнаружено, что при некоторых значениях параметров в системе возникают устойчивые циклы, когда поведение системы становится регулярным. Существование этих циклов и объяснило явление перемежаемости.

Проблема возникновения турбулентности и анализа возникающих неустойчивостей важна, прежде всего, для решения прикладных инженерных задач. Однако нельзя недооценивать и ее значимости для решения проблем фундаментальной науки, поскольку большая часть среды, заполняющей Вселенную, находится в турбулентном движении. С неустойчивостями сталкиваются не только инженеры, но и метеорологи и астрофизики, океанологи и гидрогеологи.

3.7. Фракталы

Фракталы (правда, под другими названиями) были открыты математиками более ста лет назад, но их относили к причудам ученых. Тогда математики предпочитали исследовать функции и множества, для которых применимы классические методы вычислений. Функции и множества, которые не являются гладкими или регулярными (множество Кантора, кривые Пеано, функции Вейерштрасса и другие) часто игнорировали как патологические и не заслуживающие изучения. Известный математик Шарль Эрмит назвал их «монстрами».

Эти объекты вновь стал исследовать американский математик Бенуа Мандельброт в 1975 году. Он же и придумал для них термин «фрактал». В своих первых работах он рассматривал их как чисто математические объекты, а в 1982 году вышла его знаменитая книга «Фрактальная геометрия природы», в которой Мандельброт показал фрактальный характер геометрии окружающего мира. Под термином геометрия он понимал, прежде всего, геометрию явлений, наблюдаемых в природе и во многих областях человеческой деятельности. Мандельброт показал, что фракталоподобной структурой обладают такие разные явления как:

береговые линии островов и материков, ландшафты гор, границы облаков, ветви деревьев, русла рек, турбулентные вихри, сосудистая система человека, зерна в скалистых породах, металлах и композитных материалах, а также геометрическая структура кристаллов, молекул химических веществ, в частности, протеинов и многие другие объекты.

Мандельброт в этой работе не стал сразу давать строгого определения новому понятию, поскольку понял, что стоит только на пороге открытия новой геометрии. Он считал, что это определение «как и хорошее вино, требует выдержки». Все фракталы, которые он исследовал, по его мнению, обладали двумя основными свойствами – изломанностью и самоподобием. Изломанность понятна и визуальна и математически (как отсутствие производной в каждой точке излома). Самоподобие понимается как в классическом смысле, когда часть есть уменьшенная копия целого, так и в неклассическом, когда часть является деформированной копией целого.

Строгое и полное определение фракталов пока дать не удастся. Е. Федер в работе «Фракталы» (1991) приводит два определения фрактала:

1. Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича (определение см. в разделе 3.7.1.) которого строго больше его топологической размерности. (Новое определение Мандельброта).

2. Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.

Первое из этих определений корректно, но ограничено – оно исключает многие фракталы, встречающиеся в физике. Второе определение содержит лишь внешний отличительный признак фрактала – самоподобие.

Поэтому в разных работах часто встречается объединение этих двух определений: фракталами называют множества, которые обладают дробной размерностью Хаусдорфа-Безиковича и свойством самоподобия.

Большаков В.И., Волчук В.Н., Дубров Ю.И. в книге «Фракталы в материаловедении» (2005) приводят более полное определение: *фракталом называют функциональное отображение или множество, получаемое бесконечным рекурсивным процессом и обладающее тремя следующими свойствами: дробной размерностью Хаусдорфа-Безиковича, самоподобием и недифференцируемостью.*

При этом следует различать фракталы как математические объекты и фракталоподобные объекты реального мира. Последние обладают свойством самоподобия в ограниченном масштабе (они моделируются с помощью конечного, а не бесконечного рекурсивного процесса).

Фрактальная геометрия – новая междисциплинарная область научных исследований. Она развивается быстрыми темпами. Каждый год публикуется множество работ не только по геометрии фракталов, но и еще больше – по приложению ее к самым разным областям. Появились исследования фрактальной геометрии не только природных объектов, но и

социальных процессов (изменений цен и распределений заработной платы, статистики ошибок при вызовах на телефонных станциях, частот слов в печатных текстах, различных математических объектов и многого другого).

Фракталы используют для сжатия изображений. Идея фрактального сжатия состоит в нахождении в изображении подобных областей и сохранении в файле только коэффициентов преобразований подобия. Сжатие произойдет в том случае, когда коэффициенты преобразований займут меньше места, чем исходное изображение.

Поскольку многие природные объекты, которые появились в результате самоорганизации и «странные аттракторы» обладают фрактальной размерностью, то для синергетики исследование фракталов является одной из основных задач.

3.7.1. Фрактальная размерность

Термины «размерность Хаусдорфа-Безиковича» и «фрактальная размерность» являются синонимами. Просто в первом варианте отражается заслуга авторов этого понятия – немецкого математика Ф. Хаусдорфа, который ввел способ измерения дробной размерности пространства еще в начале XX века, и русского математика А.С. Безиковича, который развил его идеи. Теперь перейдем к определениям понятий топологическая размерность и фрактальная размерность.

Под *топологической размерностью* (для простоты изложения) будем понимать обычную евклидову размерность, которая для точки равна 0, для линии – 1, для плоскости – 2, для куба – 3.

Фракталы будем рассматривать как некое *особое множество* точек в пространстве. Центральное место в определении размерности Хаусдорфа-Безиковича D занимает *измерение множества Ξ точек в пространстве*.

Простой способ измерить длину кривых, площадь поверхностей или объем тела состоит в том, чтобы разделить их соответственно на очень малые отрезки длиной δ , квадраты со стороной δ , кубы с ребром δ или сферы диаметром δ . Если поместить центр малой сферы диаметром δ в какой-нибудь точке множества, то все точки, находящиеся от центра на расстоянии $r < (1/2)\delta$, окажутся покрытыми этой сферой. *Подсчитывая число сфер, необходимых для покрытия интересующего нас множества точек, получим меру величины множества*.

Кривую можно измерить, определяя *число $N(\delta)$ прямолинейных отрезков длины δ* , необходимых для того, чтобы покрыть ее (рис. 3.31). Ясно, что для обычной кривой $N(\delta) = L_0/\delta$. Длина кривой определяется предельным переходом:

$$L = N(\delta)\delta \rightarrow L_0 \delta^0 \quad (3.33)$$

$$\delta \rightarrow 0$$

В пределе при $\delta \rightarrow 0$ мера L становится асимптотически равной длине кривой и не зависит от δ .

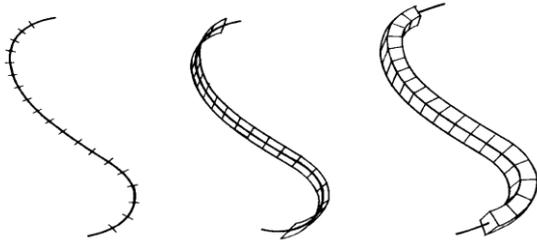


Рис. 3.31. Измерение «величины» кривой.

Множеству точек можно поставить в соответствие и *площадь*. Например, площадь кривой можно определить, указывая число квадратов, необходимых для ее покрытия. Если $N(\delta)$ -число этих квадратов, а δ^2 – площадь каждого из них, то площадь кривой равна

$$A = N(\delta)\delta^2 \rightarrow L_0\delta^1 \quad (3.34)$$

$\delta \rightarrow 0$

аналогично *объем* V кривой можно определить как величину

$$V = N(\delta)\delta^2 \rightarrow L_0\delta^2 \quad (3.35)$$

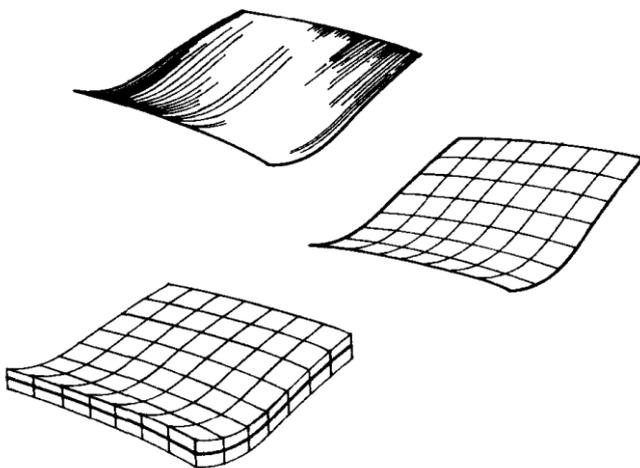
$\delta \rightarrow 0$

Разумеется, что для обычных кривых A и V обращаются в нуль при $\delta \rightarrow 0$, и единственной представляющей интерес мерой является длина кривой.

Рассмотрим далее множество точек, образующих поверхность (рис. 3.32). Нормальной мерой такого множества служит площадь A , для вычисления которой имеем

$$A = N(\delta)\delta^2 \rightarrow A_0\delta^0 \quad (3.36)$$

$$\delta \rightarrow 0$$



Очевидно, что для обычной поверхности число квадратов, необходимых для ее покрытия, определяется в пределе при $\delta \rightarrow 0$ выражением $N(\delta) = A_0/\delta^2$, где A_0 -площадь поверхности.

Поверхности можно поставить в соответствие *объем*, образуя сумму объемов кубов, необходимых для покрытия поверхности:

Рис 3.32. Измерение «величины» поверхности.

$$V = N(\delta) \cdot \delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0 \delta^0 \quad (3.37)$$

При $\delta \rightarrow 0$ этот объем, очевидно, обращается в нуль.

Можно ли поверхности поставить в соответствие какую-нибудь длину? Формально за такую длину можно принять величину

$$L = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0 \delta^{-1} \quad (3.38)$$

которая расходится при $\delta \rightarrow 0$. Этот результат имеет смысл, так как поверхность невозможно покрыть конечным числом прямолинейных отрезков. Отсюда следует, что единственной содержательной мерой множества точек, образующих поверхность в трехмерном пространстве, является площадь.

Но множества точек, образующих кривые, могут быть закрученными так сильно, что длина их окажется бесконечной. В математике существуют кривые (кривые Пеано), заполняющие плоскость. Существуют также поверхности, изогнутые столь необычно, что они заполняют пространство. (Я.Б. Зельдович называл их «толстыми кривыми» и «толстыми поверхностями»). Для того чтобы можно было рассматривать и такие удивительные множества точек, следует *обобщить понятие меры величины множества*.

До сих пор, определяя меру величины множества точек Ξ в пространстве, выбирали некоторую пробную функцию $h(\delta) = \gamma(d)\delta^d$ – отрезок прямой, квадрат, круг, шар или куб, и ею покрывалось множество, образуя меру $M_d = \sum h(\delta)$. Для прямолинейных отрезков геометрический коэффициент $\gamma(d) = 1$, для кругов $\gamma = \pi/4$ и для сфер $\gamma = \pi/6$. Отсюда следует, что в общем случае при $\delta \rightarrow 0$ мера M_d равна нулю или бесконечности в зависимости от выбора d -размерности меры. *Размерность Хаусдорфа-Безиковича D множества Ξ есть критическая размерность, при которой мера M_d изменяет свое значение с нуля на бесконечность:*

$$M_d = \sum \gamma(d)\delta^d = \gamma(d)N(\delta)\delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{при } d > D \\ \infty & \text{при } d < D \end{cases}, \quad (3.39)$$

M_d называют d -мерой множества. Значение M_d при $d = D$ обычно конечно, но может быть равно нулю или бесконечности; *существенно, при каком именно значении d величина M_d изменяется скачком*. Заметим, что в приведенном выше определении размерность Хаусдорфа-Безиковича фигурирует как *локальное* свойство в том смысле, что эта размерность характеризует свойства множеств точек в пределе при исчезающе малом размере δ пробной функции, используемой для покрытия множества.

Следовательно, фрактальная размерность D может также быть локальной характеристикой множества.

При этом следует подчеркнуть, что определение размерности Хаусдорфа-Безиковича позволяет покрывать множество «шарами» не обязательно одного и того же размера при условии, что диаметры всех шаров меньше δ . В этом случае d -мера есть *нижняя грань*, то есть, минимальное значение, получаемое при всех возможных покрытиях.

Рассмотрим ряд примеров множеств. Так, множество точек, образующих линию в обычном евклидовом пространстве, имеет топологическую размерность $D_T=1$ и размерность Хаусдорфа-Безиковича $D=1$. Евклидова размерность пространства равна $E=3$. Так как для линии $D=D_T$, то она не фрактальна, согласно определению 1 стр. 124. Аналогично множество точек, образующих поверхность в пространстве с $E=3$, имеет топологическую размерность $D_T=2$ и $D=2$. То есть, обычная поверхность тоже не фрактальна, независимо от того, насколько она сложна. Наконец, полная сфера имеет $D=3$ и $D_T=3$ – и также не фрактальна.

Но, как показывает практика, существуют множества, для которых размерность Хаусдорфа-Безиковича является дробной величиной. Так, фрактальная линия – это уже особая линия с размерностью больше 1, но меньше 2. И чем больше она изломана, тем ближе к 2 ее размерность. А фрактальная поверхность обладает размерностью больше 2, но меньше 3.

3.7.2. Фрактальная размерность береговой линии

В 1961 году была опубликована работа английского метеоролога Льюиса Ричардсона, в которой он вывел формулу для определения длины западного побережья Англии и показал, что результат сильно зависит от масштаба, который используется на карте. Он, кроме того, обнаружил парадоксальный факт дробной размерности береговой линии Англии $D \approx 1,24$. Это исследование вызвало практический интерес у Мандельброта и убедило его сделать фракталы основным делом жизни.

Покажем, каким образом можно найти фрактальную размерность береговой линии на примере побережья Норвегии (рис. 3.33). Покроем береговую линию на карте множеством квадратов со стороной δ . Подсчитав число квадратов, необходимых для покрытия береговой линии, получим число $N(\delta)$. Далее можно поступить в соответствии с формулой (3.33), и вычислить $M_d(\delta)$, а можно просто продолжить подсчет и найти $N(\delta)$ при меньших значениях δ (то есть уменьшить сторону квадратов, показанных на рисунке).

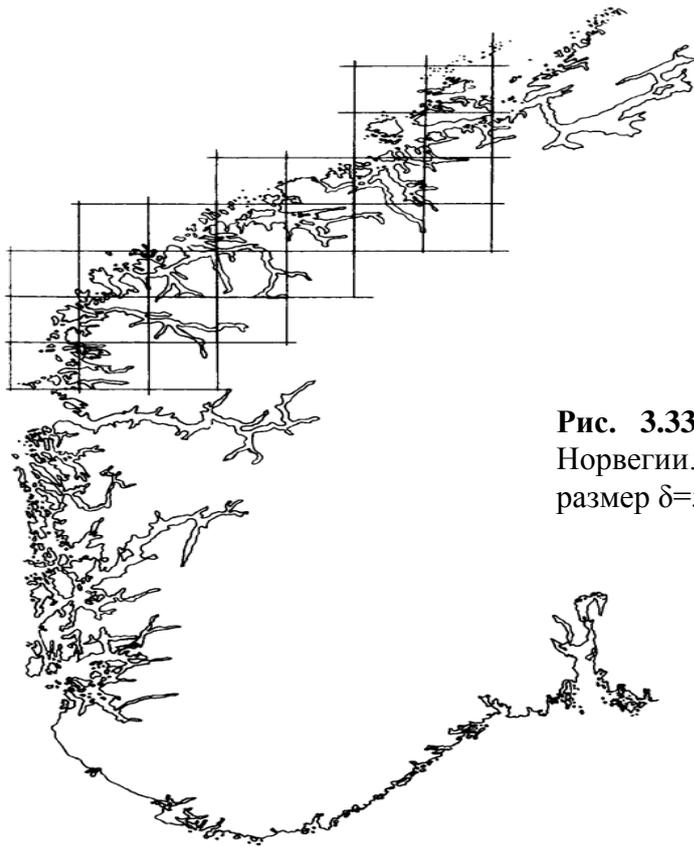


Рис. 3.33. Линия побережья южной части Норвегии. Квадратная ячейка имеет линейный размер $\delta=50$ км

Так как из формулы (3.33) следует, что асимптотически, в пределе при малых $\delta \rightarrow 0$:

$$N(\delta) \sim \frac{1}{\delta^D} \quad (3.40)$$

Фрактальную размерность береговой линии D можно определить, по формуле, следующей из (3.40):

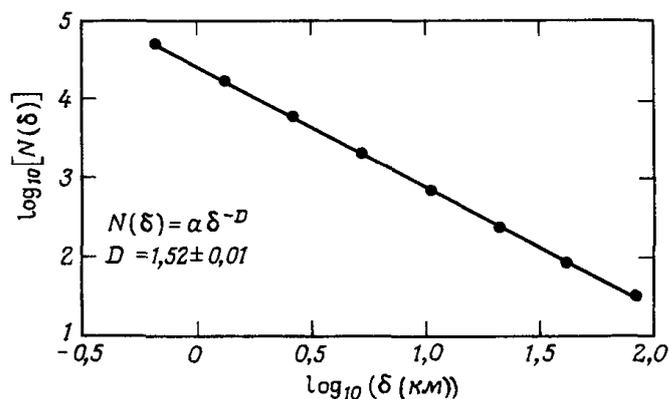


Рис. 3.34. Число ячеек размером $\delta \times \delta$, необходимых для покрытия береговой линии, изображенной на рис. 3.33 как функция шага δ (км). Прямая в дважды логарифмических координатах соответствует зависимости $N(\delta) = \alpha \delta^{-D}$ и построена по результатам измерений. Фрактальная размерность $D \approx 1,52$.

$$D = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{\log \delta}, \quad (3.41)$$

а также вычислив угол наклона прямой, показанной на рис. 3.34.

На рис. 3.34 построен график зависимости длины береговой линии, изображенной на рис. 3.33 (который представляет собой линию, перечерченную с географической карты и представленную в цифровом виде с помощью растра 1800x1200 ячеек) от длины шага δ в двойном логарифмическом масштабе. Вычисления дают $D \approx 1,5$.

Чем более изломанной является береговая линия, тем ближе ее значение D к 2. Так, самой изломанной на карте Европы является береговая линия Греции, для нее $D \approx 1,8$.

Размерность D , определяемую по формуле (3.34) путем подсчета числа клеток, или ячеек, необходимых для покрытия множества в зависимости от размера клетки, принято называть *размерностью, определяемой по подсчету клеток*, или *клеточной размерностью*. Аналогичным образом измеренная фрактальная поверхность – горный рельеф, например, – имеет размерность в пределах от двух до трёх. И чем больше изломанность горного рельефа, тем ближе его фрактальная размерность D к 3.

3.7.3. Тriaдная кривая Кох и ее размерность

По способу построения фракталы делят на *линейные* и *нелинейные*. Алгоритмы построения *линейных фракталов* определяются линейными функциями. В них самоподобие присутствует в самом простом варианте: любая часть повторяет целое. *Нелинейные фракталы* задаются нелинейной функцией роста, то есть уравнениями в степени выше первой. В них самоподобие будет выглядеть более сложным: любая часть является уже не точной, а деформированной копией целого.

Одним их простейших примеров линейного фрактала является кривая Кох, которая была придумана немецким математиком Хельгой фон Кох в 1904 году. На Рис. 3.35 показан способ построения триадной кривой Кох, Эта кривая – пример того, что кривая может иметь фрактальную размерность $D > 1$.

Построение кривой Кох начинается с прямолинейного отрезка единичной длины $L(1)=1$. Этот исходный отрезок называется *затравкой* (или нулевым поколением кривой Кох) и может быть заменен стороной какого-нибудь многоугольника. Далее, каждое звено затравки заменяется *образующим элементом*, обозначенным на рис. 3.35 через $n=1$. Тем самым получаем первое поколение – кривую из четырех прямолинейных звеньев, каждое длиной по $1/3$.

Длина всей кривой 1-го поколения составляет величину $L(1/3)=4/3$ (то есть $1\frac{1}{3}$ затравки). Следующее поколение получается при замене каждого прямолинейного звена полученной фигуры уменьшенным образующим элементом. В результате получается кривая второго поколения, состоящая

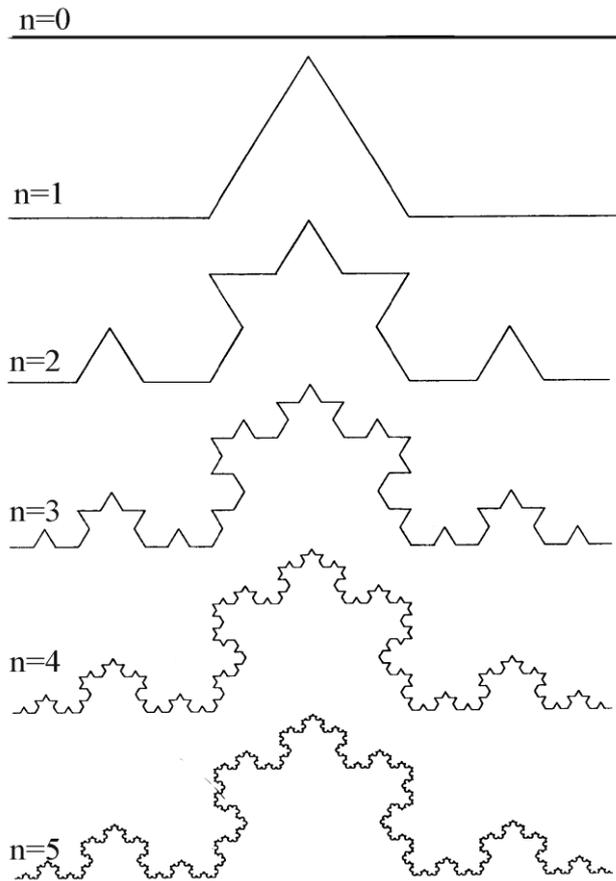


Рис. 3.35. Построение триадной кривой Кох

$n = -\ln \delta / \ln 3$, запишем длину предфрактала в виде

$$L(\delta) = \left(\frac{4}{3}\right)^n = \exp\left(-\frac{\ln \delta [\ln 4 - \ln 3]}{\ln 3}\right) = \delta^{1-D} \quad (3.43)$$

В (3.35) $D = \ln 4 / \ln 3 \sim 1,2628$. Число сегментов равно

$$N(\delta) = \delta^{-D}. \quad (3.44)$$

Как будет показано далее, D – фрактальная размерность триадной кривой Кох. Прежде всего, заметим, что построение Кох позволяет в любом поколении получать нормальную кривую конечной длины, то есть, предфрактал. При увеличении числа поколений величина δ стремится к нулю и длина кривой расходится. Ясно, что множество точек, которое

из $N=4^2=16$ звеньев, каждое длиной $\delta=3^{-2}=1/9$. Длина кривой второго поколения равна $L(1/9)=(4/3)^2=16/9$.

И так далее.

Кривая n -го поколения при любом конечном n называется предфракталом. Проследим за тем, как получается выражение для D .

Длина предфрактала n -го поколения равна n длин 1-го поколения, то есть, определяется формулой:

$$L(\delta) = \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad (3.42)$$

Длина каждого звена составляет $\delta=3^{-n}$. Замечая, что число поколений n представимо в виде

получается как предел бесконечно большого числа итераций процедуры Кох, не является такой кривой, для которой длина является удобной мерой. Но если выбрать пробную функцию $h(\delta)=\delta^d$, то получим d -меру

$$M_d = \sum h(\delta) = N(\delta)h(\delta) = \delta^{-D} \delta^D \quad (3.45)$$

Из последнего соотношения видно, что мера M_d остается конечной и равна единице только в том случае, если размерность d , входящая в пробную функцию $h(\delta)=\delta^d$, равна D . Отсюда следует, что *критическая размерность* и, следовательно, *размерность Хаусдорфа-Безиковича* для триадной кривой Кох равна $D=\ln 4/\ln 3$. На каждой стадии построения предфракталы Кох могут быть растянуты в прямую *линию*, поэтому топологическая размерность триадной кривой Кох равна $D_T=1$. Так как размерность Хаусдорфа-Безиковича D для кривой Кох больше ее топологической размерности D_T , заключаем, что кривая Кох есть *фрактальное* множество с фрактальной размерностью $D = \ln 4/\ln 3$.

3.7.4. Нелинейные фракталы

Одним из первых описал нелинейные фракталы французский математик Гастон Жюлиа еще в 1918 году. Но в его работе отсутствовали изображения исследованных им множеств и термин фрактал. В наше время компьютеры позволили получить изображения *множеств Жюлиа*, которые вместе с *множествами Мандельброта* являются ныне наиболее известными квадратичными фрактальными структурами. Оба типа фракталов возникают в результате реализации на комплексной плоскости самого простого нелинейного алгоритма:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad (3.46)$$

который разбивает комплексную плоскость на «зоны влияния». Любая точка z_0 в данном динамическом процессе либо притягивается неким центром — *аттрактором* (конечным или бесконечным), либо не может принять определенного решения и остается блуждать на границе зон влияния аттракторов. Если в итерационном процессе (3.46) фиксировать c и изменять z_0 , то получается набор множеств Жюлиа. Если фиксировать $z_0 = 0$ и изменять c , то получаем множество Мандельброта.

Очевидно, что вид множества Жюлиа зависит от выбора параметра c . В силу нелинейности (малым изменениям параметра c соответствуют большие изменения формы множества Жюлиа) зависимость эта очень сильна. В самом деле, при $c = 0$ процесс имеет два аттрактора – нуль и бесконечность, границей между которыми является простая окружность. Но уже при незначительных изменениях параметра c гладкая окружность

становится бесконечно изломанной и ее дальнейшая эволюция приводит к смыканию границ и выделению бесконечного числа соединенных уменьшающихся структур, напоминающих то снежинки, то хвосты морских коньков. Наконец, эти структуры распадаются, образуя так называемую фрактальную пыль. Некоторые из множеств Жюлиа, соответствующих различным значениям параметра c , показаны на рис.

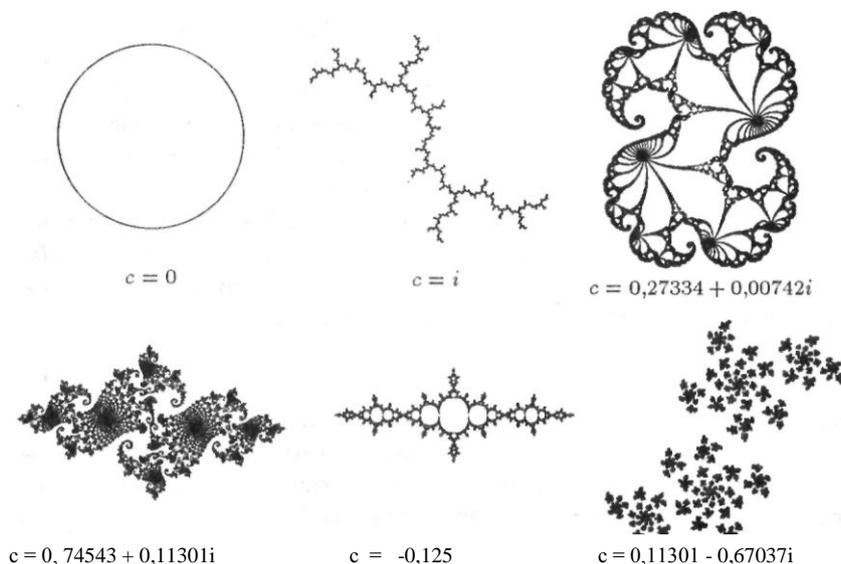


Рис. 3.36. Шесть примеров множеств Жюлиа: от простой окружности ($c = 0$) до самых причудливых нелинейных фракталов

3.36. Множество Мандельброта является своеобразным каталогом к бесконечному многообразию форм множеств Жюлиа.

Если значение параметра c принадлежит множеству Мандельброта, то соответствующее множество Жюлиа будет связным, в противном случае оно рассыпается во фрактальную пыль. Границы множества Мандельброта

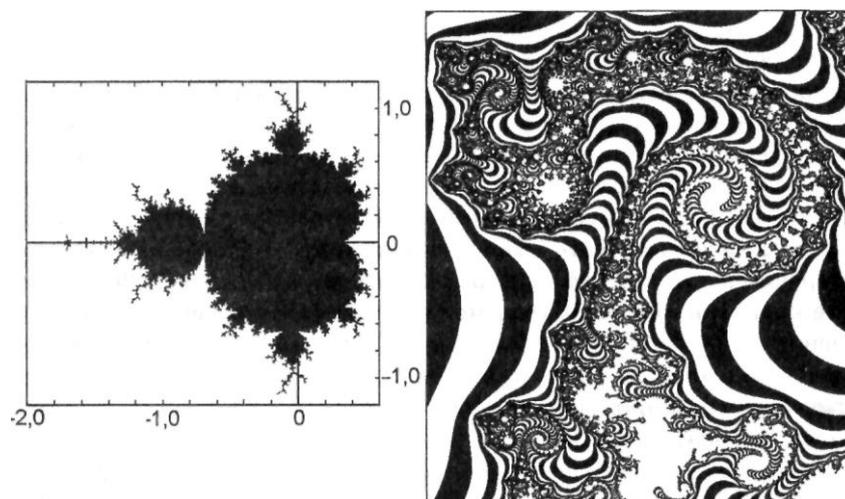


Рис. 3.37 Множество Мандельброта (слева) и сильно увеличенный фрагмент области его границ (справа).

включают весь набор уменьшенных и деформированных множеств Жюлиа.

Таким образом, множество Мандельброта является бесконечно эффективным хранилищем информации для бесконечного разнообразия множеств Жюлиа. На рис. 3.37 приведены черно-белые изображения множества Мандельброта и сильно увеличенного фрагмента области его границ.

3.7.5. Некоторые практические приложения фракталов.

Ёлка-фрактал, закон ветвления речных систем и мелиоративная сеть.

В природе ветвящиеся фракталоподобные структуры встречаются всюду, где необходимо наилучшим образом собрать с некоторой поверхности или тела вещество и энергию в одну точку при минимальной общей площади структуры или, наоборот, равномерно распределить их. Это и русла рек, и молнии, и кровеносная, нервная, дыхательная системы человека, корни и кроны деревьев и многое другое.

Инженер Л.П. Корохов в 1981 году придумал интересный фрактал для моделирования структуры речной сети. Поскольку внешне он напоминает елку, то и назван был елкой-фракталом или топологическим деревом. Ёлка-фрактал позволила ему теоретически вывести закон ветвления речных систем.

Ёлка-фрактал (рис. 3.38) представляет собой ветвящуюся по плоскости кривую, состоящую из одномерных и двумерных симплексов.

(Симплекс (от лат. *simplex* – простой) – простейший выпуклый многогранник данного числа измерений n . Трехмерный симплекс ($n=3$) представляет собой тетраэдр, двумерный симплекс – треугольник, одномерный – отрезок, нульмерный – точку). Кривая бесконечна, но вписывается в конечную площадь. Она непрерывна, но вся состоит из углов. Это недифференцируемая кривая, не имеющая ни в одной точке касательных и это – линейный фрактал так как у него даже самая малая часть в точности повторяет саму елку. Размерность его дробная и равна 1.77178...

С помощью ёлки-фрактала Л.П. Короховым получена функциональная зависимость между площадью абстрактного водосборного бассейна и длиной его главного водотока:

$$F = kL^f, \quad (3.47)$$

где F – площадь абстрактного водосборного бассейна; L – длина главного водотока; f – степень покрытия поверхности водосбора ветвящейся структурой ёлки или её размерность, равная 1.77178; k – коэффициент,

отражающий плотность покрытия поверхности абстрактного водосбора «речной сетью».

Если размеры точек, составляющих ёлку-фрактал, равны размерам точек, образующих поверхность, на которой происходит ветвление ёлки, то коэффициент $k=0.58$, а ветвящаяся структура почти полностью заполняет пространство водосбора III ранга.

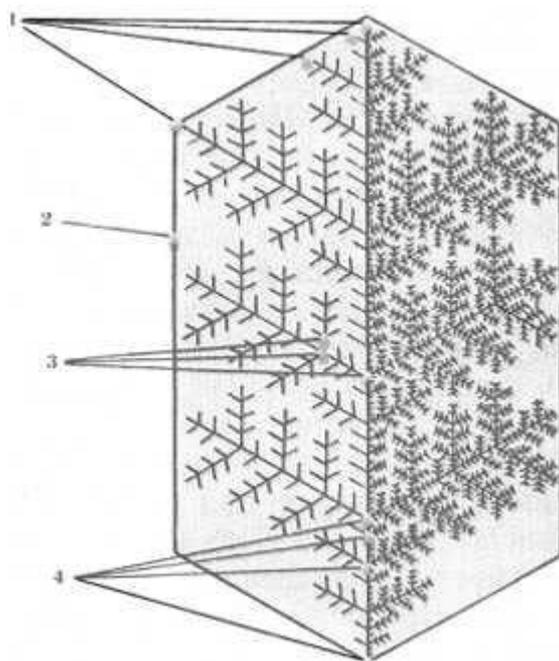


Рис. 3.38. Ёлка-фрактал равномерно заполняет поверхность шестиугольника. Цифрами обозначены 1 – точка роста; 2 – фигура, в которой развивается структура фрактала; 3 – внутренняя точка; 4 – корень ёлки-фрактала.

В этом случае формула принимает вид:

$$F=0.58L^{1.77178}, \quad (3.48)$$

что не отличается от аналогичных зависимостей, установленных стохастическими методами для реальных речных бассейнов территории США (Д.Грей, 1967 г.) и для европейской части СССР (Р.Нежиховский, 1971 г.).

Ёлка-фрактал равномерно, компактно и плотно покрывает поверхность, на которой она ветвится и по соотношению площадных и линейных характеристик тождественна речной сети среднестатистического речного бассейна Земли. Ветвясь, она, так же как и речная сеть, не полностью охватывает поверхность «водосбора», то есть имеет «водораздельные пространства». Кроме того, Корохов на основе своей модели изобрел

конструкцию совершенной мелиоративной сети, где использован принцип ветвления ёлки-фрактала.

Фракталы и медицина

Интересны недавно опубликованные в США результаты исследования фрактальных свойств физиологических систем, из которых следовал вывод, опровергающий теорию гомеостаза, являющуюся общепризнанной в медицине.

Ученые Гарвардского университета исследовали периодические закономерности, которые могли бы служить предвестниками развивающихся заболеваний, в частности сердечных. При этом они опирались на общепризнанную концепцию гомеостаза, согласно которой все физиологические системы организма стремятся возвратиться в состояние устойчивого равновесия, как только перестаёт действовать фактор, выводящий их из этого состояния. С такой точки зрения объясняются, например, нарушения сердечного ритма у старых и больных людей – ослабленному организму труднее поддерживать стабильность сокращений сердечной мышцы. Поэтому считалось, что чем сильнее выражена аритмия, тем вернее перспектива внезапной остановки сердца. При том кардиологам давно известны значительные даже у здоровых людей изменения частоты пульса в течение суток: от 40 до 180 ударов в минуту. Согласно концепции гомеостаза подобные вариации – просто ответные реакции на изменения в окружающей среде.

Ученые, обследовав в течение суток добровольцев, отличавшихся крепким здоровьем и защищённых, насколько возможно, от внешних раздражителей, получили совершенно случайный, нерегулярный график сердечных сокращений, не несший, на первый взгляд, никакой информации о предмете их поиска (рис. 3.39). Однако, проанализировав его в различных временных масштабах, они заметили в частности, что на участке кривой, соответствующей нескольким часам, присутствуют более быстрые флуктуации, диапазон и последовательность которых походит на более медленные флуктуации исходного часового графика. В минутном масштабе находились ещё более быстрые флуктуации, которые также соответствовали характеристикам исходной кривой. Флуктуации выглядели подобными самим себе, так же как ветки геометрического фрактала. Предписанное теорией стремление к гомеостатической стабильности не наблюдалось. Кардиограмма вела себя как фрактальная кривая. Но если кардиограмма – фрактальная кривая, то, во-первых, причиной её самоподобия в отсутствие внешних раздражителей должны быть устройство и жизнедеятельность организма, а во-вторых, признаком здоровья становился уже не стабильный, а внешне хаотичный сердечный

ритм. Объяснение первого вывода почти очевидно. Ведь сердце снабжается кровью с помощью фракталоподобной структуры артерий и вен. В самом сердце ветвящиеся сухожилия прикрепляют митральный и трехстворчатый клапаны к мышцам. Наконец, фрактальная организация прослеживается в структуре разветвления некоторых сердечных мышечных волокон и в системе Гиса, передающей электрические сигналы от предсердий к желудочкам.

Если ещё учесть, что управляющие работой сердца нервные клетки с их многочисленными мелкими отростками-дендритами являются примером

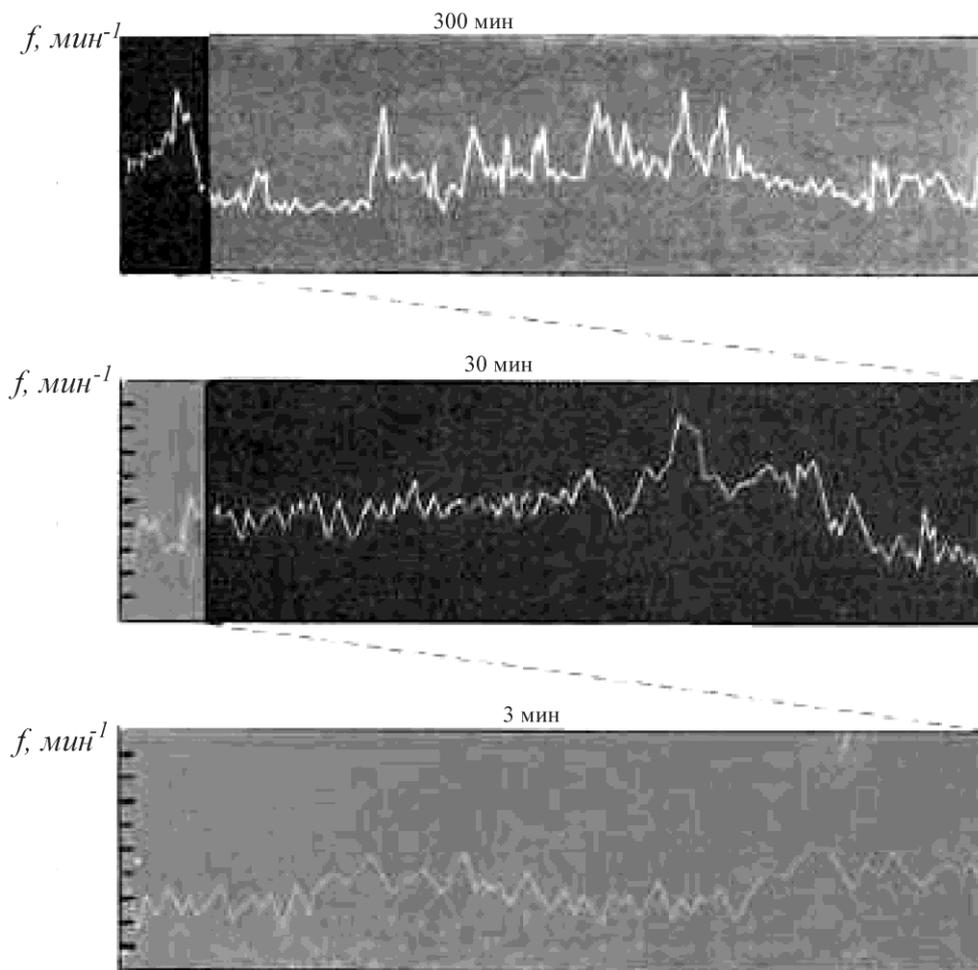


Рис. 3.39. Частота сердечного ритма здорового человека в интервалах 300, 30 и 3 минуты. Быстрые флуктуации выглядят почти так же, как медленные.

типичного фрактала, то полученный результат американских ученых становится вполне объяснимым.

Второй вывод требовал экспериментального подтверждения. И оно было получено, укрепив сомнения в абсолютной справедливости положений теории гомеостаза. Полученные графики оказались красноречивее любых слов. На одном из них сердечный ритм почти

стабилен, а получен он за 13 часов до... остановки сердца. На другом графике заметна его явная упорядоченность, произошедшая за 8 суток до внезапной смерти от сердечной недостаточности. И, наоборот, кривая сердцебиения здорового человека отличается большой хаотичностью.

Получалось, что вопреки сложившимся представлениям, беспорядок означал жизнь, а четкая стабильность предвещала близкую смерть. Но почему природа как бы противоречит здравому смыслу, предпочитая порядку хаос? Вероятно, потому, что определенного вида хаос и представляет собой наиболее рациональную организацию. Ведь хаотическая динамика даёт организму много функциональных преимуществ. Благодаря этому он способен работать в широком диапазоне условий и легко адаптироваться к изменениям. Пластичность позволяет учитывать требования постоянно изменяющейся внешней среды. Динамику случайности обеспечивают фрактальные структуры, обладающие к тому же и значительным запасом прочности.

В ближайшее время благодаря изучению фракталов, возможно, возникнут более тонкие методы анализа различных нарушений функций организма при старении и различных заболеваниях, а на их основе можно будет разрабатывать и новые методы лечения.

Глава 4. Синергетика и компьютерное моделирование.

Интересный подход к моделированию процессов самоорганизации (получивший название «клеточные автоматы») появился благодаря развитию вычислительной техники, информатики и теории игр. Понятие «клеточные автоматы» было введено в конце сороковых XX столетия Дж. фон Нейманом и К. Цусе как дискретная вычислительная среда для построения разнообразных алгоритмов. Клеточные автоматы изобретались много раз, под разными названиями. В математике аналогичные объекты изучались в одном из разделов топологической динамики, а в электротехнике они были известны как итерационные массивы. Остановимся подробнее на этом типе моделирования.

4.1. Моделирование сложных систем с помощью клеточных автоматов.

Понятие «клеточные автоматы», как указывалось выше было введено в середине 40-х годов XX столетия создателем одной из первых электронных вычислительных машин Дж. фон Нейманом. Он в то время пытался моделировать с помощью клеточных автоматов биологические самовоспроизводящиеся системы. В конце мировой войны инженер К. Цусе, скрываясь в Австрии от нацистов, занимался разработкой языков программирования и открыл «вычислительные пространства» (т. е. «клеточные автоматы») как дискретную вычислительную среду для построения разнообразных алгоритмов. Он использовал их для моделирования физических процессов. К сожалению, в силу исторических обстоятельств работы Цусе не получили широкой известности. Исследования фон Неймана по клеточным автоматам были завершены и опубликованы А. Берксом, который активно занимался этой проблематикой в 60-70-е гг. и написал ряд обобщающих работ. В связи с развитием вычислительной техники интерес к клеточным автоматам возрастал. Их исследованием и применением к моделированию различных процессов занимались американские, японские, советские и европейские ученые: Т. Тоффоли, Н. Марголюс, Дж. Голланд, А. Смит, С. Аморозо, В. Аладьев, А. Маруока, М. Кимура и другие.

Клеточный автомат представляет собой дискретную динамическую систему, поведение которой полностью определяется набором локальных правил. Клеточный автомат состоит из множества объектов-ячеек, образующих регулярную решетку (которая может быть как конечной, так и бесконечной). Состояние любого объекта-ячейки в момент времени t характеризуется некоторой переменной (определенным числом или набором чисел) и изменяется синхронно через дискретные интервалы времени в соответствии с правилами, однозначно определяющими

последующее состояние объекта-ячейки в зависимости от состояния переменных в ближайших соседних ячейках. Правила являются всюду одинаковыми, локальными и не изменяются во времени.

4.1.1. Основные свойства клеточных автоматов

Уникальность клеточных автоматов определяется следующими их свойствами.

1. Локальность правил: на новое состояние объекта-ячейки влияет лишь она сама и ее соседи. Действия на расстоянии нет.

2. Однородность системы: ни одна область решетки не отличается от другой (но если решетка конечна, то возможны краевые эффекты).

3. Множество возможных состояний клетки конечно. Это условие необходимо, чтобы для получения нового состояния клетки требовалось конечное число операций.

4. Значения во всех клетках изменяются одновременно, в конце операции.

Конечно, и сама решетка, на которой разворачивается процесс, и правила, которым он подчиняется, могут быть различными, следовательно, клеточные автоматы также будут обладать разными свойствами и демонстрировать различное поведение. В настоящее время описано большое количество клеточных автоматов.

4.1.2. Классификация клеточных автоматов.

Существует классификация (S. Wolfram, 1983), согласно которой все автоматы делятся на четыре класса в зависимости от типа динамики их состояний. Автоматы *первого класса* через некоторый конечный промежуток времени достигают однородного состояния, в котором значения всех элементов одинаковы и не меняются со временем. Ко *второму классу* автоматов относятся системы, приводящие к локализованным структурам стационарных или периодических во времени состояний элементов. *Третий класс* составляют «блуждающие» автоматы, которые с течением времени посещают произвольным (непериодическим) образом все возможные состояния элементов, не задерживаясь ни в одном из них. А *четвертый класс* составляют так называемые «странные» автоматы, динамика которых зависит от особенностей начального состояния элементов. Некоторые начальные состояния приводят к вырождению автомата, другие – к возникновению циклической последовательности состояний, третьи – к непрерывно меняющимся (как «по системе», так и без видимой системы) картинам активности элементов.

К автоматам четвертого типа относится знаменитая игра «Жизнь», которую предложил в 1970 году кембриджский математик Джон Конвей. В процессе этой игры могут возникать, менять форму и погибать различные пространственно-временные структуры. И хотя, разумеется, нельзя говорить, что этот клеточный автомат точно моделирует динамику реальных биологических популяций, но его поведение напоминает развитие сообщества живых организмов. Поэтому Конвей и назвал свой клеточный автомат игрой «Жизнь».

4.1.3. Игра «Жизнь»

Пространством, на котором разворачивается игра «Жизнь», является плоскость, разделенная на квадратные ячейки. Размеры плоскости (количество ячеек по вертикали и горизонтали) могут быть различными. Чаще всего рассматривают бесконечную плоскость.

Клетка считается «живой», если на ней находится фишка, «пустая» клетка считается «мертвой». Время в игре «Жизнь» дискретно и измеряется в поколениях: каждый момент дискретного времени ($t=1,2,\dots$) соответствует одному поколению ($1,2,\dots$). Рождение и гибель клетки в момент времени $t+1$ определяется состоянием ее соседей в момент t . У каждой клетки имеется 8 соседей, из них 4 имеют с ней общие грани, а 4 имеют с ней общие вершины. Правила игры таковы:

1. Каждая живая клетка, у которой имеется две или три живые соседние клетки, выживает и переходит в следующее поколение.
2. Каждая живая клетка, у которой имеется меньше двух живых соседей, в следующем поколении погибает.
3. Каждая живая клетка, у которой оказывается больше трех живых соседей, в следующем поколении погибает от перенаселенности.
4. Каждая мертвая клетка, рядом с которой оказывается три живых соседа, в следующем поколении оживает.

Как видим, правила очень просты, но эволюция клеток в этой системе может быть достаточно сложной. В этом можно убедиться на следующих примерах.

Рассмотрим эволюцию триплета «семафор» (триплетом называется любая конфигурация из трех живых клеток) (рис. 4.1а). Из правил игры следует, что верхняя и нижняя клетки триплета погибают (на рис. 4.1 б они зачеркнуты). Центральная же клетка имеет двух живых соседей, поэтому она выживает и переходит в следующее поколение. А на двух клетках, прилегающих к триплету, рождается в следующем поколении новая жизнь (см. рис. 4.1б). Таким образом, во втором поколении исходная конфигурация из трех вертикальных клеток превращается в три живые клетки, расположенные горизонтально (рис. 4.1в). Очевидно, что в третьем поколении конфигурация

будет полностью повторять исходную. Таким образом, данный триплет оказывается периодическим с периодом 2 поколения. За такое поведение он был назван «семафором».

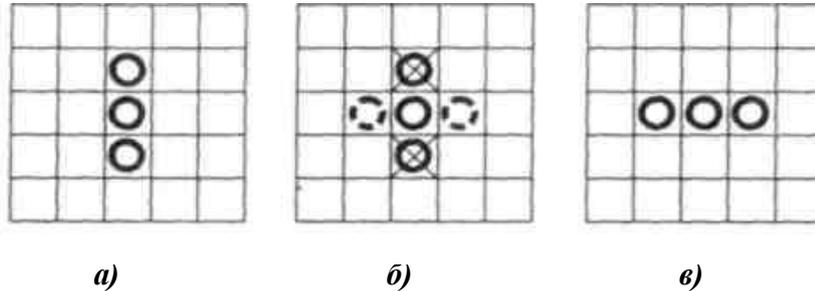


Рис. 4.1. Эволюция триплета «семафор»: а) исходный триплет в первом поколении; б) первое поколение, с указанием гибнущих и рождающихся клеток; в) конфигурация «семафор» во втором поколении

Второй триплет, показанный на рис. 4.2, через два поколения превращается в устойчивую структуру под названием «блок». Любая клетка из этой структуры имеет трех живых соседей, следовательно, переходит в следующее поколение. Подобные стационарные структуры довольно часто появляются в ходе эволюции. Нетрудно проверить, что остальные триплеты, отличные от описанных (разумеется, не считая тех триплетов, которые совмещаются с ними при повороте или зеркальном отражении), быстро погибают в ходе игры.

На рис. 4.3 показаны некоторые часто встречающиеся стационарные структуры, а на рис. 4.4 – две периодические структуры. Первая из них (рис. 4.4а) называется «опрокидывателем», поскольку через 7 поколений верх и низ у нее меняются местами. А структура, изображенная на рис. 4.4б, имеет

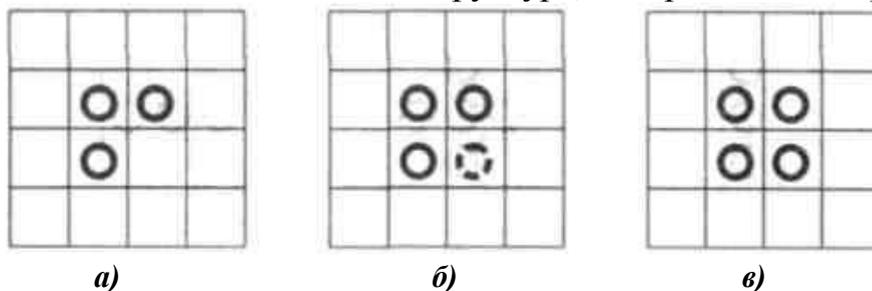


Рис. 4.2. Исходный триплет (а); тот же триплет с указанием рождающейся клетки (б) второе поколение – устойчивая структура «блок» (в)

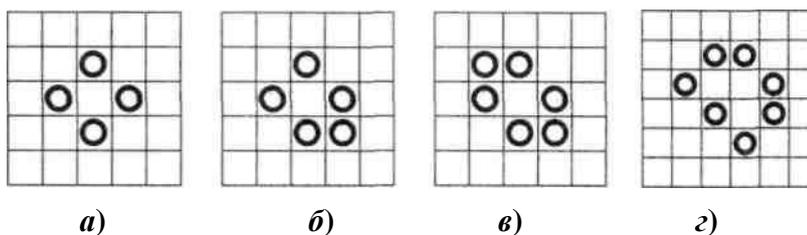


Рис. 4.3. Некоторые стационарные структуры, возникающие в игре «Жизнь»: а) бадья; б) лодка; в) корабль; г) каравай

период, равный 4 поколениям. Разумеется, приведенными примерами

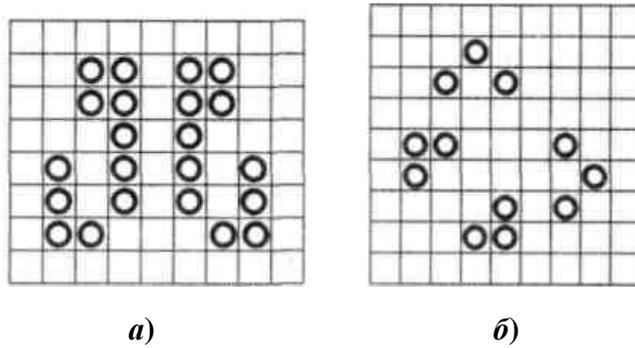


Рис. 4.4. Периодические структуры в игре «Жизнь»

стационарные и периодические структуры не исчерпываются. Можно самим попытаться построить такие структуры.

Кроме того, в игре «Жизнь» существуют структуры – «долгожители» – это конфигурации, состоящие менее чем из 10 живых клеток, которые не достигают устойчивого состояния в течение, как минимум, 50 поколений. Примеры таких «долгожителей» изображены на рис. 4.5. Структура,

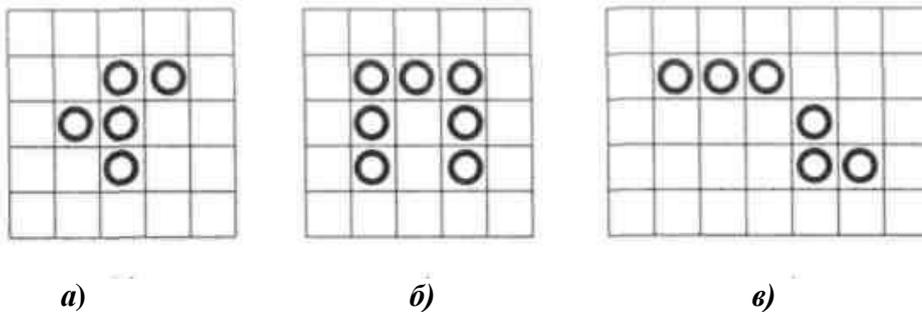


Рис. 4.5. Структуры- «долгожители» в игре «Жизнь»

изображенная на рис. 4.5а, называется «г-пентамино». Она превращается в периодически пульсирующую конфигурацию с периодом 2 лишь через 1103 поколения. На рис. 4.5б изображена структура под названием «ворота». Через 173 поколения она распадается на 5 «семафоров», 6 «блоков» и 2 «пруда». «Долгожитель», изображенный на рис. 4.5в, превращается в устойчивую конфигурацию, состоящую из 6 «блоков», 12 «семафоров» и 1 «каравая» в 609-м поколении.

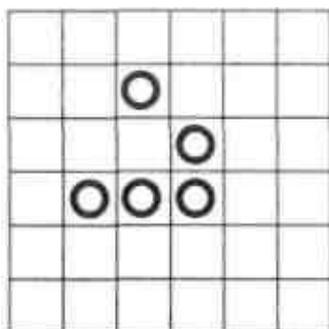


Рис. 4.6. «Глайдер» или «планер» (скользить) или «планером», которая воспроизводит себя через четыре хода, сдвигаясь на одну клетку вниз и вправо, двигаясь по диагонали игрового поля.

Перемещающиеся структуры называют «кораблями» (рис. 4.7). «Глайдер»-«планер» является самым малым «кораблем», а все остальные «корабли» состоят из большего числа живых клеток. Во время полета

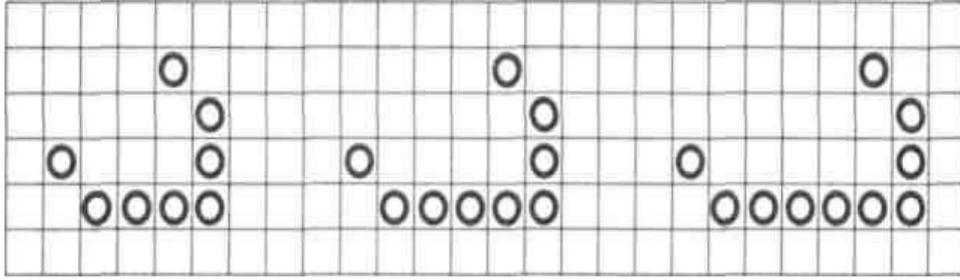


Рис. 4.7. Корабли

больших «кораблей» из них вылетают «искры», которые гаснут при дальнейшем движении «кораблей». «Корабли» не могут иметь длину более шести клеток, т.к. при больших размерах этих объектов на поле начинают появляться различные мелкие структуры, препятствующие их движению, что ведет, в конце концов, к их разрушению и гибели. Однако, как выяснил Конвей, для выживания очень большим «кораблям» необходим эскорт из двух или более «кораблей» меньших размеров.

Но существуют еще и такие необычные структуры, как «глайдерное ружье», которое является периодической конфигурацией с периодом в 30 поколений, причем каждый период оно «выстреливает» глайдером (отсюда и название), который затем удаляется от ружья. Таким образом, каждые 30 поколений число живых клеток увеличивается на 5, следовательно, на бесконечном игровом поле «глайдерное ружье» является неограниченно растущей структурой.

Что же происходит при столкновении «кораблей» и стационарных структур? Возможны самые разные варианты развертывания событий, зависящие не только от того, какие объекты сталкиваются, но и от угла, под которым столкновение произойдет. Столкновение двух «глайдеров» может приводить к их аннигиляции, а может привести к рождению целой серии стационаров и «семафоров». При этом, чем большую площадь занимает сообщество, тем сложнее оно будет себя вести.

Из рассмотрения эволюции простейших структур можно сделать вывод о том, что в игре «Жизнь» возможны следующие виды развития популяции через конечное число поколений:

1. Вымирание в процессе эволюции.
2. Превращение в стационарную структуру, которая больше не изменяется.
3. Возникновение из первоначальной популяции периодически изменяющейся во времени структуры.
4. Развитие в течение длительного интервала времени без гибели и без

повторений в своем развитии.

5. Периодическое изменение во времени и передвижение по эволюционному пространству популяции, обладающей периодической пространственно-временной структурой.

6. Неограниченный рост на бесконечном эволюционном пространстве.

7. Исчезновение в результате взаимодействия с другой структурой.

Следует отметить еще некоторые особенности игры «Жизнь».

Во-первых, любая структура порождает в игре «Жизнь» только одну структуру-наследника, а вот структур-родителей может быть несколько. Другими словами, зная текущую структуру живых клеток, можно однозначно определить структуру, которая появится в следующем поколении, но вот однозначно определить структуру-родителя невозможно.

Во-вторых, не смотря на то, что эволюционные правила известны, предсказать заранее результат эволюции невозможно, пока последовательно не будут пройдены все поколения от начальной структуры до конечной.

4.1.4. Примеры моделирования процесса самоорганизации с использованием клеточных автоматов

На первый взгляд, вполне может показаться, что клеточные автоматы – это не более чем забавная игрушка, созданная для развлечений. Однако это совершенно ошибочное мнение.

Обратимся к простейшему описанию эволюции открытых нелинейных систем, находящихся вдали от равновесия. В них могут возникать стационарные структуры, сложные колебательные процессы, хаотические режимы. И даже в одной и той же среде могут возникать качественно различные процессы с разным направлением эволюции. Эти особенности эволюции структур являются общими для эволюции открытых систем и клеточных автоматов. Разные типы структур, формирующихся в игре «Жизнь», могут служить аналогией процессов в открытых нелинейных системах.

К настоящему времени клеточные автоматы являются эффективным средством решения задач из самых различных областей знания. С помощью клеточных автоматов успешно решаются задачи моделирования двух- и трехмерных гидродинамических потоков; течения со свободной границей; распространения тепловых потоков; процессов, протекающих в химических реакциях Белоусова-Жаботинского; диффузионных процессов; динамики доменов и роста дендритов; фрактальной динамики, газодинамики и многие другие. Научные исследования с использованием клеточных автоматов на сегодняшний день привлекают к себе все большее внимание ученых. Во многом этому способствует быстрое развитие компьютерной техники, без которой изучение моделей типа клеточных автоматов было бы практически

невозможно. Интересен вопрос о моделировании динамики биологических популяций с помощью клеточных автоматов, тем более, что к большинству из популяций не применимо представление о непрерывности и их можно рассматривать как системы, состоящие из отдельных (дискретных) объектов-организмов. Удивительно, но факт остается фактом: простейшие правила игры «Жизнь» позволяют предсказывать поведение очень сложных систем живых организмов.

В качестве примера подобных исследований можно рассмотреть задачу о пространственно-временной динамике колонии бактерий *Yarrowia lipolytica*. Характерная картина развития колонии бактерий, выращенных в питательной среде (1,5% раствор агара), представлена на фотографии (рис.8 слева). На рисунке хорошо видна сложная фракталоподобная структура популяции колонии бактерий *Yarrowia lipolytica*. Возникновение различных структур при росте популяции бактерий объясняется мутациями, которые приводят к изменению условий пространственно-временной эволюции в некоторой пространственной области ареала. Наличие мутаций определяется изменением условий эволюции для некоторой части

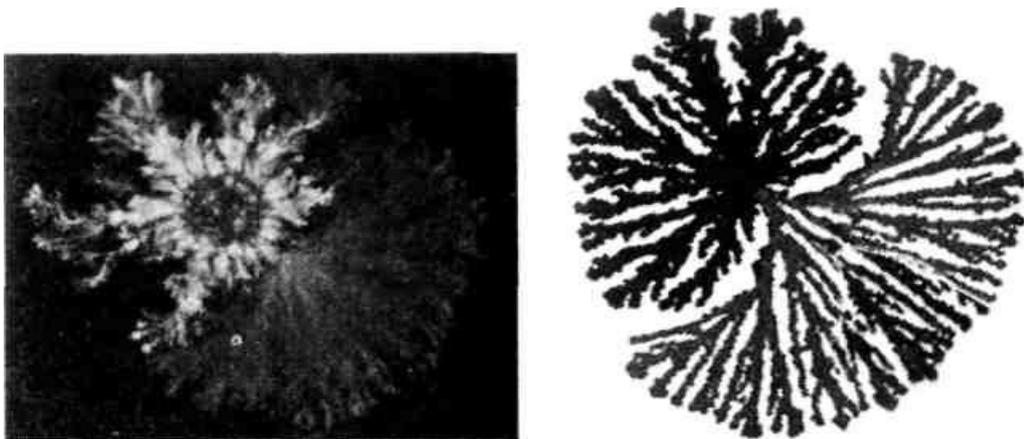


Рис. 4.8. Пространственная структура колонии бактерий *Yarrowia lipolytica*: эксперимент (слева) и результаты численного моделирования с помощью модели класса клеточных автоматов (справа). Фотография взята из работы *Boschke E. and Bley Th. // Acta Biotechnol. 18 (1998). 17.*

биологической популяции. Результаты численного моделирования динамики представлены на рис. 4.8 (справа). Сравнивая результаты моделирования и биологического эксперимента, можно убедиться в том, что в рамках этой модели довольно точно описаны особенности пространственно-временной динамики популяции бактерий.

Как оказалось, с помощью клеточных автоматов можно успешно моделировать динамику не только колоний простейших биологических организмов, но и некоторые закономерности динамики численности

народонаселения в локальных областях, поведение толпы и многие другие процессы. Моделирование эволюции сложных систем с помощью клеточных автоматов стало эффективным и перспективным методом исследования.

Традиционный путь моделирования открытых неравновесных эволюционирующих систем, как известно, был связан с уравнениями в частных производных. Когда их решение аналитическим путем вызывало затруднения, ученые обращались к численным методам их решения, связанным с многочисленными компьютерными расчетами. Трудности такого подхода хорошо известны, методы их преодоления за последние полвека были детально проработаны. Но и они иногда давали сбой. Поэтому, естественно, возникла идея пойти новым путем – описывать различные нелинейные процессы сразу на дискретном языке, считая, что сама измеряемая величина может принимать конечный набор значений. Этот подход стал развиваться, в частности, в теории клеточных автоматов. Он имеет ряд следующих достоинств: возможность высокоскоростных параллельных вычислений на так называемых машинах клеточных автоматов; ясность алгоритмов, позволяющих строить неплохие автоматы для задач газовой динамики, гидродинамики, химической кинетики и других; отсутствие проблем с аппроксимацией, сходимостью и сложными разностными сетками. А самым замечательным оказалось то, что клеточные автоматы можно применять для моделирования ряда таких процессов, которые трудно или даже невозможно описать уравнениями в частных производных.

Главная проблема в применении клеточных автоматов носит не технический характер выбора наиболее подходящего автомата, а принципиальный. И связана она с их теоретическим осмыслением. В начале XX века и на уравнения в частных производных тоже смотрели, как на малопонятный инструмент. С тех пор, благодаря математикам, удалось построить качественную теорию дифференциальных уравнений в частных производных (при том для разных областей и разных уравнений объем ее достижений различен). Основная проблема клеточных автоматов состоит в том, что на сегодняшний день такой качественной теории для них нет и неизвестно, может ли она быть построена. Если это удастся сделать, то методы компьютерного моделирования могут быть значительно усовершенствованы.

4.2. Нейронные сети

Современные компьютерные технологии и бурное развитие вычислительной техники многое дали пониманию процессов самоорганизации. Вычислительные машины позволили исследовать

математические модели, возникающие в разных областях, и обнаружить множество интересных эффектов самоорганизации.

В то же время идеология самоорганизации обогатила методы моделирования и построения алгоритмов. В качестве примера можно привести развитие так называемых нейронных сетей (НС) – систем программирования, построенных по аналогии с деятельностью головного мозга. Основная идея построения нейронных сетей состоит в том, что восприятие, обучение, мышление, другие функции мозга обусловлены коллективным процессом, приводящим к согласованной работе ансамблей достаточно просто устроенных нервных клеток – нейронов. Самоорганизация («самопрограммирование») таких ансамблей является, по мнению создателей нейронных сетей, ключом к объяснению функций мозга. Существующие образцы нейронных сетей реализуются в основном программно, с использованием компьютеров, построенных по фон-Неймановской последовательной архитектуре. Наиболее простой и популярной нейронной сетью в настоящее время считается сеть Хопфилда, которая по своему математическому описанию близка к детально исследованной в статистической физике модели спиновых стекол.

Различные аппаратные реализации НС на настоящий момент не слишком эффективны, так что говорить о коммерческом развитии интеллектуальных систем на базе нейронных сетей (на что возлагаются большие надежды) пока преждевременно. Что касается научных исследований с использованием научных сетей, они ведутся в основном в направлении распознавания образов (с перспективой использования в военных системах), а также для решения статистических задач (моделирование биржевого курса акций) и т.п.

Заключение. Перспективы синергетики.

Чтобы оценить перспективы развития синергетики, необходимо предварительно охарактеризовать состояние современной науки и стоящие перед ней задачи. Как отмечают многие исследователи, в последние 20 лет произошло резкое изменение отношения общества к науке. Культ науки и убежденность в ее могуществе, имевшие место в середине XX века, в последнее время сменился разочарованием общества в науке, значительным снижением престижа научной деятельности. А общие кризисные явления в культуре, политике, образовании и экономике привели к широкому распространению магии, религии, оккультизма и других иррациональных форм познания и отношения к миру.

Экспоненциальный рост числа ученых и затрат на науку, имевший место в XX веке, стабилизировался к концу столетия. Вести исследования по всем направлениям оказалось невозможно, поскольку они становятся все более дорогостоящими. В наши дни отношение к ученым в обществе напоминает взгляд на средневековых ремесленников, нужных для того, чтобы производить разные полезные вещи. Прикладные исследования стали преобладать над фундаментальными. Быстро развиваются те области науки, которые связаны с компьютерными технологиями, связью, биотехнологиями и медициной.

Можно согласиться с тем, что часть ответственности за глобальные кризисные явления в мире несет и наука. Дифференциация науки в XX веке привела к возникновению около 15 тысяч научных дисциплин. С одной стороны, это способствовало бурному ее развитию – более 90% всех научных открытий за всю историю человечества было сделано за этот период. С другой стороны, узкая специализация привела к непониманию и незнанию специалистами происходящего даже в смежных областях, к дублированию исследований. Научные школы все чаще перенимали дух цеховой замкнутости. Как говорится, за деревьями не стало видно леса. В этом заключалось одно из принципиальных ограничений для развития самой науки.

Изменение климата, глобальный экологический кризис, проблемы развития экономики и культуры, политические конфликты показали неготовность современной науки решать многие важные для общества проблемы. Их решение требует разработки междисциплинарных подходов и необходимости выработки целостного научного мировоззрения. И если XX век был веком дифференциации науки, то XXI век, по мнению многих ученых, должен стать веком синтеза научных знаний.

Поэтому синергетика, связанная с поиском единых механизмов самоорганизации в физических, химических, биологических, социальных системах, быстро вошла в число лидирующих направлений исследований.

Роль синергетики как одного из путей синтеза научного знания и создания целостной научной картины мира уже достаточно велика и может оказаться определяющей.

Как уже отмечалось, формирование синергетики началось полвека назад, а успешное развитие продолжается до настоящего времени. Синергетика находится в настоящее время в процессе становления, и ее границы, возможности до конца не определены. На вопрос «Что такое синергетика?» нет однозначного ответа. До сих пор нет единого мнения по поводу ее статуса. Ее оценивают и как новую естественнонаучную картину мира, и как научную парадигму, и как междисциплинарное направление, и как отдельную научную дисциплину. Но не исключено, что синергетика в принципе не укладывается в существующую схему организации научного знания.

С одной стороны, размытость и неопределенность границ синергетики оказывает положительное влияние на ее развитие – каждый исследователь может выбрать себе проблему и разрабатывать ее вширь и вглубь. С другой стороны, открытость синергетики и мода на нее ведут к тому, что появляются многочисленные работы, авторы которых стремятся прикрыть синергетическими фразами пустоту их содержания. Особенно часто этим грешат гуманитарии. Поэтому нужно критически относиться к таким высказываниям, например, как: «Обработка лингвистической информации на синтаксическом и лингвистическом уровнях определяют фазовые переходы на мультифрактальных множествах», «число возможных паттернов в словообразовании резко ограничено неоднородными диссипативными хаотическими потоками, обусловленными мультифрактальностью как на одном аттракторе, так и в перемежающихся перескоках с одного из сосуществующих аттракторов на другой». В этих высказываниях, синергетических по терминологии, нет и доли синергетики.

И хотя синергетика как наука нейтральна по отношению к идеологии и религии, уже появляются веские основания опасаться того, что появляются совершенно антинаучные ее трактовки, стремление связать ее с магией, астрологией и сделать из нее вариант новой религии. (Критику антинаучных подходов, искажающих синергетику и прикрывающихся ее терминологией, можно найти, в частности, в работе В.Б. Губина «О методологии лженауки». – М.: ПАИМС, 2004).

Синергетика принципиально отличается от тех философских и научных теорий, в рамках которых ученые развивали общие идеи, а затем, исходя из них, предписывали, как должна себя вести природа в тех или иных конкретных случаях. Историческое развитие синергетики демонстрирует, что она в своих выводах идет, преимущественно, не от общего к частному, а от частного к общему. Ее исходным пунктом являются исследования конкретных процессов самоорганизации (в лазерах, гидродинамических

неустойчивостях, структурах плазмы, в экосистемах и т.д.). В первую очередь, она строит содержательные модели конкретных процессов, которые часто оказываются применимыми в ряде областей, определяет условия их применимости, а затем уже продвигается к обобщениям общенаучного или даже философского порядка. Синергетические модели не содержат никаких однозначных предписаний в отношении самоорганизации природных систем.

Применение некоторой общей синергетической модели к описанию процессов в новой области также имеет место в практике исследований. Хакен назвал его *феноменологической синергетикой*. В этом случае начинают с общих представлений о том, как может в принципе вести себя система в соответствии с общей моделью, если имеют место условия для ее применения. При этом общая модель выполняет эвристическую функцию в исследовании. Затем исследуют, что же на самом деле происходит на разных уровнях организации реальной системы, на основании чего уже создают конкретную содержательную модель процесса. Таким образом, синергетика постоянно расширяет сферу применения своих идей и методов, совершенствуясь и развиваясь в этом процессе.

Но быстрое развитие имеет и свои издержки. Вместе с ним появились неоправданные надежды на то, что синергетика является универсальной моделью для описания и объяснения любых процессов самоорганизации. Конечно, синергетика с момента своего появления претендовала на преодоление существовавшей в классической научной картине мира границы между живой и неживой природой, между естествознанием и общественными науками, выявляя общие закономерности процессов самоорганизации в различных системах. Но это не значит, что теоретические модели, разработанные для описания самоорганизации, например, в лазерах или кристаллах, могут быть применены для моделирования социальных или биологических явлений.

Следует учитывать, что *применение синергетики в моделировании общественных явлений ограничено определенными рамками*.

Во-первых, только коллективные, массовые процессы в обществе могут быть смоделированы с помощью синергетики. Поведение отдельного человека или небольшой социальной группы находятся вне пределов ее компетенции. В ней не могут быть учтены особенности характера, взгляды, личные убеждения человека. Отдельная личность с ее сложным духовным миром и поведением, таким образом, выпадает из поля зрения синергетики. Синергетика может объяснить только макросоциальные процессы и наиболее общие тенденции, в которых сглаживаются личностное поведение и предпочтения отдельных людей.

Во-вторых, в синергетике не учитывается сознательный выбор поведения и действий человека в той или иной ситуации. Синергетика даже не рассматривает возможности противодействия человека развертыванию общих тенденций тех или иных процессов в обществе. В точке бифуркации такой выбор является определяющим.

В-третьих, ограниченность применимости синергетики к моделированию общественных процессов связана еще и с тем, что социальные системы характеризуются очень большим числом параметров (сотни и тысячи), которые определяют их развитие. Математические модели, применяемые в синергетике, как правило, могут содержать лишь ограниченное число переменных (менее 10). Для социальных систем очень трудно выделить среди огромного множества воздействующих на их развитие параметров те, которые играют роль параметров порядка.

Синергетика успешно применялась для моделирования роста городов и городского населения в работах Дж. Португали. Она оказалась эффективной при моделировании процессов роста народонаселения всей нашей планеты Земля, как показал С.П. Капица. Она хорошо работала при описании формирования общественного мнения и при моделировании долговременных экономических циклов, как это следовало из работ В. Вейдлица. И таких примеров можно привести немало.

В отношении применения синергетики к описанию биологических объектов также действуют ограничения. Биологические системы, как и социальные, очень сложны, поэтому их математическое моделирование также наталкивается на трудности. При этом следует отметить, что значительное усложнение математически моделей биологических систем, ставшее возможным в последние годы благодаря быстрому прогрессу вычислительной техники, дало гораздо более скромные, чем ожидалось, результаты. В ряде случаев оно не приводило ни к углублению понимания процессов, ни к новым качественным результатам, ни к предсказаниям, близким к тем, которые наблюдаются в эксперименте. При этом длительность вычислительного эксперимента до сих пор занимает в сотни и в тысячи раз больше времени, чем сам моделируемый процесс в реальности. Следует отметить, что такая же ситуация сложилась и для детальных моделей колебательных химических реакций, и для моделей фотосинтеза и для многих других процессов. Возможно, ограничения применения синергетики имеют в некоторых ситуациях и принципиальный характер.

Но при моделировании ряда других биологических процессов применение синергетики дало очень интересные результаты, которые не только хорошо совпадают с экспериментальными данными, но и позволяют предсказывать ряд явлений. Например, *эффективно моделируются* такие *массовые процессы* как: волны численности в

развитии популяций, пространственное распространение на больших территориях различных групп живых организмов, поведение больших скоплений птиц, насекомых и высших млекопитающих, распространение эпидемий заболеваний и т.д. Развитие биологической школой в г. Пущино автоколебательного подхода помогло многое понять в функционировании биологических систем. При этом сложные физиологические процессы удалось описать с помощью системы двух или трех обыкновенных дифференциальных уравнений.

Синергетика открыла новые перспективы исследования функционирования такого сложного устройства как человеческий мозг. Работы последних 20-30 лет по математическому и компьютерному моделированию работы психики, по анализу механизмов самоорганизации в мозге и в нервной системе подтвердили это. Примером может служить возникшая в 30-х годах XX века в психологии идея гештальта – целостного образа, который возникает на основе небольшого набора данных об объекте (своеобразных параметров порядка) и позволяет домысливать его другие свойства. Современная нейронаука полагает, что сложное целесообразное поведение организмов под управлением мозга обусловлено коллективным взаимодействием функциональных единиц мозга – нейронов. Разным типам решаемых организмом задач соответствуют различные алгоритмы самоорганизации нейронной сети. Анализ таких алгоритмов, которые использует мозг, и которые можно было бы применить в работе компьютеров, представляется одной из наиболее интересных и перспективных задач синергетики, информатики и нейрофизиологии.

Использование нейронных сетей может представлять собой совершенно новый способ моделирования и понимания реальности. Можно представить себе компьютерные модели, которые непосредственно обучаются на ряде экспериментов, не используя каких-либо уравнений, а затем предсказывают, что будет в этой системе. Моделью становится не уравнение и алгоритм его численного решения, а нейронная сеть, обученная решать эту задачу. «Понимание» в этом случае будет означать, что сеть очень простая, а человек может проследить, как устроен «черный ящик», дающий правильные ответы. В этом направлении возможен пересмотр представлений о простоте и сложности систем.

Можно привести множество успешных примеров применения синергетики в моделировании химических, физических и других систем. И перспективы здесь самые широкие.

С практической точки зрения, перспективы развития синергетики особенно велики в области решения проблемы выхода нашей цивилизации из состояния глобального экологического кризиса. Синергетика может помочь ее решить. Ведь социально-природные объекты представляют

собой сложные иерархические системы. В рамках синергетики разрабатывается ряд подходов, которые позволили бы анализировать возможную динамику таких сложных систем в целом и на большом интервале времени и на этой основе планировать развитие.

Во-первых, это модели режимов с обострением, модели рисков и устойчивого развития сложных систем, которые уже более 30 лет разрабатываются школой А.А. Самарского и С.П. Курдюмова в Москве (см., также разд. 3.2)

Во-вторых, это разрабатываемые в рамках нелинейной динамики модели, получившие название *теоретической истории* (Малков С.Ю., Ковалев В.И., Малков А.С. История человечества и стабильность (опыт математического моделирования). // Стратегическая стабильность.-2000.-№3). Но на этом пути делаются первые шаги.

В-третьих, это *парадигма сложности* и построенная на ее основе *модель самоорганизованной критичности*, которые разрабатываются в США в Институте сложности в Санта-Фе и в России в ряде институтов РАН. Эта область очень быстро развивается и в теоретическом, и в прикладном плане.

Простейшая физическая модель, демонстрирующая самоорганизованную критичность, – это куча песка. Допустим, что мы бросаем песчинку на самый верх кучи песка. Она или останется на ней, или скатится вниз, вызывая лавину. В лавине может быть одна или две песчинки, а может быть и очень много. Статистика для кучи песка оказывается степенной, как для ряда бедствий и катастроф. Степенные зависимости характерны для многих сложных систем – фондовых рынков, землетрясений, биосферы на временах, на которых происходит эволюция, движения по автобанам, трафика через компьютерные сети и многих других систем. Для всех них общим является возникновение длинных причинно-следственных связей. Одно событие может повлечь второе, третье и лавину изменений, затрагивающих всю систему. При этом переход к новому состоянию равновесия может произойти нескоро. Таким образом, опасность находится на грани между детерминированным и вероятностным поведением или, как говорят, на *кромке хаоса*.

Исследование сложных систем, демонстрирующих самоорганизованную критичность, показало, что такие системы сами по себе стремятся к критическому состоянию, в котором возможны лавины любых масштабов, и что в ряде случаев можно говорить и об универсальных сценариях возникновения катастроф. Поскольку к таким системам относится биосфера, общество и его структуры (промышленный комплекс, транспорт, связь) и множество других иерархических систем, развитие теории самоорганизованной критичности очень важно для

анализа управляющих воздействий и разработки методов сохранения или разрушения систем.

В-четвертых, это *теория русел и джокеров*, позволяющая разрабатывать алгоритмы прогноз развития сложных динамических систем. В соответствии с этой теорией, в фазовом пространстве многих реальных объектов есть места (называемые *областями джокеров*), в которых случайность или фактор, не имеющий значения в другой ситуации, может оказаться решающим и не только повлиять на дальнейшую судьбу системы, но и скачком перевести ее в другую точку фазового пространства. Правило, по которому совершается этот скачок, и называется *джокером*. (Термин заимствован из карточной игры. Джокером называют карту, которой, по желанию игрока, можно присвоить статус любой карты. Это резко изменяет игровое положение участников игры, и повышает степень неопределенности в игре.) Таким образом, в области джокера достоверный прогноз сделать очень трудно. Под достоверным прогнозом мы будем понимать такой прогноз, в котором поведение системы с определенной вероятностью или точно можно определить лишь несколькими переменными и, при том на довольно большой срок. Области фазового пространства, где это возможно, названы *руслами*.

Вероятно, способность находить русла в развитии сложных систем, совершенствуя свою предсказывающую систему, и может дать человечеству преимущество в решении глобальных проблем. Ведь только оказавшись в области параметров, соответствующих руслу, и осознав это, можно действовать разумно и с ожидаемыми результатами.

Естественно задать вопрос: «А каково будущее синергетики?». Ведь кибернетика, возникшая в 40–50-е гг. XX века, а в 50–60-е гг. достигшая пика своего развития и претендовавшая на звание «царицы наук», способной охватить и обобщить их достижения, в наши дни уже сошла с научной «сцены». На смену ей пришли сначала общая теория систем, которая достигла максимума своего развития в 60-70-е гг., а затем синергетика.

Синергетика последние 30–40 лет очень интенсивно развивается, но не исключено, что и ее хронологические рамки ограничены. Можно согласиться с Е.Н. Князевой [16], которая, проанализировав ход развития таких междисциплинарных направлений как кибернетика, теория систем и синергетика, пришла к выводу, что в XX веке сформировался новый тип научных изысканий: «Это не просто междисциплинарные или мультидисциплинарные исследования... Это – новый феномен в развитии науки. Фокус междисциплинарных исследований может смещаться с течением времени, другие проблемы и средства их решения могут оказаться в центре и внимания. Но суть самой междисциплинарной структуры, базирующейся на исследовании нелинейности, сложности и

самоорганизации, остается неизменной. Судя по всему, синергетику как теорию самоорганизации и эволюции сложных систем ожидает еще длительный путь».

Словарь терминов, используемых в синергетике

Автоволны – волновые процессы, которые возбуждаются в локально возбудимых средах (средах с абсолютной неустойчивостью).

Автоколебания – незатухающие колебания в нелинейной диссипативной системе (среде), которые возникают и поддерживаются за счет внутренних процессов системы (среды). Вид и свойства автоколебаний определяются характеристиками самой системы (среды), а не начальными условиями. Термин введен А.А. Андроновым в 1928 г.

Автоколебательные системы – диссипативные динамические системы, в которых могут возбуждаться и существовать колебания, удовлетворяющие следующим требованиям:

- независимости амплитуды установившихся колебаний от начального состояния системы;
- независимости или слабой зависимости спектра возбуждаемых колебаний от спектра источника (таким образом, наличие постоянного источника энергии в системе не является обязательным).

Аттрактор (от лат. *attrahere* – притягивать) – точка или множество точек в фазовом пространстве, к которому со временем притягиваются все фазовые траектории динамической системы из некоторой области, называемой областью притяжения. Каковы бы не были начальные значения переменных системы, по мере развития динамического процесса, они будут стремиться к одним и тем же множествам значений – к аттрактору.

Аттрактор странный – 1) один из видов аттракторов, возникающий в системах с числом степеней свободы больше единицы и представляющий собой ограниченное притягивающее множество в фазовом пространстве, по которому движутся хаотические траектории. 2) Странными аттракторами называют также аттракторы, имеющие фрактальную структуру. Для таких аттракторов характерно наличие *горизонта прогноза* – характерного времени, на которое может быть предсказано поведение системы.

Бифуркация (новолат. *bifurcatio*, от лат. *bifurcus* – раздвоенный) – приобретение нового качества движения динамической системы при малом изменении ее параметров. Бифуркация соответствует перестройке

характера движения реальной системы (физической, химической, биологической и т. д.). Основы теории бифуркаций заложены А. Пуанкаре (H. Poincare) и А. М. Ляпуновым в начале XX века.

Бифуркации точка – точка ветвления возможных путей эволюции системы, которой на уровне математического описания соответствует ветвление решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Волны – изменения (возмущения) состояния среды, распространяющиеся в этой среде и несущие энергию. При этом перенос энергии волной (независимо от ее природы) осуществляется без переноса вещества (последнее может иметь место лишь как побочное явление). Волны могут иметь различную форму.

Гамильтона механика – теория недиссипативных динамических систем с потенциальными силами, в которой уравнения движения динамической системы с N степенями свободы записываются в виде $2N$ дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Предложена У.Р. Гамильтоном (1805–1865).

Детерминированная система – это динамическая система, уравнения движения, параметры и начальные условия которой известны и не являются стохастическими или случайными. При этом в некоторых случаях движения детерминированных систем могут казаться случайными.

Детерминированный хаос – это направление в рамках синергетики, в рамках которого изучаются виды хаоса и различные сценарии перехода к хаосу в детерминированных (динамических) системах.

Динамическая система – это математический объект, моделирующий реальные системы (физические, химические, биологические и др.), эволюция которых однозначно определяется начальным состоянием. Динамическая система определяется системой уравнений (дифференциальных, разностных, интегральных и т.д.), допускающих существование на бесконечном интервале времени единственность решения для каждого начального условия.

Диссипация – процессы рассеяния энергии, превращения ее в менее организованные формы (тепло) в результате процессов диффузии, вязкости, трения, теплопроводности и т. п.

Инвариантная мера – функция распределения, описывающая вероятность найти траекторию системы в данной области фазового пространства при $t \rightarrow \infty$.

Канторово множество – множество точек, остающееся после удаления из единичного интервала средней трети и неоднократного повторения этой операции над остающимися интервалами. В пределе такая операция приводит к фрактальному множеству точек на прямой с размерностью, заключенной между 0 и 1.

Квазипериодические колебания – колебания с двумя или более несоизмеримыми частотами.

Когерентность (от лат. *cohaerentia* – внутренняя связь, связность) – согласованное во времени и пространстве поведение элементов внутри системы. В физике это – согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов, проявляющееся при их сложении. Эффекты возникновения кооперативного, когерентного поведения элементов в системе называют также **синергетическими эффектами**. Когерентное поведение элементов является основой для возникновения сложных упорядоченных пространственно-временных структур.

Колебания – движения или процессы, обладающие той или иной повторяемостью во времени. Они свойственны явлениям различной природы: физическим, химическим, биологическим, социальным, техническим.

Линейный оператор – любая математическая операция (например, дифференцирование, умножение на константу), действие которой на сумму двух функций совпадает с суммой ее действий на каждую из функций слагаемых. Линейный оператор тесно связан с принципом суперпозиции.

Нелинейная система – это система, процессы в которой описываются нелинейными уравнениями. Эти уравнения описывают процессы, развивающиеся во времени и в пространстве.

Нелинейность в математическом смысле означает, что математические уравнения содержат искомые величины в степенях больше единицы. Нелинейные математические уравнения, как правило, имеют несколько (более одного) качественно различных решений.

Нелинейность в философско-мировоззренческом смысле означает:

1) наличие многих вариантов путей эволюции; 2) существование выбора из альтернативных путей эволюции; 3) возможность чередования различных форм протекания процессов (ускорения и замедления, изменения интенсивности, эволюции и инволюции, интеграции и частичного или полного распада); 4) необратимость эволюционных процессов.

Неустойчивость вблизи момента обострения – чувствительность нестационарных эволюционирующих структур к малым возмущениям (флуктуациям) на асимптотической стадии, приводящая к вероятностному хаотическому распаду этих структур.

Неустойчивость по Ляпунову – один из видов неустойчивости, означающих неустойчивость по отношению к начальным данным, к начальным возмущениям (отклонениям), которые приводят при дальнейшем развитии процесса к экспоненциальному «разбеганию» смежных фазовых траекторий.

Неустойчивые системы – класс систем, поведение которых чувствительно к малым возмущениям, к флуктуациям на микроуровне, состояние которых может значительно изменяться под их воздействием.

Обострение (англ. blow up):

– **время обострения** – конечный (ограниченный) промежуток времени, в течение которого процесс сверхбыстро, асимптотически развивается;

– **задача на обострение** – некий класс модельных задач для анализа открытых нелинейных систем, в которых процессы развиваются сверхбыстро, т. е. характерные величины (например, температура, энергия, концентрация и т.д.) неограниченно возрастают за конечное время;

– **режим с обострением** – режим, имеющий длительную квазистационарную стадию и стадию сверхбыстрого нарастания процессов в открытых нелинейных средах.

Обратная связь – воздействие результатов какого-либо процесса на интенсивность его протекания в этой же системе (то есть самовоздействие, саморегулирование), которое может осуществляться как с помощью внешней по отношению к системе цепи, так и с помощью процессов, протекающих внутри системы. Если при этом интенсивность процесса в системе возрастает, то обратная связь называется **положительной**, если уменьшается – **отрицательной**.

Область притяжения – подпространство в фазовом пространстве, из которого траектории выходят на какое-либо определенное движение или аттрактор.

Открытая система – система, которая обменивается веществом, энергией и/или информацией с окружающей средой.

Отображение – математическая операция, ставящая в соответствие одному множеству точек в некотором n -мерном пространстве другое множество точек. При ее итерации отображение аналогично системе разностных уравнений.

Переमेжаемость – вид хаотического движения, при котором длительные временные интервалы регулярного, периодического или стационарного движения сменяются короткими всплесками движения, напоминающими по своим свойствам случайное движение. Временные интервалы между хаотическими всплесками не фиксированы и не предсказуемы.

Перестройка (смена устойчивости, выход на новый устойчивый режим) – изменение устойчивости или динамических свойств идеализированной задачи при введении в нее некоторых неидеализированных членов.

Переходный хаос – движение, которое на конечном временном интервале является хаотическим (траектория движется по странному аттрактору), но затем переходит к периодическому или квазипериодическому движению.

Показатели Ляпунова – числа, служащие мерой экспоненциального сближения или разбегания со временем двух соседних траекторий в фазовом пространстве с различными начальными условиями. Положительный показатель Ляпунова свидетельствует о существовании хаотического движения в динамической системе с ограниченными траекториями. Названы в честь русского математика Ляпунова (1857–1918).

Положение равновесия – это точка в фазовом пространстве динамической системы, к которой приближается фазовая траектория после затухания переходных режимов (при $t \rightarrow \infty$). В механических системах под положением равновесия обычно имеют в виду состояние с нулевым ускорением и нулевой скоростью. В отображениях положениями равновесия могут быть конечные множества: при итерациях отображения или разностного уравнения система последовательно переходит от одной точки такого множества к другой. Положение равновесия называется также неподвижной точкой.

Почти периодическая траектория – это траектория, временная зависимость которой состоит из нескольких дискретных несоизмеримых частот.

Предельный цикл – периодическое движение, возникающее в самовозбуждающейся системе (например, автоколебания). В литературе по динамическим системам предельный цикл относится и к вынужденным периодическим движениям.

Резонансное возбуждение – соответствие пространственной конфигурации внешнего воздействия собственным (внутренним) структурам открытой нелинейной системы.

Самоорганизация – процессы самопроизвольного упорядочивания (перехода от хаоса к порядку), образования и эволюции пространственных и временных структур в открытых неравновесных системах (средах).

Синергетика – междисциплинарное направление научных исследований, в рамках которого изучаются общие закономерности процессов самоорганизации (переход от хаоса к порядку), устойчивости и дезорганизации (переход от порядка к хаосу) пространственных и временных структур в сложных открытых неравновесных системах (средах) различной природы.

Самоподобие (автомодельность) – свойство множества точек, геометрическая структура которого в одном масштабе подобна его геометрической структуре в другом масштабе. (См. **Фрактал**).

Седло (седловая точка) – в теории обыкновенных дифференциальных уравнений точка равновесия с вещественными собственными значениями, из которых по крайней мере одно положительно и одно отрицательно.

Случайный, стохастический или вероятностный процесс – процесс изменения во времени состояния какой-либо системы в соответствии с вероятностными закономерностями. Характеристики такого процесса в любой момент времени являются случайными величинами с определенным распределением вероятностей.

Солитон – структурно устойчивая уединенная волна, возникающая в диспергирующей среде. Солитон ведет себя подобно частице: при взаимодействии солитоны не разрушаются, а расходятся, сохраняя свою структуру неизменной. Структура солитона поддерживается постоянной во

времени за счет баланса между действием нелинейности среды и дисперсии.

Спектр структур открытой нелинейной среды – множество относительно устойчивых состояний ее организации, к которым стремятся процессы в данной среде. В математическом плане спектр структур определяется спектром решений (собственных функций) соответствующего нелинейного дифференциального уравнения.

Структура (в открытой нелинейной среде) – локализованный в определенных участках среды процесс, имеющий определенную геометрическую форму и способный развиваться, трансформироваться в среде или переноситься по среде с сохранением этой формы.

Структура диссипативная – структура, возникающая в результате процесса самоорганизации, для осуществления которого необходим противоположный – рассеивающий (диссипативный) фактор. Термин введен И. Пригожиным.

Структура нестационарная – эволюционирующая структура, способная к росту, усложнению и распаду.

Структура сложная – структура, построенная из ряда простых структур, свойства которой не сводятся к сумме свойств ее частей.

Структура стационарная – устойчивая, неразвивающаяся структура, представляющая собой один из аттракторов эволюции открытой нелинейной системы (среды).

Термодинамическая ветвь – состояние теплового хаоса, к которому, согласно второму началу термодинамики, стремятся процессы в закрытых системах. В открытых системах это – один из возможных путей эволюции, вообще говоря, самый простой путь.

Тор (инвариантный) – движение фазовых траекторий двух связанных осцилляторов без затухания в фазовом пространстве, происходящее по поверхности тора. Круговое движение по окружности меньшего радиуса (меридиану) соответствует колебаниям одного осциллятора, круговое движение по окружности большего радиуса (параллели) – колебаниям другого осциллятора. Если движение периодическое, то траектория на поверхности тора после нескольких витков замыкается. Если движение квазипериодическое, то траектория проходит сколь угодно близко от любой точки на торе.

Универсальность – свойство динамической системы, остающееся неизменным в пределах некоторого класса задач.

Уравнения Лоренца – система трех дифференциальных уравнений с хаотическими решениями, которая была получена Э. Н. Лоренцем в 1963 г. как модель конвекции в атмосфере. Эта система уравнений является одной из основных моделей нелинейной динамики.

Фазовый портрет – последовательность возможных состояний системы в фазовом пространстве, образующая более или менее сложную «траекторию» эволюции системы.

Фазовое пространство – абстрактное математическое многомерное пространство, координатами которого служат независимые параметры, определяющие состояние системы.

Флуктуации – (от лат. fluctuatio - колебание) это случайные отклонения физических величин от их средних значений. Флуктуации имеют место у любых величин, зависящих от случайных факторов.

Фрактал (от лат. frangere – ломать, разбивать) – геометрическая структура, состоящая из множества точек в n -мерном пространстве, обладающая свойствами самоподобия, дробной фрактальной размерностью и недифференцируемостью.

Фрактальная размерность или **размерность Хаусдорфа-Безиковича** – количественная характеристика множества точек в n -мерном пространстве, показывающая, насколько плотно точки заполняют подпространство, когда их число становится очень большим.

Фракталоподобные объекты – объекты, которые обладают свойствами самоподобия, или масштабной инвариантности, т.е. такие, некоторые фрагменты структуры которых повторяются на разных масштабах.

Хаотическое движение – вид движения, чувствительный к изменениям начальных данных. Движение, при котором траектории, задаваемые незначительно отличающимися начальными данными, экспоненциально расходятся.

Список использованной литературы

1. Баблюяц А. Молекулы, динамика и жизнь. Введение в самоорганизацию материи. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.– 375 с.
2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. / Пер. с франц. – М.: Мир, 1991. – 368с.
3. Большаков В.И., Волчук В.Н., Дубров Ю.И. Фракталы в материаловедении. – Днепропетровск: ПГАСА, 2005. –253с.
4. Буданов В.Г. О методологии синергетики // Вопросы философии. – 2006. – №5. – С. 79–94.
5. Ванаг В.К. Волны и динамические структуры в реакционно-диффузионных системах. Реакция Белоусова-Жаботинского в обращенной микроэмульсии. // УФН. – 2004. – Т.174. – №9. – С.991–1010.
6. Восемь лекций по синергетике. Учебное пособие. / А.А. Князев. – Саратов: СГТУ, 1996. – 92 с.
7. Горелик Г.С. Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику. -3-е изд./ Под ред. С.М. Рытова. – М.: Физматлит, 2007.– 656с.
8. Губин В.Б. О методологии лженауки. – М.: ПАИМС, 2004. – 172 с.
9. Дрюк В.Ф. Синергетика: позитивное знание и философский импрессионизм // Вопросы философии. – 2004. – №10. – С. 102–113.
- 10.Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука, 1990. – 375 с.
- 11.Иванова В.С. и др. Синергетика и фракталы в материаловедении. – М.:Наука, 1994. – 383 с.
12. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. – М.: Наука, 1997. – 285 с.
- 13.Карери Дж. Порядок и беспорядок в структуре материи. / Перевод с итал. под ред. Халатникова И.М., М.: Мир, 1985. – 230 с.
- 14.Климонтович М.Ю. Без формул о синергетике. – Минск: ВШ, 1986. –223с.
- 15.Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. Учебное пособие. – М.: Наука, 1982.– 608 с.
- 16.Князева Е.Н. Саморефлективная синергетика // Вопросы философии.–2001.–№10.– С. 99-114.
- 17.Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Основания синергетики. Синергетическое мировидение. М.: КомКнига, 2005. – 240 с.
- 18.Кольцова Э.М., Гордеев Л.С. Методы синергетики в химии и химической технологии. Учебное пособие для вузов. – М.: Химия, 1999. – 256 с.

19. Компьютеры и нелинейные явления. Информатика и современное естествознание. – М.: Наука, 1988. – 192 с.
20. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования. – М.: Наука, 1988. – 176 с.
21. Кудряшов Н.А. Нелинейные волны и солитоны. Соросовский образовательный журнал. Физика. 1997. – №2. – С. 85–91.
22. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. – М.: Наука, Физматлит, 1997. – 496 с.
23. Летников Ф.А. Синергетика геологических систем. – Новосибирск: Наука, 1992. – 227 с.
24. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Руслы и джокеры: о новых методах прогноза поведения сложных систем. – ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (препринт), 1998. – № 32. – 20 с.
25. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 336 с.
26. Математический энциклопедический словарь. / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – 847 с.
27. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику. – М.: Наука, 1997. – 255 с.
28. Милованов В.П. Синергетика и самоорганизация. Экономика. Биофизика. – М.: КомКнига, 2005. – 168 с.
29. Николис Дж. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 488 с.
30. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. Введение / Пер. с англ., М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 344 с.
31. Новое в синергетике. Взгляд в третье тысячелетие. / Под ред. Г.Г. Малинецкого, С.П. Курдюмова. – М.: Наука, 2002. – 478 с.
32. Пелюхова Е.Б., Фрадкин Э.Е. Самоорганизация физических систем. Учебное пособие. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. – 324 с.
33. Пригожин И. Неравновесная статистическая механика. / Пер. с англ. – М.: Эдиториал УРСС, 2005. – 312 с.
34. Пригожин И. От существующего к возникающему. Время и сложность в физических науках. / Пер. с англ. – М.: Наука, 1985. – 328 с.
35. Пригожин И. Стенгерс И. Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. / Пер. с англ. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 240 с.
36. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой / Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1986. – 432 с.
37. Путь в синергетику. Экскурсы в десяти лекциях. – М.: КомКнига, 2005. – 304 с.

38. Рёпке Г. Неравновесная статистическая механика. / Пер. с нем.– М.: Мир, 1990.– 320 с.
39. Режимы с обострением: эволюция идеи. / Под ред. Г.Г. Малинецкого. – Изд 2-е, испр. и доп.– М.: Физматлит, 2006. – 312 с.
40. Синергетика: перспективы, проблемы, трудности. (Материалы «круглого стола»)//Вопросы философии. – 2006. – №9. – С. 3–38.
41. Стромберг А.Г. Синергетика. Применение к химическим процессам. – Томск: Изд-во ТПУ, 2000. – 32 с.
42. Тоффли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов./ Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 280 с.
43. Трубецков Д.И. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2005. – 211 с.
44. Федер Е. Фракталы. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
45. Фейнман Р. Статистическая механика. Курс лекций. /Пер. с англ. М.: Мир, 1978.– 408 с.
46. Физическая энциклопедия в 5 томах./Гл. ред. А.М. Прохоров. – М.: Советская энциклопедия, 1988-1995.
47. Физический энциклопедический словарь. / Гл. ред. А.М. Прохоров. – М.: Советская энциклопедия, 1983. – 928 с.
48. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. / Пер. с англ.– М.: Мир, 1985.– 419 с.
49. Хакен Г. Синергетика. /Пер. с англ. –М.: Мир, 1980.– 404с.
50. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы./Пер. с англ. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. –528с.
51. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. / Пер. с англ.– М.: Мир, 1988.– 240 с.
52. Щербаков А.С. Самоорганизация материи в неживой природе. Философские аспекты синергетики. – М.: Изд-во МГУ, 1990. –111с.
53. Эткинс П. Порядок и беспорядок в природе. / Пер. с англ.– М.: Мир, 1987.– 224 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Глава 1. Исторический экскурс: возникновение и становление синергетики	5
1.1. Синергетика Хакена.....	5
1.2. Возникновение и развитие неравновесной термодинамики.	12
1.2.1. Классическая и неравновесная термодинамика.	12
1.2.2. Линейная термодинамика необратимых процессов Онсагера.....	14
1.2.3. Развитие неравновесной термодинамики Пригожиным	16
1.2.4. Исследования периодических химических реакций. Брюсселятор.	19
1.3. Автоколебания, автоволны и самоорганизация.	24
1.4. Физика нелинейных процессов. Нелинейная динамика.	25
Глава 2. Основные представления и понятия синергетики.....	31
2.1. Системы. Определение, классификация.	31
2.2. Динамические системы	33
2.2.1. Фазовое пространство (поток, траектория, объем, портрет)	33
2.2.2. Консервативные и диссипативные динамические системы.	39
2.3. Простое и сложное поведение динамических систем. Понятие об аттракторах. Типы аттракторов.	41
2.3.1. Понятие о фракталах. Фрактальная структура аттракторов. Закономерности хаотических режимов	45
2.3.2. Странный аттрактор Лоренца.....	47
2.4. Бифуркации и их классификация	53
2.4.1. Бифуркации состояний равновесия.	54
2.4.2. Бифуркации рождения периодического движения.	56
2.4.3. Бифуркации смены устойчивости периодических движений.....	57
2.5. Открытая система.....	59
2.6. Неравновесное состояние	60
2.7. Управляющие параметры, параметры порядка и принцип подчинения	61
2.8. Флуктуации и их роль в самоорганизации	62
2.9. Обратные связи и их роль в самоорганизации.....	65
Глава 3. Самоорганизация в инженерных и природных системах.....	71
3.1. Конвективная неустойчивость.....	71
3.1.1. Ячейки Бенара и их разновидности	71
3.1.2. Неустойчивость Релея-Бенара.....	73

3.2. Локализация тепла. Тепловые структуры. Режимы с обострением	78
3.3. Явления самоорганизации в химии.....	85
3.3.1. Реакция Белоусова-Жаботинского (БЖ)	85
3.3.2. Реакция Белоусова-Жаботинского в неоднородной системе. Химические автоволны.....	88
3.3.3. Химические реакции в сочетании с диффузией. Структуры Тьюринга.....	90
3.3.4. Модель брюсселятора.....	96
3.4. Кооперативная самоорганизация при работе лазера.....	102
3.5. Нелинейные волны и солитоны.....	105
3.5.1. Открытие солитона	107
3.5.2. Линейные и нелинейные волны	108
3.5.3. Уравнение Кортевега–де Фриса	110
3.5.4. Солитоны Кортевега–де Фриса	112
3.5.5. Групповой солитон	113
3.5.6. Топологический солитон	115
3.6. Структуры в турбулентности. Вихри Тейлора.	116
3.6.1. Составляющие турбулентного течения жидкости	116
3.6.2. Вихревые структуры. Вихри Тейлора.	118
3.7. Фракталы.....	123
3.7.1. Фрактальная размерность	125
3.7.2. Фрактальная размерность береговой линии	128
3.7.3. Триадная кривая Кох и ее размерность	130
3.7.4. Нелинейные фракталы.....	131
3.7.5. Некоторые практические приложения фракталов.....	133
Глава 4. Синергетика и компьютерное моделирование.	139
4.1. Моделирование сложных систем с помощью клеточных автоматов.	139
4.1.1. Основные свойства клеточных автоматов	140
4.1.2. Классификация клеточных автоматов.	140
4.1.3. Игра «Жизнь»	141
4.1.4. Примеры моделирования процесса самоорганизации с использованием клеточных автоматов	145
4.2. Нейронные сети.....	147
Заключение. Перспективы синергетики.	149
Словарь терминов, используемых в синергетике	156
Список использованной литературы.....	164
ОГЛАВЛЕНИЕ.....	167