Дисциплина: Синергетика для инженеров
Преподаватель: профессор каф. общей физики Н.Н. Никитенков

ЛЕКЦИЯ 1

Тема 1:

Введение: Зарождение и рождение синергетики.

Тема 2:

Системы, динамические системы.

Дата рождения синергетики и ее основатели

- 1973 г. состоялась первая конференция по проблемам само-организации, на которой профессор Штутгартского университета Герман Хакен сделал доклад о новой науке – синергетике.

Хакен Герман (родился 12 июля 1927 г.) – немецкий физик-теоретик. Изучал физику и математику в университетах Галле (1946–1948) и Эрлангена (1948–1950), получив степени доктора философии и доктора естественных наук. С 1960 г. является профессором теоретической физики университета Штутгарта. До ноября 1997 г. был директором Института теоретической физики и синергетики университета Штутгарта. С декабря 1997г. является почётным профессором и возглавляет Центр синергетики в этом институте, а также ведёт исследования в Центре по изучению сложных систем в университете Флориды (Бока Рэтон, США). Является основателем шпрингеровской серии книг по синергетике.

1. *Хакен Г.* Синергетика. — М.: Мир, 1980. — 406 с.
2. *Хакен Х.* Квантово-полевая теория твёрдого тела — М.: Наука, 1980. — 344 с.
3. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М.: Мир, 1985. — 424 с.
4. *Хакен Г.* Лазерная светодинамика. — М.: Мир, 1988. — 350 с.
5. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным явлениям. — М.: Мир, 1991. — 240 с.
6. *Хакен Г.* Принципы работы головного мозга: Синергетический подход к активности мозга, поведению и когнитивной деятельности. — М.: Per Se, 2001. — 353 с.
7. *Хакен Г.* Тайны восприятия. Синергетика как ключ к мозгу. — Ижевск: ИКИ, 2002. — 272 с.
8. *Хакен Г.* Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии. — Ижевск: ИКИ, 2003. — 320 с.

Илья Романович Пригожин родился (12) 25 января 1917 года в Москве и был вторым сыном в семье фабриканта и пианистки, студентки Московской консерватории Юлии Вихман.

В 1921 году семья эмигрировала из Советской России и обосновалась в Берлине. В 1929 году, перебрались в Бельгию, где Илья в 1941 году окончил Брюссельский университет.

С 1961 по 1966 год Пригожин сотрудничал с институтом Ферми в Чикаго. В 1967 году в городе Остин Пригожин основал *Центр по изучению сложных квантовых систем* (англ. *Center for Complex Quantum Systems*), которым руководил до конца жизни.

Основная масса его работ посвящена неравновесной термодинамике и статистической механике необратимых процессов. Одно из главных достижений заключалось в том, что было показано существование неравновесных термодинамических систем, которые, при определённых условиях, поглощая вещество и энергию из окружающего пространства, могут совершать качественный скачок к усложнению (диссипативные структуры). Причём такой скачок не может быть предсказан, исходя из классических законов статистики. Такие системы позже были названы его именем. Расчёт таких систем стал возможен благодаря его работам, выполненным в 1947 году. В области статистической механики провёл глубокие исследования уравнения Лиувилля для ансамбля на основе формальной аналогии его решений с решениями уравнения Шредингера. Доказал одну из основных теорем линейной термодинамики неравновесных процессов – о минимуме производства энтропии в открытой системе. Для нелинейной области в соавторстве с Гленсдорфом сформулировал общий критерий эволюции Гленсдорфа-Пригожина.

Ввёл (в работе «The Rediscovery of Time») термин «переоткрытие времени», определяющий проблему объяснения существования явления времени.

В 1982 году Пригожин становится иностранным членом Академии наук СССР. Его работы многократно переводились на русский язык.

В 1989 году король Бельгии пожаловал Пригожину титул виконта.

Умер в 2003 г.

1. И.Р. Пригожин, "Наука, разум и страсть" , “Знание – Сила”, N9, 1997

2. И.Р. Пригожин, "Философия нестабильности" , “Вопросы философии”, N6, стр.45-57 (1991)

3. И.Р. Пригожин, "Постижение реальности" , “Природа”, N6, 1998

К 1973 году были известны процессы самоорганизации в следующих областях:

- В гидродинамике,
- в лазерах,
- атмосферных вихрях,
- поведении сообществ диких животных,
- при образовании сложных молекул в химических реакциях,
- галактик,
- в ряде социальных явлений.

При этом в процессе перехода от менее упорядоченного состояния к более упорядоченному во всех этих системах имеют место коллективные, согласованные процессы, все они ведут себя сходным образом и подчиняются общим математическим закономерностям.

Ячейки Бенара – классический пример самоорганизации.

- В 1900 году – эксперимент Х. Бенара (открытие ряда удивительных свойств открытых систем). Наблюдаемые в различных вариантах этого эксперимента структуры, названы ячейками Бенара.

Объект эксперимента – вязкая жидкость налитая тонким слоем в сосуд круглой или прямоугольной формы. Латеральные размеры сосуда много больше толщины слоя жидкости.

В начале эксперимента жидкость находится в состоянии термодинамического равновесия. Затем нижний слой жидкости равномерно нагревают а ее верхняя поверхность поддерживается при постоянной температуре $T_1 < T_2$ – температура нагревателя.

$\Delta T = T_2 - T_1$ – градиент температуры.

При $\Delta T < \Delta T_c$ – теплопередача на молекулярном уровне,

при $\Delta T > \Delta T_c$ – макроскопическое движение жидкости – формирование структур – ячеек Бенара.

Мелкая выемка на дне сосуда

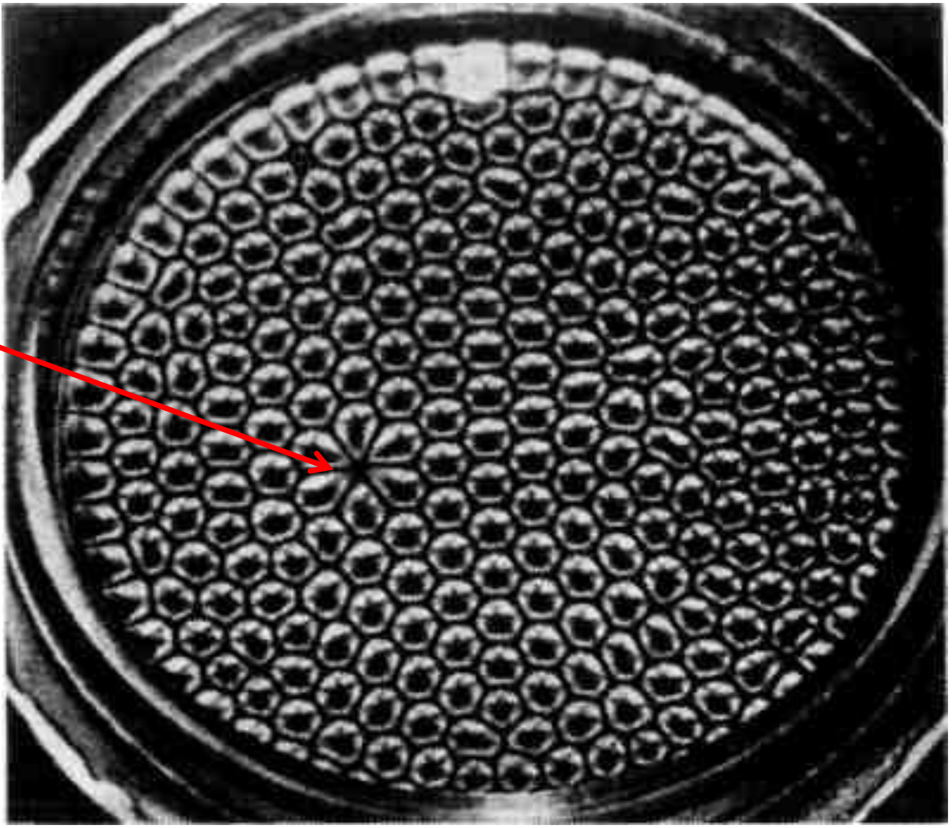
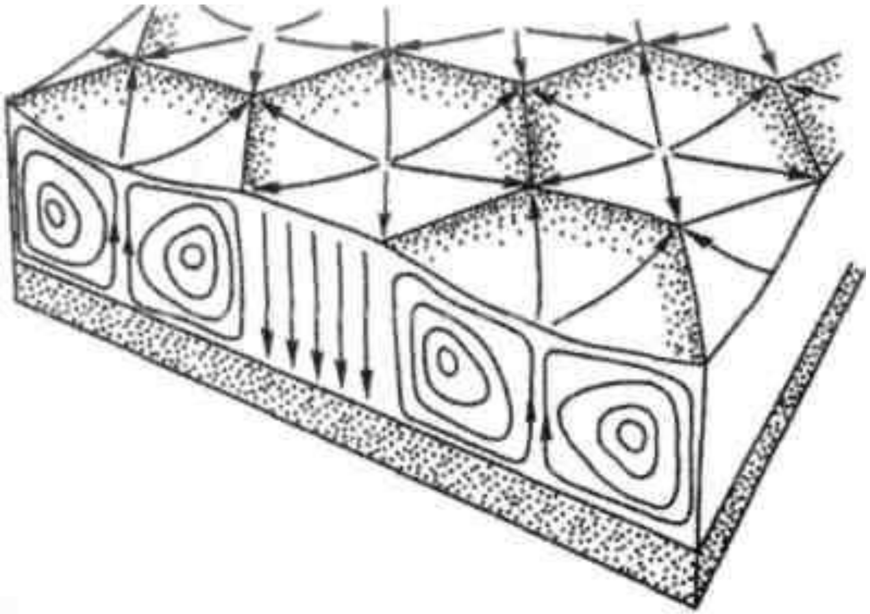
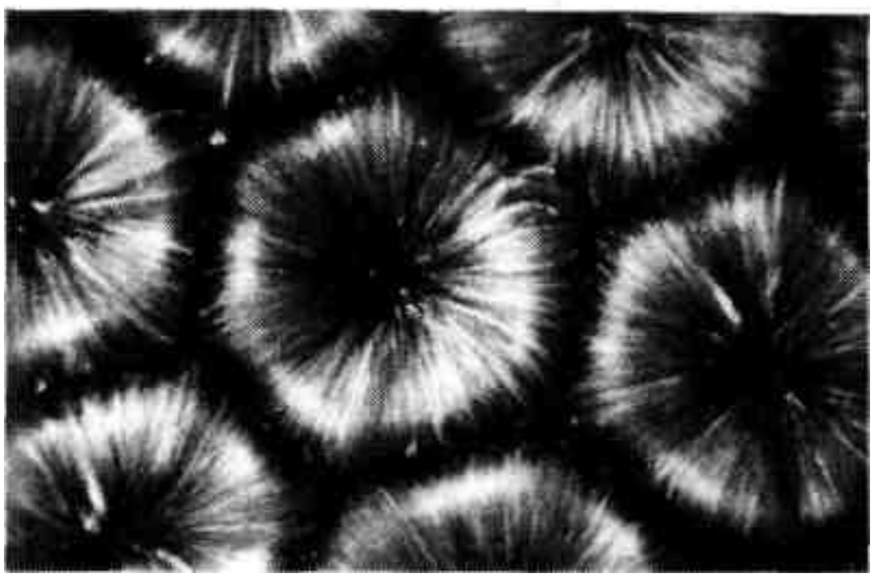


Фото ячеек Бенара в тонком слое силиконового масла. Вид сверху.





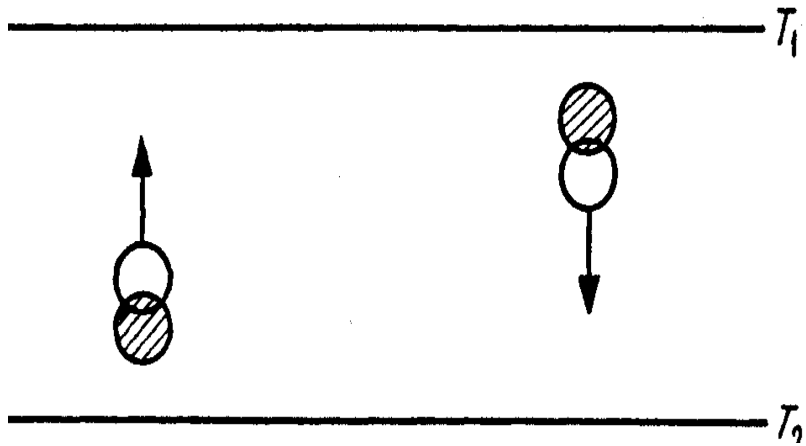
Возникновение шестигранных ячеек Бенара в тонком слое жидкости. Сверху – линии тока жидкости в режиме конвекции Бенара.

Снизу – снимок конвекции Бенара. Видны шестигранные конвективные ячейки в слое силиконового масла толщиной 1 мм с добавлением алюминиевых опилок. Слой равномерно нагрет снизу. Освещенные алюминиевые опилки позволяют визуально проследить подъем жидкости в центре каждой ячейки и ее опускание на краях

Упрощенное объяснение

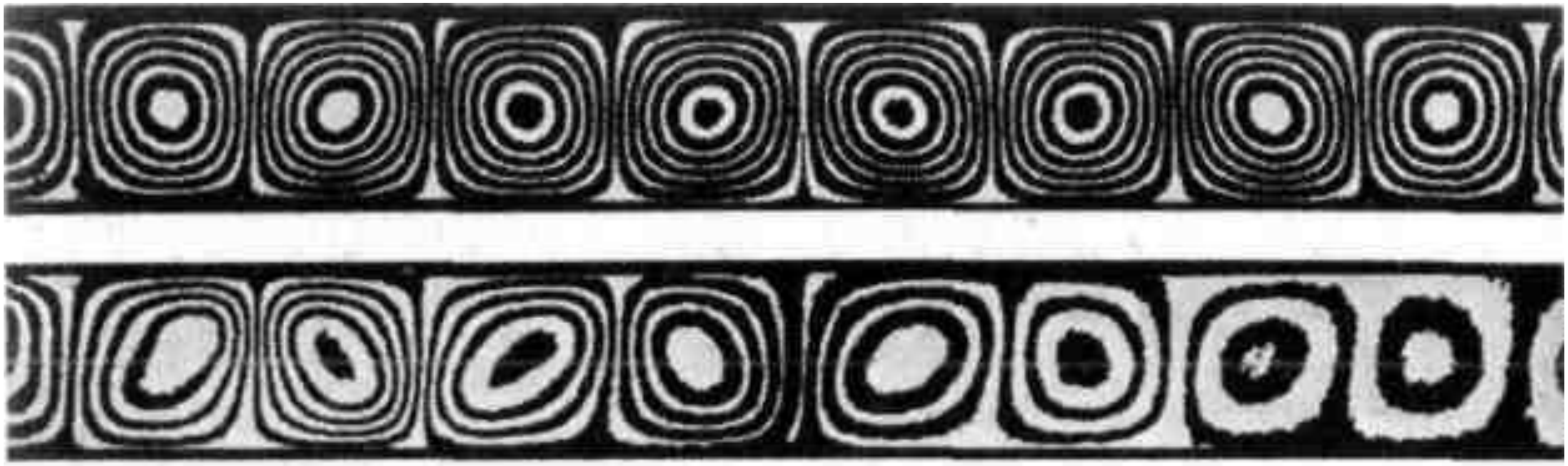
Вследствие теплового расширения жидкость расслаивается, причем часть жидкости, находящаяся ближе к нижней плоскости, характеризуется пониженной плотностью по сравнению с верхними слоями. Это приводит к градиенту плотности, направленному против силы тяжести. То есть, система становится неустойчивой.

Далее начинается борьба между Архимедовой силой и силой тяжести, которая и приводит к образованию структуры.



К объяснению природы тепловой конвекции

На одних участках нагретая жидкость поднимается вверх, охлаждается у верхней поверхности и опускается вниз на других участках.



Картины (фотографии) конвективной неустойчивости (конвективные валы) в силиконовом масле в прямоугольном ящике с относительными размерами сторон 10:4:1, подогреваемом снизу.

Верхний ряд – равномерный нагрев; нижний – неравномерный (амплитуды движения изменяются в направлении справа налево).

Методы синергетики формировались, главным образом, в процессе развития:

- нелинейной физики (в частности, нелинейной динамики),
- теории корпоративных процессов,
- неравновесной термодинамики.

Понятия и термины синергетики так или иначе связаны с теорией систем и с исследованием динамических систем.

Основы теории систем

Определение системы (30-е гг. XX века Л. фон Берталанфи):

Объект может рассматриваться как система в том случае, если он:

- состоит из подсистем, т.е. разделяется на части;
- части должны составлять единое целое, которое обладает новыми свойствами, не сводимыми к сумме свойств частей;
- должна существовать такая взаимосвязь элементов в системе, которую можно описать математически;
- сама система должна быть подсистемой большей системы.

Главное, что определяет систему – это взаимодействие и взаимосвязь частей в рамках единого целого

- ***Подсистемы*** – это наибольшие части системы, которые обладают определенной автономностью, но в то же время подчинены системе и управляются ею. Обычно подсистемы являются особым образом организованные системы, которые называют ***иерархическими.***
- **В иерархических системах** каждый уровень организации подсистем подчинен последующему, более высокому уровню организации, но при этом обладает определенной степенью автономии.
- ***Элементы системы*** – это наименьшие составные части системы. Но в принципе, любую составную часть системы можно рассматривать в виде элемента, если отвлечься от ее размеров.
- ***Структура системы*** – это совокупность тех отношений (связей и взаимодействий) между образующими ее элементами и подсистемами, благодаря которым система сохраняет свою целостность и качественную определенность.

- **Иерархичность, многоуровневость, структурность** – это свойства не только строения любой системы, но и ее поведения. Функционирование системы является результатом взаимодействия всех ее элементов и уровней организации, как между собой, так и с окружающей средой.
- Все системы можно разделить на ***материальные и идеальные (абстрактные).*** Материальные системы, в свою очередь, можно разделить **по формам движения материи на физические, химические, геологические, биологические и социальные.**

По характеру взаимодействия с окружающей средой все системы делят на

- ***открытые и замкнутые (изолированные).***
- ***динамические*** **и** ***статические.***
- Среди динамических систем обычно выделяют ***детерминистские*** **и** ***стохастические*** **(*вероятностные*).**

Динамические системы

- *Динамическая система* - математический объект, моделирующий реальную систему (физические, химические, биологические и др.), эволюция которых однозначно определяется начальным состоянием.
- Динамическая система определяется системой линейных уравнений (дифференциальных, разностных, интегральных и т.д.), допускающих существование на бесконечном интервале времени единственность решения для каждого начального условия.
- Описывают набором переменных, выбираемых из сооб-ражений естественности их интерпретации, простоты в описании, симметрии и т. п.

- Множество состояний динамической системы образует *фазовое пространство,* каждому состоянию отвечает точка в нём, а эволюция состояний изображается *фазовыми траекториями*.

- Совокупность состояний в фиксированный момент времени характеризуется *фазовым объёмом*.

- Динамические системы *делят на классы: конечномерные и бесконечномерные* (*с распределенными параметрами*) <=> конечномерное и бесконечномерное фазовое пространство.

- Выделяют *динамические системы с непрерывным временем – потоки,* и *с дискретным временем – каскады*.

- *Грубые и негрубые* динамические системы. Понятие *грубость* характеризует качество неизменности типа движения системы при малом изменении её параметров (структурную устойчивость системы).

Фазовое пространство (поток, траектория, объем, портрет)

- Состояние динамической системы (механической, хи-мической, термодинамической и т.д.) задается точкой (q,p) в *фазовом пространстве* с N-мерными векторами $q=(q_{1,}$ ..., $q_N)$ и $p=(p_{1,}$ ..., $p_N)$. Это обобщенные координаты и обобщенные импульсы. Число N в этом случае называют *числом степеней свободы*, а фазовое пространство 2N-мерным.

- Изменение состояния системы со временем t приводит к перемещению точки (q,p) в фазовом пространстве. Это перемещение образует *фазовую траекторию точки* $(q(t), p(t))$.

- *Фазовым потоком* называют оператор $\hat{T}$, переводящий систему из одного состояния в момент времени t=0 в другое состояние в момент времени t:

$$\hat{T}(q(0), p(0))=(q(t), p(t)),$$

- *Фазовый* $\hat{T}$ *поток* определяется с помощью дифференциальных уравнений движения:

$$\dot{q} = Q(q,p,t); \quad \dot{p} = P(q,p,t), \quad (*)$$

Q и P – функции координат фазового пространства и времени.

- Решение (*) –*фазовая траектория системы:*

$$q = q(t; q_0, p_0); \qquad p = p(t; q_0, p_0),$$

зависит от начальных условий: $q_0=q(0)$, $p_0=p(0)$ называется, также *фазовой кривой.*

- Состоянию равновесия отвечает вырожденная траектория – точка в фазовом пространстве, периодическому движению – замкнутая траектория.
- Фазовые кривые (траектории) не пересекаются, за исключением некоторые кривых, составляющих так называемое множество нулевой меры.

Если фазовая кривая для $t=(-\infty, +\infty)$ размещается в неограниченной области фазового пространства, движение называется *инфинитным,* если в конечной области – *финитным.*

Схемы инфинитного (*а*) и финитного (*б*) движения в фазовом пространстве

Отражением этих свойств движения являются физические инварианты движения, то есть величины, не изменяющиеся со временем.

Фазовый объем (конечная область в фазовом пространстве и множество всех точек этой области) **– инвариант движения**

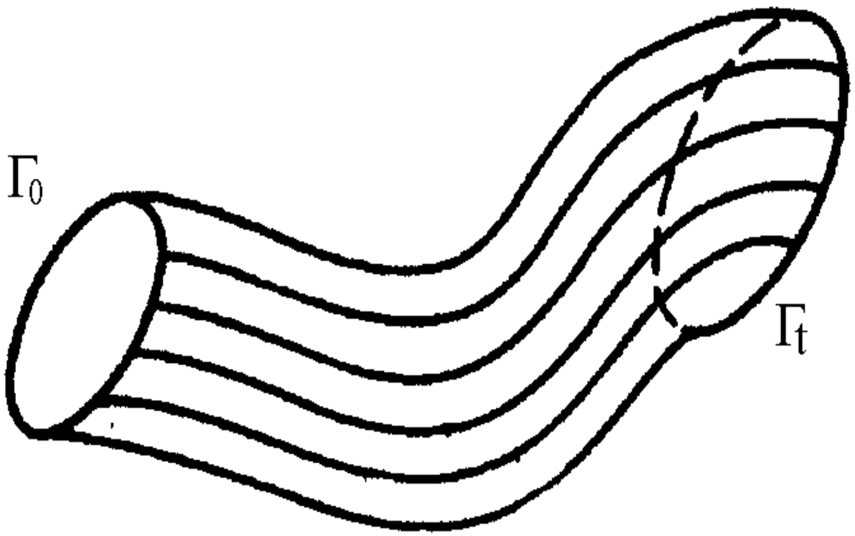


Схема перемещения фазового объема

Γ_0 можно рассматривать как совокупность начальных точек некоторого набора фазовых траекторий – капля «фазовой жидкости». С течением времени фазовая жидкость перемещается вследствие фазового потока и к моменту времени *t* занимает фазовый объем Γ_t Если фазовый объем в результате движения сохраняется, то $\Gamma_0 = \Gamma_t$ или:

$$\Gamma_t = const \equiv inv. \ **$$

что имеет простой физический смысл: если каждой фазовой точке, входящей в объем Γ_t, сопоставить некоторую частицу. Тогда величина Γ_t определяет число частиц в фазовом объеме Γ_t а формула ** выражает закон сохранения числа частиц.

Гамильтоновы системы

•Динамические системы, для которых имеет место сохранение фазового объема, называют гамильтоновыми. Для них уравнения движения задаются с помощью некоторой функции $H=H(p, q, t)$, называемой гамильтонианом или функцией Гамильтона. Уравнения имеют следующий вид:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

то есть, функции Q и P в уравнениях фазового потока (выше) обладают свойством:

$$div\boldsymbol{J} \equiv \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial p} = 0 \quad **$$

где $\boldsymbol{J}=$ – вектор тока фазовой жидкости. Уравнение ** выражает свойство несжимаемости фазовой жидкости.

•Теорема Лиувилля: Если для функций Q и P имеет место соотношение **, то:

$$\hat{T}\Gamma_0 = \Gamma_0 \qquad \hat{T}$$ **– Фазовый поток**

•Теорема Лиувилля определяет главный инвариант фазового пространства – фазовый объем – и связывает с ним гамильтоновский характер системы.

- Существуют и негамильтоновы динамические системы, сохраняющие фазовый объем, например система, описываемая одним уравнением. В таких системах нет структурных элементов, обладающих свойством асимптотической устойчивости при $t \to \infty$ (либо аналогичным свойством при $t \to -\infty$).
- ***Устойчивость*** – это способность систем слабо менять своё состояние под действием возмущений.

Уравнение непрерывности

Выражает *закон сохранения числа частиц в фазовом пространстве*. Если рассматривать временную эволюцию не точки в фазовом пространстве, а элемента фазового объема, то по характеру деформации границы фазового объема можно судить об устойчивости или неустойчивости движения

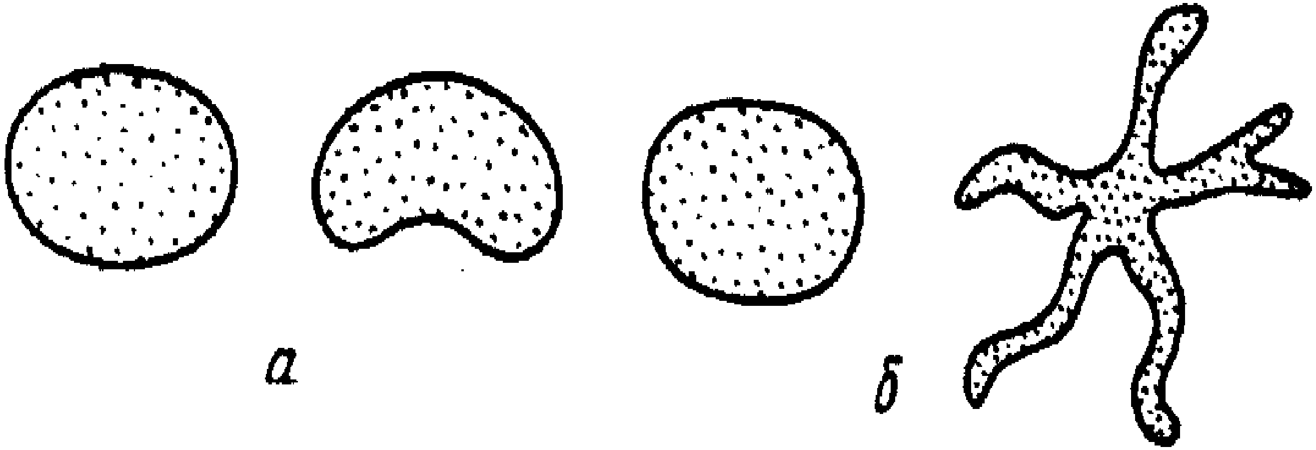


Схема изменения элемента фазового объема при устойчивом (а) и неустойчивом (б) движении.

- используется функция распределения частиц (точек, состояний системы) в фазовом пространстве $f(p,q,t)$ – аналог функции распределения Максвелла для идеального газа, которая удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{\Gamma} f(p,q,t)\,d\Gamma = 1.$$

- Уравнение непрерывности связывает функцию распределения $f(p, q, t)$ с вектором тока фазовой жидкости путем соотношения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + div(\boldsymbol{J} f) = 0$$

$\boldsymbol{J}$= – вектор тока фазовой жидкости

Очевидно, что это соотношение не что иное, как дифференциальная форма закона сохранения числа частиц в фазовом пространстве. Для Гамильтоновых систем ранее получено уравнение несжимаемости:

$$div\boldsymbol{J} \equiv \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial p} = 0$$

Объединяя 2 последних уравнения, получим ур-е Лиувилля

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial f}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

Для механической системы с N степенями свободы элементарный фазовый объём равен

$$dqdp = dq_1dp_1\ldots\ldots dq_Ndp_N$$

где q_1, ..., q_N – обобщённые координаты, а p_1, ..., p_N – обобщённые импульсы системы. Фазовый объём конечной фазовой области G равен 2N-мерному интегралу

$$\int\limits_G dqdp$$

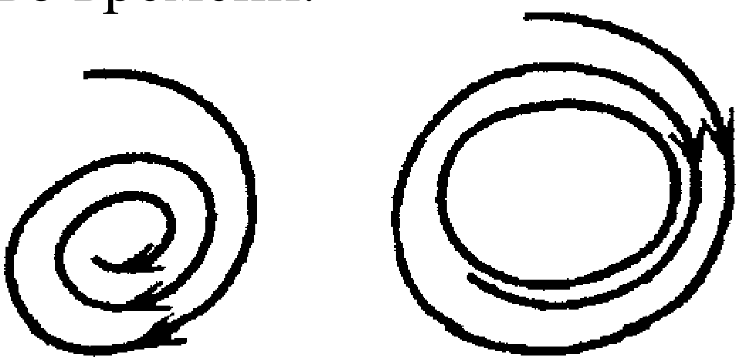
Если система описывается Гамильтона уравнениями, то, при движении частиц, фазовый объём остаётся неизменным (Лиувилля теорема). Это позволяет ввести нормированные функции распределения в фазовом пространстве.

- Итак, для Гамильтоновых систем справедливо ур-е Лиувилля

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial f}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

Здесь из $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial t}$ – уравнений движения, а $H=H(p, q, t)$ – гамильтониан системы.

Уравнение Лиувилля, так же как и уравнения движения, обратимо во времени.



Схемы невозможных, в соответствии с теоремой Лиувилля, траекторий.

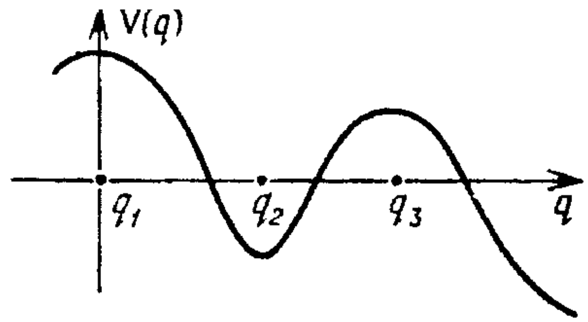
Среди множества возможных траекторий можно предположить существование таких, которые имеют асимптотически устойчивое положение равновесия или асимптотически устойчивый предельный цикл. Теорема Лиувилля, исключает возможность таких траекторий (показано на рисунке).

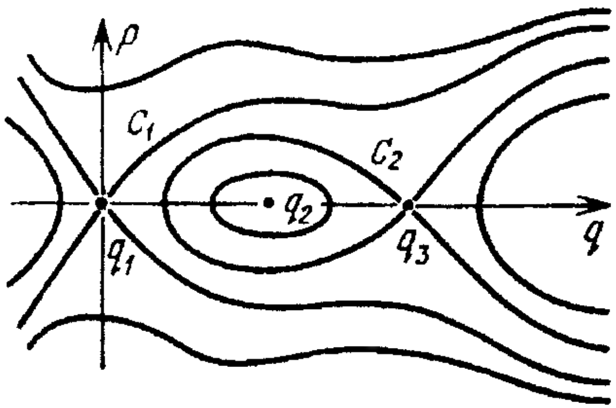
- Совокупность всевозможных фазовых траекторий образует ***фазовый портрет*** динамической системы.
- Например: фазовый портрет системы с одной степенью свободы, относящихся к числу простейших систем. Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(q),$$

то есть, не зависит от времени, что означает: энергия системы $E=H(p, q)$ является интегралом движения (E = inv).

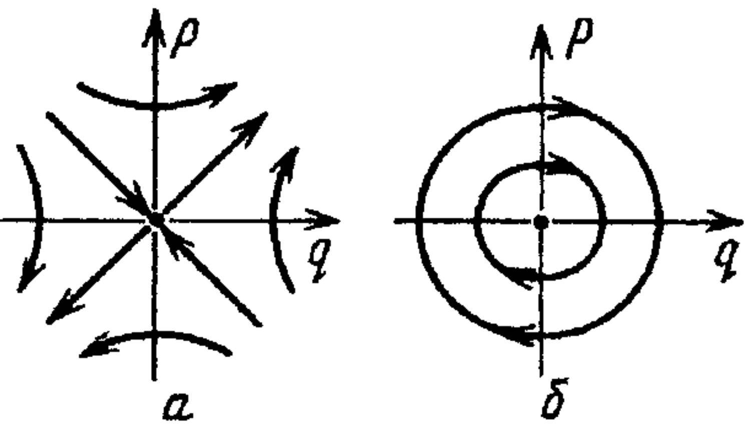
Качественный анализ фазовых траекторий такой системы показывает, что в зависимости от структуры потенциала $V(q)$ имеются «захваченные» в потенциальную яму траектории частиц и «пролетные» траектории. Захваченным траекториям соответствует финитное движение (периодические колебания), пролетным соответствует инфинитное движение. Различные типы траекторий разделяются на фазовой плоскости особыми кривыми, называемыми сепаратрисами (C_1 и C_2, рис.).





Потенциал V(q) и фазовый портрет простейшей системы; C_1 и C_2 – сепаратрисы.

- В положениях равновесия (V(q)=max, $E=E_e$) скорость равна нулю, а потенциал имеет экстремум (точки q_1, q_2 и q_3).
- Исследование поведения траекторий системы в окрестности положений равновесия приводит к следующим выводам.
- В точках q_1, q_3 (потенциальный горб) – траектории – пересекающиеся прямые – части сепаратрисы.



Фазовые траектории в окрестности гиперболи-ческой (*а*) и эллиптичес-кой (*б*) точек.

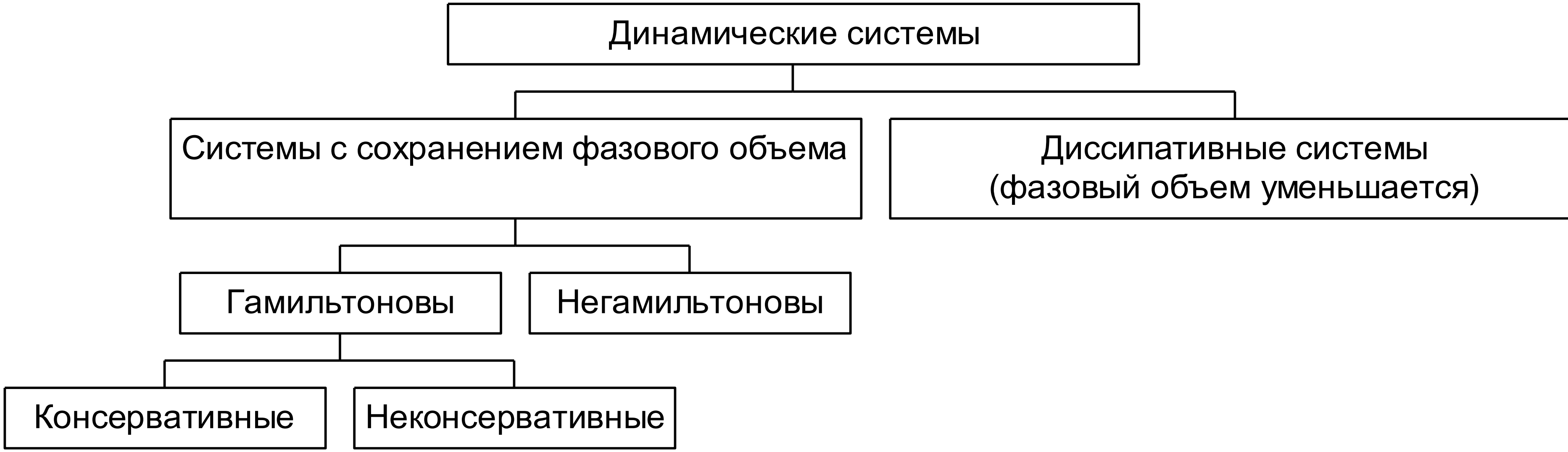
Семейство траекторий имеет вид гипербол (рис., *а*). Точка пересечения траекторий – прямых (p_e, q_e) называется ***гиперболической точкой или седлом.***

При $V>0$ точка (p_s,q_s) в центре окружностей (рис.,б) называется ***эллиптической,*** так как в ее окрестности семейство траекторий, имеет вид эллипсов (окружность – частный случай эллипса), причем всегда $E>E_s$.

В определенном смысле движение в окрестности эллиптической точки устойчиво.

Траектория, проходящая в достаточно малой окрестности эллиптической точки совершает всегда финитное движение.

Консервативные и диссипативные динамические системы



Характерным для консервативной системы является ее замкнутость (изоляция от внешнего мира) и постоянство (сохранение) ряда величин. В случае механической системы сохраняются следующие величины:

1. Полная энергия: E=кинетическая энергия+потенциальная энергия $=(1/2)\sum_i m_i \mathbf{v}_i^{\,2} + \sum_{i\neq j} V_{ij}$ где m_i , $\boldsymbol{v}_i$ – масса и скорость материальной точки *i*, V_{ij} –потенциальная энергия взаимодействия точек *i* и *j*.

2. Полное количество движения: $\boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i$

3. Полный момент количества движения: $\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{l}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{v}_i$

- Простые примеры консервативной системы:

- колеблющийся маятник (в существовании перечисленных законов сохранения легко убедиться, если пренебречь трением в оси подвеса и сопротивлением воздуха),
- солнечная система.

- Консервативная система – абстракция: в любой реальной системе всегда существуют силы, приводящие к необратимым процессам, например, трение.
- Все реальные системы – диссипативные. К диссипативным относят динамические системы, в которых энергия упорядоченного процесса со временем переходит в энергию неупорядоченного процесса, в конечном счете – в тепловую.

Диссипативные системы обладают следующими общими свойствами:

- для них характерно выделенное направление времени,
- они не инвариантны относительно обращения времени,
- они не сохраняют объем фазового пространства,
- все диссипативные процессы приводят к положительному производству энтропии.

- В случае ***замкнутых*** *диссипативных систем* энтропия системы непрерывно возрастает. Рост энтропии устанавливает направление протекания процесса, «стрелу времени».
- *Диссипация энергии **в открытой системе***, обусловленная процессами выхода энергии из системы, например, в виде излучения, может приводить к уменьшению энтропии рассматриваемой системы при увеличении полной энтропии системы и окружающей среды.

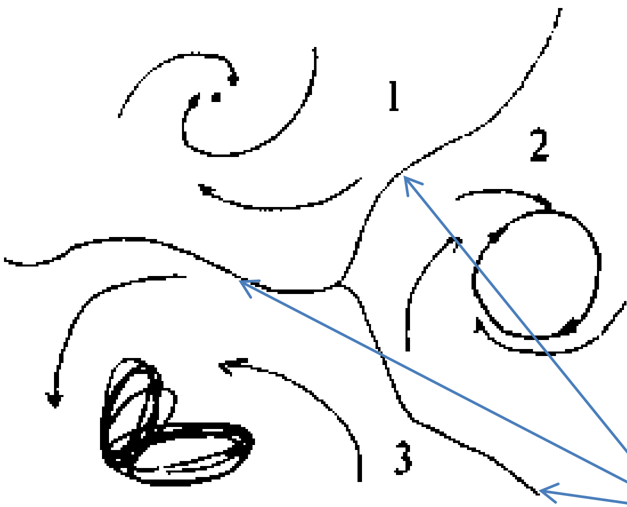
- У диссипативных систем с неограниченным фазовым пространством часто существует ограниченная область в нём (аттрактор), куда попадает со временем любая фазовая траектория.
- Для описания диссипативных систем используются нелинейные математические уравнения, т.е. уравнения, в которых искомые величины входят в состав математических функций (тригонометрических, логарифмических и т.п.) в степенях больше единицы или коэффициенты уравнений зависят от свойств среды и особенностей протекания процесса.
- Нелинейные уравнения могут иметь несколько качественно различных решений. Физически это означает ***возможность различных путей эволюции системы.***
- Только в диссипативных и при этом открытых и неравновесных системах при определенных условиях могут возникать новые структуры, например, ячейки Бенара, страты в плазме, химические волны и многое другое.

Простое и сложное поведение динамических систем. Понятие об аттракторах. Типы аттракторов.

- Если фазовое пространство двумерно (плоскость или ее часть), то можно показать саму траекторию, если нет – то ее двумерную проекцию. Самопересечения ***проекций*** траектории возможны, хотя сами фазовые траектории **пересекаться не могут**. Это следует из теоремы о единственности решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.
- Если бы из одной точки выходили две различные траектории, то это означало бы множественность решений системы уравнений, определяющих динамическую систему. Дальнейшее движение системы в окрестности такой точки не определено.
- *Существуют особые или неподвижные точки* x^* системы дифференциальных уравнений, определяющих систему. Функция $x(t)=x^*$ является решением системы, а другие траектории обычно бесконечно долго стремятся к этой точке.

- Поведение динамической системы вблизи особых точек, как правило, проще, чем поведение при произвольно взятых начальных данных. На рисунке это выглядит так, что с течением времени траектории, выходящие из различных начальных точек, стремятся собраться в некоторых выделенных, сравнительно небольших областях фазового пространства, которые затем уже не покидают.
- Точку или некоторое множество точек в фазовом пространстве, к которому стремятся фазовые траектории динамической системы с течением времени называют ***аттрактором (attraction).***
- При этом, каковы бы не были начальные значения переменных системы, по мере развития динамического процесса, они будут стремиться к одним и тем же значениям или множествам значений – аттракторам.
- Другими словами, аттракторы – это геометрические структуры, характеризующие поведение системы в фазовом пространстве по прошествии длительного времени.

- Область, откуда траектории стремятся к *аттрактору*, называют *областью притяжения аттрактора или бассейном притяжения.*



При различных начальных данных решение дифференциальных уравнений выходит на области притяжения различных типов. На рисунке 1 – область притяжения неподвижной точки; 2 – цикла; 3 – более сложного аттрактора.

Репеллеры

Таким образом, поведение динамической системы можно разделить на два этапа: *переходное,* пока траектория стремится к аттрактору, и *асимптотическое*, когда траектория находится на самом аттракторе или настолько близко к нему, что расстоянием можно пренебречь. Данное описание относится к *диссипативными* системам. У *консервативных* систем нет деления на переходное и асимптотическое поведение, судьба системы такой определяется начальными данными.

- Если в фазовом пространстве имеется несколько аттракторов, то их области притяжения разделены неустойчивыми множествами точек, называемых ***репеллерами***, от которых все или почти все соседние фазовые траектории отталкиваются (см предыдущ. рис)