

Дисциплина: Синергетика для инженеров

Преподаватель: профессор каф. общей физики Н.Н. Никитенков

СИНЕРГЕТИКА И ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ

В синергетике можно выделить три парадигмы и три класса базовых математических моделей:

1. Исследования диссипативных структур.
2. Изучение динамического хаоса.
3. Анализ сложности.

У каждой свой математический и понятийный язык, свои количественные характеристики. Каждая отвечает на свои вопросы и свой смысл вкладывается в термин «понимание».

КАТАСТРОФА – с т. з. теории систем, скачкообразное изменение, возникающие в виде внезапного отклика системы на плавное изменение внешних условий.

В МАТЕМАТИКЕ ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ - совокупность приложений теории особенностей дифференцируемых (гладких) отображений Х. Уитни и теории бифуркаций А. Пуанкаре и А. А. Андронова.

- Название введено Р. Томом (R. Thorn) в 1972.

ПРИМЕНЕНИЕ:

- 1) потеря устойчивости и галопирование тонкостенных конструкций под действием веса,
- 2) флаттер самолета и подвесных мостов под действием ветровой нагрузки,
- 3) коллапс звезд во вселенной,
- 4) внезапное разрушение кристаллической решетки,
- 5) взрывное развитие конкурирующих экологических видов,
- 6) возникновение турбулентности в быстро движущейся жидкости,
- 7) устойчивость кораблей,
- 8) исследования биений сердца,
- 9) моделирование деятельности мозга и психических реакций и т.д.

- Теория катастроф возникла из изучения **явлений неустойчивости**, для описания которых разрабатывались **теория неустойчивости и теория бифуркаций**.
- **Теория катастроф** – раздел прикладной математики, **ветвь теории бифуркаций**, важный инструмент для исследования динамических систем; также специальный **раздел более общей теории сингулярностей** в геометрии.
- **Основной предмет теории катастроф:** статические неустойчивости [связаны только с действием потенциальной энергии – пример: п.1)]
- **В.С. Анищенко. Устойчивость, бифуркации, катастрофы.// Соросовский образовательный журнал. 2000, т.6, №6, с.105–109.**

Наиболее доступное введение в теорию катастроф:

Дж. М. Т. Томпсон. «Неустойчивости и катастрофы в науке и технике». Москва, Мир, 1985, 254 с.

– много примеров неустойчивостей механических конструкций.

Локализация тепла. Тепловые структуры. Режимы с обострением.

- Формирование диссипативных тепловых структур при горении привело к одному из наиболее интенсивно изучаемых в настоящее время направлений в теории самоорганизации, а именно, к исследованию тепловых структур и режимов с обострением в результате действия механизма нелинейной положительной обратной связи.
- В математическом смысле режим с обострением – это такой динамический закон, когда одна или несколько моделируемых величин обращается в бесконечность за конечный промежуток времени.
- В реальности вместо ухода в бесконечность в этом случае наблюдается фазовый переход или бифуркации, приводящие к каким-либо катастрофическим событиям.

- При развитии процесса горения в нелинейной среде есть два конкурирующих процесса.
- усиление горения нелинейного источника за счет положительной обратной связи, и
- диссипативный процесс теплопроводности, нелинейность которого определяется коэффициентом теплопроводности.
- Процесс горения, некоторые процессы в плазме (в том числе термоядерного реактора), ряд эффектов в биологических системах и химические реакции на определенной стадии можно описывать нелинейным дифференциальным уравнением

$$T_t = (k(T)T_x)_x + Q(T), \text{ или } (*)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k(T)\text{grad}T) + Q(T)$$

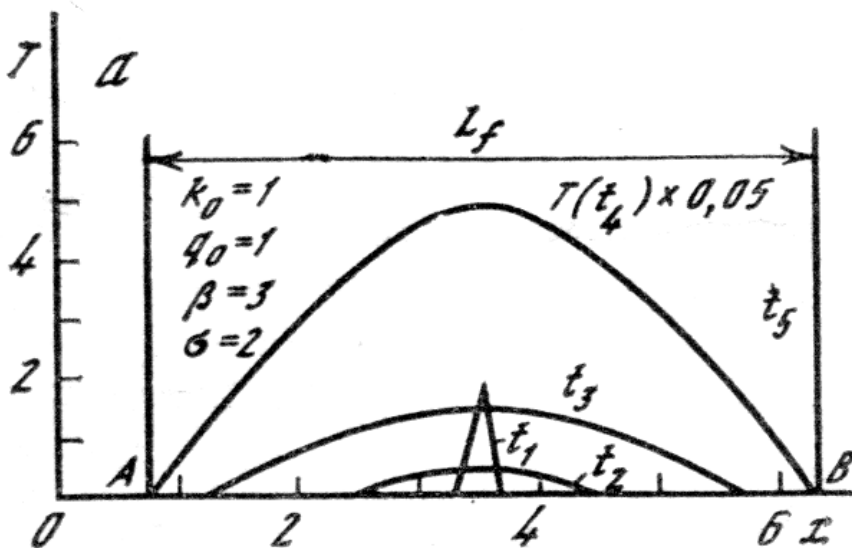
нелинейность теплопроводности и источнике:

$$k(T) = k_0 T^\sigma, \quad Q(T) = q_0 T^\beta$$

- $T(x, t)$ – температура среды; $Q(T)$ – нелинейный источник, который моделирует процесс поступления тепла в среду и отвечает за положительную обратную связь в системе;

- $k(T)$ – коэффициент теплопроводности горячей среды;
- $k(T)$ и $Q(T)$ – степенные функции температуры; k_0 и q_0 – постоянные коэффициенты, показатели σ и β определяют скорость роста $k(T)$ и $Q(T)$ с увеличением температуры.

Результаты компьютерного моделирования распространения тепла:



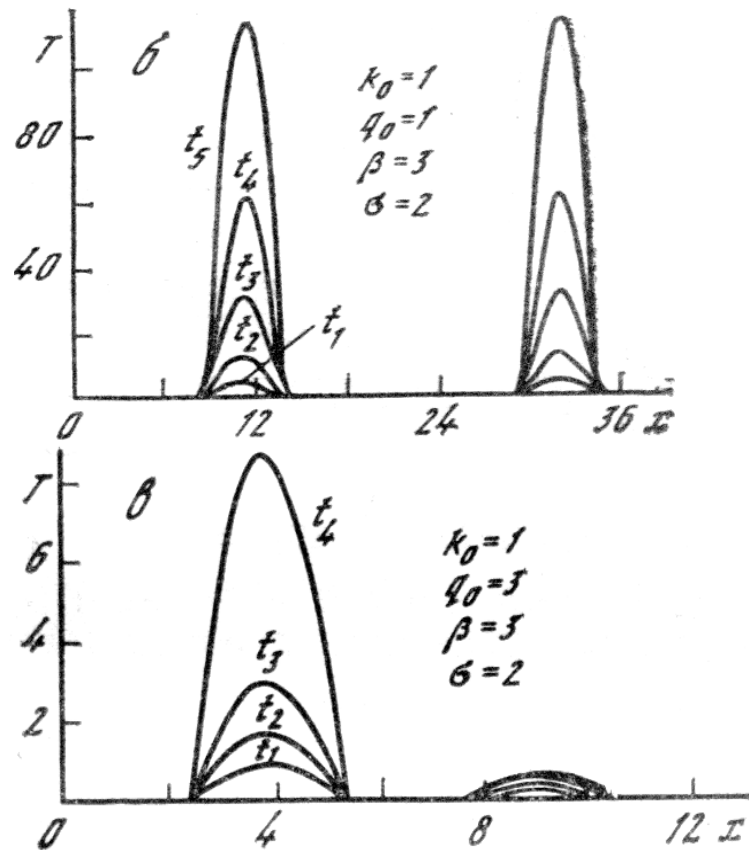
a – формирование диссипативной тепловой структуры (S-режим); $t_1=0$; $t_2=19,59$; $t_3=73,03$; $t_4=74,95$; $t_5=74,96$;

После стабилизации теплового фронта, полуширина (L_f) нагретой области остается постоянной, а её максимальная температура увеличивается до бесконечности за ограниченное t_f .

Это эффект локализации тепла

Такие процессы и получили название – *режимы с обострением*. Показанные результаты расчета позволяет предсказать следующее.

Если на расстоянии, большем L_f задать два одинаковых начальных профиля как показано на рис. б ($t=0$), то они никак не будут влиять друг на друга.



б – эффект локализации тепла. Две тепловые структуры в нелинейной среде развиваются независимо: $t_1=0$; $t_2=3,56 \cdot 10^{-2}$; $t_3=3,93 \cdot 10^{-2}$; $t_4=3,93 \cdot 10^{-2}$; $t_5=4 \cdot 10^{-2}$.

Если один из профилей по амплитуде несколько меньше другого, то он просто «замирает» при $t \rightarrow t_f$ а второй неограниченно растет:

в – развивается структура с минимальным временем обострения, остальная часть профиля «замирает» при $t \rightarrow t_f$ $t_1=0$; $t_2=0,147$; $t_3=0,22$; $t_4=0,245$;

- Это типичная картина для режимов с обострением. Поэтому в нелинейной среде, которая описывается уравнением (*), необходимо рассматривать только самые быстрые процессы с минимальными временами обострения.
- Если менять амплитуду и полуширину начального распределения, то изменится время обострения, а величина области локализации и форма той части профиля, где горение идет интенсивно, сохранится.
- То есть нелинейная среда «забывает» детали начального распределения, от которого зависит только значение времени обострения t_f .
- «Забывание» деталей начальных данных характерно для большинства систем, изучаемых синергетикой. В решаемой здесь задаче то распределение, которое формируется на стадии интенсивного горения, не зависит ни от краевых условий, ни от начальных данных.

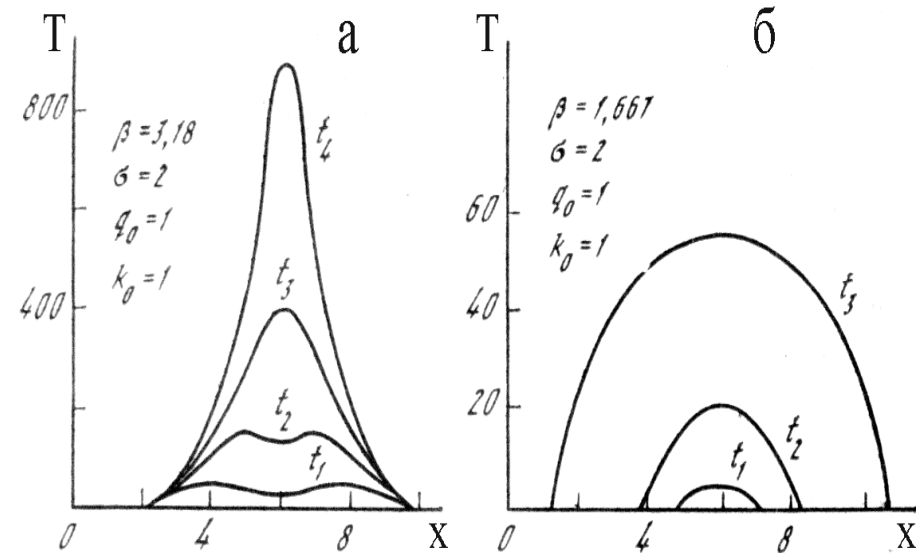
- Применяя к решению уравнению (*) метод разделения переменных, можно выяснить, каковы форма диссипативной структуры, длина области локализации L_t и по какому закону растет температура среды (в пособии это сделано).
- Для рассматриваемой нелинейной задачи не действует принцип суперпозиции: в частности, если изменить начальные данные в несколько раз, то это приведет не к умножению решения на постоянную величину, а к процессу, идущему в совершенно другом темпе, с другим временем обострения. Здесь нельзя «сшить» общее решение из известного набора частных, как это можно сделать в случае линейного уравнения теплопроводности.
- Из проведенных расчетов следует, что любое распределение при $t \rightarrow t_f$ выходит на автомодельное решение. Поэтому, хотя принцип суперпозиции не действует, можно знать, какие структуры возникнут на стадии интенсивного горения.

- Если зафиксировать начальное распределение, и изменять параметры нелинейной среды β и σ , можно получить:

1) если $\beta > \sigma + 1$, то $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_f$ и

2) если $\beta < \sigma + 1$, то $\varphi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_f$.

- В первом случае полуширина распределения температуры должна сокращаться, реализуется режим, который называют *LS*-режимом с обострением;
- во втором случае полуширина распределения температуры неограниченно возрастает, в этом случае говорят, что имеет место *HS*-режим.

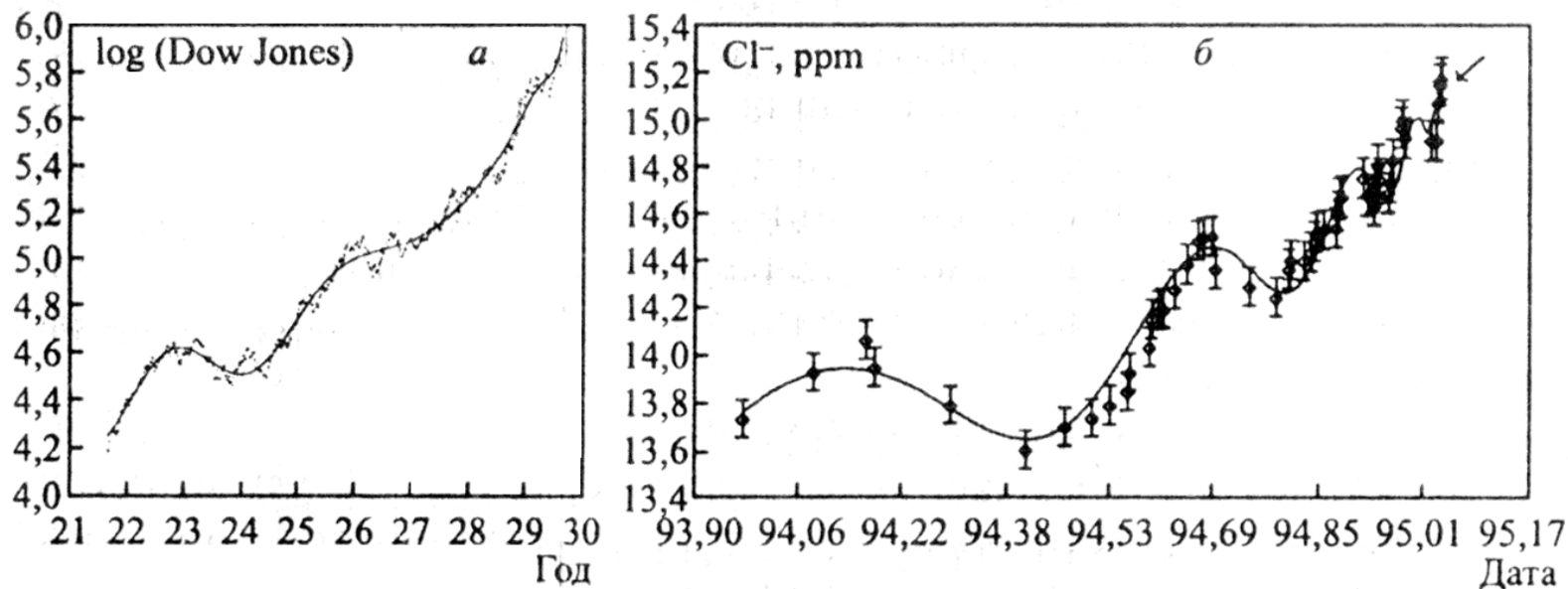


Тепловые структуры:

а – *LS*-режим с обострением; процесс локализован, полуширина распределения температуры сокращается со временем; $t_1=0$; $t_2=2,15 \cdot 10^{-4}$; $t_3=2,38 \cdot 10^{-4}$; $t_4=2,44 \cdot 10^{-4}$;

б – тепловые волны растущей амплитуды, *HS*-режим с обострением; $t_1=0,0$; $t_2=0,69$; $t_3=0,875$

- В общем плане режимы с обострением рассматриваются как промежуточная асимптотика, дающая описание реальных процессов в некотором интервале масштабов. Такая асимптотика характерна для широкого класса систем с сильной положительной обратной связью. Подтверждения существования таких режимов могут служить данные:



Вид зависимостей от времени, возникающих перед катастрофами:

a – зависимость индекса Доу-Джонса перед Великой депрессией с 1921 по 1930 год;

б – зависимость от времени концентрации ионов хлора в атмосфере в районе землетрясения пред катастрофическим землетрясением в Кобе в 1995 году, даты указаны в сотых доля года. Точки – данные измерений, сплошная кривая – результат сглаживания экспериментальных данных.

•В обоих случаях (на фондовом рынке и при тектоническом разломе) незадолго перед катастрофой наблюдается быстрый катастрофический рост, на который накладываются ускоряющиеся колебания. Сглаженные кривые хорошо описываются формулой:

$$I(t) = A + B(t_f - t)^{-\alpha} [1 + c \cos(\omega \log(t_f - t) - \varphi)]$$

здесь t_f – момент времени обострения, ω – частота колебаний результатов; A , B , c , α – параметры.

•Приведенные данные ясно свидетельствуют, что разные катастрофические события могут развиваться по одним законам.

Некоторые сведения о мозге

- Мозг животных и человека состоит из нервной ткани: **нервных клеток (нейронов) и глиальных клеток.** (нейроны мозга, окруженные соединительными глиальными клетками, с возрастом гибнут, а клетки глии, наоборот, размножаются).

- Взаимодействие между нервными клетками осуществляется благодаря двум механизмам:

- 1) Электрический заряд нервной клетки создает вокруг нее электрическое поле, колебания которого вызывают изменения электрических полей лежащих рядом нейронов, что приводит к изменениям их возбудимости, лабильности и проводимости. Происходит распространение электрических полей нервных клеток на очень небольшие территории мозга. Электрическое поле нейрона имеет сравнительно небольшую протяженность (около 100 мкм), оно быстро затухает по мере удаления от клетки и может оказывать воздействие лишь на соседние нейроны.

2) Передачи нервных импульсов. Обеспечивает не только ближайшие взаимодействия, но и передачу нервных влияний на большие расстояния. Именно с помощью нервных импульсов происходит объединение отдаленных и изолированных участков мозга **в общую, синхронно работающую систему**, что необходимо для протекания сложных форм деятельности организма.

- Нервный импульс является основным средством связи между нейронами. Высокая скорость распространения импульсов и локальное их воздействие на избранную точку мозга способствуют быстрой и точной передаче информации в нервной системе. В межнейронных взаимодействиях используется частотный код, т. е. изменения функционального состояния и характера ответных реакций одной нервной клетки кодируются изменением частоты импульсов (потенциалов действия), которые она посылает к другой нервной клетке. **Общее количество импульсов, отправляемых нервной клеткой в единицу времени, или ее суммарная импульсная активность - важный физиологический показатель деятельности нейрона.**

- Моделирование внутри-нейронных биохимических процессов и связь их с взаимодействием электромагнитных полей и нервной ткани головного мозга позволит определить истинную причину таких заболеваний как: эпилепсия, шизофрения, болезнь Альцгеймера, и отработать методики лечения этих заболеваний.
- Также актуальными являются модельные задачи по изучению влияния внешних полей на внутримозговые процессы.

Модель мозга 1

- Сеть *нейронов*, соединенных случайным образом при помощи *синапсов (состоящих из глиальных клеток)*. Когда нейрон «загорается», раздражение передается через синапсы к смежным нейронам. «Зажигание» в смежных нейронах может произойти после *синаптического запаздывания*.
- Нейронная популяция может быть разделена на *возбуждающие нейроны*, которые во время «горения» испускают **положительный раздражитель**, и *тормозящие нейроны*, которые испускают отрицательный раздражитель.
- Нейрон зажжется тогда, когда **сумма полученных раздражений превысит некоторое пороговое значение**, после загорания он находится в неактивном состоянии в течение некоторого **периода невосприимчивости**, даже если сумма полученных раздражений превысит пороговое значение

Модель деятельности мозга 2

- Для построения **моделей высших функций мозга** и центральной нервной системы изучают поведение не дискретной системы случайно соединенных нейронов, а **континуум нейронных популяций**, в которых случайность «смазывается» и возникает детерминистическое поведение. Это точный аналог континуальных теорий поля в механике твердого тела и механике жидкости.
- Этот **континуальный детерминистический** подход подтверждается при исследованиях мозга методом **локальной избыточности** нейронов в малых объемах корковой ткани

- Около 30 лет назад (Уилсон и Коуен) построили динамические уравнения популяций тормозящих и возбуждающих нейронов. Для пространственно распределенных популяций получена система нелинейных дифференциальных уравнений, которые исследуются численными методами и методом фазовой плоскости. Обнаружено, что *складки* в стационарных решениях вызывают *явление многократного гистерезиса*; в то же время наблюдаются *предельные циклы (моделирующие ритмы мозга)*, в которых частота колебаний является монотонной функцией интенсивности раздражителя.
- Моделирование внутри-нейронных биохимических процессов и связь их с взаимодействием электромагнитных полей и нервной ткани головного мозга позволит определить истинную причину таких заболеваний как: эпилепсия, шизофрения, болезнь Альцгеймера, и отработать методики лечения этих заболеваний.

Модель Уилсона и Коуэна

- Рассмотрение: **доля возбуждающих клеток**, загорающихся за единицу времени $E(t)_t$ и **доля тормозящих клеток**, загорающихся за единицу времени $I(t)$.
- Обе величины являются **скоростями загорания** нейронов, для исключения кратковременных эффектов необходимо усреднить эти величины по некоторому короткому промежутку времени.
- Предполагается, что E и I в момент времени $t+\tau$ после **запаздывания τ** будут равны доле клеток, которые являются **чувствительными** и которые, кроме того, получают по крайней мере **пороговое возбуждение**.
- **Нечувствительными** клетками являются те, которые загорелись недавно и не могут загореться опять в течение **периода невосприимчивости**.
- Если период абсолютной невосприимчивости равен r , то долю чувствительных возбуждающих клеток можно выразить в виде $E_s = 1 - r_s E$. Для I_s получается аналогичное выражение.

- r_e – период невосприимчивости для возбуждающих клеток, может отличаться от периода невосприимчивости для тормозящих клеток r_i .

- Ожидаемые доли подпопуляций, получающих за единицу времени пороговое возбуждение, будут *функциями E и I* . Доля популяции *для возбуждающих клеток* записывается в форме

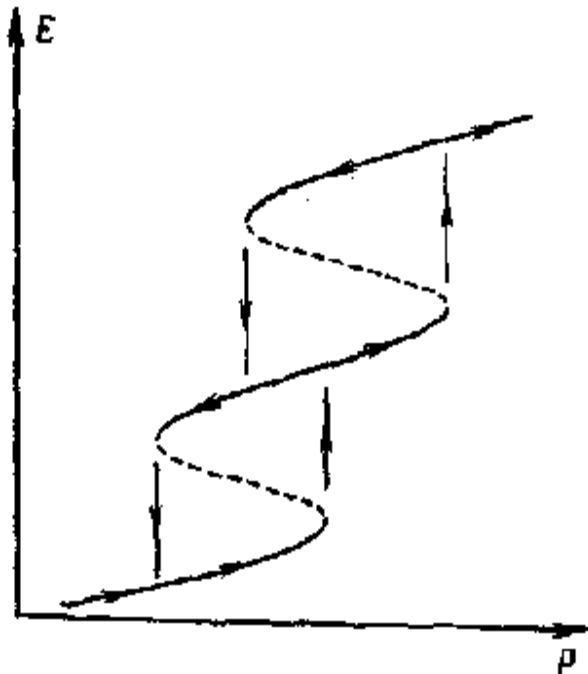
$$\mathcal{F}_e(x) = \mathcal{F}_e[c_e E - g_e I + P(t)]$$

- *для тормозящих* клеток

$$\mathcal{F}_i(x) = \mathcal{F}_i[c_i E - g_i I + Q(t)].$$

- Коэффициенты здесь постоянные, представляющие среднее число синапсов, приходящихся на одну клетку,
- $P(t)$ и $Q(t)$ – *внешние возбуждения (управляющие параметры)*.

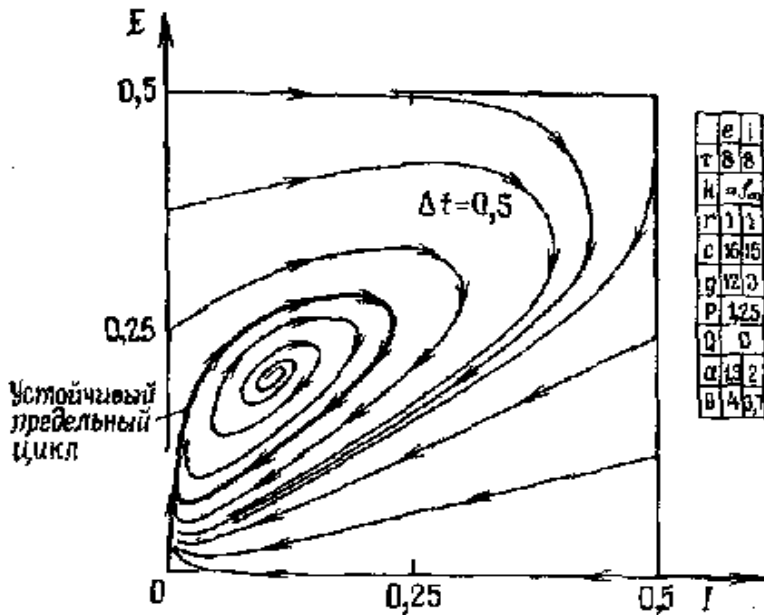
- Можно получить систему диф.уравнений и решать ее (определять как изменяются популяции загорающихся нейтронов в зависимости от величины и формы внешних возбуждений).
- Например, при определенных условиях, оказывается, что величина загорающихся нейтронов имеет вид складки и гистерезис:



Типичные множественные складки и гистерезис в состоянии стационарного загорания со скоростью E как функция от управляющего параметра P (внешнего возбуждения) при $Q=0$

гистерезис предполагается как физиологическая основа кратковременной памяти: то есть имеется экспериментальное подтверждение гистерезиса в центральной нервной системе.

- рассмотренная модель может обнаруживать *затухающие колебания в ответ на импульсное внешнее воздействие*. Более того, при Q , равном нулю, и P , равном некоторому постоянному значению, модель может при соответствующем выборе коэффициентов обнаружить *устойчивый предельный цикл*, как показано на рисунке в двумерном фазовом пространстве.



Устойчивый предельный цикл в фазовом пространстве. (E – скорость загорания возбуждающих нейронов, I – скорость загорания тормозящих нейронов.) Значения коэффициентов указаны в таблице. Предельный цикл представляет устойчивые колебания двух скоростей загорания.

Предельный цикл представляет устойчивые колебания двух скоростей загорания. Т.е. имеется физиологическая основа для изучения ритмов на электроэнцефалограмме, таких, как имеющие большое значение альфа-ритмы.

- Модель развивается в направлении изучения нервной ткани т.е. в исследовании поведения модели с учётом *распределения нейронов в пространстве (нейронном поле)*. Работы по построению уравнений нейронного поля опубликованы Уилсоном и Амари.
- Уравнения поля позволяют исследовать пространственные взаимодействия внутри слоев нейронной ткани, которые характерны для коры мозга; важные детали все еще продолжают исследоваться, к ним относятся геометрия, размеры и краевые условия для нейронных полей.
- *Исследованы многие особенности структурообразования в группах и полях нейронов.* Расположенные в пространстве предельные циклы получил Уилсон, а появление катастрофы сборки обсуждается Амари.