МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ФИЗИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ

ЧАСТЬ 1

Механика

*Допущено Министерством образования и науки
Российской Федерации в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по направлениям и специальностям в области техники и технологий*

2-е издание

Издательство
Томского политехнического университета
2012

УДК 53(076)

ББК 22.3я73
Ф50

Авторы
Ю.И. Тюрин, В.В. Ларионов, И.П. Чернов, Е.И. Купрекова,
В.Ф. Рудковская, Л.И. Семкина, Н.Д. Толмачева, В.Д. Хоружий

Ф50 **Физика. Сборник задач (с решениями). Часть 1. Механика:** учебное пособие / под ред. Ю.И. Тюрина, В.В. Ларионова, И.П. Чернова; Томский политехнический университет. – 2-е изд., – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 216 с.

ISBN 5-7511-1822-7

Учебное пособие включает около 1000 задач по всем разделам I части курса физики «Электричество и магнетизм». Каждый раздел содержит краткие теоретические сведения в виде основных формул, задачи с решениями и задачи для самостоятельного внеаудиторного анализа. Основное внимание уделено методике решения задач, их подробному анализу и применению полученных решений в технических устройствах.

Предназначено для преподавателей, студентов бакалавров и магистров технических университетов, ориентировано на организацию самостоятельной индивидуальной работы.

УДК 53(076)
ББК 22.3я73

Рецензенты
член-корреспондент РАО, д.ф.-м.н., профессор *В.В. Тихомиров;*
зав. кафедрой физики Московского государственного индустриального университета, д.ф.-м.н., профессор *Н.П. Калашников;*

ISBN 5-511-1822-70

1. КИНЕМАТИКА

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Положение точки относительно системы отсчета задается радиусом-вектором $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t),$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – единичные вектора (орты), параллельные осям x, y, z соответственно, рис. 1.1.

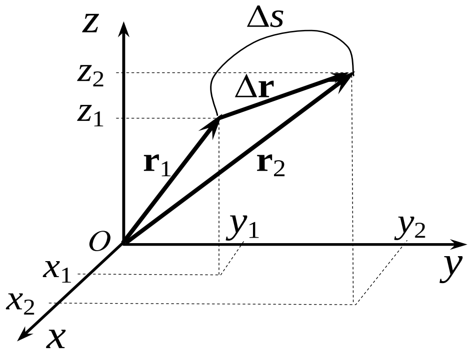


Рис. 1.1

Перемещение $\Delta\mathbf{r}$

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,$$

где $\mathbf{r}_2$ – радиус-вектор в момент времени t_2; $\mathbf{r}_1$ – радиус-вектор в момент времени t_1.

Модуль перемещения Δr

$$\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Средняя величина скорости

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs – путь, пройденный за время Δt, рис. 1.1.

Средний вектор скорости $\langle \boldsymbol{\upsilon} \rangle = \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ или $\bar{\boldsymbol{\upsilon}} = \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ *)

где $\Delta\mathbf{r}$ – перемещение за время Δt.

Средняя скорость как математическое среднее:

а) средняя по времени скорость $\langle v \rangle_t = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v\,dt$;

б) усредненная по пути скорость $\langle v \rangle_s = \dfrac{1}{s_2 - s_1}\displaystyle\int_{s_1}^{s_2} v\,ds$.

Мгновенная скорость

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz}{dt} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z,$$

где v_x, v_y, v_z – проекции скорости на оси x, y, z соответственно.

---

*) Значение среднего может быть обозначено: $v_{\text{ср}} = \bar{v}$ или $v_{\text{ср}} = \langle v \rangle$.

Модуль мгновенной скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ .$$

Сложение скоростей

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_1 + \boldsymbol{\upsilon}_2,$$

где $\boldsymbol{\upsilon}$ – скорость точки относительно неподвижной системы отсчета; $\boldsymbol{\upsilon}_1$ – скорость точки относительно подвижной системы отсчета; $\boldsymbol{\upsilon}_2$ – скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

Мгновенное ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \mathbf{k}\frac{d^2z}{dt^2} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z\ .$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Ускорение при криволинейном движении

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau, \qquad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\ ,$$

где $\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{r}\cdot\mathbf{n}$ – нормальное ускорение, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$; $\mathbf{a}_\tau = \frac{d\,|v|}{dt}\cdot\boldsymbol{\tau}$ – тангенциальное ускорение, $\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{\upsilon}}{v}$.

Средняя и мгновенная угловая скорость вращения

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}; \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}.$$

Среднее и мгновенное угловое ускорение

$$\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle = \frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}; \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\varphi}}{dt^2}.$$

Угловая скорость для равномерного вращательного движения

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n\,,$$

где T – период вращения; n – частота вращения.

Связь между линейными и угловыми величинами

$$\boldsymbol{\upsilon} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}], \qquad v = \omega\cdot r;$$

$$\mathbf{a}_\tau = [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}], \qquad a_\tau = \varepsilon\cdot r;$$

$$\mathbf{a}_n = -\omega^2 r\cdot\mathbf{n}, \qquad a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}\,,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – угловое ускорение; v – скорость движения материальной точки по окружности радиуса r.

Уравнения координаты и проекции скорости на ось *Ox для прямолинейного равноускоренного движения* (**a** = const)

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2},$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t,$$

$$2a_x\left(x - x_0\right) = v_x^2 - v_{0x}^2.$$

Угол поворота радиуса-вектора* r *и угловая скорость ω *для равноускоренного вращательного движения* (**ε** = const)

$$\varphi = \varphi_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t,$$

где ω_0 – начальная угловая скорость; ε – угловое ускорение.

Обратная задача кинематики поступательного движения тел

Уравнение скорости $v(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t} a(t)dt.$

Уравнение пути $s(t) = \int_{t_1}^{t} v(t)dt.$

Уравнение координаты $x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} v_x(t)dt.$

Обратная задача кинематики вращательного движения тел

Уравнение угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \boldsymbol{\varepsilon}(t)dt.$

Уравнение угла поворота радиус-вектора $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \boldsymbol{\omega}(t)dt.$

Способы описания движения

1. Векторный. Положение точки задается кинематическим уравнением радиуса-вектора
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$
2. Координатный. Положение точки задается кинематическими уравнениями проекций радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$ на оси координат. В декартовой системе координат:
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

3. Естественный. Задается: вид траектории, направление движения по ней и положение точки в начальный момент времени.

Прямая и обратная задачи

Задачи общей физики по кинематике можно разбить на два класса:

1. Прямая задача кинематики заключается в определении характеристик движения (скорости, ускорения, пути) по известному кинематическому уравнению движения.
2. Обратная задача кинематики – определение уравнения движения по известным характеристикам (скорость, ускорение и т.д.).
3. Если задача относится к классу 2, то рекомендуется:
   а) Исходя из условий задачи, выбрать способ описания движения (векторный, координатный, естественный).
   б) Выбрать тело отсчета, систему координат и начальный момент времени, чтобы уравнение движения было как можно проще.
   в) Записать начальные условия и использовать формулы обратной задачи кинематики.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Прямолинейное движение

1. Металлический шарик свободно падает с высоты h и в конце падения приобретает скорость v_2. Определите среднюю по времени скорость падения $\langle v\rangle_t$.

Ответ: $\langle v\rangle_t = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v dt = \dfrac{g}{t_2}\int_0^{t_2} t dt = \dfrac{gt_2}{2} = \dfrac{v_2}{2}$.

2. Металлический шарик свободно падает с высоты h_1 и в конце падения приобретает скорость v_1. Определите усредненную по пути скорость $\langle v\rangle_s$.

Ответ: $\langle v\rangle_s = \dfrac{1}{h_2 - h_1}\int_{h_1}^{h_2} v dh = \dfrac{2\sqrt{2gh_1}}{3} = \dfrac{2v_1}{3}$.

3. Частица, покинув источник, пролетает с постоянной скоростью v расстояние L, а затем тормозится с ускорением a. При какой скорости частицы время движения от ее вылета до остановки будет минимальным?

Ответ: $v = \sqrt{aL}$

4. По двум пересекающимся под углом 90° дорогам подъезжают к перекрестку две машины: одна со скоростью v_1 = 36 км/ч, другая со скоростью v_2 = 72 км/ч, как показано на рис. 1.18. В момент времени t = 0 первая находилась на расстоянии s_1 = 1 км от перекрестка, вторая – на расстоянии s_2 = 0,5 км от него. Найдите, на каком минимальном расстоянии $R_{\min}$ одна машина пройдет от другой.

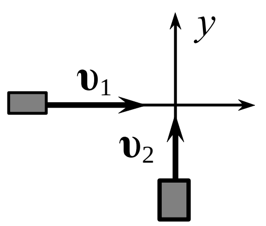


Рис. 11.8

Ответ: $R_{\min} = \sqrt{\left(v_1 t_{\min} - s_1\right)^2 + \left(v_2 t_{\min} - s_2\right)^2} = 671$ м,

где $t_{\min} = \left(s_1 v_1 + s_2 v_2\right) / \left(v_1^2 + v_2^2\right) = 40$ с.

5. Частица 1 движется со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}_1 = A\,\mathbf{i}$, а частица 2 – со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}_2 = B\,\mathbf{j}$, где A = 4 км/с; B = 3 км/с. Найдите скорость второй частицы относительно первой и расстояние между ними через 10 мкс.

Ответ: $\boldsymbol{\upsilon} = B\,\mathbf{j} - A\,\mathbf{i}$; $v_{21} = \sqrt{A^2 + B^2} = 5$ км/с; $s = v_{21} t = 5$ см.

6. Материальная точка движется прямолинейно. Уравнение движения имеет вид: $x = At + Bt^3$, где A = 5 м/с, B = 1 м/с^3. Найдите скорость v и ускорение a точки в момент времени t_2 = 2 с. Каковы средние значения скорости $\langle v \rangle$ и ускорения $\langle a \rangle$ за вторую секунду движения?

Ответ: $v = A + 3Bt_2^2 = 17$ м/с; $a = 6Bt_2 = 12$ м/с^2;

$$\langle v \rangle = A + 3B\int_1^2 t^2 dt = 12 \text{ м/с}; \ \langle a \rangle = 6B\int_1^2 t dt = 9 \text{ м/с}^2.$$

7. Поезд двигался прямолинейно со скоростью v_0 = 180 км/ч. При включении тормозного механизма скорость поезда изменяется по закону $v = v_0 - at^2$, где a = 1 м/с^3. Каков тормозной путь s поезда? Через какое время t после начала торможения он остановится?

Ответ: $s = v_0 t - \dfrac{at^3}{3} = 236$ м, где $t = \sqrt{v_0/a} = 7{,}1$ с.

8. Пистолетная пуля пробила два вертикально закрепленных на расстоянии l = 30 м друг от друга листа. Пробоина во втором листе ниже первой на h = 10 см. Определите скорость пули v. Пуля пробила первый лист, двигаясь горизонтально.

Ответ: $v = l \cdot \sqrt{g/(2h)} = 210$ м/с.

9. Тело падает с высоты h = 19,6 м без начальной скорости. Какой путь Δh_n пройдет тело за n-ю секунду своего падения; за последнюю секунду? За какое время τ тело пройдет последний метр своего пути?

Ответ: $\Delta h_n = g\Delta t^2 (n - 1/2)$, где Δt = 1 с;

Δh_1 = 4,9 м; Δh_2 = 14,7 м; $\tau = \sqrt{2/g} \cdot \left(\sqrt{h} - \sqrt{h-1}\right) = 0{,}052$ с.

10. Камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью v_0 = = 20 м/с. По истечении какого времени t камень будет находиться на высоте h = 15 м? Найдите скорость v камня на этой высоте. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: $t_{1,2} = v_0/g \pm \sqrt{(v_0/g)^2 - 2h/g}$; $t_1 = 1$ с; $t_2 = 3$ с;

$v_1 = -v_2 = v_0 - gt = 10$ м/с.

Криволинейное движение

11. Радиус-вектор **r** частицы со временем изменяется по закону $\mathbf{r}(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Найдите: 1) скорость $\mathbf{v}(t)$ и ускорение $\mathbf{a}(t)$ частицы; 2) модуль скорости v и ускорения a в момент времени t = 1 с; 3) модуль перемещение Δr за 11-ю секунду движения; 4) уравнение траектории в виде зависимости $y(x)$.

Ответ: 1) $\mathbf{v} = 6t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{a} = 6\mathbf{i}$; 2) v = 6,3 м/с, a = 6 м/с^2;

3) $\Delta r=\sqrt{3^2\left(t_2^2-t_1^2\right)^2+2^2\left(t_2-t_1\right)^2}=63$ м; 4) $y=2\cdot\sqrt{x/3}$.

12. Точка движется со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}(t) = At(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$, где A = 1 м/с^2. Найдите: 1) зависимость модуля скорости точки от времени $v(t)$; 2) путь Δs_3, пройденный точкой за 3-ю секунду движения; 3) зависимость радиуса-вектора от времени $\mathbf{r}(t)$; 4) перемещение Δr_3 точки за 3-ю секунду движения.

Ответ: 1) $v(t)=\sqrt{29}\cdot At$; 2) $\Delta s_3=A\sqrt{7,25}\cdot\left(t_3^2-t_2^2\right)=13,5$ м;

3) $\mathbf{r}(t)=\dfrac{At^2}{2}(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k})$; 4) $\Delta r_3=A\sqrt{7,25}\cdot\left(t_3^2-t_2^2\right)=13,5$ м.

Примечание. Движение прямолинейное, поэтому $\Delta s_3 = \Delta r_3$.

13. Ускорение материальной точки изменяется по закону $\mathbf{a}(t) = At^2\mathbf{i} - B\mathbf{j}$, где A = 3 м/с^4; B = 3 м/с^2. Найдите, на каком расстоянии r от начала координат будет находиться точка в момент времени t = 1 с, если $\boldsymbol{\upsilon}_0 = 0$, $\mathbf{r}_0 = 0$ при $t = 0$.

Ответ: $r=\sqrt{\left(At^4/12\right)^2+\left(Bt^2/2\right)^2}=1,5$ м.

14. Материальная точка на плоскости совершает движение, которое можно описать формулами: $x = A\cdot\cos(\omega t)$; $y = B\cdot\cos(\omega t + \varphi_0)$, где x и y – координаты точки в момент времени t, A = 4 м, B = 8 м, $\varphi_0 = \pi$ рад, $\omega = \pi$ рад/с. Определите траекторию движения точки.

Ответ: отрезок прямой $y = -2x$ с координатами концов (–4, 8) и (4, –8).

15. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = At^2$, где A = 0,5 рад/с^2. Определите к концу второй секунды (t = 2 с): 1) угловую скорость ω диска; 2) угловое ускорение ε диска; 3) для точки, находящейся на расстоянии r = 80 см от оси вращения, тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения.

Ответ: 1) $\omega = 2At$ = 2 рад/с; 2) $\varepsilon = 2A$ = 1 рад/с^2;

3) $a_\tau = 2Ar$ = 0,8 м/с^2; $a_n = (2At)^2r$ = 3,2 м/с^2; $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=3,3$ м/с^2.

16. Диск радиусом R = 10 см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением ε = 1 рад/с^2. Определите тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды (t = 2 с) после начала вращения.

Ответ: $a_\tau = \varepsilon R$ = 0,1 м/с^2; $a_n = (\varepsilon t)^2R$ = 0,4 м/с^2; $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=0,41$ м/с^2.

17. Мяч бросили горизонтально со скоростью v_x = 15 м/с. Найдите нормальное a_n, тангенциальное a_τ ускорения мяча и радиус R кривизны траектории через t = 1 с после начала движения мяча.

Ответ: $a_n = gv_x \Big/ \sqrt{v_x^2 + g^2t^2} = 8{,}2$ м/с^2; $a_\tau = \sqrt{g^2 - a_n^2} = 5{,}4$ м/с^2;
$R = \left(v_x^2 + g^2t^2\right) \big/ a_n = 39{,}2$ м.

18. Снаряд вылетает из орудия под углом α = 45° к горизонту с начальной скоростью v_0 = 500 м/с. Для момента времени, равного t = 20 с после начала его движения, найдите: а) модуль скорости v снаряда; б) угол β (в градусах), который составляет вектор скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ с осью x; в) модули тангенциального a_τ и нормального a_n ускорений снаряда; г) радиус R кривизны траектории в точке, соответствующей этому моменту времени. Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2} = 385$ м/с;
$\beta = \arccos\left(v_0 \cos\alpha / v\right) = 24^\circ$; $a_\tau = g \cdot \sin\beta = 4{,}1$ м/с^2;
$a_n = g \cdot \cos\beta = 9{,}1$ м/с^2; $R = v^2 / a_n = 16{,}3$ км.

19. Колесо вращается равнозамедленно и за время t = 1 мин частота вращения уменьшилась с n_1 = 300 об/мин до n_2 = 180 об/мин. Найдите угловое ускорение ε колеса и число оборотов N за это время.

Ответ: $\varepsilon = 2\pi(n_2 - n_1)/t = -0{,}21$ рад/с^2; $N = t \cdot (n_1 + n_2)/2 = 240$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1.1. Тело одну треть всего времени двигалось со скоростью v_1 = = 30 м/с, а оставшиеся две трети – со скоростью v_2 = 15 м/с. Чему равна средняя скорость ⟨v⟩ тела за все время движения?

Ответ: $\langle v \rangle = \left(v_1 + 2v_2\right)/3 = 20$ м/с.

1.1.2. Тело одну треть всего пути двигалось со скоростью v_1 = = 30 м/с, а оставшиеся две трети – со скоростью v_2 = 15 м/с. Чему равна средняя скорость ⟨v⟩ тела на всем пути движения?

Ответ: $\langle v \rangle = 3v_1v_2 \big/ \left(v_2 + 2v_1\right) = 18$ м/с.

1.1.3. Движение тела вдоль оси x описывается уравнением $x = A + B \cdot t + Ct^2$, где B = 3 м/с, C = 1 м/с^2. Определите среднюю скорость ⟨v⟩ движения тела за третью секунду.

Ответ: $\langle v\rangle = B + C\cdot\dfrac{t_3^2 - t_2^2}{t_3 - t_2} = 8$ м/с.

1.1.4. Расстояние между двумя городами автомобиль проехал со скоростью v_1 = 60 км/ч, а обратный путь – со скоростью v_2 = 40 км/ч. Определите среднюю скорость $\langle v\rangle$ автомобиля на всем пути.

Ответ: $\langle v\rangle = 2v_1v_2/(v_1 + v_2) = 48$ м/с.

1.1.5. Три четверти своего пути автомобиль прошел со скоростью v_1 = 60 км/ч, остальную часть пути – со скоростью v_2 = 80 км/ч. Определите среднюю скорость $\langle v\rangle$ движения автомобиля на всем пути.

Ответ: $\langle v\rangle = 4v_1v_2/(v_1 + 3v_2) = 64$ м/с.

1.1.6. Две дороги пересекаются под углом α = 60°. От перекрестка по ним удаляются машины. Одна – со скоростью v_1 = 60 км/ч, другая – v_2 = 80 км/ч. Определите скорости удаления одной машины относительно другой. Перекресток машины прошли одновременно.

Ответ: $v_{12} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha} = 72{,}1$ км/ч;

при движении в обратном направлении одного из автомобилей:

$$v'_{12} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos(\pi - \alpha)} = 121{,}7 \text{ км/ч}$$

1.1.7. Корабль идет на запад со скоростью v_1 = 6,5 м/с. Известно, что ветер дует с юго-запада (α = 135°). Скорость ветра, зарегистрированного приборами относительно палубы корабля, $v_{1в}$ = 9,3 м/с. Определите скорость $v_в$ ветра относительно Земли. Какое направление β ветра показывали приборы относительно курса корабля?

Ответ: $v_в = v_1\cos\alpha + \sqrt{v_{1в}^2 - v_1^2\sin^2\alpha} = 3{,}5$ м/с;

$$\beta = \pi - \arcsin\left(\frac{v_в}{v_{1в}}\sin\alpha\right) = 2{,}88 \text{ рад} = 165^\circ.$$

1.1.8. Автоколонна длиной l = 2 км движется по шоссе со скоростью v_1 = 40 км/ч. Мотоциклист выехал из хвоста колонны со скоростью v_2 = 60 км/ч. За какое время t он достигнет головной машины автоколонны?

Ответ: $t = l/(v_2 - v_1) = 6$ мин.

1.1.9. Два тела движутся взаимно перпендикулярными курсами соответственно со скоростями v_1 = 6 м/с и v_2 = 8 м/с. Чему равна величина скорости v_{21} первого тела относительно второго?

Ответ: $v_{21} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 10$ м/с.

1.1.10. Эскалатор метро поднимает стоящего на нем пассажира за t_1 = 1 мин. По неподвижному эскалатору пассажир поднимается за t_2 = 3 мин. Сколько времени t будет подниматься пассажир, идущий вверх по движущемуся эскалатору?

Ответ: $t = t_1 t_2 / (t_1 + t_2) = 45$ с.

1.1.11. Точка движется вдоль оси Ox по закону $x = 15 + 8t - 2t^2$ (x – в метрах, t – в секундах). Найдите координату x и ускорение a_x точки в момент t_1, когда скорость v_x точки обращается в нуль.

Ответ: $x = 15 + 8t_1 - 2t_1^2 = 23$ м, где $t_1 = 2$ с; $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -4$ м/с^2.

1.1.12. Движение материальной точки задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 4$ м/с, $B = -0{,}05$ м/с^2. Определите момент времени τ, в который скорость точки $v_x = 0$. Найдите координату x и ускорение a_x точки в этот момент.

Ответ: $\tau = -A/(2B) = 40$ с; $x = A\tau + B\tau^2 = 80$ м; $a_x = 2B = -0{,}1$ м/с^2.

1.1.13. Движения двух материальных точек выражаются уравнениями: $x_1 = A + Bt + Ct^2$; $x_2 = D + Et + Ft^2$. Здесь: $A = 20$ м, $D = 2$ м, $B = E =$ $= 2$ м/с, $C = -4$ м/с^2, $F = 0{,}5$ м/с^2. В какой момент времени τ скорости этих точек будут одинаковыми? Определите скорости $v_1 = v_2 = v$ и ускорения a_1 и a_2 точек в этот момент.

Ответ: $\tau = (B - E)/(2F - 2C) = 0$ с; $v = B = E =$ 2 м/с, при $\tau = 0$;
$a_1 = 2C = -8$ м/с^2; $a_2 = 2F = 1$ м/с^2.

1.1.14. Две материальные точки движутся согласно уравнениям: $x_1 = At + Bt^2 + Ct^3$; $x_2 = Dt + Et^2 + Ft^3$. Здесь: $A = 4$ м/с, $B = 8$ м/с^2, $C = -16$ м/с^3, $D = 2$ м/с, $E = -4$ м/с^2, $F = 1$ м/с^3. В какой момент времени τ ускорения a этих точек будут одинаковы? Найдите скорости v_1 и v_2 точек в этот момент.

Ответ: $\tau = (B - E)/(3F - 3C) = 0{,}235$ с; $v_1 = A + 2B\tau + 3C\tau^2 = 5{,}1$ м/с;
$v_2 = D + 2E\tau + 3F\tau^2 = 0{,}286$ м/с.

1.1.15. Из одной точки одновременно в одном направлении начали равноускоренно двигаться две точки. Первая – с начальной скоростью $v_1 = 1$ м/с и ускорением $a_1 = 2$ м/с^2. Вторая – с начальной скоростью $v_2 = 10$ м/с и ускорением $a_2 = 1$ м/с^2. Когда и на каком расстоянии x 1-я точка догонит 2-ю?

Ответ: $t = 2(v_2 - v_1)/(a_1 - a_2) = 18$ с; $x = v_1 t + a_1 t^2/2 = 342$ м.

1.1.16. С какой высоты должно падать тело в вакууме, чтобы достичь скорости 55 м/с в момент падения на землю?

Ответ: $h = v^2/(2g) = 154$ м.

1.1.17. Камень падает с высоты h = 1200 м. Какой путь Δh пройдет камень за последнюю секунду (Δt = 1 с) своего падения?

Ответ: $\Delta h = g\Delta t\left(\sqrt{2h/g} - \Delta t/2\right) = 148{,}5$ м.

1.1.18. Тело последний метр (Δh = 1 м) своего пути прошло за время Δt = 0,1 с. С какой высоты h упало тело?

Ответ: $h = \dfrac{g}{2}\cdot\left(\dfrac{\Delta h}{g\Delta t} + \dfrac{\Delta t}{2}\right)^2 = 5{,}61$ м.

1.1.19. Чему равно полное время падения тела, если за последнюю секунду (Δt = 1 с) свободно падающее без начальной скорости тело пролетело $k = 3/4$ всего пути?

Ответ: $t = \Delta t\cdot\left(1+\sqrt{1-k}\right)/k = 2$ с.

1.1.20. С крыши высотного здания с интервалом времени Δt = 2 с падают один за другим два тела. Чему равно расстояние Δh между телами через τ = 2 с после начала падения второго тела?

Ответ: $\Delta h = \dfrac{g}{2}\left(\Delta t^2 + 2\tau\Delta t\right) = 58{,}8$ м.

1.1.21. Тело брошено вертикально вверх со скоростью v_0 = 9 м/с. На какой высоте скорость тела уменьшится в k = 3 раза?

Ответ: $h = v_0^2\left(k^2-1\right)/\left(2gk^2\right) = 3{,}7$ м.

1.1.22. Мяч, брошенный вертикально вверх, упал на Землю через t = 3 с. Определите величину скорости v_0 мяча в момент падения.

Ответ: $v_0 = gt/2 = 14{,}7$ м/с.

1.1.23. С вертолета, находящегося на высоте h = 30 м, упал камень. Определите время t, через которое камень достигнет Земли, если вертолет при этом опускался со скоростью v_0 = 5 м/с.

Ответ: $t = \sqrt{\left(\dfrac{v_0}{g}\right)^2 + \dfrac{2}{g}h} - \dfrac{v_0}{g} = 2$ с.

1.1.24. С балкона вертикально вверх брошен мяч с начальной скоростью v_0 = 8 м/с. Через t = 2 с мяч упал на Землю. Определите высоту h балкона над Землей.

Ответ: $h = \frac{gt^2}{2} - v_0 t = 3{,}6$ м.

1.1.25. Мяч брошен вертикально вверх со скоростью v_0 = 20 м/с. На какой высоте h скорость мяча будет в k = 2 раза меньше, чем в начале движения?

Ответ: $h = v_0^2\left(k^2-1\right)/\left(2gk^2\right) = 15{,}3$ м.

1.2.1. Движение материальной точки задано уравнением $\mathbf{r}(t) = A\cdot[\mathbf{i}\cdot\cos(\omega t) + \mathbf{j}\cdot\sin(\omega t)]$. Здесь: A = 0,5 м, ω = 5 рад/с, $\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – единичные орты. Определите модуль скорости $|v|$ и модуль нормального ускорения $|a_n|$.

Ответ: $|v| = A\omega$ = 2,5 м/с; $|a_n| = A\omega^2$ = 12,5 м/с^2.

1.2.2. Материальная точка движется по плоскости согласно уравнению $\mathbf{r}(t) = At^3\cdot\mathbf{i} + Bt^2\cdot\mathbf{j}$. Здесь: $\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор; $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – единичные орты; A = 2 м/с^3 и B = 1 м/с^2. Получите зависимости $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\mathbf{a}$ от времени t. Для момента времени t = 2 с вычислите модуль скорости и ускорения.

Ответ: $\boldsymbol{\upsilon}(t) = 3At^2\cdot\mathbf{i} + 2Bt\cdot\mathbf{j}$; $\mathbf{a}(t) = 6At\cdot\mathbf{i} + 2B\cdot\mathbf{j}$;

$|v| = \sqrt{\left(3At^2\right)^2 + \left(2Bt\right)^2} = 24{,}3$ м/с; $|a| = \sqrt{\left(6At\right)^2 + \left(2B\right)^2} = 24{,}1$ м/с^2.

1.2.3. Движение точки задано уравнением $\mathbf{r}(t) = (A + Bt^2)\cdot\mathbf{i} + Ct\cdot\mathbf{j}$. Здесь: A = 10 м, B = –5 м/с^2, C = 10 м/с. Найдите выражение $\boldsymbol{\upsilon}(t)$ и $\mathbf{a}(t)$. Для t = 1 с вычислите: 1) модуль скорости; 2) модуль ускорения; 3) модуль тангенциального ускорения; 4) модуль нормального ускорения.

Ответ: $\boldsymbol{\upsilon}(t) = 2Bt\cdot\mathbf{i} + C\cdot\mathbf{j}$; $\mathbf{a}(t) = 2B\cdot\mathbf{i}$;

$v = \sqrt{\left(2Bt\right)^2 + C^2} = 14{,}1$ м/с; $a = |2B|$ = 10 м/с^2; $a_\tau = a\cdot\cos\alpha$ = 7,07 м/с^2;

$a_n = a\cdot\sin\alpha$ = 7,07 м/с^2, где $|\alpha| = \mathrm{arc\,tg}(2Bt/C)$ = 45°.

1.2.4. Материальная точка движется по плоскости согласно уравнению $\mathbf{r}(t) = At\cdot\mathbf{i} + Bt^2\cdot\mathbf{j}$. Здесь: $\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор; $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – единичные орты; A = 2 м/с и B = 1 м/с^2. Получите зависимости $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\mathbf{a}$ от времени t. Для момента времени t = 2 с вычислите модуль скорости v и ускорения a.

Ответ: $\boldsymbol{\upsilon}(t) = A\cdot\mathbf{i} + 2Bt\cdot\mathbf{j}$; $\mathbf{a}(t) = 2B\cdot\mathbf{j}$;

$v = \sqrt{A^2 + \left(2Bt\right)^2} = 4{,}47$ м/с; $a = |2B|$ = 2 м/с^2.

1.2.5. Движение точки по кривой задано уравнениями: $x = At^3$ и $y = Bt$. Здесь: A = 1 м/с^3, B = 2 м/с. Найдите уравнение траектории точки. Для момента времени t = 0,8 с определите скорость и полное ускорение точки.

Ответ: $y = B\cdot\sqrt[3]{x/A}$; $v=\sqrt{\left(3At^2\right)^2 + B^2} = 2{,}77$ м/с; $a = 6At = 4{,}8$ м/с^2.

1.2.6. Диск радиусом R = 20 см вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$. Здесь: A = 3 рад, B = –1 рад/с, C = 0,1 рад/с^3. Определите: тангенциальное, нормальное и полное ускорения для момента времени t = 10 с.

Ответ: $a_\tau = 6RCt = 1{,}2$ м/с^2; $a_n = \omega^2 R = (B + 3Ct^2)^2 R = 168$ м/с^2;

$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \approx a_n = 168$ м/с^2.

1.2.7. Зависимость угла поворота радиуса колеса при его вращении дается уравнением: $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$. Здесь: B = 1 рад/с, C = = 1 рад/с^2 и D = 1 рад/с^3. К концу второй секунды движения нормальное ускорение точек обода колеса a_n = 346 м/с^2. Найдите радиус R колеса.

Ответ: $R = a_n/(B + 2Ct + 3Dt^2)^2 = 1{,}2$ м.

1.2.8. Точка движется по окружности радиусом R = 2 см. Зависимость пути от времени дается уравнением $s = Ct^3$. Здесь: C = 0,1 см/с^3. Найдите нормальное и тангенциальное ускорения точки в момент времени, когда её линейная скорость v = 0,3 м/с.

Ответ: $a_n = \text{v}^2/R = 4{,}5$ м/с^2; $a_\tau = \sqrt{12vC} = 0{,}06$ м/с^2.

1.2.9. Точка движется по окружности радиусом r = 10 см с постоянным тангенциальным ускорением. К концу пятого оборота (N = 5) после начала движения линейная скорость точки v = 79,2 см/с. Найдите тангенциальное ускорение a_τ точки.

Ответ: $a_\tau = v^2/\left(4\pi Nr\right) = 0{,}1$ м/с^2.

1.2.10. Через время t = 2 с после начала движения вектор полного ускорения лежащей на ободе точки составляет угол α = 60° с вектором ее линейной скорости. Найдите угловое ускорение ε колеса в этот момент.

Ответ: $\varepsilon = \mathrm{tg}\alpha/t^2 = 0{,}43$ рад/с^2.

1.2.11. Колесо начинает вращаться равноускоренно и через время t = 1 мин приобретает частоту n = 720 об/мин. Найдите угловое ускорение ε колеса и число оборотов N колеса за это время.

Ответ: $\varepsilon = 2\pi n/t = 1{,}26$ рад/с^2; $N = \varepsilon t^2/(2\cdot 2\pi) = 361$.

1.2.12. Равноускоренно вращающееся колесо достигло угловой скорости ω = 20 рад/с через N = 10 оборотов после начала вращения. Найдите угловое ускорение ε колеса.

Ответ: $\varepsilon = \omega^2/(4\pi N) = 3{,}2$ рад/с^2.

1.2.13. По дуге окружности радиусом r = 10 м движется точка. В некоторый момент времени t нормальное ускорение точки a_n = 4,9 м/с^2, и векторы полного и нормального ускорений образуют угол φ = 60°. Найдите скорость v и тангенциальное ускорение a_τ точки.

Ответ: $v = \sqrt{a_n r} = 7$ м/с; $a_\tau = a_n \cdot \text{tg}\varphi$ = 8,5 м/с^2.

1.2.14. Маховое колесо вращается с угловой скоростью ω = 10 рад/с. Модуль линейной скорости некоторой точки маховика v_0 = 2 м/с. Определите модуль линейной скорости v точки, находящейся дальше от оси маховика на Δr = 0,1 м.

Ответ: $v = v_0 + \omega\Delta r$ = 3 м/с.

1.2.15. Ось с двумя дисками на расстоянии l = 0,5 м друг от друга вращается с частотой n = 1600 об/мин. Пуля летит вдоль оси и пробивает оба диска. Угловое смещение $\Delta\varphi$ отверстия от пули во втором диске относительно отверстия в первом диске равно 12°. Найдите скорость v пули.

Ответ: $v = 2\pi n \cdot l/\Delta\varphi$ = 400 м/с.

1.2.16. Самолет летит горизонтально на высоте H = 1960 м со скоростью v = 360 км/ч. За какое время t до прохождения над целью и на каком расстоянии s от нее самолет должен сбросить бомбу, чтобы попасть в цель? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $t = \sqrt{2H/g} = 20$ с; $s = v \cdot \sqrt{2H/g} = 2$ км.

1.2.17. Пуля вылетает из ствола в горизонтальном направлении со скоростью v = 1000 м/с. На сколько снизится пуля во время полета, если щит с мишенью находится на расстоянии s = 400 м?

Ответ: $h = gs^2/\left(2v^2\right) = 0{,}784$ м.

1.2.18. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении со скоростью v_0 = 15 м/с. Определите скорость v, тангенциальное и нормальное ускорение камня в конце первой секунды после начала движения.

Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} = 17{,}9$ м/с;

$a_\tau = g^2 t / v$ = 5,37 м/с^2; $a_n = g v_0 / v$ = 8,2 м/с^2.

1.2.19. Тело, брошенное в горизонтальном направлении со скоростью v = 20 м/с с башни высотой h, упало на землю на расстоянии s от основания башни. Причем s в k = 2 раза больше h. Найдите высоту башни.

Ответ: $h = 2v^2/\left(gk^2\right) = 20{,}4$ м.

1.2.20. Камень брошен горизонтально с начальной скоростью v_0 = 10 м/с. Найдите радиус кривизны R траектории камня через время t = 3 с после начала движения.

Ответ: $R = \left(v_0^2 + g^2t^2\right)^{3/2} \Big/ \left(gv_0\right) = 305{,}6$ м.

1.2.21. Тело брошено под углом α = 30° к горизонту. Найдите величину тангенциального a_τ и нормального a_n ускорения тела в начальный момент движения.

Ответ: $a_\tau = g\cdot\cos\alpha = 8{,}5$ м/с^2; $a_n = g\cdot\sin\alpha = 4{,}9$ м/с^2.

1.2.22. Тело брошено со скоростью v_0 = 14,7 м/с под углом α = 30° к горизонту. Найдите нормальное и тангенциальное ускорения тела через время t = 1,25 с после начала движения.

Ответ: $a_n = g\cdot v_0\cos\alpha / v = 9{,}2$ м/с^2; $a_\tau = g\cdot v_y / v = 3{,}5$ м/с^2,

где $v_y = v_0\sin\alpha - gt = -4{,}9$ м/с; $v = \sqrt{\left(v_0\cos\alpha\right)^2 + v_y^2} = 13{,}6$ м/с.

1.2.23. Пуля пущена с начальной скоростью v_0 = 200 м/с под углом α = 60° к горизонту. Определите максимальную высоту h подъема, дальность полета s и радиус кривизны R траектории пули в ее наивысшей точке.

Ответ: $h = \left(v_0\sin\alpha\right)^2 \Big/ \left(2g\right) = 1{,}53$ км; $s = v_0^2\sin 2\alpha / g = 3{,}53$ км;

$R = \left(v_0\cos\alpha\right)^2 \Big/ g \approx 1$ км.

1.2.24. Двое играют в мяч. От одного к другому мяч летит τ = 2 с. Определите максимальную высоту $h_{\max}$ подъема мяча.

Ответ: $h_{\max} = g\tau^2/8 = 4{,}9$ м.

1.2.25. Тело брошено под некоторым углом α к горизонту. Найдите величину этого угла, если горизонтальная дальность s полета тела оказалась в k = 4 раза больше высоты h траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(4/k\right) = 0{,}785$ рад $= 45^\circ$.

1.3.1. Ракета стартует с Земли вертикально вверх с ускорением $a = At^2$, где A = 1 м/с^4. На высоте h = 100 км от Земли двигатели ракеты выключили. Через сколько времени (считая с момента выключения двигателей) ракета упадет на Землю? Определите скорость v_0 ракеты в момент выключения двигателей. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $v_0 = \frac{A}{3}\left(\frac{12h}{A}\right)^{3/4} = 12{,}1$ км/с,

так как $v_0 > \sqrt{gR_З}$, то ракета не вернется на Землю.

1.3.2. Рассмотрим лунный модуль, движущийся по круговой орбите вокруг Луны. Пусть радиус $R_л$ его орбиты составляет одну треть радиуса $R_З$ Земли, а ускорение свободного падения на этой орбите $g_л = g/12$, где g = 9,8 м/с^2. Какова скорость модуля $v_л$ по сравнению со скоростью спутника $v_з$, движущейся по околоземной орбите?

Ответ: $v_л = v_з\sqrt{\frac{g_л R_л}{g R_З}} = \frac{v_з}{6}$.

1.3.3. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Максимальная высота подъема тела h_{max} = 3 м и радиус кривизны траектории в верхней точке траектории R = 3 м. Найдите v_0 и α.

Ответ: $v_0 = \sqrt{g(R + 2h_{max})} = 9{,}4$ м/с; $\alpha = \arccos\left(\sqrt{gR}/v_0\right) = 55°$.

1.3.4. Колесо вращается с угловым ускорением ε = 2 рад/с^2. Через время t = 0,5 с после начала движения полное ускорение точек на ободе колеса a = 13,6 м/с^2. Найдите радиус R колеса.

Ответ: $R = a\Big/\left(\varepsilon\sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}\right) = 6{,}1$ м.

1.3.5. Точка лежит на ободе вращающегося колеса. Во сколько раз нормальное ускорение a_n больше её тангенциального ускорения a_τ в момент, когда вектор полного ускорения **a** точки составит угол α = 30° с вектором ее линейной скорости $\boldsymbol{\upsilon}$?

Ответ: $a_n/a_\tau = \mathrm{tg}\alpha = 0{,}58$.

1.3.6. Точка движется по окружности радиусом R = 10 см с постоянным тангенциальным ускорением. За время t_1 точка сделала N = 5 оборотов и ее скорость в момент времени t_1 была v_1 = 10 см/с. Найдите нормальное ускорение в момент времени t_2 = 20 с.

Ответ: $a_n = \frac{1}{R}\left(\frac{v_1^2 t_2}{4\pi R N}\right)^2 = 0{,}01$ м/с^2.

1.3.7. При снижении вертолет опускался вертикально с постоянной скоростью v_0 = 19 м/с. Начиная с некоторой высоты h и до посадки он опускался равнозамедленно с ускорением a = 0,2 м/с^2. Сколько оборотов N сделал винт вертолета за время снижения с высоты h до посадки, если угловая скорость вращения винта ω = 31,4 рад/с?

Ответ: $N = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{v_0}{a} = 475$.

1.3.8. Тело начинает двигаться вдоль прямой с постоянным ускорением. Через t_1 = 30 мин ускорение тела меняется по направлению на противоположное, оставаясь таким же по величине. Через какое время t от начала движения тело вернется в исходную точку?

Ответ: $t = t_1\left(2+\sqrt{2}\right) = 102{,}4$ мин.

1.3.9. На горизонтальном валу, вращающемуся с частотой n = = 200 с$^{-1}$, на расстоянии l = 20 см друг от друга закреплены два тонких диска. Горизонтально летевшая пуля пробила оба диска на одинаковом расстоянии от оси вращения. Определите среднюю скорость $\langle v \rangle$ пули при ее движении между дисками, если угловое смещение пробоин оказалось равным $\varphi = 18°$.

Ответ: $\langle v \rangle = 2\pi n \cdot l / \Delta\varphi = 800$ м/с.

1.3.10. На учебных стрельбах поставлена задача: в минимальное время t_{min} поразить снаряд после его вылета, выпущенный вертикально вверх со скоростью v_0 = 1 км/с, вторым снарядом, скорость которого на 10 % меньше первого (δ = 0,1). Через сколько секунд Δt после первого выстрела следует произвести второй, если стрелять с того же места?

Ответ: $\Delta t = v_0\left(\delta + \sqrt{\delta^2 + 2\delta}\right)\Big/ g = 57$ с.

1.3.11. Свободно падающее тело в последнюю секунду (Δt = 1 с) своего движения проходит δ = 1/3 всего пути. Найдите время t его падения и высоту h, с которой падало тело.

Ответ: $t = \Delta t \cdot \left(1 + \sqrt{1-\delta}\right)\Big/\delta = 5{,}45$ с; $h = gt^2/2 = 145{,}5$ м .

1.3.12. В сферической лунке прыгает шарик, упруго ударяясь о ее стенки в двух точках, расположенных на одной горизонтали (рис. 1.19). Промежуток времени между ударами при движении шарика слева направо всегда равен T_1, а при движении справа налево T_2 ($T_2 \neq T_1$). Определите радиус лунки.

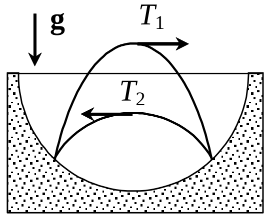


Рис. 1.19

Ответ: $R = g \cdot T_1 T_2 / \sqrt{8}$.

1.3.13. Два тяжелых шарика брошены с одинаковыми начальными скоростями из одной точки вертикально вверх, один через Δt = 3 с после другого. Они встретились в воздухе через t = 6 с после вылета первого шарика. Определите начальную скорость шариков. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $v_0 = g(2t - \Delta t)/2 = 44{,}1$ м/с.

1.3.14. Некоторое тело последовательно совершило два перемещения со скоростями v_1 и v_2. Первое перемещение направлено под углом φ_1 к некоторому выбранному направлению, второе – под углом φ_2. Известно также, что модуль первого перемещения в n раз меньше модуля второго. Вычислите модуль средней скорости $\langle v \rangle$ движения.

Ответ: $\langle v \rangle = N v_1 / \left(1 + n(v_1/v_2)\right)$, где $N = \sqrt{1 + n^2 + 2n\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$.

1.3.15. С какой наименьшей скоростью v_{min} следует бросить тело под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, чтобы оно перелетело через вертикальную стену высотой $h = 5{,}6$ м, если стена находится от точки бросания на расстоянии $s = 5$ м?

Ответ: $v_{\min} = \dfrac{s}{\cos\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{g}{2\left(s \cdot \operatorname{tg}\alpha - h\right)}} = 12{,}7$ м/с.

1.3.16. Два тела одновременно бросили из одной точки. Начальная скорость первого тела равна $v_{01} = 10$ м/с и направлена вертикально вверх, скорость второго тела равна $v_{02} = 20$ м/с и направлена под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определите расстояние l между телами через $t = 1$ с после начала движения.

Ответ: $l = t \cdot \sqrt{\left(v_{02}\sin\alpha - v_{01}\right)^2 + v_{02}^2\cos^2\alpha} = 17{,}3$ м.

1.3.17. Тело A брошено вертикально вверх со скоростью $v_{01} = 20$ м/с, тело B брошено горизонтально со скоростью $v_{02} = 4$ м/с с высоты $h = 20$ м одновременно с телом A. Расстояние по горизонтали между исходными положениями тел равно $l = 4$ м. Определите скорость v_1 тела A в момент его столкновения с телом B.

Ответ: $v_1 = v_{01} - gl/v_{02} = 10{,}2$ м/с.

1.3.18. Две частицы падают из одной точки, имея начальные скорости $v_{01} = 3$ м/с, $v_{02} = 4$ м/с, направленные горизонтально в противоположные стороны. Найдите расстояние l между частицами, когда векторы их скоростей окажутся взаимно перпендикулярными.

Ответ: $l = \sqrt{v_{01}v_{02}} \cdot \dfrac{v_{01} + v_{02}}{g} = 2{,}5$ ì .

1.3.19. Маленький шарик падает с высоты $h = 50$ см на наклонную плоскость, составляющую угол $\alpha = 45°$ к горизонту. Найдите расстояние s между точками первого и второго ударов шарика о плоскость. Соударения считать абсолютно упругими.

Ответ: $s = 4h \cdot \operatorname{tg}\alpha / \cos\alpha = 2{,}8$ м.

1.3.20. С высоты h = 2 м вниз под углом к горизонту α = 60° брошен мяч с начальной скоростью v_0 = 8,7 м/с. Определите расстояние s между двумя последовательными ударами мяча о землю. Удары считать абсолютно упругими.

Ответ: $s = \dfrac{2v_0 \cos\alpha}{g} \cdot \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh} = 8{,}7$ м.

1.3.21. Мяч, брошенный со скоростью v_0 = 10 м/с под углом α = 60° к горизонту, ударяется о стену, находящуюся на расстоянии s = 3 м от места бросания. Определите модуль скорости $|v|$ мяча после удара о стенку. Удары считайте абсолютно упругими.

Ответ: $|v| = \sqrt{\left(v_0 \cos\alpha\right)^2 + \left(v_0 \sin\alpha - \dfrac{gs}{v_0 \cos\alpha}\right)^2} = 5{,}7$ м/с.

1.3.22. Легковой автомобиль движется со скоростью v_1 = 20 м/с за грузовым, скорость которого v_2 = 16,5 м/с. В момент начала обгона водитель легкового автомобиля увидел встречный автобус, движущийся со скоростью v_0 = 25 м/с. При каком наименьшем расстоянии l до автобуса можно начинать обгон, если в начале обгона легковая машина была в l_1 = 15 м от грузовой, а к концу обгона она должна быть впереди грузовой на l_2 = 20 м?

Ответ: $l = \left(l_1 + l_2\right) \cdot \dfrac{v_1 + v_0}{v_1 - v_2} = 450$ м.

1.3.23. Колонна автомобилей движется по шоссе со скоростью v_1 = 90 км/ч. Длина каждого автомобиля l = 10 м. На ребристом участке шоссе автомобили движутся со скоростью v_2 = 15 км/ч. Каким должен быть минимальный интервал Δx между автомобилями, чтобы автомобили не сталкивались при въезде на ребристый участок шоссе?

Ответ: $\Delta x = l \cdot \dfrac{v_1 - v_2}{v_2} = 50$ ì .

1.3.24. Цилиндрический каток радиусом R = 1 м помещен между двумя параллельными рейками (рис. 1.20). Рейки движутся в одну сто-

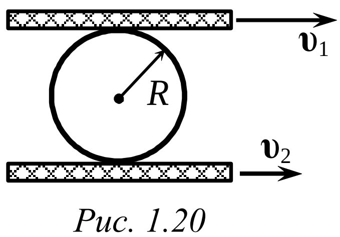


Рис. 1.20

рону со скоростями $v_1 = 4$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Определите угловую скорость ω вращения катка.

Ответ: $\omega = (v_1 - v_2)/(2R) = 1$ рад/с.

1.3.25. Муравей бежит из муравейника по прямой так, что его скорость обратно пропорциональна расстоянию до центра муравейника. В тот момент, когда муравей находится в точке A на расстоянии $l_1 = 1$ м от центра муравейника, его скорость равна $v_1 = 2$ см/с. За какое время t муравей добежит от точки A до точки B, которая находится на расстоянии $l_2 = 2$ м от центра муравейника?

Ответ: $t = (l_2^2 - l_1^2)/(2v_1 l_1) = 75$ с.

2. ДИНАМИКА

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Основные законы движения – законы Ньютона. Импульс тела. Изменение импульса тела

Первый закон Ньютона. Существуют такие системы отсчета, в которых свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно или покоится. Система отсчета, в которой свободная материальная точка сохраняет постоянную (по величине и направлению) скорость, называется инерциальной. Содержание первого закона Ньютона состоит в утверждении существования инерциальных систем отсчета.

Второй закон Ньютона устанавливает причину изменения скорости – взаимодействие тел и вводит меру этого взаимодействия – силу. Сила $\mathbf{F}$ – векторная физическая величина, которая может быть силой непосредственного воздействия или силой, действующей на расстоянии (силой поля). В результате действия сил тело может не только изменять свою скорость, но и деформироваться (статическое действие).

Второй закон Ньютона. Изменение импульса тела за элементарно малый промежуток времени, отнесенное к этому промежутку времени, пропорционально приложенной силе и происходит по направлению действия силы

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \qquad (1)$$

При m = const можно получить:

$$\frac{d(m\boldsymbol{\upsilon})}{dt} = \mathbf{F}; \qquad m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \mathbf{F}; \qquad m\mathbf{a} = \mathbf{F}; \qquad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}; \qquad \mathbf{a} \sim \mathbf{F}.$$

Здесь: $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\upsilon}$ – ускорение и скорость тела; масса тела m является мерой инертности тела при поступательном движении.

Если на тело (материальную точку) одновременно действуют несколько сил ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, …$\mathbf{F}_i$, …, $\mathbf{F}_n$), то ускорение, приобретаемое телом под действием этих сил, равно

$$\mathbf{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i}{m}. \qquad (2)$$

Третий закон Ньютона. Силы взаимодействия двух тел равны по величине и направлены по одной прямой противоположно друг другу:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2, \ |\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|, \ F_1 = F_2.$$

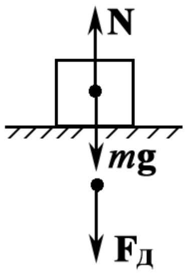


Рис. 2.1

Например, сила $\mathbf{F}_д$, с которой тело давит на опору (эта сила приложена к опоре), и сила (нормальной) реакции опоры **N**, приложенная к телу, связаны третьим законом Ньютона (рис. 2.1):

$$\mathbf{N} = -\mathbf{F}_д; \qquad N = F_д.$$

2.2. Силы в механике
(*сила упругости, сила тяжести и вес, сила трения*)

а) Сила упругости. В качестве примера рассмотрим перемещение шарика массой m на пружине по горизонтали (без трения).

При смещении шарика из положения равновесия ($x = x_0$) вправо внешней силой $\mathbf{F}_{внешн}$ длина пружины увеличивается на величину $\Delta l = x - x_0$ и на шарик начинает действовать сила упругости $\mathbf{F}_{упр}$ (рис. 2.2) со стороны пружины, направленная влево. (Аналогично можно рассмотреть и сжатие пружины).

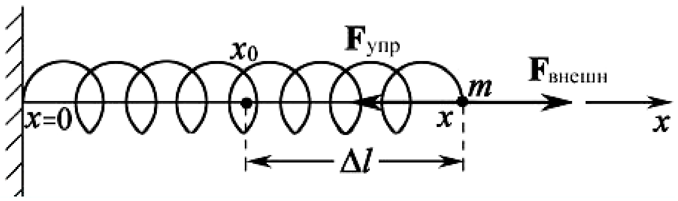


Рис. 2.2

При упругой деформации (т. е. исчезающей с прекращением действия силы) сила $\mathbf{F}_{внешн}$ и деформация Δl тела, согласно закону Гука, пропорциональны друг другу

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}, \tag{3}$$

где F – сила растяжения или сжатия, приложенная к телу (в форме стержня); S – площадь поперечного сечения тела; Δl – изменение длины стержня под действием силы F; l – начальная длина стержня; $\Delta l/l$ – относительное удлинение; E – модуль упругости материала тела (модуль Юнга); $[E]$ = Н/м^2.

Преобразуя (3), получим

$$F = \frac{SE}{l}\Delta l = k\Delta l, \quad \text{или} \quad F = k\Delta l, \tag{4}$$

где $k = SE/l$ – коэффициент жесткости (упругости); $[k]$ = Н/м.

Действующей на тело (пружину) силе противодействует сила, называемая упругой силой $F_{упр}$ (рис. 2.2).

Сила упругости, возникающая при упругой деформации тела, также определяется законом Гука. При небольших деформациях (растяжения или сжатия) сила упругости прямо пропорциональна деформации тела и направлена в сторону, противоположную направлению вектора перемещения $\Delta\mathbf{l}$ конца тела (пружины) при деформации растяжения (сжатия).

$$\mathbf{F}_{упр} = -k\,\Delta\mathbf{l} \quad \text{или} \quad F_{упр} = k\,\Delta l.$$

Таким образом, сила упругости всегда противодействует деформации тела, поэтому проекция вектора силы упругости на введенную ось Ox (рис. 2.2) определяется по формуле

$$(F_{упр})_x = -k\Delta x, \tag{5}$$

где $\Delta x = (x - x_0)$ – величина удлинения пружины или ее сжатия; x_0 – координата конца пружины в недеформированном состоянии.

Если положение конца недеформированной пружины принять за $x = 0$, то $\Delta x = x$ и закон Гука запишется в виде

$$(F_{упр})_x = -kx, \tag{6}$$

где x – величина деформации пружины.

Коэффициент жесткости системы пружин. Формулы для коэффициента жесткости системы пружин можно получить из закона Гука (3).

1) Коэффициент жесткости системы из двух невесомых и абсолютно упругих пружин с коэффициентами упругости k_1 и k_2, соединенных последовательно, равен

$$k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}.$$

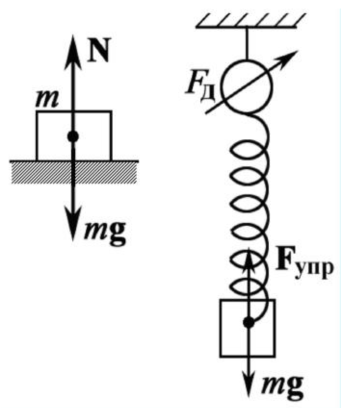
2) Коэффициент жесткости при параллельном соединении этих же пружин $\quad k = k_1 + k_2.$

б) Вес тела P – сила, с которой тело, вследствие его притяжения к Земле, действует на горизонтальную опору (сила $\mathbf{F}_д$) или на вертикальный подвес (сила $\mathbf{F}_{натяж}$).

1) По определению $P = F_д$. По третьему закону Ньютона $F_д = N$ (рис. 2.3, *а*).

Здесь сила (нормальной) реакции опоры – это приложенная к телу упругая сила $\mathbf{N}$, действующая на тело со стороны опоры перпендикулярно поверхности соприкосновения:

$$N = mg; \quad P = mg.$$



а) *б*)

Рис. 2.3

2) По определению $P = F_{натяж}$. Если вес тела определяется с использованием пружинных весов (динамометра), то сила натяжения пружины $F_{натяж}$ численно равна показанию динамометра $F_д$; $P = F_д$.

По третьему закону Ньютона $F_д = F_{упр}$, где $F_{упр}$ – это сила реакции подвеса, приложенная к телу, которая направлена вдоль подвеса (рис. 2.3, *б*):

$$P = F_{упр}; \quad F_{упр} = mg; \quad P = mg. \tag{7}$$

Замечания:

1) Сила тяжести mg и вес тела P приложены к разным телам, а именно к телу и к опоре (или подвесу).
2) При ускоренном движении тела в вертикальном направлении (например, в лифте) вес тела $P \neq mg$; $P = mg \pm ma$.
3) Вес тела может быть равен нулю – это состояние называется невесомостью. Невесомость возникает тогда, когда тело падает вниз с ускорением $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ или движется по окружности с нормальным ускорением $\mathbf{a}_n = \mathbf{g}$.

в) Сила трения. Движущееся тело теряет свою энергию, не только преодолевая сопротивление окружающей среды, но из-за наличия трения. Сила трения всегда направлена вдоль поверхности соприкосновения в сторону, противоположную движению; сила трения $F_{тр}$ всегда меньше силы нормального давления $F_д$. Различают силу трения покоя, скольжения и качения.

Трение покоя проявляется в том случае, когда тело, находившееся в состоянии покоя, приводится в движение. Сила трения, препятствующая возникновению движения одного тела по поверхности другого, называется силой трения покоя ($F_{тр. покоя}$).

Сила трения покоя может изменяться от нуля до предельного значения, которое принимается равным силе трения скольжения $F_{тр}$ (см. рис. 2.5).

Трение скольжения проявляется при наличии движения тела. Сила трения скольжения $F_{тр}$ – это сила, действующая на данное тело со стороны соприкасающегося с ним тела, направленная вдоль поверхности соприкосновения тел противоположно их относительной скорости движения.

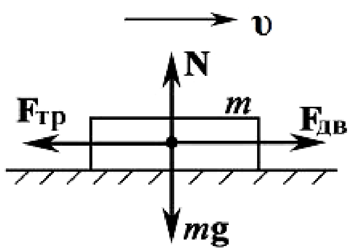


Рис. 2.4

На рис. 2.4 все силы, действующие на тело массой m (параллельным переносом их) сведены в одной точке приложения, что не искажает условие задач и анализ их решения.

Величина силы трения скольжения прямо пропорциональна силе нормального давления $F_д$, приложенной к опоре. Эта сила указана, например, на рис. 2.1. Но по третьему закону Ньютона, как показано выше, $F_д = N$ и, следовательно, $F_{тр}$ пропорциональна силе (нормальной) реакции опоры N:

$$F_{тр} = \mu F_д \quad \text{или} \quad F_{тр} = \mu N, \qquad (8)$$

где μ – коэффициент трения скольжения, зависящий от рода соприкасающихся поверхностей и степени их шероховатости, который всегда меньше 1.

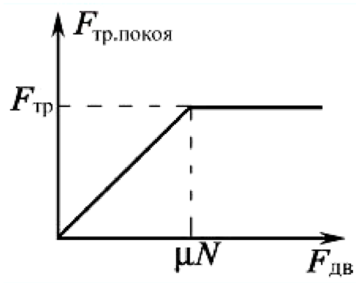


Рис. 2.5

На рис. 2.5 представлена зависимость силы трения покоя $F_{тр.покоя}$ от движущей силы $F_{дв}$, действующей на тело (см. рис. 2.4).

При $F_{дв} < \mu N$, $\quad F_{тр.покоя} = F_{дв}$, (тело покоится).

При $F_{дв} = \mu N$, $\quad F_{тр.покоя} = (F_{тр.покоя})_{max} = \mu N$. (9)

При $F_{дв} > \mu N$, $\quad F_{тр} = \mu N$, согласно (8).

В этом случае тело движется, сила трения равна силе трения скольжения и остается неизменной.

Трение качения проявляется в том случае, когда тело катится по опоре.

2.3. Динамика материальной точки, движущейся по криволинейной траектории

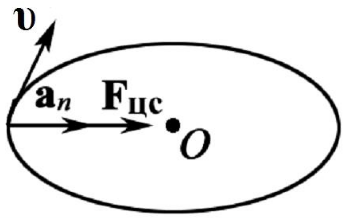


Рис. 2.6

При движении по криволинейной траектории (движение по окружности – частный случай криволинейного движения) на тело действует сила, играющая роль центростремительной силы $\mathbf{F}_{цс}$ (это может быть сила упругости, сила гравитационного притяжения, сила трения и др.). Центростремительная сила (рис. 2.6) обусловливает нормальное ускорение $\mathbf{a}_n$ тела:

$$\mathbf{F}_{цс} = m\mathbf{a}_n.$$

При равномерном движении по окружности ускорение часто называют центростремительным, т. е. $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{цс}$.

2.4. Рекомендации по решению задач на тему «Динамика»

1) Укажите на рисунке все силы, действующие на данное тело (или тела системы) со стороны других тел.
2) Выберите систему координатных осей. Рационально выбрать систему координат таким образом, чтобы одна из координатных осей совпадала с направлением вектора ускорения **a** системы тел или

одного из них. Если тело движется по окружности (частный случай криволинейного движения), то одну из координатных осей удобно направить по направлению центростремительного ускорения, $\mathbf{a}_n$, т. е. к центру окружности.

3) Запишите уравнение по второму закону Ньютона (основное уравнение динамики) в векторном виде для каждого из тел системы.

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}. \tag{1}$$

4) Спроецировав все составляющие уравнения (1) на выбранные координатные оси, запишите систему скалярных уравнений, соответствующих векторному уравнению (1),

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = m a_x; \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = m a_y. \tag{3}$$

5) Для определения силы трения, входящей в данные уравнения, необходимо найти силу реакции опоры $\mathbf{N}$, величина которой зависит от условия задачи. Согласно уравнению (8) в подразделе 2.2

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \tag{4}$$

6) В случае необходимости уравнения (2) – (4) дополняют формулами кинематики.
7) Решая совместно все полученные уравнения, определите искомые физические величины и проверьте их размерность.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Тело массой m = 3 кг движется так, что координата x его движения изменяется во времени по закону: $x = A + Bt + Ct^2$, где B = 4 м/с; C = 3 м/с^2. Определите скорость v, ускорение a, импульс p тела, силу F, действующую на тело.

Ответ: v = 28 м/с; a = 6 м/с^2; p = 84 (кг·м)/с; F = 18 Н.

2. Автомобиль массой m = 100 т двигался со скоростью v_0 = 54 км/ч. При торможении до полной остановки автомобиль прошел путь s = = 300 м. Определите коэффициент трения μ между шинами колес и поверхностью дороги и силу F сопротивления движению (силу трения).

Ответ: $\mu = v_0^2/(2gs) = 0{,}0383$; $F = \mu mg = 37{,}5$ êÍ .

3. Мяч массой 600 г упруго ударяется о неподвижную вертикальную стену со скоростью 10 м/с, которая направлена под углом α = 30° к поверхности стенки. Определите изменение импульса Δp мяча, импульс $p_{ст}$, полученный стенкой в результате соударения, а также среднюю силу F, действующую на мяч при ударе, длящемся в течение времени $\Delta t = 0{,}2$ с.

Ответ: $\Delta p = 6$ (кг·м)/с; $p_{ст} = -6$ (кг·м)/с; $F = 30$ Н.

4. Маленькие шарики, размерами которых можно пренебречь в условиях данной задачи, массами $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}25$ кг, прикреплены к невесомому стержню длиной $l = 1$ м так, как показано на рис. 2.22. Стержень может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O. В нижней точке траектории тело массой m_2 имеет скорость $v = 1$ м/с. Определите силу T_1, с которой стержень действует на массу m_1 в этот момент.

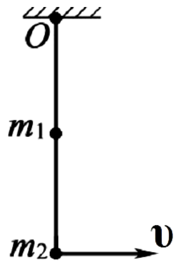


Рис. 2.22

Ответ: $T_1 = (m_1 + m_2)g + \dfrac{v^2}{l}\left(\dfrac{m_1}{2} + m_2\right) = 7{,}85$ Н.

5. Вертолет массой $m = 2{,}5$ т с ротором, диаметр которого $d = 15$ м, находится в воздухе над одной и той же точкой поверхности Земли. Ротор отбрасывает вертикально вниз струю воздуха со скоростью $v = 15$ м/с. Определите, какая масса воздуха ежесекундно отбрасывается ротором вертолета вертикально вниз. (Считайте, что диаметр струи приблизительно равен диаметру вращающегося ротора; плотность воздуха $\rho = 1{,}32$ кг/м^3). Определите также реактивную силу F двигателей корабля.

Ответ: $\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \dfrac{\pi d^2}{4}\rho v \approx 3497$ кг/с; $F = -ma = -\dfrac{\Delta m}{\Delta t}v \approx -52{,}5$ кН.

6. Катер массой $m = 2$ т, трогаясь с места, в течение некоторого времени достигает скорости $v = 5$ м/с (принять, что движение катера происходит в спокойной воде озера). Сила тяги мотора постоянна и равна $F = 1{,}5 \cdot 10^3$ Н. Принимая, что сила сопротивления $F_{сопр}$ движению катера пропорциональна скорости ($F_{сопр} = kv$, где коэффициент сопротивления $k = 100$ кг/с), определите время, за которое катер достигает указанной скорости.

Ответ: $\Delta t = \dfrac{m}{k} \cdot \ln\dfrac{F}{F - kv} = 8$ с.

7. Груз массой $m = 1$ кг, привязанный к резиновому жгуту длиной l, отклоненному от вертикали на угол $\varphi = 45°$, описывает в горизонтальной плоскости окружность, вращаясь с частотой $n = 1$ об/с. Коэффициент жесткости жгута $k = 0{,}5$ кН/м. Определите длину l нерастянутого резинового жгута.

Ответ: $l = \dfrac{g}{\cos\varphi}\left(\dfrac{1}{\omega^2} - \dfrac{m}{k}\right) = 32$ см, где $\omega = 2\pi n$.

8. Мотоциклист движется по закруглению дороги радиуса R = 100 м. Коэффициент трения скольжения между шинами колес мотоцикла и асфальта μ = 0,5. Определите угол φ отклонения мотоциклиста от вертикали, когда он движется по закруглению, а также наибольшую возможную скорость v_{max}, при которой его не заносит при данных условиях движения.

Ответ: $\alpha = \mathrm{arctg}\,\mu = 27°$; $v = \sqrt{\mu R g} = 22{,}1$ м/с.

9. Машина с песком движется под действием силы F = 100 кН. В начальный момент времени масса машины с песком равна m_0 = 10 т, а ее скорость равна нулю. Постепенно песок высыпают из машины, при этом потеря массы составляет k = 10 кг/с. Определите скорость v и ускорение a машины через t = 10 с после начала движения.

Ответ: $v = \dfrac{F}{k}\cdot\ln\dfrac{m_0}{m_0 - kt} = 100$ м/с; $a = \dfrac{F}{m_0 - kt} = 10{,}1$ м/с^2.

10. Груз, привязанный к веревке, равномерно вращают в вертикальной плоскости. Определите массу груза, если разница между максимальным и минимальным значениями веса груза составляет ΔP = 10 Н.

Ответ: $m = \Delta P/(2g) \approx 0{,}5$ кг.

11. Тепловоз тянет состав, состоящий из n = 10 одинаковых вагонов с ускорением a = 15 м/с^2. Определите силу натяжения сцепки между пятым и шестым вагонами (считая от начала состава), если масса каждого вагона m = 150 кг, а коэффициент сопротивления μ = 0,15.

Ответ: $F = m(n - k)(a + \mu g)$ = 12,35 кН, где k = 5.

12. Через блок перекинут шнур, к концам которого прикреплены грузы массами m_1 = 4 кг и m_2 = 5 кг (рис. 2.23). На больший груз помещен дополнительный груз Δm = 0,5 кг. Блок подвешен к пружинным весам. Определите показания весов F при движении грузов. Массой блока и шнура, а также трением в блоке пренебрегаем. Принять g = 10 м/с^2.

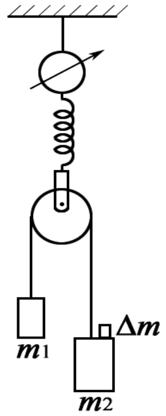


Рис. 2.23

Ответ: $F = \dfrac{g\left[(m_1 + m_2 + \Delta m)^2 - (m_2 + \Delta m - m_1)^2\right]}{(m_1 + m_2 + \Delta m)} = 92{,}6$ Н.

13. По наклонной плоскости (рис. 2.24) скользят два груза массами m_1 = 2 кг и m_2 = 3 кг, связанные невесомой и нерастяжимой нитью. Коэффициенты

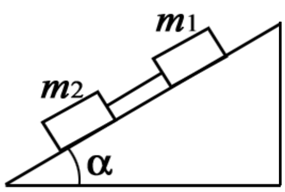


Рис. 2.24

трения между грузами и плоскостью равны соответственно: μ_1 = 0,8, μ_2 = 0,6. Определите силу натяжения нити, если угол наклона плоскости к горизонту α = 20°.

Ответ: $F_{\text{нат}} = (\mu_1 - \mu_2) \cdot \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \cos\alpha = 2,21$ Н.

14. Определите силу $F_{\text{нат}}$ натяжения каната, связывающего грузы массой m_1 = 2 кг и m_2 = 2 кг, в системе, изображенной на рис. 2.25. Система из трех грузов (масса груза m_3 = 0,5 кг) находится в лифте, движущемся вниз с ускорением $a_{\text{л}}$ = = 1 м/с^2. Коэффициент трения между грузом массой m_1 и столом μ = 0,1. (Массой блока и трением в блоке пренебрегаем).

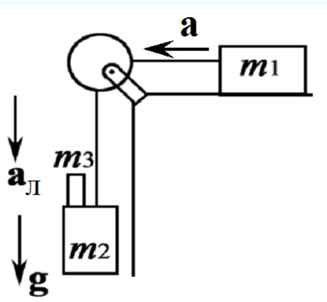


Рис. 2.25

Ответ: $F_{\text{нат}} = \mu m_1(g - a_{\text{л}}) + m_1 a = 10,8$ Н,

где $a = \dfrac{(g - a_{\text{ё}})(m_2 + m_3 - \mu m_1)}{m_1 + m_2 + m_3} = 4,5\ \text{ì /ñ}^2$.

15. Маленький шарик массой m = 0,02 кг, прикрепленный к резиновому шнуру длиной l = 0,5 м, равномерно вращается в горизонтальной плоскости. Каково удлинение Δl шнура жесткостью k = 500 Н/м, если число оборотов в секунду n = 10 об/с?

Ответ: $\Delta l = l \cdot \omega^2 m \big/ \left(k - \omega^2 m\right) = 9$ см, где $\omega = 2\pi n$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.1.1. Координата тела массой m = 1 кг, движущегося прямолинейно, изменяется от времени по закону $y = at^2 - bt^3$, где a = 2 м/с^2, b = 1 м/с^3. Определите силу F, действующую на тело в конце второй секунды движения.

Ответ: $F = m(2a - 6bt) = -8$ Н.

2.1.2. Координаты x и y тела массой m = 2 кг изменяются во времени по следующим законам соответственно: $x = A_1 - B_1 t + C_1 t^2$, $y = A_2 + D_2 t^3$, где C_1 = 2 м/с^2, D_2 = 2 м/с^3. Определите ускорение a тела и силу F, действующую на тело в начале шестой секунды.

Ответ: $a = \sqrt{4C_1^2 + 36 D_2^2 t^2} = 60$ м/с^2; F = 120 Н.

2.1.3. Зависимость координаты тела массой 2 кг задана уравнением $x = A\cos\omega t$, где A = 2 см, $\omega = 2\pi$ рад/с. Определите ускорение тела через t = 0,5 с после начала движения и силу, действующую на тело.

Ответ: $a = 0{,}8$ м/с^2; $F = 1{,}6$ Н.

2.1.4. Зависимость координаты тела массой $m = 0{,}5$ кг, движущегося прямолинейно, задана уравнением $x = A + Bt - Ct^2 + Dt^3$, где $B = 1$ м/с, $C = 5$ м/с^2 и $D = 5$ м/с^3. Определите импульс тела и действующую на него силу через $t = 10$ с после начала движения.

Ответ: $p = 2200$ (кг·м)/с; $F = 145$ Н.

2.1.5. Тело массой $m = 2$ кг движется так, что его координаты y и z изменяются во времени. Зависимость $y(t)$ задана соотношением $y = B_1t + C_1t^2$, зависимость $z(t)$ определяется выражением $z = B_2t - C_2t^2$, где $B_1 = 2$ м/с; $C_1 = 4$ м/с^2; $B_2 = 1$ м/с; $C_2 = 2$ м/с^2; ($x = \text{const}$). Определите импульс p тела в конце третьей секунды движения.

Ответ: $p = 49$ (кг·м)/с.

2.1.6. По поверхности льда пущена шайба, которая, пройдя путь $s = 400$ м, остановилась через $t = 40$ с. Определите коэффициент трения μ шайбы об лед.

Ответ: $\mu = 2s/(gt^2) = 0{,}05$.

2.1.7. После включения тормозной системы тепловоз массой $m = 100$ т прошел путь $s = 200$ м до полной остановки за время $t = 40$ с. Определите силу торможения.

Ответ: $F = m\dfrac{2s}{t^2} = 25$ кН.

2.1.8. При выключении двигателя автомобиль, движущийся со скоростью $v = 54$ км/ч, проехал по инерции путь $s = 100$ м. Определите коэффициент трения μ автомобиля о поверхность дороги.

Ответ: $\mu = v^2/(2gs) = 0{,}115$.

2.1.9. Поезд массой $m = 150$ т двигался со скоростью $v = 72$ км/ч. При торможении до полной остановки поезд прошел путь $s = 500$ м. Определите силу F сопротивления движению.

Ответ: $F = mv^2/(2s) = 60$ кН.

2.1.10. Пущенная по поверхности льда шайба со скоростью $v = 30$ м/с остановилась через время $t = 50$ с. Определите силу F сопротивления движению и коэффициент трения μ, если масса шайбы $m = 500$ г.

Ответ: $F = mv/t = 0{,}34$ Н; $\mu = v/(gt) = 0{,}06$.

2.1.11. Тело массой $m = 3$ кг брошено под углом $\alpha = 60°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Определите, на сколько изменился импульс тела в верхней точке траектории по сравнению с начальным импульсом $p_0 = m\text{v}_0$.

Ответ: $\Delta p = m\text{v}_0 \cdot \sin\alpha \approx 52$ (кг·м)/с.

2.1.12. Материальная точка массой $m = 2$ кг, двигаясь равномерно по окружности, проходит путь, равный длинам двух с половиной окружностей, т.е. $s = 2{,}5 \cdot 2\pi R$. Определите, сколько раз в течение всего времени движения изменение импульса точки становится равным удвоенному значению ее начального импульса. Определите изменение импульса точки, если она прошла три четверти окружности радиусом $R = 1$ м за $\Delta t = 6$ с.

Ответ: $N = 3$; $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$; $\Delta p = \sqrt{9/2} \cdot \pi R m / \Delta t = 2{,}2$ (кг·м)/с.

2.1.13. Мячик массой $m = 400$ г упруго ударяется о неподвижную вертикальную стенку со скоростью $\text{v}_0 = 20$ м/с, которая направлена под углом $\beta = 60°$ к поверхности стенки. Определите изменение импульса Δp мячика и импульс $p_{ст}$, полученный стенкой в результате соударения.

Ответ: $\Delta p = 2m\text{v}_0 \cdot \sin\beta = 13{,}8$ (кг·м)/с; $p_{ст} = -13{,}8$ (кг·м)/с.

2.1.14. Тело массой $m = 4$ кг брошено горизонтально с некоторой начальной скоростью с высоты $h = 45$ м. Определите изменение импульса Δp тела за время его движения, а также импульс силы $F \cdot \Delta t$, действующей на тело за это время. (Силой сопротивления воздуха пренебрегаем, $g = 10$ м/с^2).

Ответ: $\Delta p = m\sqrt{2gh} = 120$ (кг·м)/с; $F \cdot \Delta t = \Delta p = 120$ (кг·м)/с.

2.1.15. Шарик массой $m = 200$ г упал свободно с высоты $h = 5$ м на горизонтальную массивную плиту и отскочил от нее вверх после упругого удара. Определите импульс, полученный плитой при ударе шарика, а также среднюю силу, действующую на шарик при ударе, длящемся в течение времени $\Delta t = 0{,}1$ с ($g = 10$ м/с^2).

Ответ: $p_{пл} = 2m\sqrt{2gh} = 4$ (кг·м)/с; $F_{ср} = 40$ Н.

2.1.16. Космический корабль имеет массу $m = 3$ т. При движении расход горючего в единицу времени составляет $\Delta m = 0{,}3$ кг, при этом из его двигателей вырывается струя газа со скоростью $\text{v} = 900$ м/с. Определите ускорение, с которым движется корабль.

Ответ: $a = -\dfrac{1}{m}\dfrac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v = -9$ см/с^2.

2.1.17. При маневрировании космического корабля из его двигателей вырывается струя газов со скоростью $\text{v} = 850$ м/с, при этом расход горючего составляет $\Delta m/\Delta t$ = 0,25 кг/с. Определите реактивную силу двигателей корабля.

Ответ: $F = -ma = -v\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = -212{,}5$ Н.

2.1.18. Вертолет массой m = 3 т с ротором, диаметр которого d = 15 м, находится в воздухе над одной и той же точкой поверхности Земли («висит» в воздухе). С какой скоростью ротор отбрасывает вертикально вниз струю воздуха, если считать, что диаметр струи приблизительно равен диаметру вращающегося ротора? (Плотность воздуха ρ = 1,32 кг/м^3).

Ответ: $v = \sqrt{4mg\big/\left(\pi\rho d^2\right)} = 11{,}2$ м/с.

2.1.19. Вертолет с ротором, диаметр которого d = 14 м, находится в воздухе над одной и той же точкой поверхности Земли. Ротор отбрасывает вертикально вниз струю воздуха со скоростью v = 10 м/с. Определите, какая масса воздуха ежесекундно отбрасывается ротором вертолета вертикально вниз (считайте, что диаметр струи приблизительно равен диаметру вращающегося ротора; плотность воздуха ρ = 1,32 кг/м^3).

Ответ: $\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \dfrac{\pi d^2}{4}\rho v = 2031$ кг/с.

2.1.20. Ракета массой 1,5 т, запущенная вертикально вверх с поверхности Земли, поднимается с ускорением a = 1,5g. Определите скорость струи газов, вырывающихся из сопла, если расход горючего составляет $\Delta m/\Delta t$ = 25 кг/с.

Ответ: $v = \dfrac{m(g+a)}{\Delta m/\Delta t} = 1{,}47$ км/с.

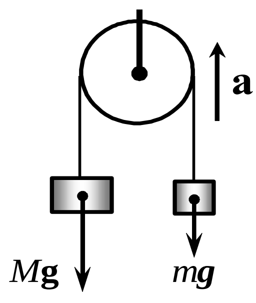


Рис. 2.26

2.1.21. Грузы массой M = 10 кг и m = 5 кг при помощи нерастяжимой нити подвешены на блоке (рис. 2.26). С каким ускорением a относительно Земли нужно двигать блок в вертикальном направлении, чтобы ускорения грузов относительно Земли были направлены в одну сторону? Грузы передвигаются по вертикали.

Ответ: $a \geq g(M - m)/(2m)$ = 4,9 м/с^2.

2.1.22. Катер массой m = 1,5 т, трогаясь с места, в течение некоторого времени достигает скорости v = 5 м/с (движение катера происходит в спокойной воде). Сила тяги мотора постоянна и равна F = 10^3 Н. Принимая, что сила сопротивления $F_{\text{сопр}}$ движению катера пропорциональна скорости ($F_{\text{сопр}} = k \cdot v$, где k = 100 кг/с), определите время, за которое катер достигает указанной скорости.

Ответ: $\Delta t = \dfrac{m}{k} \cdot \ln \dfrac{F}{F - kv} = 10,4$ с.

2.1.23. При движении в воздухе пули массой m = 20 г ее скорость уменьшилась от v_0 = 700 м/с до v = 100 м/с за время Δt = 1 с. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости, определите коэффициент сопротивления движению k (Действием силы тяжести пренебрегаем).

Ответ: $k = \dfrac{m}{\Delta t} \cdot \dfrac{v_0 - v}{v_0 \cdot v} = 1,7 \cdot 10^{-4}$ кг/м.

2.1.24. Снаряд массой m = 20 кг выпущен из орудия вертикально вверх со скоростью v_0 = 700 м/с. Определите время подъема снаряда на высоту, равную половине максимальной высоты, считая силу сопротивления пропорциональной скорости движения (коэффициент сопротивления движению k = 0,2 кг/с).

Ответ: $t = \dfrac{m}{2k} \cdot \ln \dfrac{mg + kv_0}{mg} = 26,5$ с.

2.1.25. С большой высоты на Землю сброшен груз массой m = 20 кг. Принимая, что сила сопротивления воздуха движению груза изменяется пропорционально скорости, определите, через какой промежуток времени Δt ускорение движения груза будет равно одной трети ускорения свободного падения. (Коэффициент сопротивления движению k = 10 кг/с).

Ответ: $\Delta t = m \cdot \ln 3/k = 2,2$ с.

2.2.1. Под действием некоторой силы тележка, двигаясь из состояния покоя, прошла путь s_1 = 0,4 м. Когда на тележку положили груз массой m = 0,2 кг, то под действием той же силы за тоже время тележка прошла из состояния покоя путь s_2 = 0,2 м. Какова масса m_0 тележки, если мы трением пренебрегаем?

Ответ: $m_0 = ms_2/(s_1 - s_2) = 0,2$ кг.

2.2.2. Тело начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α = 45°. Пройдя по ней расстояние s = 0,355 м, тело приобрело скорость v = 2 м/с. Определите коэффициент трения μ тела о плоскость ($g \approx 10$ м/с^2).

Ответ: $\mu = \text{tg}\alpha - v^2/(2gs\cos\alpha) = 0{,}19$.

2.2.3. Шарик, прикрепленный к нити, движется в горизонтальной плоскости по окружности с постоянной скоростью (конический маятник). Расстояние от точки подвеса до горизонтальной плоскости равно h. Определите период T колебания (обращения) шарика.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{h/g}$.

2.2.4. В нижней точке мертвой петли реактивный самолет движется со скоростью v = 1200 км/час. Определите, какую нагрузку $k_{\text{нагр}}$ (отношение прижимающей силы к гравитационной) испытывает летчик, если радиус петли R = 1 км.

Ответ: $k_{\text{нагр}} = v^2/(gR) + 1 \approx 12$.

2.2.5. Груз на нити, вращаясь с частотой n = 1 об/с, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиусом R = 10 см. Какой угол α образует нить с вертикалью?

Ответ: $\alpha = \text{arctg}\left(4\pi^2 n^2 R/g\right) = 22^\circ$.

2.2.6. Барабан стиральной машины наполнен мокрым бельем и вращается с частотой n = 1200 об/мин. Во сколько раз центростремительная сила $F_{\text{ц}}$ к моменту отрыва капли воды от ткани больше силы тяжести $F_{\text{тяж}} = mg$, действующей на каплю, если капля находится на расстоянии R = 0,3 м от оси вращения.

Ответ: $F_{\text{ц}}/F_{\text{тяж}} = 4\pi^2 n^2 R/g \approx 483$.

2.2.7. В вертикальной плоскости вращается груз массой m = 2 кг с частотой n = 2 об/с. Шнур, на котором подвешен груз, может выдержать нагрузку $F_{\text{пред}}$ = 320 Н. Выдержит ли шнур натяжения в те моменты, когда груз проходит через высшую и низшую точки окружности? Определите максимальную и минимальную силы натяжения шнура, если его длина l = 1 м.

Ответ: $F_{\max} = m\left(4\pi^2 n^2 l + g\right) = 335$ Н, $F_{\max} > F_{\text{пред}}$;

$F_{\min} = m\left(4\pi^2 n^2 l - g\right) = 296$ Н, $F_{\min} < F_{\text{пред}}$.

2.2.8. Поезд движется по закруглению радиусом R = 500 м. Ширина железнодорожной колеи d = 152,4 см. Наружный рельс расположен на h = 12 см выше внутреннего. При какой скорости v движения поезда на закруглении колеса не оказывают давления на внутренний рельс.

Ответ: $v = \sqrt{ghR/d} = 19{,}64$ м/с.

2.2.9. Платформа движется по закруглению с линейной скоростью v. Шарик, подвешенный на нити на этой платформе, отклоняется на угол α. Определите радиус R закругления.

Ответ: $R = v^2/(g\,\mathrm{tg}\alpha)$.

2.2.10. Какова должна быть скорость движения мотоциклиста, чтобы он мог описывать горизонтальную окружность на внутренней поверхности вертикального кругового цилиндра радиусом r, если при езде по горизонтальной поверхности с таким же коэффициентом трения скольжения минимальный радиус поворота при скорости v_1 равен R?

Ответ: $v \geq g\sqrt{Rr}/v_1$.

2.2.11. Груз, подвешенный на невесомой нити, описывает горизонтальную окружность с постоянной скоростью (конический маятник). Расстояние от точки подвеса до центра окружности равно h. Определите число n оборотов маятника за 1 с.

Ответ: $n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{h}}$.

2.2.12. Вертикально расположенная пружина соединяет два груза. Масса верхнего груза m_1 = 2 кг, нижнего m_2 = 3 кг. Когда система подвешена за верхний груз, длина пружины равна l_1 = 0,1 м. Если же систему поставить вертикально на подставку, длина пружины равна l_2 = 4 см. Определите длину l_0 ненапряженной пружины.

Ответ: $l_0 = (m_1 l_1 + m_2 l_2)/(m_1 + m_2) = 6{,}4$ см.

2.2.13. Шарик подвешен на нити длиной l = 1 м. Шарик расположили так, что он начал двигаться равномерно по окружности в горизонтальной плоскости с периодом T = 1,57 с. При этом угол, образованный нитью с вертикалью, $\alpha = \pi/6$ рад. Определите линейную скорость и центростремительное ускорение при движении шарика по окружности.

Ответ: $v = 2\pi l \sin\alpha / T = 2$ м/с; $a_{\text{цс}} = 4\pi^2 l \sin\alpha / T^2 = 8$ м/с^2.

2.2.14. Определите ускорение тела, соскальзывающего с наклонной плоскости, если угол наклона плоскости $\alpha = 30°$, а коэффициент трения $\mu = 0{,}15$. Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 3{,}7$ м/с^2.

2.2.15. Бусинка может скользить по обручу радиусом R = 4,5 м, который вращается относительно вертикальной оси, проходящей через его центр и лежащей в плоскости обруча, с угловой скоростью ω = 2 рад/с. На какую максимальную высоту h относительно нижней точки обруча может подняться бусинка? Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: $h = R - g/\omega^2 = 2$ м.

2.2.16. Через вращающийся вокруг горизонтальной оси блок перекинута нить – невесомая и нерастяжимая, к концам которой привязаны грузы m_1 = 0,5 кг и m_2 = 0,6 кг. Определите силу давления $F_д$ блока на ось при движении грузов и ускорение a грузов (массой блока и трением в блоке пренебречь). Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: $a = g \cdot (m_2 - m_1)/(m_1 + m_2) = 0{,}91$ м/с^2; $F_д = 2m_2(g - a) = 10{,}9$ Н.

2.2.17. На внутренней поверхности сферы радиусом R = 0,1 м, вращающейся вокруг вертикальной оси, находится небольшой предмет. С какой постоянной частотой n должна вращаться сфера, чтобы предмет находился в точке, направление на которую из центра сферы относительно горизонтали составляет угол α = 45°? Коэффициент трения между предметом и поверхностью сферы μ = 0,2. Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: $n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{R\cos\alpha}\cdot\dfrac{1-\mu\,\mathrm{tg}\alpha}{\mu+\mathrm{tg}\alpha}} = 1{,}53$ î á/ñ.

2.2.18. С какой скоростью движется конькобежец по закруглению ледяной дорожки радиусом R = 10 м, если, проходя этот поворот, он наклоняется к горизонту под углом α = 76°? Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: $v = \sqrt{gR/\mathrm{tg}\alpha} = 5$ м/с.

2.2.19. Самолет летит горизонтально с ускорением a. Шарик, подвешенный на нити в самолете, отклоняется от вертикали на угол α. Определите ускорение самолета.

Ответ: $a = g \cdot \mathrm{tg}\alpha$.

2.2.20. Девочка массой m = 35 кг качается на качелях. Длина веревок качелей l = 2 м. Определите силу $F_н$ натяжения веревок в тот момент, когда качели проходят положение равновесия, если максимальная скорость движения v = 3 м/с.

Ответ: $F_н = m\left(g + v^2/l\right) = 500{,}5$ Н.

2.2.21. Космическая ракета движется вертикально вверх с ускорением a = 5 м/с^2. Определите вес P космонавта, если его масса m = 75 кг. Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: $P = m(g + a) = 1125$ Н.

2.2.22. Автомобиль массой m = 100 кг движется по горизонтальному участку шоссе с ускорением a = 2 м/с^2. При этом мотор развивает силу тяги $F_т$ = 500 Н. Определите силу сопротивления движению.

Ответ: $F_{сопр} = F_т - ma = 300$ Н.

2.2.23. К пружине жесткостью k = 500 Н/м подвесили груз массой m = 1 кг, при этом длина пружины стала l_1 = 0,12 м. До какой длины растянется пружина, если к ней подвесить еще один груз массой m = 1 кг?

Ответ: $l_2 = l_1 + mg/k \approx 0{,}14$ м.

2.2.24. На рис. 2.27 представлен график зависимости скорости от времени для поднимающегося вверх лифта. Определите, с какой силой человек массой m = 60 кг, находящийся в лифте, давит на пол во время его движения. Принять g = 10 м/с^2.

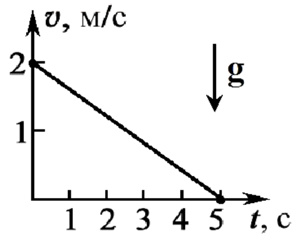


Рис. 2.27

Ответ: $F_д = m(g + \Delta v/\Delta t) = 576$ Н.

2.2.25. Угол α наклона доски к горизонту можно изменять от 0° до 90°. На доску помещен груз, который начинает скользить при значении угла α_0 = 30°. Определите ускорение a груза при его движении по доске, если угол α_1 = 60°.

Ответ: $a = g(\sin\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha_0 \cdot \cos\alpha_1) = 5{,}66$ м/с^2.

2.3.1. Дорожка для велосипедных гонок имеет закругление радиусом R = 40 м. В месте закругления дорожка выполнена с наклоном α = 40° к горизонту. На какую скорость v езды рассчитан такой наклон?

Ответ: $v = \sqrt{gR \cdot \mathrm{tg}\alpha} = 18$ м/с.

2.3.2. Мотоциклист участвует в гонках по вертикали и едет по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом R = 15 м, при этом центр тяжести мотоцикла с человеком расположен на расстоянии d = 75 см от поверхности цилиндра. Угол наклона мотоциклиста к плоскости горизонта α = 30°. Чему равен коэффициент трения μ покрышек колес мотоцикла о поверхность цилиндра? С какой минимальной скоростью v_{min} должен ехать мотоциклист, чтобы не сорваться со стены? Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: $\mu = \mathrm{tg}\alpha = 0{,}58$; $v_{min} = \sqrt{g(R-d)/\mu} = 15{,}7$ м/с.

2.3.3. Велосипедист движется по закруглению дороги радиуса R = 45 м с наибольшей возможной в данных условиях скоростью v_{max} = 15 м/с. (Это предельная скорость, при которой велосипедиста не “заносит”). Определите коэффициент трения скольжения μ между шинами и асфальтом, а также угол α отклонения велосипедиста от вертикали, когда он движется по закруглению.

Ответ: $\mu = v_{max}^2/(gR) = 0{,}51$; $\alpha = \mathrm{arctg}\,\mu \approx 27°$.

2.3.4. С какой максимальной скоростью v_{max} может устойчиво, не опрокидываясь, двигаться вагон по закруглению радиусом R = 150 м, если высота центра масс вагона от уровня рельс H = 1,8 м, а расстояние между рельсами d = 1,5 м. Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: $v_{max} = \sqrt{gRd/(2H)} = 25$ м/с.

2.3.5. Определите наименьший радиус R круга, по которому сможет проехать велосипедист со скоростью v = 30 км/ч, если коэффициент трения скольжения между колесами и землей μ = 0,25. Определите также наибольший угол α наклона велосипеда, при котором велосипедист еще не будет падать. Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: $R = v^2/(\mu g)$ = 27,8 м; $\alpha = \mathrm{arctg}\,\mu = 14°$.

2.3.6. Космический корабль совершает мягкую посадку на Луну (ускорение свободного падения вблизи поверхности Луны $g_л$ = 1,6 м/с^2). При этом корабль движется равнозамедленно в вертикальном направлении с ускорением a = 8,4 м/с^2. Определите вес P космонавта массой m = 70 кг, находящегося в этом корабле.

Ответ: $P = m(g_л + a)$ = 700 Н.

2.3.7. Определите вес пассажира массой m = 60 кг, находящегося в движущемся лифте, в начале и конце подъема, а также в начале и в конце спуска. Ускорение a (по модулю) лифта для всех случаев считать одинаковым и равным 2,2 м/с^2.

Ответ: $P = m(g \pm a)$. P_1 = 720 Н; P_2 = 456 Н; P_3 = 456 Н; P_4 = 720 Н.

2.3.8. С какой силой давит груз массой m = 60 кг на подставку, если подставка вместе с грузом движется вниз равнозамедленно с ускорением a = 1 м/с^2? Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: $F = m(g + a)$ = 660 Н.

2.3.9. Определите вес тела массой m = = 40 кг в положениях A и B (рис. 2.28) если радиусы траекторий в точках A и B равны соответственно R_1 = 20 м и R_2 = 10 м, а скорости движения тела в точках A и B равны соответственно v_1 = 10 м/с и v_2 = 5 м/с. Принять g = 10 м/с^2.

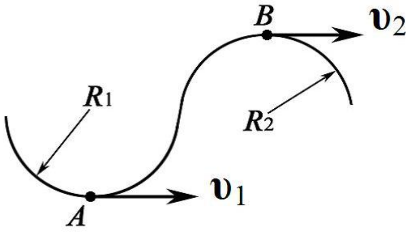


Рис. 2.28

Ответ: $P_A = m\left(g + v_1^2/R_1\right) = 600$ Н; $P_B = m\left(g - v_2^2/R_2\right) = 300$ Н.

2.3.10. Тело массой m = 2,5 кг движется вертикально вниз с ускорением a = 19,6 м/с^2. Определите силу F, действующую на тело одновременно с силой тяжести mg во время движения. Сила сопротивления воздуха $F_{сопр} = 10$ Н.

Ответ: $F = m(a - g) + F_{сопр} = 34{,}5$ Н.

2.3.11. Через неподвижный блок перекинута нить, к концам которой подвешены два груза массой $m_1 = 200$ г. Какой добавочный груз m_2 нужно поместить на один из висящих грузов, чтобы каждый из них переместился на $s = 150$ см за $t = 5$ с.

Ответ: $m_2 = 4m_1 s \big/ \left(gt^2 - 2s\right) = 5$ г.

2.3.12. Тепловоз тянет состав, состоящий из $n = 5$ одинаковых вагонов с ускорением $a = 10$ м/с^2. Определите силу натяжения сцепки между третьим и четвертым вагонами (считая от начала состава), если масса каждого вагона $m = 100$ кг, а коэффициент сопротивления $\mu = 0{,}1$. Принять $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $F = m(n - k)\cdot(a + \mu g) = 2200$ Н, где $k = 3$.

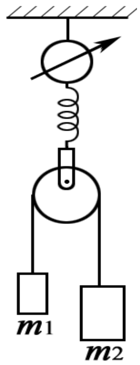


Рис. 2.29

2.3.13. Через блок перекинут шнур, к концам которого прикреплены грузы массами $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 6$ кг, рис. 2.29. Блок подвешен к пружинным весам. Определите показание весов при движении грузов (массой блока и шнура, а также трением в блоке пренебрегаем).

Ответ: $F = \dfrac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}\cdot g = 78{,}4$ Н.

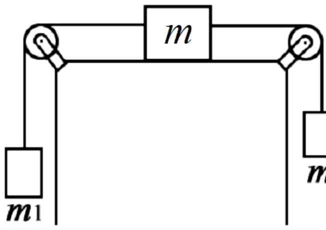


Рис. 2.30

2.3.14. К краям стола (рис. 2.30) прикреплены неподвижные блоки, через которые перекинуты два шнура, привязанные к бруску, массой $m = 3$ кг, лежащему на столе. (Силой трения между столом и бруском пренебрегаем). К висящим концам шнуров подвешены гири, массы которых $m_1 = 1{,}5$ кг и $m_2 = 2{,}5$ кг. Определите силу натяжения каждого из шнуров. (Массой блоков и трением в блоках пренебрегаем). Принять $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $F_{нат1} = m_1(g + a) = 17{,}1$ Н; $F_{нат2} = m_2(g - a) = 21{,}5$ Н, где $a = g\,(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2 + m)$.

2.3.15. На наклонной плоскости находится легкая тележка, которая может скатываться с этой плоскости без трения. На тележке укреплен кронштейн с шариком массой $m = 10$ г, подвешенным на невесомой и нерастяжимой нити. До начала скатывания нить удерживалась в направлении, перпендикулярном к наклонной плоскости. Определите ускорение a тележки, силу $F_{нат}$ натяжения нити отвеса при свободном скатывании тележки, если угол наклона плоскости к горизонту α = 30°.

Ответ: $a = g \cdot \sin\alpha$; $F_{нат} = mg \cdot \cos\alpha \approx 0{,}085$ Н.

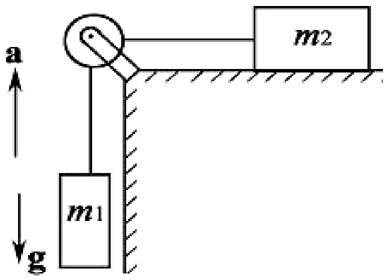


Рис. 2.31

2.3.16. На рис. 2.31 изображена система грузов, находящихся в лифте, который движется вверх с ускорением a = 1 м/с^2. Коэффициент трения между грузом массой m_2 и столом равен μ = 0,1. Определите силу натяжения троса, связывающего грузы, если m_1 = 1 кг, а m_2 = 2 кг. Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: $F_{нат} = (1+\mu)(a+g) \cdot m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = 8$ Н, при $\mu m_2 < m_1$.

2.3.17. По наклонной плоскости скользят два груза массами m_1 = 1 кг и m_2 = 2 кг, связанные невесомой нерастяжимой нитью, рис. 2.32. Коэффициенты трения между грузами и плоскостью равны, соответственно: μ_1 = 0,7; μ_2 = 0,6. Определите силу натяжения нити, если угол наклона плоскости к горизонту α = 30°.

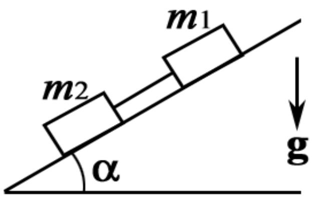


Рис. 2.32

Ответ: $F_{нат} = (\mu_1 - \mu_2)\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot g\cos\alpha = 0{,}565$ Н.

2.3.18. На наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту составляет β_0 = 25°, лежит тело массой m = 1 кг. Коэффициент трения тела о плоскость μ = 0,5. Определите силу $F_{тр}$ трения, действующую на тело. Определите зависимость силы трения, действующей на тело, от угла наклона β плоскости к горизонту.

Ответ: $F_{тр} = mg \cdot \sin\beta_0 = 4{,}14$ Н;

$F_{тр}(\beta) = mg \cdot \sin\beta$, при $\mathrm{tg}\beta \le \mu$; $F_{тр}(\beta) = \mu \cdot mg \cdot \cos\beta$, при $\mathrm{tg}\beta > \mu$.

2.3.19. Определите силу $F_{нат}$ натяжения нити в системе тел, изображенной на рис. 2.33, где m_1 = 2 кг; m_2 = 3 кг; m_3 = 5 кг. Коэффициент трения между телами 1 и 2 μ = 0,2. Угол наклона плоскости к горизонту β = 45°. (Трением между телом 2 и наклонной плоскостью, а также трением в блоке пренебрегаем).

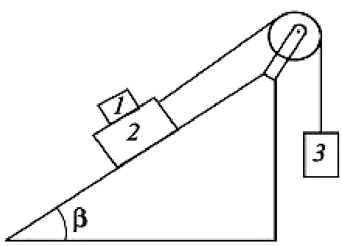


Рис. 2.33

Ответ: $F_{íàò} = gm_3 \cdot \dfrac{\mu m_1 \cos\beta + m_2(1+\sin\beta)}{m_2 + m_3} = 33{,}1$ Í .

2.3.20. Определите силы натяжения нитей, связывающих грузы в системе, изображенной на рис. 2.34. Массы тел соответственно m_1 = 1 кг; m_2 = 2 кг; m_3 = 4 кг. Коэффициент трения первого тела о наклонную плоскость μ_1 = 0,1, коэффициент трения второго тела о наклонную плоскость μ_2 = 0,2. Угол наклона плоскости к горизонту α = 30°. (Трением в блоке пренебрегаем). Принять g = 9,8 м/с^2.

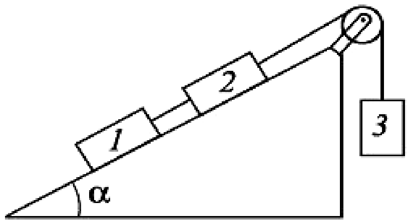


Рис. 2.34

Ответ: $F_{\text{нат1}} = m_1\left[a + g\left(\sin\alpha + \mu_1\cos\alpha\right)\right] = 8{,}8$ Н; $F_{\text{нат2}} = m_3\left(g - a\right) = 28{,}2$ Н,

где $a = g\cdot\dfrac{m_3 - \left(m_1 + m_2\right)\sin\alpha - \left(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2\right)\cos\alpha}{m_1 + m_2 + m_3} = 2{,}95$ м/с^2.

2.3.21. На платформе, вращающейся с частотой n = 30 об/мин, находится груз массой m = 0,2 кг. Груз прикреплен к центру платформы невесомой абсолютно упругой пружинкой длиной l_0 = 10 см. При вращении платформы пружинка растягивается на Δl = 2 см. Определите силу F реакции пружины, принимая во внимание максимальную силу трения покоя между грузом и платформой (коэффициент трения μ = 0,09).

Ответ: $F = 4\pi^2 n^2 m\left(l_0 + \Delta l\right) - \mu m g = 60$ мН.

2.3.22. Вертикально расположенная пружина соединяет два груза. Масса верхнего груза m_1 = 3 кг, нижнего m_2 = 4 кг. Если эту систему поставить вертикально на подставку, длина пружины равна l_1 = 3 см. Если же систему подвесить за верхний груз, а к нижнему грузу еще прикрепить груз m_3 = 1 кг с помощью дополнительной нити, то длина пружины станет l_2 = равной 12 см. Определите длину l_0 ненагруженной пружины. Результат представьте в сантиметрах и округлите до целого числа.

Ответ: $l_0 = \dfrac{m_1 l_2 + \left(m_2 + m_3\right) l_1}{m_1 + m_2 + m_3} \approx 6{,}4\,\text{см}$.

2.3.23. К резиновому шнуру прикреплен шарик массой m = 50 г. Длина шнура в нерастянутом состоянии l = 30 см. Известно, что под влиянием силы, равной F = 9,8 Н, шнур растянется на Δl = 1 см. Считая растяжение шнура пропорциональным приложенной силе, определите, на сколько удлинится шнур при вращении шарика с частотой n = 180 об/мин.

Ответ: $\Delta l_1 = \dfrac{4\pi^2 n^2 ml}{k - 4\pi^2 n^2 m} = 5{,}5$ мм, где $k = F/\Delta l$ – жесткость пружины.

2.3.24. Тело массой m = 10 г, прикрепленное к пружине длиной l_0 = 0,3 м, равномерно вращается в горизонтальной плоскости. При какой частоте вращения пружина удлинится на Δl = 0,05 м, если жесткость пружины равна 400 Н/м.

Ответ: $n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k\Delta l}{m(l_0 + \Delta l)}} = 12$ об/с.

2.3.25. Шарик массой m, прикрепленный к резиновому шнуру, совершает вращательное движение в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω. Длина нерастянутого резинового шнура равна l_0. Определите радиус окружности R, по которой будет двигаться шарик и силу натяжения $F_{нат}$ шнура, считая, что при растяжении шнура выполняется закон Гука, т. е. сила натяжения шнура растет пропорционально его растяжению ($F_{нат} = k\Delta l$, здесь k – коэффициент жесткости пружины).

Ответ: $R = l_0 + \Delta l = \dfrac{kl_0}{k - m\omega^2}$; $F_{нат} = k\Delta l = \dfrac{m\omega^2 kl_0}{k - m\omega^2}$.

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Закон сохранения импульса замкнутой системы тел ($\mathbf{F}_{внешн} = 0$)
$\dfrac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$ т.е. $\mathbf{p} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i = \text{const}$ – импульс замкнутой системы тел (материальных точек).

Работа силы

$$A = \int \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int F_s ds,$$

где $d\mathbf{r}$ – элементарное перемещение точки приложения силы $\mathbf{F}$; ds – элемент пути; $F_s = F \cdot \cos\alpha$, где α – угол между векторами $\mathbf{F}$ и $d\mathbf{r}$.

Мощность

$$N = \frac{dA}{dt} = Fv.$$

Кинетическая энергия тела

$$E_к = \frac{mv^2}{2},$$

где m и v – масса и скорость тела.

Изменение кинетической энергии тела

$$E_{к_2} - E_{к_1} = A,$$

где A – работа всех сил, действующих на тело.

Связь между силой и потенциальной энергией частицы в поле

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}\, U \quad \text{или} \quad \mathbf{F} = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right),$$

где **i**, **j**, **k** – единичные векторы (орты).

Приращение полной механической энергии Е системы в поле

$$E_2 - E_1 = A_{внеш}^{стор} + A_{внутр}^{дис},$$

где $A_{внеш}^{стор}$ – работа внешних сторонних сил; $A_{внутр}^{дис}$ – работа внутренних диссипативных сил.

Потенциальная энергия упругодеформированного тела (например, сжатой или растянутой пружины)

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

Потенциальная энергия тела, находящегося в однородном поле тяжести

$$U = mgh.$$

Закон сохранения энергии в механике выполняется в замкнутой системе, в которой действуют только консервативные силы:

$$E = E_к + U = \mathrm{const}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. На спокойной воде пруда стоит лодка длиной L и массой M перпендикулярно берегу, обращенная к нему носом. На корме стоит человек массой m. На какое расстояние s приблизится лодка к берегу, если человек перейдет с кормы на нос лодки? Трением о воду и воздух пренебречь.

Ответ: $s = mL/(M + m)$.

2. Вертолет массой m = 3 т висит в воздухе. Определите мощность N, расходуемую на поддержание вертолета в этом положении. Диаметр d ротора равен 8 м. При расчете принять, что ротор отбрасывает вниз цилиндрическую струю воздуха диаметром, равным диаметру ротора. Плотность воздуха ρ = 1,17 кг/м^3.

Ответ: $N = \sqrt{m^3 g^3 / (\pi \rho d^2)} = 329$ кВт.

3. Небольшая муфточка (рис. 3.6) массы m = 0,15 кг движется по гладкому проводу, изогнутому в горизонтальной плоскости в виде дуги окружности радиуса R = 50 см. В точке 1, где скорость муфточки v_0 = 7,5 м/с, на нее начала действовать постоянная горизонтальная сила F. Найдите скорость муфточки в точке 2, если F = 30 Н.

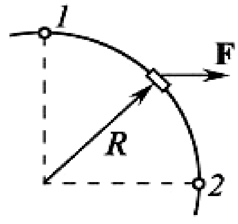


Рис. 3.6

Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 + 2FR/m} = 16$ м/с.

4. На гладкой горизонтальной плоскости находится тело массы M и на нем небольшая шайба массы m. Шайбе (рис. 3.7) сообщили в горизонтальном направлении скорость v. На какую высоту (по сравнению с первоначальным уровнем) она поднимется после отрыва от тела M? Трения нет.

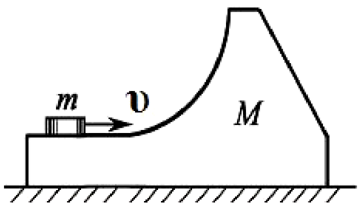


Рис. 3.7

Ответ: $h = Mv^2/[2g(M + m)]$.

5. Гиря, положенная на верхний конец спиральной пружины, поставленной на подставке, сжимает ее на x = 2 мм. На сколько сожмет пружину та же гиря, упавшая на конец пружины с высоты h = 5 см?

Ответ: $\Delta x = x + \sqrt{x^2 + 2xh} = 16{,}3$ мм.

6. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = a \cdot (x/y - y/z)$, где a – константа. Найдите: а) силу F, действующую на частицу; б) работу A, совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки (1, 1, 1) в точку (2, 2, 3).

Ответ: а) $F = a\left[-\frac{1}{y}\mathbf{i} + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z}\right)\mathbf{j} - \frac{y}{z^2}\mathbf{k}\right]$; б) $A = -a/3$.

7. Небольшая шайба массы m без начальной скорости соскальзывает с гладкой горки высоты h и попадает на доску массы M, лежащую у основания горки на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 3.8). Вследствие трения между шайбой и доской шайба тормозится и, начиная с некоторого момента, движется вместе с доской как единое целое. Найдите суммарную работу сил трения в этом процессе.

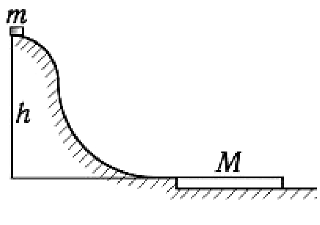


Рис. 3.8

Ответ: $A = -mMgh/(m + M)$.

8. Пушка массы M начинает свободно скользить вниз по гладкой плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Когда пушка прошла путь l, произвели выстрел, в результате которого снаряд вылетел с импульсом p в горизонтальном направлении, а пушка остановилась. Пренебрегая массой снаряда, найти продолжительность выстрела.

Ответ: $\tau = \left(p\cos\alpha - M\sqrt{2gl\sin\alpha}\right) \Big/ (Mg\sin\alpha)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.1.1. Шарик массой m = 200 г ударился о стену и отскочил от нее. Определите импульс, полученный стеной, если в последний момент перед ударом шарик имел скорость v = 10 м/с, направленную под углом α = 30° к поверхности стены. Удар считать абсолютно упругим.

Ответ: $p = 2m\text{v}\cdot\sin\alpha$ = 2 кг·м/с.

3.1.2. Частица массой $m_1 = 1\cdot10^{-24}$ г имеет кинетическую энергию E_1 = 9 нДж. В результате упругого столкновения с покоящейся частицей массой $m_2 = 4\cdot10^{-24}$ г она сообщает ей кинетическую энергию E_2 = 5 нДж. Определите угол α, на который отклонится частица от своего первоначального направления.

Ответ: $\alpha = \arccos\dfrac{E_1 + (E_1 - E_2) - (m_2/m_1)E_2}{2\sqrt{E_1(E_1 - E_2)}} = 144°$.

3.1.3. Тело массой m = 1 кг под действием постоянной силы движется прямолинейно по закону $s = (At^2 + Bt + C)$ м, где A = 2 м/с^2; B = 4 м/с; C = 1 м. Определите работу силы за t = 10 с от начала ее действия.

Ответ: $A = 2Am(At^2 + Bt)$ = 960 Дж.

3.1.4. Насос выбрасывает струю воды диаметром d = 2 см со скоростью v = 20 м/с. Найдите мощность N, необходимую для выбрасывания воды. Плотность воды ρ = 1000 кг/м^3.

Ответ: $N = \pi\rho d^2\text{v}^3/8$ = 1,26 кВт.

3.1.5. Гладкий неупругий шарик из мягкого свинца налетает на такой же шарик, первоначально покоящийся. После столкновения второй шарик летит под углом α к направлению скорости первого шарика до столкновения со скоростью равной $\eta = \cos\alpha/2$ скорости налетающего шарика. Определите угол β, под которым разлетаются шары после столкновения. Какая часть кинетической энергии $E_к$ перейдет при столкновении в теплоту Q?

Ответ: $\beta = \mathrm{arctg}(2\,\mathrm{tg}\,\alpha)$; $Q/E_к = \cos^2\alpha/2$.

3.1.6. Тележка массы m_1 вместе с человеком массы m_2 движется со скоростью u. Человек начинает идти с постоянной скоростью по тележке в том же направлении. При какой скорости v человека относительно тележки она остановится? Трением колес тележки о землю пренебречь.

Ответ: $v = u(1 + m_1/m_2)$.

3.1.7. Гладкая упругая нить длиной l и жесткостью k подвешена одним концом к точке O. На нижнем конце имеется невесомый упор. Из точки O начала падать небольшая муфта массы m. Найдите: а) максимальное растяжение нити; б) убыль механической энергии системы к моменту установления равновесия (из-за сопротивления воздуха).

Ответ: а) $\Delta l = \left(1+\sqrt{1+2kl/(mg)}\right)\dfrac{mg}{k}$ б) $E_1 - E_2 = mgl(1 + mg/(2kl))$.

3.1.8. Боек автоматического молота массой m = 100 кг падает на заготовку детали, масса которой вместе с наковальней M = 2000 кг. Скорость молота в момент удара v = 2 м/с. Считая удар абсолютно неупругим, определить энергию, идущую на деформацию заготовки.

Ответ: $E = mMv^2/\left[2(m+M)\right] = 190$ Дж.

3.1.9. Брусок массы m = 1,00 кг находится на горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ = 0,27. В некоторый момент ему сообщили начальную скорость v_0 = 1,50 м/с. Найдите среднюю мощность N силы трения за все время движения бруска.

Ответ: $N_{ср} = -\mu mgv_0/2 = -2$ Вт.

3.1.10. Пуля, летевшая горизонтально со скоростью v = 400 м/с, попадет в брусок, подвешенный на нити длиной l = 4 м, и застревает в нем. Определите угол α, на который отклонится брусок, если масса пули m_1 = 20 г и масса бруска m_2 = 5 кг.

Ответ: $\alpha = \arccos\left(1 - m_1^2v^2/\left(2m_2^2gl\right)\right) = 15°$.

3.1.11. Тележка с песком катится со скоростью v_2 = 1 м/с по горизонтальному пути без трения. Навстречу тележке летит шар массой m = 2 кг с горизонтальной скоростью v_1 = 7 м/с (рис. 3.9). Шар после встречи с тележкой застрял в песке. В какую сторону и с какой скоростью u покатится тележка после падения шара? Масса тележки M = 10 кг.

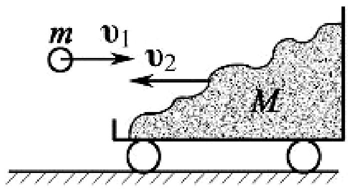


Рис 3.9

Ответ: вправо со скоростью $u = \left|(Mv_2 - mv_1)/(m+M)\right| = 0,33$ м/с.

3.1.12. Две пружины с жесткостями k_1 = 0,3 кН/м и k_2 = 0,5 кН/м скреплены последовательно и растянуты так, что абсолютная деформация второй пружины x_2 = 3 см. Вычислить работу A растяжения пружин.

Ответ: $A=\frac{1}{2}\frac{k_2}{k_1}\left(k_1+k_2\right)x_2^2=0{,}6$ Дж.

3.1.13. Для получения медленных нейтронов их пропускают сквозь вещества, содержащие водород (например, парафин). Найдите, какую наибольшую часть своей кинетической энергии нейтрон с массой m_0 может передать: 1) протону (масса m_0) и 2) ядру атома свинца (масса M = 207m_0). Наибольшая часть передаваемой энергии соответствует упругому центральному удару.

Ответ: 1) 100 %; 2) 1,9 %.

3.1.14. Брусок массой m = 1 кг скользит по наклонной плоскости (рис. 3.10); в начальный момент на вершине высотой h = 10 см его скорость равна нулю. У основания наклонной плоскости скорость бруска v_0 = 1 м/с. а) Какую работу совершает сила трения? б) Чему равна постоянная сила трения? в) Если покрыть наклонную плоскость масляной пленкой и уменьшить силу трения в n = 10 раз, то каким будет значение скорости v бруска у основания наклонной плоскости?

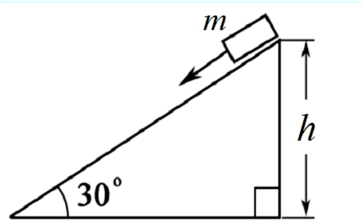


Рис. 3.10

Ответ: а) $A=m\left(v_0^2/2-gh\right)=-0{,}48$ Дж; б) $F_{\text{тр}}=-\left(A\sin\alpha\right)/h=2{,}4$ Н;

в) $v=\sqrt{2\left(gh+A/(nm)\right)}=1{,}37$ м/с.

3.1.15. Самолет для взлета должен иметь скорость v = 25 м/с. Длина его пробега перед взлетом s = 100 м. Какова должна быть мощность N моторов при взлете, если масса самолета m = 1 т, коэффициент сопротивления μ = 0,02?

Ответ: $N=mv\left(v^2/(2s)+\mu g\right)=83$ кВт.

3.1.16. Какова мощность N воздушного потока сечением S = 0,55 м^2 при скорости воздуха v = 20 м/с? Плотность воздуха ρ = 1,17 кг/м^3.

Ответ: $N=\rho S v^3/2=2{,}57$ кВт.

3.1.17. Акробат массой m = 60 кг прыгает с высоты h = 10 м на растянутую сетку. На сколько прогнется при этом сетка? Когда акробат стоит неподвижно на сетке, ее статический прогиб Δx = 5 см.

Ответ: $x=\Delta x+\sqrt{\Delta x^2+2h\Delta x}=1$ м.

3.1.18. Человек, сидящий в лодке, бросает камень вдоль нее под углом α = 60° к горизонту. Масса камня m_1 = 1 кг, масса человека и лодки

m_2 = 150 кг, начальная скорость камня относительно берега v_0 = 10 м/с. Найдите расстояние s между точкой падения камня и лодкой в момент, когда камень коснется воды.

Ответ: $s = (m_1 + m_2)v_0^2 \sin 2\alpha / (m_2 g) = 8{,}8$ м.

3.1.19. Груз массы m, подвешенный на пружине жесткости k, находится на подставке. Пружина при этом не деформирована. Подставку быстро убирают. Определите максимальное удлинение пружины и максимальную скорость груза.

Ответ: $x = 2mg/k$; $v = g\sqrt{m/k}$.

3.1.20. Молекула распадается на два атома. Масса одного из атомов в n = 3 раза больше, чем другого. Пренебрегая начальной кинетической энергией и импульсом молекулы, определить кинетические энергии E_1 и E_2 атомов, если их суммарная кинетическая энергия E = 32 нДж.

Ответ: $E_1 = nE/(n+1) = 24$ нДж; $E_2 = E/(n+1) = 8$ нДж.

3.1.21. Шарик соскальзывает без трения по наклонному желобу, образующему «мертвую петлю» радиусом R. С какой высоты h шарик должен начать движение, чтобы не оторваться от желоба в верхней точке петли? Сопротивление воздуха не учитывайте.

Ответ: $h = (5/2)R$.

3.1.22. Брусок B покоится на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности. Точно такой же брусок A укреплен на нити длиной R (рис. 3.11). Затем брусок A отпускают в горизонтальном положении, и он сталкивается с B. При соударении оба бруска слипаются и после соударения движутся как единое целое. Чему равна скорость u обоих брусков непосредственно после соударения? Как высоко они могут подняться над поверхностью?

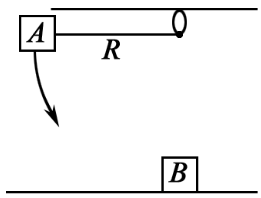


Рис. 3.11

Ответ: $u = \sqrt{gR/2}$; $h = R/4$.

3.1.23. Пуля массой m_1 = 10 г вылетает со скоростью v = 300 м/с из дула автоматического пистолета, масса затвора которого m_2 = 200 г. Затвор пистолета прижимается к стволу пружиной жесткостью k = 25 кН/м. На какое расстояние l отойдет затвор после выстрела? Считать пистолет жестко закрепленным.

Ответ: $l = \sqrt{m_1^2 v^2/(km_2)} = 4{,}25$ см.

3.1.24. Конькобежец весом P = 700 Н, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой m = 3 кг со скоростью v = 8 м/с. Найдите, на какое расстояние s откатится при этом конькобежец, если известно, что коэффициент трения коньков о лед $\mu = 0{,}02$.

Ответ: $s = \left(\dfrac{m}{P}\right)^2 \dfrac{v^2 g}{2\mu} = 0{,}3$ м.

3.1.25. а) Какая работа A_1 требуется для поднятия массы $m = 10$ кг по наклонной плоскости без трения длиной $s = 3$ м и высотой $h = 0{,}5$ м? б) Предположим, что теперь между телом и наклонной плоскостью существует сила трения $F_{тр} = 0{,}70$ Н. Какая работа A_2 необходима в этом случае?

Ответ: а) $A_1 = mgh = 49$ Дж; б) $A_2 = mgh + F_{тр}s = 51{,}1$ Дж.

3.2.1. Небольшому телу массой m, находящемуся на горизонтальной плоскости, сообщили скорость v_0. Коэффициент трения зависит от пройденного пути s по закону $\mu = \alpha s$, где α – постоянная. Найдите максимальную мгновенную мощность N_{max} силы.

Ответ: $N_{max} = \sqrt{\alpha g} \cdot m v_0^2 / 2$.

3.2.2. Небольшой шарик массой $m = 0{,}5$ кг, брошенный вертикально вниз с высоты $H = 120$ м, углубился в песок на глубину $h = 0{,}1$ м. Определите среднюю силу $\langle F \rangle$ сопротивления грунта, если начальная скорость падения шарика $v_0 = 14$ м/с. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: $\langle F \rangle = (m/h) \cdot \left(v_0^2/2 + g(H+h)\right) = 6{,}4$ кН.

3.2.3. Боек свайного молота массой $m_1 = 500$ кг падает с некоторой высоты на сваю массой $m_2 = 100$ кг. Найдите КПД η удара бойка, считая удар неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи при углублении ее пренебречь.

Ответ: $\eta = m_1/(m_1 + m_2) = 0{,}833$.

3.2.4. Брусок массой $m = 2{,}0$ кг медленно подняли по шероховатой наклонной поверхности на высоту $h = 51$ см при помощи нити, параллельной этой плоскости. При этом совершили работу $A = 16$ Дж. На высоте h нить отпустили. Найдите скорость бруска, достигшего первоначального положения.

Ответ: $v = \sqrt{2(2gh - A/m)} = 2$ м/с.

3.2.5. Граната массой $m = 1$ кг разорвалась на высоте $h = 6$ м над землей на два осколка. Непосредственно перед взрывом скорость гранаты была направлена горизонтально и равна $v_0 = 4{,}8$ м/с. Один из осколков массой $m_1 = 0{,}4$ кг полетел вертикально вниз и упал на землю под местом взрыва со скоростью v = 14 м/с. Чему равен модуль скорости v_2 второго осколка сразу после взрыва?

Ответ: $v_2 = \sqrt{(mv)^2 + m_1^2\left(v_1^2 - 2gh\right)}\Big/(m - m_1) = 10$ м/с.

3.2.6. Шайба массой m = 50 г соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей угол α = 30° с горизонтом, и, пройдя по горизонтальной плоскости расстояние l = 50 см, останавливается. Найдите работу сил трения на всем пути, считая всюду коэффициент трения μ = 0,15.

Ответ: $A = -mgl/(1 - \mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha) = -0{,}05$ Дж.

3.2.7. Автомобиль с работающим двигателем въезжает на обледенелую гору, поверхность которой образует угол α с горизонтом. Какой высоты h гору может преодолеть автомобиль, если его начальная скорость при въезде на нее равна v, а коэффициент трения колес о лед $\mu < \mathrm{tg}\,\alpha$?

Ответ: $h = \mathrm{v}^2/[2g(1 - \mu\,\mathrm{ctg}\alpha)]$.

3.2.8. Две одинаковые тележки движутся друг за другом по инерции (без трения) с одной и той же скоростью v_0. На задней тележке находится человек массой m. В некоторый момент человек прыгнул в переднюю тележку со скоростью u относительно своей тележки. Имея в виду, что масса каждой тележки равна M, найти скорости, с которыми будут двигаться обе тележки после этого.

Ответ: $\mathrm{v}_{\text{задн}} = \mathrm{v}_0 - um/(M + m)$; $\mathrm{v}_{\text{пер}} = \mathrm{v}_0 + umM/(m + M)^2$.

3.2.9. Молот массой m_1 = 5 кг ударяет небольшой кусок железа, лежащий на наковальне. Масса наковальни m_2 = 100 кг. Массой куска железа пренебречь. Удар неупругий. Определите КПД η удара молота при данных условиях.

Ответ: $\eta = m_2/(m_1 + m_2) = 0{,}952$.

3.2.10. Частица находится в двумерном силовом поле, где ее потенциальная энергия $U = -\alpha xy$, α = 6,0 Дж/м^2. Найдите модуль силы, действующей на частицу в точке, где U = –0,24 Дж и вектор силы составляет угол ϑ = 15° с ортом оси y.

Ответ: $F = \sqrt{-2\alpha U/\sin 2\theta} = 2{,}4$ Н.

3.2.11. Легкий пластмассовый шарик для игры в настольный теннис роняют с высоты h. В нижней точке его траектории по нему ударяют ракеткой снизу вверх, после чего шарик подпрыгивает на высоту, в n раз большую первоначальной. Определите скорость u ракетки в момент удара. Считать удар упругим, сопротивлением воздуха пренебречь. Масса ракетки много больше массы шарика.

Ответ: $u = \sqrt{gh/2} \cdot \left(\sqrt{n} - 1\right)$.

3.2.12. Камешек скользит с наивысшей точки купола, имеющего форму полусферы. Какую дугу α опишет камешек, прежде чем оторваться от поверхности купола? Трением пренебречь.

Ответ: $\alpha = \arccos(2/3) = 0{,}268\pi$ рад.

3.2.13. Потенциальная энергия частицы в некотором поле имеет вид $U = a/r^2 - b/r$, где a и b – положительные постоянные; r – расстояние от центра поля (рис. 3.12). Найдите: а) значение r_0, соответствующее равновесному положению частицы; выяснить, устойчиво ли это положение; б) максимальное значение силы притяжения; изобразить примерные графики зависимостей $U(r)$ и $F_r(r)$

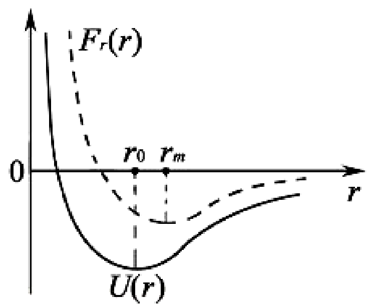


Рис. 3.12

Ответ: а) $r_0 = 2a/b$, устойчиво; б) $F_{max} = b^3/(27a^2)$.

3.2.14. Для откачки нефти с глубины H = 1000 м поставлен насос мощностью N = 10 кВт. Коэффициент полезного действия насоса η = 0,8. Какова масса m нефти, добытой за t = 10 ч работы насоса, при подаче нефти на поверхность земли со скоростью v = 0,1 м/с. Каков радиус R трубы, по которой подается нефть? Считать, что уровень нефтяного пласта не понижается.

Ответ: $m = \eta Nt / \left(v^2/2 + gH\right) = 29$ т; $R = \sqrt{m/\left(\pi\rho vt\right)} = 5{,}7$ см.

3.2.15. Груз массой m медленно поднимают на высоту h по наклонной плоскости с помощью блока и троса. При этом совершается работа A. Затем трос отпускают, и груз скользит вниз. Какую скорость он приобретет, скатившись до исходной точки?

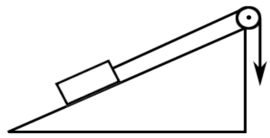


Рис. 3.13

Ответ: $v = \sqrt{4gh - 2A/m}$.

3.2.16. На чашку, подвешенную на пружине с коэффициентом жесткости k = 100 Н/м, падает с высоты h = 1 м груз массой m = 1 кг и остается на чашке, то есть удар груза о дно чашки можно считать абсолютно неупругим. Чашка начинает колебаться. Рассчитайте амплитуду колебаний чашки. Массой чашки пренебречь.

Ответ: $A = \sqrt{\left(mg\right)^2 + 2kmgh} \Big/ k = 0{,}45$ м.

3.2.17. Цепочка массой m = 0,8 кг и длиной l = 1,5 м лежит на шероховатом столе так, что один ее конец свешивается у его края. Цепочка начинает сама соскальзывать, когда ее свешивающаяся часть составляет $\eta = 1/3$ длины цепочки. Какую работу A совершат силы трения, действующие на цепочку, при ее полном соскальзывании со стола?

Ответ: $A = (\eta - 1)\eta mgl/2 = -1{,}3$ Дж.

3.2.18. На (рис. 3.14) показан игрушечный автомобильный аттракцион. Автомобиль получает легкий толчок в положении А и начинает движение фактически с нулевой скоростью. Затем он скользит по гладкому желобу и взмывает по внутренней поверхности круглой петли радиуса R. Высота h такова, что автомобиль совершает «мертвую петлю», не теряя соприкосновения с желобом. Выразите высоту h через R. Какова сила N реакции желоба на автомобиль в точке B?

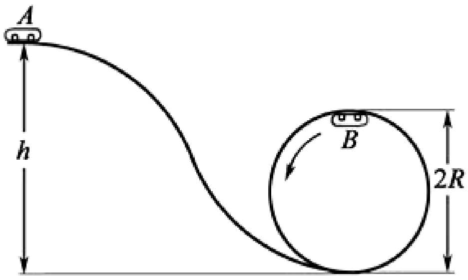


Рис. 3.14

Ответ: $h = 5R/2$; $N = mg(2h/R - 5)$.

3.2.19. Бассейн площадью S, заполненный водой до уровня h, разделен пополам вертикальной перегородкой. Перегородку медленно передвигают в горизонтальном направлении так, что она делит бассейн в отношении 1:3. Какую для этого нужно совершить работу A? Плотность воды ρ.

Ответ: $A = \rho g h^2 S/6$.

3.2.20. Нить длины l с привязанным к ней шариком массой m отклонили на 90° от вертикали и отпустили. На каком наименьшем расстоянии под точкой подвеса нужно поставить гвоздь, чтобы нить, зацепившись за него, порвалась, если она выдерживает силу натяжения T?

Ответ: $x_{\min} = l \cdot \dfrac{T - 3mg}{T - mg}$, при $T \geq 3mg$.

3.2.21. Артиллеристы стреляют так, чтобы ядро попало в неприятельский лагерь, расположенный на расстоянии l_0. В момент выстрела ядра из пушки на него садится верхом барон Мюнхгаузен, и потому ядро падает, не долетая до цели. Какая часть путь $\Delta l/l_0$ Мюнхгаузену придется пройти пешком, чтобы добраться до вражеского лагеря? Принять, что Мюнхгаузен в n = 5 раз тяжелее ядра. Посадку барона на ядро считать абсолютно неупругим ударом.

Ответ: $\Delta l/l_0 = \left((n+1)^2 - 1\right)\Big/(n+1)^2 = 35/36 \approx 0{,}972$.

3.2.22. Два тела массой m_1 и m_2 соединены недеформированной пружиной жесткостью k. Затем к телам одновременно приложили противоположно направленные силы F. Найдите максимальную кинетическую энергию тел и максимальную потенциальную энергию пружины. Какова наибольшая относительная скорость тел?

Ответ: $E_{max} = F^2/(2k)$; $U_{max} = 2F^2/k$; $v_{отн} = F \cdot \sqrt{(m_1 + m_2)/(km_1m_2)}$.

3.2.23. Два одинаковых шарика налетают друг на друга со скоростями v_1 и v_2 под углом α и разлетаются после абсолютно упругого удара со скоростями u_1 и u_2. Найдите угол β разлета шариков после соударения.

Ответ: $\beta = \arccos\left[\left(v_1^2 + v_2^2 - u_1^2 - u_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha\right)\big/\left(2u_1u_2\right)\right]$.

3.2.24. Космонавт массой m_1 приближается к космическому кораблю массой m_2 с помощью легкого троса. Первоначально корабль и космонавт неподвижны, а расстояние между ними равно l. Какое расстояние пройдут корабль и космонавт до встречи?

Ответ: $l_1 = lm_2/(m_1 + m_2)$; $l_2 = lm_1/(m_1 + m_2)$.

3.2.25. Три лодки массой M каждая движутся по инерции друг за другом с одинаковыми скоростями v. Из средней лодки в крайние одновременно перебрасывают грузы массой m каждый со скоростью u относительно лодок. Какие скорости v_1, v_2, v_3 будут иметь лодки после перебрасывания грузов?

Ответ: $v_1 = v + mu/(M + m)$; $v_2 = v$; $v_3 = v - mu/(M + m)$.

3.3.1. Частица массой m испытала столкновение с покоившейся частицей массой M, в результате которого частица m отклонилась на угол $\pi/2$, а частица M отскочила под углом $\theta = 30°$ к первоначальному направлению частицы m. На сколько процентов и как изменилась кинетическая энергия этой системы после столкновения, если $M/m = 5{,}0$?

Ответ: $\Delta E/E = [(1 + m/M)\mathrm{tg}^2\theta + m/M - 1]\cdot 100$ %.

3.3.2. Замкнутая система состоит из двух одинаковых частиц, которые движутся со скоростями v_1 и v_2 так, что угол между направлениями их движения равен θ. После упругого столкновения скорости частиц оказались равными v_1' и v_2'. Найдите угол θ' между направлениями их разлета.

Ответ: $\cos\theta' = (v_1v_2/(v_1'v_2'))\cdot\cos\theta$.

3.3.3. С какой по величине и направлению скоростью должен прыгнуть человек массой m, стоящий на краю тележки массой M и длиной l, чтобы попасть на другой конец к моменту остановки тележки. Коэффициент трения тележки о землю равен μ.

Ответ: $v = \sqrt{\dfrac{2g\mu M^2 l}{(m\cos\alpha)^2 + \mu M^2 \sin^2\alpha}}$; $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{m}{2\mu M}$.

3.3.4. Тонкая цепочка массой m = 25 г и длиной l = 100 см лежит на столе в виде небольшой кучки. К одному из концов цепочки приложили направленную вертикально вверх силу $F = \alpha y$, где α = 0,47 Н/м; y – высота подъема от поверхности стола. Найдите скорость цепочки в момент отрыва ее нижнего конца от стола.

Ответ: $v = \sqrt{l(\alpha l/m - g)} = 3$ м/с.

3.3.5. В некоторый момент две одинаковые частицы, образующие замкнутую систему, находятся на расстоянии l_0 друг от друга и имеют скорости v, направление которых составляет угол α с прямой, их соединяющей (рис. 3.15). Масса каждой частицы m, сила отталкивания зависит от расстояния r между частицами как a/r^2, где a – известная постоянная. Найдите наименьшее расстояние l_{min}, на которое сблизятся частицы.

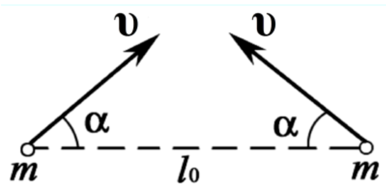


Рис. 3.15

Ответ: $l_{min} = 2al_0/(2a + l_0 m v^2 \cos^2\alpha)$.

3.3.6. Тело массой m начинают поднимать с поверхности земли, приложив к нему силу F, которую изменяют с высотой подъема y по закону $F = 2(ay - 1)mg$, где a – положительная постоянная. Найдите работу этой силы и приращение потенциальной энергии тела в поле тяжести Земли на первой половине пути подъема.

Ответ: $A = 3mg/(4a)$; $\Delta U = mg/(2a)$.

3.3.7. Частицы массой m попадают в область, где на них действует встречная тормозящая сила. Глубина x проникновения частиц в эту область зависит от импульса p частиц как $x = \alpha p$, где α – заданная постоянная. Найдите зависимость модуля тормозящей силы от x.

Ответ: $F = x/(m\alpha^2)$.

3.3.8. Гладкий легкий горизонтальный стержень BC может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец B. На стержне находится небольшая муфточка массой m, соединенная пружинкой длиной l_0 с концом B. Жесткость пружины равна k. Какую работу надо совершить, чтобы эту систему медленно раскрутить до угловой скорости ω?

Ответ: $A = kl_0^2\eta\dfrac{1+\eta}{2(1-\eta)^2}$, где $\eta = \dfrac{m\omega^2}{k}$.

3.3.9. Прямая цепочка массой m = 50 г и длиной l = 52 см лежит на гладкой горизонтальной полуплоскости у ее границы с другой горизонтальной полуплоскостью, где коэффициент трения μ = 0,22. Цепочка расположена перпендикулярно границе раздела полуплоскостей. Какую работу необходимо совершить, чтобы, действуя горизонтальной силой на конец цепочки, находящейся у границы раздела, медленно перетащить всю цепочку через эту границу?

Ответ: $A = \mu mgl/2$ = 28 мДж.

3.3.10. На подставке лежит гиря массой m = 1,00 кг, подвешенная на недеформированной пружине с жесткостью k = 80 Н/м. Подставку начали опускать с ускорением a = 5,0 м/с^2. Пренебрегая массой пружины, найти максимальное растяжение пружины в этом процессе.

Ответ: $x_{\max} = \left(g + \sqrt{2ga - a^2}\right)\dfrac{m}{k} = 23$ см.

3.3.11. Небольшая шайба массой m = 5,0 г начинает скользить, если ее положить на шероховатую поверхность полусферы на высоте h_1 = 60 см от горизонтального основания полусферы. Продолжая скользить, шайба отрывается от полусферы на высоте h_2 = 25 см. Найдите работу сил трения, действующих на шайбу при ее соскальзывании.

Ответ: $A_{\text{тр}} = mg(3h_2/2 - h_1)$ = –11 мДж.

3.3.12. С помощью электролебедки вверх по наклонной плоскости поднимают груз, причем канат параллелен наклонной плоскости. При каком угле α наклона плоскости к горизонту скорость груза будет минимальной, если коэффициент трения μ = 0,4, а мощность двигателя N = 1,5 кВт?

Ответ: $\alpha = \mathrm{arctg}(1/\mu) = 68^\circ\,12'$.

3.3.13. В аттракционе поезд, как показано на рис. 3.16, скатывается с горы высотой H = 50 м, пройдя по склонам расстояние s = 120 м и затем вновь поднимается на высоту h = 40 м. Какова при этом максимальная сила трения $F_{\text{тр}}$, действующая на поезд массой m = 500 кг? (Если бы $F_{\text{тр}}$ была бы

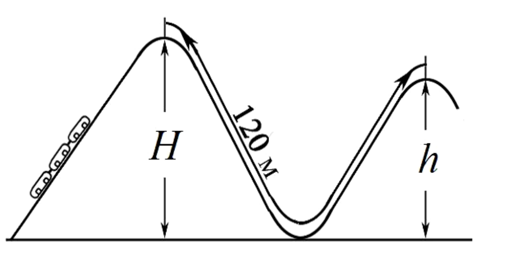


Рис. 3.16

больше, то поезд не смог бы достичь второй вершины. Силу $F_{тр}$ считать постоянной).

Ответ: $F_{тр} = mg(H - h)/s = 408{,}3$ Н.

3.3.14. Цепочка массой $m = 1{,}0$ кг и длиной $l = 1{,}40$ м висит на нити, касаясь поверхности стола своим нижним концом. После пережигания нити цепочка упала на стол. Найдите полный импульс, который она передала столу.

Ответ: $p = \dfrac{2m}{3}\sqrt{2gl} = 3{,}5$ (кг·м)/с.

3.3.15. К небольшому бруску массой $m = 50$ г, лежащему на горизонтальной плоскости, приложили постоянную горизонтальную силу $F = 0{,}10$ Н. Найдите работу сил трения за время движения бруска, если коэффициент трения зависит от пройденного пути x как $\mu = \gamma x$, где γ – постоянная.

Ответ: $A_{тр} = -2F^2/(\gamma mg) = -0{,}12$ Дж.

3.3.16. Небольшое тело массой m медленно втащили на горку, действуя силой F, которая в каждой точке направлена по касательной к траектории, рис. 3.17. Найдите работу этой силы, если высота горки h, длина ее основания и коэффициент трения μ.

Ответ: $A = mg(h + \mu l)$.

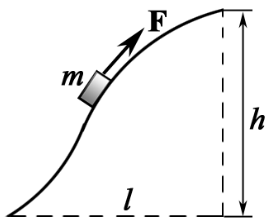


Рис. 3.17

3.3.17. К потолку привязан резиновый шнур, свободный конец которого находится на высоте h над полом. Если подвесить к нему небольшой тяжелый груз, который затем плавно опустить, то конец шнура с грузом опустится на расстояние $h/3$. На какую наименьшую высоту над полом надо затем поднять груз, чтобы после того, как его отпустят, он ударился о пол. Как изменится ответ при замене резинового шнура пружиной?

Ответ: $H_1 = (3/2)h$; $H_2 = (4/3)h$.

3.3.18. Веревка привязана к санкам и переброшена через перекладину ворот высотой h. Мальчик, сидящий на санках, начинает выбирать веревку, натягивая ее с силой $\mathbf{T}$, рис. 3.18. Какую скорость v он приобретет, проезжая под перекладиной? Начальная длина веревки $2l$, масса мальчика с санками m. Трением пренебречь.

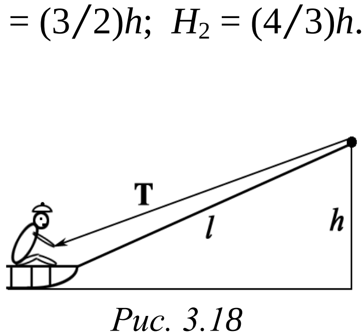


Рис. 3.18

Ответ: $v = 2\sqrt{(l-h)T/m}$.

3.3.19. Водомерный двигатель катера забирает воду из реки и выбрасывает ее со скоростью u = 10 м/с относительно катера назад. Масса катера M = 1000 кг. Масса ежесекундно выбрасываемой воды постоянна и равна μ = 10 кг/с. Пренебрегая сопротивлением движению катера, определить: а) скорость катера v спустя время t = 1,0 мин после начала движения; б) какой предельной скорости v_{max} может достичь катер.

Ответ: а) $v = u[1 - \exp(-\mu t/M)]$ = 4,5 м/с; б) $v_{max} = u$ = 10 м/с.

3.3.20. Небольшой шарик массой m = 50 г прикреплен к концу упругой нити, жесткость которой k = 63 Н/м. Нить с шариком отвели в горизонтальное положение, не деформируя нить, и осторожно отпустили. Когда нить проходила вертикальное положение, ее длина оказалась l = 1,5 м и скорость шарика v = 3,0 м/с. Найдите силу натяжения нити в этом положении.

Ответ: $F = \sqrt{km(2gl - v^2)} = 8$ Н.

3.3.21. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска AB длиной l = 100 см, на конце A которой находится небольшая шайба. Масса доски в η = 10 раз больше массы шайбы, коэффициент трения между ними μ = 0,15. Какую начальную скорость надо сообщить шайбе в направлении от A к B, чтобы она смогла соскользнуть с доски?

Ответ: $v_0 > \sqrt{2\mu g l(1+\eta)} = 1{,}8$ м/с.

3.3.22. Гиря, положенная на верхний конец спиральной пружины, сжимает ее на Δx = 1 мм после успокоения колебаний. Насколько сожмет пружину эта гиря, брошенная вертикально вниз с высоты h = 0,2 м со скоростью v_0 = 1 м/с?

Ответ: $x = \Delta x + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta x\left(2h + \frac{v_0^2}{g}\right)}$ или $x \approx \Delta x + \sqrt{2h\Delta x + \Delta x v_0^2/g} = 2{,}3$ см.

3.3.23. Небольшая шайба A соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки высотой H, имеющей горизонтальный трамплин (рис. 3.19). При какой высоте h трамплина шайба пролетит наибольшее расстояние s_{max}? Чему оно равно?

Ответ: $h = H/2$, $s_{max} = H$.

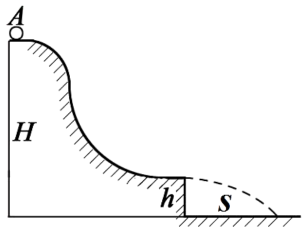


Рис. 3.19

3.3.24. На каком минимальном расстоянии l_{min} от

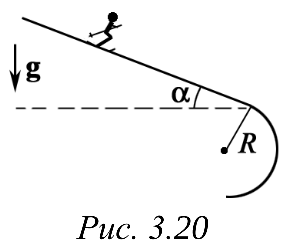


Рис. 3.20

места закругления склона должна располагаться стартовая площадка лыжников, чтобы они, достигнув закругления, начали свободный полет (рис. 3.20)? Угол склона α, радиус закругления R, коэффициент трения между лыжами и склоном $\mu < \mathrm{tg}\alpha$. Стартовой скоростью лыжников пренебречь.

Ответ: $l_{\min} = \dfrac{R}{2(\mathrm{tg}\alpha - \mu)}$

3.3.25. На наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ находится кубик. К кубику прикреплена невесомая пружина, другой конец которой закреплен в точке A. Кубик находится в положении, в котором пружина не деформирована. Кубик отпускают без начальной скорости. Определите максимальную скорость v_{max} кубика в процессе движения. Масса кубика $m = 1$ кг, жесткость пружины $k = 10$ кН/м, коэффициент трения $\mu = 0{,}1$ ($\mu < \mathrm{tg}\alpha$). Принять $g = 10$ м/с^2.

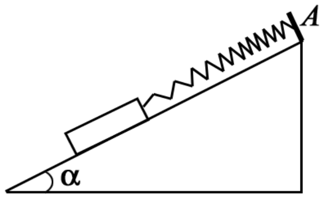


Рис. 3.21

Ответ: $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{m}{k}} \cdot g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) = 0{,}04$ м/с .

4. ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Закон всемирного тяготения

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где F – сила гравитационного взаимодействия (притяжения) двух материальных точек массами m_1 и m_2; r – расстояние между ними; G – гравитационная постоянная.

Форма записи закона всемирного тяготения не изменится, если материальные точки (или одну из них) заменить сплошными или полыми шарами со сферически симметричным распределением масс. В этом случае расстояние r есть расстояние между центрами шаров (или между центром шара и материальной точкой).

Напряженность* $\mathbf{E}$ *гравитационного поля

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{m},$$

где $\mathbf{F}$ – сила тяготения, действующая на материальную точку массы m, помещенную в данную точку гравитационного поля.

Напряженность гравитационного поля планеты, звезды или вообще какого-либо шара со сферически симметричным распределением массы

$$E = G\frac{M}{r^2},$$

где M – масса планеты, звезды или шара; r – расстояние от центра каждого из этих тел до интересующей нас точки поля.

При этом данная точка должна находиться вне тел, создающих поле тяготения. Если же эта точка находится внутри планеты, звезды или шара, то в выражении для гравитационного поля учитывается только та масса, которая охвачена поверхностью сферы радиуса r.

Потенциал* φ *гравитационного поля

$$\varphi = \frac{U}{m},$$

где U – потенциальная энергия материальной точки массой m, помещенной в интересующую нас точку поля тяготения.

Потенциал гравитационного поля планеты, звезды или вообще какого-либо шара со сферически симметричным распределением массы

$$\varphi = -G\frac{M}{r},$$

где M – масса планеты, звезды или шара; r – расстояние от центра каждого из этих тел до интересующей нас точки поля. При этом данная точка должна находиться вне тел, создающих поле тяготения.

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами m_1 и m_2, сплошных или полых шаров со сферически симметричным распределением масс

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r},$$

где r – расстояние между материальными точками или центрами шаров.

Законы Кеплера:

первый закон – все планеты Солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце;

второй закон – радиус-вектор любой планеты в равные промежутки времени описывает равные площади;

третий закон – квадраты периодов T обращения любых двух планет относятся как кубы больших полуосей a их орбит

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Законы Кеплера справедливы не только для движения планет Солнечной системы, но и для движения спутников вокруг планет.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Предположим, что наша Галактика состоит из $N = 10^{11}$ звезд со средней массой $M = 10^{30}$ кг каждая. На краю Галактики звезда движется по круговой орбите с радиусом $r = 5\cdot10^4$ световых лет. Каковы ее скорость v и период T обращения? Считать, что звезда ведет себя так, как если бы вся масса Галактики сосредоточена в центре Галактики.

Ответ: $v = \sqrt{GNM/r} \approx 119\ \text{км/с}$; $T = 2\pi\sqrt{r^3/(GNM)} \approx 7{,}93\cdot10^8$ лет.

2. Вследствие вращения Земли вес тела на экваторе меньше, чем на полюсе. Определите на какой высоте h над поверхностью Земли вес тела на полюсе сравняется с его весом на поверхности на экваторе.

Ответ: $h = R_З\left(T_З\sqrt{\dfrac{GM_З}{GM_З T_З^2 - 4\pi^2 R_З^3}} - 1\right) \approx 8{,}1$ км.

3. Масса M тонкого однородного стержня длиной $l = 2$ м равна 3 кг. На расстоянии $r_0 = 50$ см от стержня против его середины находится маленький шарик массой $m = 10$ г. Найдите силу гравитационного взаимодействия шарика со стержнем.

Ответ: $F = \dfrac{2GmM}{r_0\sqrt{4r_0^2 + l^2}} \approx 3{,}58\,\text{пН}$.

4. Два медных шара диаметрами d_1 = 8 см и d_2 = 10 см находятся в соприкосновении друг с другом. Определите потенциальную энергию U взаимодействия этих шаров.

Ответ: $U = -\dfrac{G(\pi\rho)^2(d_1d_2)^3}{18(d_1+d_2)} \approx -8{,}29\,\text{нДж}$, где ρ – плотность меди.

5. Определите работу сил гравитационного поля Земли, совершаемую по перемещению тела массой m = 5 кг из точки, находящейся на расстоянии от поверхности Земли, равном $3R_З$, в точку, находящуюся на расстоянии от поверхности Земли, равном $2R_З$, где $R_З$ – радиус Земли.

Ответ: $A = \dfrac{GmM_З}{12R_З} \approx 26{,}1\,\text{МДж}$

6. Пусть комета движется вокруг Солнца по эллиптической орбите, большая полуось которой равна a, а малая – b. Определите отношение скоростей v_2/v_1 через a и b, а также через эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$. Для эллипса расстояние от центра до фокуса равно $\sqrt{a^2 - b^2}$.

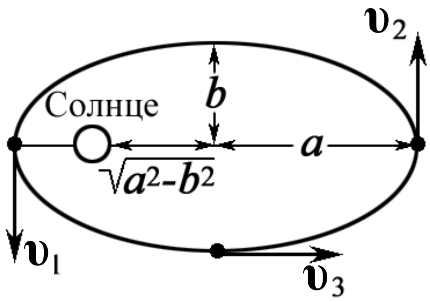


Рис. 4.8

Ответ: $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}$; $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

7. Космическое тело с нулевой начальной скоростью в гелиоцентрической системе отсчета падает на Солнце с расстояния, равного радиусу $r_{ЗС}$ земной орбиты. Сколько времени t продолжалось падение?

Ответ: $t = \dfrac{T_{ЗС}}{2}\sqrt{\left(\dfrac{r_{ЗС} + R_С}{2r_{ЗС}}\right)^3} \approx 65\,\text{сут}$.

8. Две звезды с одинаковыми массами движутся по круговой орбите вокруг общего центра масс. Выразите результирующую силу, действующую на каждую звезду, через m, G и R. Получите формулу, связывающую период обращения с m, G и R.

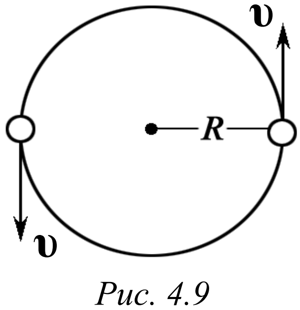


Рис. 4.9

Ответ: $F = G\dfrac{m^2}{4R^2}$; $T = 4\pi R\sqrt{\dfrac{R}{Gm}}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

4.1.1. Определите силу, с которой притягивается к Земле тело массой $m = 1$ кг, находящееся на поверхности Луны.

Ответ: $F = GM_З m/\left(r_{ЛЗ} - R_Л\right)^2 \approx 2{,}73 \cdot 10^{-3}$ Н.

4.1.2. На какой высоте h от поверхности Земли сила притяжения космического корабля к ней в $n = 49$ раз меньше, чем на старте?

Ответ: $h = R_З(\sqrt{n} - 1) = 3{,}82 \cdot 10^4$ км.

4.1.3. Каково отношение сил тяготения $F_З/F_h$, действующих на ракету на поверхности Земли и на высоте h, равной радиусу Земли?

Ответ: $F_З/F_h = \left(1 + h/R_З\right)^2 = 4$.

4.1.4. Как изменится сила гравитационного притяжения между шарами, изготовленными из материала одинаковой плотности, если радиус одного шара в $k = 2$ раза увеличить, а другого – в $n = 4$ раза уменьшить, не изменяя расстояние между центрами шаров?

Ответ: $F_1/F_2 = \left(n/k\right)^3 = 8$; уменьшится в 8 раз.

4.1.5. На каком расстоянии h от поверхности Земли находится точка, в которой стальной шарик одинаково притягивается и Землей, и Луной?

Ответ: $h = \dfrac{r_{ЛЗ}}{1 + \sqrt{M_Л / M_З}} - R_З \approx 3{,}4 \cdot 10^5$ км.

4.1.6. Ускорение свободного падения на Луне $g_Л = 0{,}17g$, где g – ускорение свободного падения на Земле. Диаметр $D_Л$ Луны в 3,7 раза меньше диаметра $D_З$ Земли. Во сколько раз масса Земли больше массы Луны?

Ответ: $\dfrac{M_З}{M_Л} = \dfrac{g}{g_Л}\left(\dfrac{D_З}{D_Л}\right)^2 \approx 81$.

4.1.7. Если тело, находящееся на экваторе Земли, было бы в состоянии невесомости, то при какой продолжительности T суток на Земле это было бы возможным?

Ответ: $T = 2\pi R_З\sqrt{R_З/\left(GM_З\right)} \approx 84{,}3$ мин.

4.2.1. На каком расстоянии h от поверхности Земли ускорение свободного падения g_h равно 1 м/с^2?

Ответ: $h = \sqrt{GM_З / g_h} - R_З \approx 13{,}6 \cdot 10^3$ км.

4.1.9. На какой высоте h ускорение свободного падения g_h составляет η = 0,25 ускорения свободного падения g вблизи поверхности Земли?

Ответ: $h = R_З\left(\sqrt{1/\eta} - 1\right) = 6370$ км.

4.1.10. На какой высоте h над поверхностью Земли сила тяготения уменьшится на η = 10 %?

Ответ: $h = \left(\sqrt{\dfrac{100\%}{100\% - \eta}} - 1\right) \cdot R_З \approx 345$ км.

4.1.11. Ракета поднялась на высоту h = 1600 км над поверхностью Земли. На сколько η процентов уменьшится сила тяготения, действующая на ракету?

Ответ: $\eta = \dfrac{h(2R_З + h)}{(R_З + h)^2} \cdot 100\,\% \approx 36{,}1\,\%$.

4.1.12. Считая ускорение свободного падения g на поверхности Земли известным, определите ускорение свободного падения $g_п$ на поверхности некоторой планеты, средняя плотность которой равна средней плотности Земли, а её радиус в n = 5 раз больше земного радиуса.

Ответ: $g_п = ng$ = 49 м/с^2.

4.1.13. Определите массу $M_С$ Солнца, если известно, что средняя угловая скорость движения Земли вокруг Солнца ω = 0,99° в сутки.

Ответ: $M_С = \omega^2 r_{ЗС}^3 / G \approx 1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг.

4.1.14. С какой скоростью упадет на поверхность Луны метеорит, скорость которого вдали от Луны пренебрежимо мала. Атмосфера на Луне отсутствует. Влиянием Земли пренебречь.

Ответ: $v = \sqrt{2GM_Л / R_Л} \approx 2{,}37$ км/с.

4.1.15. Определите период обращения искусственного спутника, движущегося в непосредственной близости от поверхности планеты, средняя плотность вещества которой $\rho = 4{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $T = \sqrt{3\pi/(\rho G)} \approx 1{,}5$ ч.

4.1.16. На каком расстоянии h от поверхности Земли должен находиться её искусственный спутник, если он движется в плоскости экватора с периодом T, равным периоду $T_З$ вращения Земли вокруг своей оси?

Ответ: $h = \sqrt[3]{GM_З T_З^2 / (4\pi^2)} - R_З \approx 3{,}6 \cdot 10^4$ км.

4.1.17. Первый спутник движется по круговой орбите на высоте h_1, равной радиусу $R_П$ планеты, а второй – на высоте h_2 в $n = 7$ раз большей $R_П$. Во сколько раз скорость v_1 первого спутника больше скорости v_2 второго?

Ответ: $v_1/v_2 = (n+1)/2 = 4$.

4.1.18. Средняя высота h спутника над поверхностью Земли равна 1600 км. Определите его скорость.

Ответ: $v = \sqrt{GM_З/(R_З + h)} \approx 7{,}07$ км/с.

4.1.19. Определите первую космическую скорость v_1 вблизи планеты Венера, если масса этой планеты $M_В = 4{,}9 \cdot 10^{24}$ кг, а её радиус $R_В =$ = 6100 км.

Ответ: $v_1 = \sqrt{GM_В/R_В} \approx 7{,}32$ км/с.

4.1.20. Определите первую космическую скорость v_1 вблизи планеты Марс, если радиус этой планеты $R_М = 3380$ км, а её средняя плотность $\rho_М = 3{,}96 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $v_1 = 2R_М\sqrt{\pi G\rho_М/3} \approx 3{,}6$ км/с.

4.1.21. Найдите вторую космическую скорость v_2 для Луны. Во сколько n раз она отличается от соответствующей скорости для Земли?

Ответ: $v_2 = \sqrt{2GM_Л/R_Л} \approx 2{,}37$ км/с; $n = \sqrt{(M_З R_Л)/(M_Л R_З)} \approx 4{,}72$.

4.1.22. Получите в общем виде выражение для напряженности E поля тяготения на поверхности планеты радиуса R, средняя плотность вещества которой равна ρ.

Ответ: $E = (4/3)\pi\rho GR$.

4.1.23. Определите ускорение $g_П$ свободного падения на поверхности планеты, масса которой $M_П$ в $n = 318$ раз больше массы Земли, а её радиус $R_П$ больше радиуса $R_З$ Земли в $k = 11{,}2$ раз.

Ответ: $g_П = \dfrac{GnM_З}{(kR_З)^2} \approx 24{,}9$ м/с^2.

4.1.24. Определите значение потенциала φ поля тяготения планеты, радиус которой в $n = 4$ раза больше радиуса Земли на расстоянии h, равном радиусу планеты от её поверхности, если известно, что средняя плотность вещества планеты $\rho = 1{,}27 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $\varphi = -(2/3)\pi G\rho(nR_З)^2 \approx -115$ МДж/кг.

4.1.25. Кинетическая энергия спутника на круговой орбите равна K. Какова его потенциальная энергия U?

Ответ: $U = -2K$.

4.2.1. Комета огибает Солнце, двигаясь по орбите, которую можно считать параболической. Определите скорость v движения кометы в тот момент, когда она находится в перигее, если расстояние r от кометы до центра Солнца в этот момент равно $5 \cdot 10^{10}$ м.

Ответ: $v = \sqrt{2GM_С/r} \approx 72{,}7$ км/с.

4.2.2. Для осуществления всемирной телевизионной связи достаточно иметь три спутника Земли, вращающихся по круговой орбите в плоскости экватора с запада на восток и расположенных друг относительно друга под углом 120°. Период обращения каждого спутника T = 24 ч. Определите радиус r орбиты и линейную скорость v такого спутника.

Ответ: $r = \sqrt[3]{GM_З T^2 / \left(4\pi^2\right)} \approx 4{,}23 \cdot 10^7$ м; $v = 2\pi \sqrt[3]{GM_Ç / \left(4\pi^2 T\right)} \approx 3{,}1$ êì /ñ.

4.2.3. С увеличением высоты полета искусственного спутника Земли его скорость уменьшилась с v_1 = 7,79 км/с до v_2 = 7,36 км/с. На сколько увеличился период обращения спутника вокруг Земли?

Ответ: $\Delta T = \dfrac{2\pi GM_З\left(v_1^3 - v_2^3\right)}{v_1^3 \cdot v_2^3} \approx 16{,}4$ мин.

4.2.4. Ракете, находящейся на поверхности Земли, сообщена начальная скорость v_0 = 9 км/с. Какую скорость v будет иметь ракета на высоте, равной радиусу $R_З$ Земли? Сопротивление воздуха и притяжение других небесных тел, кроме Земли не учитывать.

Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 - gR_З} \approx 4{,}31$ км/с.

4.2.5. Скорость спутника, движущегося по круговой орбите на высоте h = 5000 км над поверхностью планеты, равна v = 5 км/с. Ускорение свободного падения $g_П$ на поверхности этой планеты равно 10 м/с^2. Определите радиус $R_П$ планеты

Ответ: $R_П = \left(v^2 + v\sqrt{v^2 + 4g_П h}\right) / \left(2g_П\right) = 5 \cdot 10^3$ км.

4.2.6. Каким должен быть радиус R однородного шара плотностью ρ = 5500 кг/м^3, чтобы потенциал φ (по модулю) его гравитационного поля в точке, лежащей на поверхности шара, был равен 10^4 Дж/кг?

Ответ: $R = \sqrt{3\varphi/(4\pi\rho G)} \approx 81\,\text{км}$.

4.2.7. Каким должен быть радиус R однородного шара плотностью ρ = 5500 кг/м^3, чтобы потенциальная энергия U (по модулю) молекулы азота, находящейся у поверхности шара, в гравитационном поле этого шара была равна $1{,}6\cdot10^{-20}$ Дж?

Ответ: $R = \sqrt{3UN_\text{А}/\left(4\pi G\rho M_{\text{N}_2}\right)} \approx 473\,\text{км}$.

4.2.8. Определите вес P тела массой m = 1 кг, находящегося между Землей и Луной на расстоянии $r = 10^8$ м от центра Земли.

Ответ: $P = Gm\left(\dfrac{M_\text{З}}{r^2} - \dfrac{M_\text{Л}}{(r_\text{ЛЗ} - r)^2}\right) \approx 40\,\text{мН}$.

4.2.9. Определите период $T_\text{П}$ обращения вокруг Солнца искусственной планеты, если известно, что большая полуось её эллиптической орбиты превышает большую полуось земной орбиты на $\Delta a = 1{,}5\cdot10^{10}$ м.

Ответ: $T_\text{П} = T_\text{ЗС}\sqrt{\left(1 + \Delta a/r_\text{ЗС}\right)^3} \approx 421{,}8\,\text{сут}$.

4.2.10. Большая ось a_1 орбиты одного из искусственных спутников Земли меньше большой оси a_2 орбиты второго спутника на Δa = 700 км. Период обращения вокруг Земли первого спутника T_1 = 78 мин. Определите величину большой оси a_2 второго спутника.

Ответ: $a_2 = 2r_\text{ЛЗ}\sqrt[3]{\left(T_1/T_\text{ЛЗ}\right)^2} + \Delta a \approx 12820\,\text{км}$.

4.2.11. Большая ось a_1 орбиты одного из искусственных спутников Земли меньше большой оси a_2 орбиты второго спутника на Δa = 580 км. Период обращения вокруг Земли первого спутника равен T_1 = 83 мин. Определите период обращения вокруг Земли второго спутника.

Ответ: $T_2 = T_1\cdot\sqrt{\left(1 + \dfrac{\Delta a}{2r_\text{ЛЗ}}\sqrt[3]{\left(T_\text{ЛЗ}/T_1\right)^2}\right)^3} \approx 88{,}8\,\text{мин}$.

4.2.12. Планета Марс имеет два спутника – Фобос и Деймос. Первый из них находится на расстоянии r_1 от центра Марса, равном 9400 км, а второй – на расстоянии r_2 = 23500 км. Во сколько раз период T_2 обращения вокруг Марса Деймоса больше, чем период T_1 обращения Фобоса?

Ответ: $T_2/T_1 = \sqrt{(r_2/r_1)^3} \approx 3{,}95$.

4.2.13. Спутник Марса Фобос обращается вокруг него по орбите радиусом $r_ф$ = 9400 км с периодом $T_Ф$ = 7 ч 39 мин. Во сколько раз масса Марса $M_М$ меньше массы Земли $M_З$?

Ответ: $\dfrac{M_З}{M_М} = \left(\dfrac{T_Ф}{T_{ЛЗ}}\right)^2 \left(\dfrac{r_{ЛЗ}}{r_Ф}\right)^3 \approx 9{,}28$.

4.2.14. Два однородных шара, изготовленных из одинакового материала, соприкасаются друг с другом. Как изменится сила гравитационного притяжения этих шаров, если массу каждого шара увеличить в n = 5 раз за счет увеличения их размеров, не нарушая при этом соприкосновение шаров?

Ответ: увеличится в $F_2/F_1 = \sqrt[3]{n^4} \approx 8{,}55$ раз.

4.2.15. Два однородных шара радиусами R_1 и R_2 соприкасаются друг с другом. Как изменится потенциальная энергия гравитационного взаимодействия этих шаров, если радиус каждого шара увеличить в n = 2 раза, не нарушая при этом соприкосновение шаров?

Ответ: увеличится в n^5 = 32 раза.

4.2.16. Считая радиус земной орбиты $r_{ЗС}$, радиус Солнца $R_С$ и время обращения Земли вокруг Солнца $T_{ЗС}$ известными, определите ускорение свободного падения $g_С$ на поверхности Солнца.

Ответ: $g_С = 4\pi^2 r_{ЗС}^3 \big/ \left(R_С T_{ЗС}\right)^2 \approx 271$ м/с^2.

4.2.17. Считая радиус $R_З$ Земли и ускорение свободного падения g вблизи её поверхности известными, определите ускорение свободного падения g_h на высоте h, равной 1,5$R_З$.

Ответ: $g_h = g \big/ \left(1 + h/R_З\right)^2 \approx 1{,}57$ м/с^2.

4.2.18. Тело массой m = 3 кг находится на поверхности Земли. Определите изменение силы тяжести ΔF при подъеме тела на высоту h = 7 км над поверхностью Земли.

Ответ: $\Delta F = 2mgh/(2h + R_З) \approx 64{,}5$ мН.

4.2.19. Тело массой m = 3 кг находится на поверхности Земли. Определите изменение силы тяжести ΔF при опускании тела в шахту на глубину h = 7 км.

Ответ: $\Delta F = mgh/R_З \approx 32{,}2$ мН.

4.2.20. Определите минимальный период T_{min} обращения спутника нейтронной звезды, если известно, что её плотность $\rho = 10^{17}$ кг/м^3.

Ответ: $T_{min} = \sqrt{3\pi/(G\rho)} = 1{,}19\cdot10^{-3}$ с.

4.2.21. Предположим, что на экваторе некоторой малой планеты, плотность вещества которой $\rho = 3$ г/см^3, все тела весят в $n = 1{,}2$ раза меньше, чем на полюсе. Каким должен быть период T обращения планеты вокруг оси, чтобы выполнялось это предположение?

Ответ: $T = \sqrt{3\pi n/((n-1)G\rho)} \approx 4{,}67$ ч.

4.2.22. Двойная звезда – это система из двух звезд, движущихся вокруг общего центра масс. Расстояние l между компонентами двойной звезды и период T её вращения известны. Считая, что l не меняется, определите суммарную массу двойной звезды.

Ответ: $(M_1 + M_2) = 4\pi^2 l^3/(GT)$.

4.2.23. Вес тела на экваторе астероида составляет $\delta = 0{,}9$ веса на полюсе. Каков период T обращения астероида вокруг своей оси, если астероид представляет собой шар с плотностью вещества $\rho = 5\cdot10^3$ кг/м^3.

Ответ: $T = \sqrt{3\pi/((1-\delta)G\rho)} \approx 280$ мин.

4.2.24. Получите выражение для напряженности гравитационного поля, создаваемого тонкой сферической оболочкой радиусом R внутри E_1 и вне $E(r)$ оболочки. Масса единицы поверхности оболочки равна σ. Постройте график зависимости $g = f(r)$.

Ответ: $E_1 = 0$; $E(r) = 4\pi G\sigma\cdot(R/r)^2$.

4.2.25. Определите напряженность E гравитационного поля, создаваемого сплошной однородной сферой радиусом R внутри сферы. Плотность материала сферы ρ. Постройте график зависимости $E = f(r)$.

Ответ: $E(r) = (4/3)\pi G\rho r$.

4.3.1. Найдите выражение для напряженности E поля и силы F гравитационного взаимодействия между тонким однородным кольцом радиусом R и массой M и материальной точкой массой m, лежащей на высоте h на перпендикуляре, восставленном из центра кольца к его плоскости.

Ответ: $E = GMh/\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}$; $F = G\cdot Mmh/\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}$.

4.3.2. Найдите силу F гравитационного взаимодействия между тонкой однородной нитью длиной l и массой M и материальной точкой массой m, лежащей на отрезке перпендикуляра длиной r_0, восставленного к середине нити.

Ответ: $F = 2GMm/(r_0 l)$.

4.3.3. Определите напряженность E_1 гравитационного поля в пространстве между двумя тонкими бесконечными однородными плоскостями и E_2 вне их. Масса единицы поверхности плоскостей σ равна 4,8 кг/м^2.

Ответ: $E_1 = 0$; $E_2 = 4\pi G\sigma \approx 4$ нН/кг.

4.3.4. Определите напряженность E гравитационного поля? создаваемого тонкой бесконечной однородной плоскостью, масса единицы поверхности которой $\sigma = 4{,}8$ кг/м^2.

Ответ: $E = 2\pi G\sigma \approx 2$ нН/кг.

4.3.5. Определите напряженность гравитационного поля, создаваемого тонкой бесконечной однородной нитью на расстоянии $r_0 = 0{,}5$ м от нее. Масса единицы длины нити $\tau = 30$ г/м.

Ответ: $E = 2G\tau/r_0 = 8$ пН/кг.

4.3.6. На расстоянии $r_0 = 0{,}25$ м от бесконечно длинной тонкой проволоки против ее середины находится материальная точка массой $m = 10$ г. Масса нити равномерно распределена по ее длине с линейной плотностью $\tau = 0{,}01$ кг/м. Определите величину силы F гравитационного притяжения материальной точки к нити.

Ответ: $F = 2Gm\tau/r_0 \approx 53{,}4$ фН.

4.3.7. Тонкое однородное полукольцо радиусом R имеет массу M. Найдите выражения для силы F взаимодействия между этим полукольцом и телом массой m, помещенным в центре кривизны, и для напряженности E гравитационного поля полукольца в этой точке.

Ответ: $F = 2G \cdot Mm/\left(\pi R^2\right)$; $E = 2GM/\left(\pi R^2\right)$.

4.3.8. Комета движется вокруг Солнца по эллипсу с эксцентриситетом $\varepsilon = 0{,}8$. Во сколько раз скорость кометы в ближайшей к Солнцу точке орбиты (перигее) больше, чем в наиболее удаленной точке (апогее).

Ответ: $v_2/v_1 = (1 + \varepsilon)/(1 - \varepsilon) = 9$.

4.3.9. Найдите изменение ускорения свободного падения $(g - g_h)$ тела на глубине h от поверхности Земли. На какой глубине h ускорение свободного падения g_h составит $\eta = 0{,}3$ от ускорения свободного падения g на поверхности Земли? Плотность Земли по всему её объему считать постоянной.

Ответ: $(g - g_h) = GM_З h/R_З^3$; $h = (1-\eta)R_З = 4{,}46 \cdot 10^6$ м.

4.3.10. Спутник имеет перигей над Южным полушарием Земли на высоте h_1 около 500 км, а апогей – на высоте h_2 около 40000 км над Северным полушарием. Каково отношение ω_1/ω_2 угловых скоростей обращения этого спутника в перигее и апогее?

Ответ: $\omega_1/\omega_2 = \left(R_З + h_2\right)^2 \big/ \left(R_З + h_1\right)^2 \approx 46$.

4.3.11. Орбитальная скорость v Луны равна 1,023 км/с. Представим, что Луна потеряла орбитальную скорость и стала падать на Землю. С какой скоростью v_1 Луна приблизится к поверхности Земли?

Ответ: $v_1 = v\sqrt{2\left(r_{ЛЗ} - R_З\right)/R_З} \approx 11{,}14\,\text{км/с}$.

4.3.12. В металлическом шаре радиусом R = 1 м сделана сферическая полость радиусом r = 0,5R, которая касается поверхности шара, как показано на рис. 4.10. На расстоянии l = 10 м от центра шара находится маленький шарик, который можно рассматривать как материальную точку. Во сколько раз сила F гравитационного взаимодействия шара без полости больше силы F_1 гравитационного взаимодействия шара с полостью с маленьким шариком?

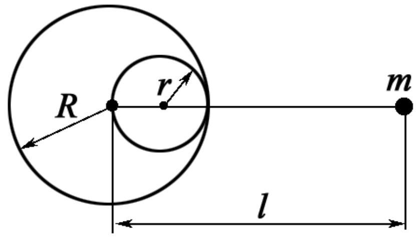


Рис. 4.10

Ответ: $\dfrac{F}{F_1} = \dfrac{8(l - 0{,}5R)^2}{8(l - 0{,}5R)^2 - l^2} \approx 1{,}16$.

4.3.13. В шаре радиусом R = 1 м сделана сферическая полость радиусом r = 0,5R, которая касается поверхности шара, как показано на рис. 4.11. На расстоянии l = 2 м от центра шара находится маленький шарик массой m = 100 г. Масса шара без полости M = 3,6·10^4 кг. Определите величину силы гравитационного притяжения маленького шарика к шару с полостью.

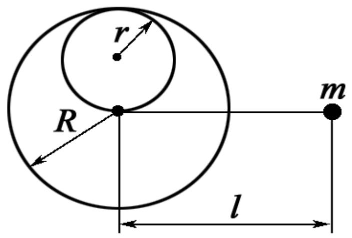


Рис. 4.11

Ответ: $F = GmM\left(8\sqrt{\left(r^2 + l^2\right)^3} - l^3\right) \Big/ \left(8l^2\sqrt{\left(r^2 + l^2\right)^3}\right) \approx 53{,}2\,\text{нН}$.

4.3.14. На оси кольца радиусом R, изготовленным из тонкой проволоки, находится материальная точка (рис. 4.12). При каком соотношении между расстоянием l от центра кольца до материальной точки и радиусом R сила гравитационного взаимодействия между кольцом и материальной точкой имеет максимальное значение?

Ответ: $l = R/\sqrt{2}$.

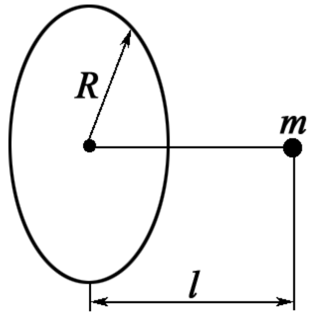


Рис. 4.12

4.3.15. Сила гравитационного взаимодействия между кольцом, изготовленным из тонкой проволоки, и материальной точкой, находящейся на оси кольца (рис. 4.12), имеет максимальное значение, когда точка находится на расстоянии l_{max} от центра кольца. Во сколько раз сила гравитационного взаимодействия между кольцом и материальной точкой, находящейся на расстоянии $l = 0{,}5l_{max}$ от центра кольца, меньше максимальной силы?

Ответ: $F_{max}/F = 1{,}3$.

4.3.16. Сила гравитационного взаимодействия между кольцом, изготовленным из тонкой проволоки, и материальной точкой, находящейся на оси кольца (рис. 4.12), имеет максимальное значение, когда точка находится на расстоянии l_{max} от центра кольца. Во сколько раз сила гравитационного взаимодействия между кольцом и материальной точкой, находящейся на расстоянии $l = 0{,}25l_{max}$ от центра кольца, меньше максимальной силы?

Ответ: $F_{max}/F = 2{,}28$.

4.3.17. Ракете, находящейся на поверхности Земли, сообщена начальная скорость $v_0 = 12{,}5$ км/с. К какому пределу будет стремиться скорость v ракеты, если расстояние ракеты от Земли бесконечно увеличивается? Сопротивление воздуха и притяжение других небесных тел, кроме Земли не учитывать.

Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 - 2gR_З} \approx 5{,}6$ км/с.

4.3.18. Искусственный спутник движется в экваториальной плоскости Земли с востока на запад по круговой орбите радиусом $r = 1\cdot10^4$ км. Определите скорость v этого спутника относительно Земли.

Ответ: $v = \dfrac{2\pi r}{T_З} + \sqrt{\dfrac{GM_З}{r}} \approx 7{,}04$ км/с.

4.3.19. Искусственный спутник Земли запущен с экватора и движется в плоскости экватора в направлении вращения Земли, причем угловая скорость вращения спутника ω больше угловой скорости $\omega_З$ Земли. Найдите отношение радиуса орбиты r спутника к радиусу $R_З$ Земли, при котором он периодически проходит над точкой запуска через каждые $t = 6$ ч.

Ответ: $\dfrac{r}{R_З} = \sqrt[3]{\dfrac{gt^2T_З^2}{4\pi^2 R_З (t+T)^2}} \approx 2{,}27$.

4.3.20. Определите массу Земли $M_З$, если спутник, движущийся в её экваториальной плоскости с запада на восток по круговой орбите радиусом r = 2·10^4 км, появляется над некоторым пунктом на экваторе через каждые временные интервалы Δt = 11,6 ч.

Ответ: $M_З = \dfrac{4\pi^2}{G}\left(\dfrac{T_З + \Delta t}{T_З \cdot \Delta t}\right)^2 r^3 \approx 5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг.

4.3.21. Известно, что средний период T обращения кометы Галлея вокруг Солнца равен 76 лет. Минимальное расстояние, на которое она приближается к Солнцу r_{min} = 8,94·10^7 км. Каково максимальное удаление r_{max} этой кометы от Солнца?

Ответ: $r_{max} = 2r_{ЗС} \cdot \sqrt[3]{\left(\dfrac{T}{T_{ЗС}}\right)^2} - r_{min} \approx 5{,}26 \cdot 10^9$ км.

4.3.22. Наибольшее расстояние от Солнца до кометы Галлея l_{max} = 35,3$r_{ЗС}$, а наименьшее l_{min} = 0,6$r_{ЗС}$, где $r_{ЗС}$ – радиус земной орбиты. Прохождение кометы вблизи Солнца наблюдалось в момент времени t_2 = 1986 год. В каком t_1 году произошло её предыдущее прохождение вблизи Солнца?

Ответ: $t_1 = t_2 - T_{ЗС}\sqrt{\left(\dfrac{l_{max} + l_{min}}{2r_{ЗС}}\right)^3} \approx$ в 1910 году.

4.3.23. Космический корабль вывели на круговую орбиту вблизи поверхности Земли. Какую дополнительную скорость Δv в направлении его движения необходимо кратковременно сообщить кораблю, чтобы он смог преодолеть земное тяготение?

Ответ: $\Delta v = \sqrt{gR_З}\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 3{,}27$ км/с.

4.3.24. Минимальное удаление космического корабля от поверхности Земли $b_К$ = 182 км, а максимальное удаление $a_К$ больше минимального на Δa = 68 км. Определите период $T_К$ обращения космического корабля вокруг Земли.

Ответ: $T_К = T_{ЛЗ}\sqrt{\left(\dfrac{2(R_З + b_К) + \Delta a}{2r_{ЛЗ}}\right)^3} \approx 88{,}3$ мин.

4.3.25. Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите радиуса $r = 2R_З$, где $R_З$ – радиус Земли. В результате кратковременного действия тормозного двигателя скорость спутника уменьшилась так, что он стал двигаться по эллиптической орбите, касающейся поверхности Земли. Через какое время t после начала торможения спутник приземлится?

Ответ: $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{2(0,75R_З)^3}{GM}} \approx 1,29$ ч.

5. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

1. Момент силы и момент импульса.
2. Основной закон динамики вращательного движения.
3. Закон сохранения момента импульса.
4. Работа и энергия при вращательном движении.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Причиной вращательного движения является момент силы

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}], \qquad |\mathbf{M}| = r \cdot F \cdot \sin\left(\widehat{\mathbf{r}\,\mathbf{F}}\right), \tag{5.1}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра вращения к точке приложения силы. Величина $h = r \cdot \sin\left(\widehat{\mathbf{r}\,\mathbf{F}}\right)$ есть кратчайшее расстояние от центра вращения до линии действия силы и $|\mathbf{M}| = h \cdot F$.

Момент силы можно представить в виде определителя матрицы третьего порядка

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}; \tag{5.2}$$

$$\mathbf{M} = \left(yF_z - zF_y\right) \cdot \mathbf{i} + \left(zF_x - xF_z\right) \cdot \mathbf{j} + \left(xF_y - yF_x\right) \cdot \mathbf{k},$$

где **i**, **j**, **k** – единичные векторы (орты) в системе координат, связанной с центром вращения; *x*, *y*, *z* – координаты точки приложения силы; F_x, F_y, F_z – соответствующие проекции вектора силы.

Если вращение осуществляется вокруг неподвижной оси, то

$$M_z = \pm F_{x,y} \cdot h.$$

Момент импульса (момент количества движения)

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}] = m[\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\upsilon}], \tag{5.3}$$

где $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\mathbf{p}$ – линейная скорость и импульс материальной точки или элемента системы. Момент импульса можно записать в виде определителя

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]; \tag{5.4}$$

$$\mathbf{L} = \left(yp_z - zp_y \right) \cdot \mathbf{i} + \left(zp_x - xp_z \right) \cdot \mathbf{j} + \left(xp_y - yp_x \right) \cdot \mathbf{k},$$

где p_x, p_y, p_z – соответствующие проекции вектора импульса.

Дифференциальная форма ***основного закона динамики вращательного движения***

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r},\ \mathbf{F}] = \mathbf{M}, \text{ где } \mathbf{M} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_k . \qquad (5.5)$$

В изолированной от внешних сил системе действует ***закон сохранения момента импульса***

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \text{ и } \mathbf{L} = \text{const}. \qquad (5.6)$$

Момент инерции тела

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 ,$$

где r_i – расстояние материальной точки массой m_i до оси вращения.

В случае непрерывного распределения масс

$$J = \int r^2 dm . \qquad (5.7)$$

Частный случай основного закона динамики вращательного движения

$$\mathbf{M} = J \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad (5.8)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – угловое ускорение тела.

Момент инерции J для некоторых простых по форме однородных тел массой m приведен в табл. 1.5.

Таблица 5.1

Тело	Положение оси вращения	Значение момента инерции
Обруч, кольцо, тонкостенный цилиндр радиуса R	Ось симметрии перпендикулярна плоскости торца	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр, диск радиуса R	Ось симметрии перпендикулярна торцу	$J = \frac{1}{2} mR^2$
Стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через середину	$J = \frac{1}{12} ml^2$
Стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через конец	$J = \frac{1}{3} ml^2$
Твердый сплошной шар радиуса R	Ось, проходящая через центр масс	$J = \frac{2}{5} mR^2$

Теорема Штейнера

$$J_0 = J_C + ma^2, \tag{5.9}$$

где J_C – момент инерции тела относительно оси C, проходящей через центр симметрии (см. таб. 5.1); J_0 – момент инерции относительно оси, параллельной оси C и отстоящей от нее на расстоянии a; m – масса тела.

Полная кинетическая энергия тела

$$K = \frac{1}{2} J\omega^2, \text{ или } K = \frac{1}{2}\frac{L^2}{J}, \tag{5.10}$$

Если тело участвует одновременно в поступательном и вращательном движении, то ***суммарная кинетическая энергия***

$$K = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}, \tag{5.11}$$

где m – масса тела; v_C – скорость центра масс тела; J_C – момент инергии тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость тела.

Методические указания

1. Сложное движение твердых тел удобно раскладывать на две составляющие: вращение вокруг оси и поступательное движение со скоростью оси вращения, если нет проскальзывания движущегося тела на поверхности качения.
2. Следует принимать во внимание, что при сложном движении существует связь между угловыми характеристиками движения и линейными характеристиками движения центра масс
   $$v_C = \omega R \text{ и } a_C = \varepsilon R,$$
   где R – расстояние от цента масс до оси вращения.
3. Закон сохранения момента импульса применим при условии равенства нулю геометрической суммы момента внешних сил. При этом силы, действующие внутри системы, в том числе и силы трения, можно исключать из рассмотрения.
4. Внешние силы могут не уравновешиваться, но их моменты могут быть равны нулю. В этом случае действует закон сохранения момента импульса.

5.1.1. Момент силы относительно центра вращения задан определителем

$$\mathbf{M}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 5 & 4 & 8\\ 3 & 6 & 2\end{vmatrix}.$$

Найдите: а) модуль момента силы относительно центра вращения; б) момент силы относительно оси Oz.

Ответ: а) $|\mathbf{M}|$ = 44 Н·м; б) M_z = 18 Н·м.

5.1.2. Момент импульса частицы массой m = 274 г относительно центра вращения задан определителем:

$$\mathbf{L}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 4 & 3 & 2\\ 5 & 7 & 4\end{vmatrix}.$$

Определите: а) скорость частицы; б) модуль момента импульса относительно центра вращения; в) момент импульса относительно оси z.

Ответ: а) v = 47,4 м/с; б) $|\mathbf{L}|$ = 14,4 кг·м^2/с; в) L_z = 13 кг·м^2/с.

5.1.3. К телу с закрепленной осью z приложена сила $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ в точке, отстоящей от оси z на расстоянии d = 0,5 м, где **i**, **j**, **k** – орты осей x', y', z' системы координат, начало которой совпадает с точкой приложения сил (рис. 5.25). Найдите момент силы относительно оси z.

Ответ: M_z = 2 Н·м.

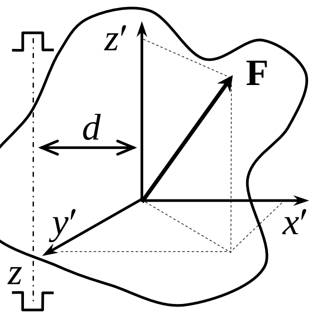


Рис. 5.25

5.1.4. Искусственный спутник массой m вращается вокруг Земли по круговой орбите. Расстояние спутника от поверхности Земли равно H. Определите момент импульса L спутника как функцию $f(m, M_З$ и $R_З)$, где $R_З$ и $M_З$ – радиус и масса Земли.

Ответ: $L=\sqrt{GM_{\text{Ç}}(R_{\text{Ç}}+H)}\cdot m$.

5.1.5. Лестница прислонена к стене. Угол между лестницей и полом медленно уменьшается. Если коэффициент трения лестницы о пол μ = 0,25, то при каком минимальном угле θ_{min} лестница начнет скользить? Считать, что трение между лестницей и стеной отсутствует.

Ответ: $\theta_{min} = \mathrm{arctg}[1/(2\mu)]$ = 63°.

5.1.6. Сила, приложенная к телу, выражается зависимостью $\mathbf{F} = 2{,}1\mathbf{i} + 3{,}4\mathbf{j}$ (в ньютонах). Чему равен момент M_z этой силы относительно оси z, если точка приложения этой силы имеет координаты: $x = 4{,}2$ м, $y = 6{,}8$ м, $z = 0$?

Ответ: $M_z = 0$.

5.1.7. Горизонтально расположенный обруч радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 5$ кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Зависимость угловой скорости вращения обруча от времени задается уравнением: $\omega = A + Bt$, где $A = 5$ рад/с; $B = 8$ рад/с^2. Найдите: а) момент силы M, приложенной к обручу; б) момент импульса L обруча в момент $t = 3$ с.

Ответ: $M = mR^2B = 1{,}6$ Н·м; $L = mR^2(A + Bt) = 5{,}8$ кг·м^2/с.

5.1.8. Однородный диск массой $m = 10$ кг и радиусом $R = 20$ см вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости. Уравнение вращения имеет вид: $\varphi = 5 + 4t^2 - t^3$ рад (время в секундах). По какому закону будет меняться момент силы, действующей на диск, и каково его значение в момент $t = 2$ с?

Рекомендации. Диск разбить на круговые элементы, ширина которых стремится к нулю, а момент силы определить как сумму элементарных моментов.

Ответ: $M_z = mR^2(4 - 3t)$; $M_z = -0{,}8$ Н·м.

5.1.9. На столе лежит стержень длиной $l = 10$ см. Перпендикулярно стержню летит шарик из пластилина со скоростью $v = 20$ м/с массой $m = 20$ г и попадает в конец стержня. Какой момент импульса L был передан стержню при соударении, если масса стержня $M = (2/3)m$.

Ответ: $L = mvl/5 = 8 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2/с.

5.1.10. Какую силу следует приложить к рукоятке (рис. 5.26), чтобы поднять груз массой m, который висит на нити, намотанной на шкив радиусом R_4?

Ответ: $F = mg \cdot \dfrac{R_2 \cdot R_4}{R_3 R}$.

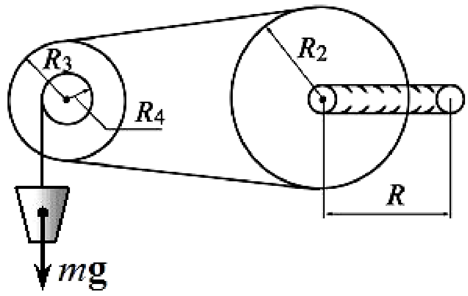


Рис. 5.26

5.1.11. На маховик действует сила, касательная к его боковой поверхности, которая изменяется по закону $F = At + Bt^2$, где $A = 10$ Н/с; $B = -2$ Н/с^2. Через какое время t после начала движения маховик остановится?

Ответ: $t = -(3/2) \cdot (A/B) = 7{,}5$ с.

5.1.12. Шарик массой $m = 10$ г и диаметром $d = 0{,}5$ см находится в стакане. Вращая стакан, шарик раскрутили так, что он стал иметь

n = 10 об/с. Систему предоставили самой себе. Через Δt = 10 с шарик остановился. Определите силу $F_{тр}$ трения шарика о дно и стенки стакана.

Ответ: $F_{тр} = (2/5)\cdot\pi nmd/\Delta t = 6{,}28\cdot10^{-5}$ Н.

5.1.13. Как изменится момент импульса ΔL вращающейся системы, если на нее действует в течение Δt = 10 с момент силы трения $M_{тр}$ = 10 Н·м?

Ответ: $\Delta L = M_{тр}\Delta t$ = 100 кг·м^2/с.

5.1.14. На диск, вращающийся с угловой скоростью ω = 100 рад/с, в течение t = 10 с действует тормозящая сила F = 5 Н, направленная по касательной к ободу диска. Какой будет угловая скорость ω_1 диска после действия силы, если его радиус R = 10 см, а масса m = 20 кг?

Ответ: $\omega_1 = \omega - 2Ft/(mR)$ = 50 рад/с.

5.1.15. Маховик в виде обруча на спицах приводится в движение через приводной ремень двигателем полезной мощностью N. Масса маховика рассредоточена по его ободу и равна m. Радиус маховика R. Определите число n оборотов маховика через время t. Считать, что потерь мощности нет.

Ответ: $n = \sqrt{Nt/\left(2m\pi^2R^2\right)}$.

5.1.16. Момент силы, действует на маховик по закону $M = a + bt^2$, где a = 0,5 Н·м; b = 0,5 Н·м/с^2. Определите массу m маховика, если известно, что его радиус R = 0,4 м и что угловое ускорение стало равным ε = 4,5 с$^{-2}$, через t = 2 с после начала действия вращательного момента.

Ответ: $m = 2(a + bt^2)/(\varepsilon R^2)$ = 6,9 кг.

5.1.17. На маховик действует вращающий момент M = 140 Н·м. В результате маховик получил угловое ускорение ε = 1 с$^{-2}$. Определите радиус R маховика, если его масса m = 300 кг распределена по ободу.

Ответ: $R = \sqrt{M/(m\varepsilon)} = 0{,}68\ \text{ì}$.

5.1.18. Зависимость момента силы относительно неподвижной оси определяется уравнением $M = a - ct^2$. Определите зависимость $\omega = f(t)$, если в начальный момент времени система неподвижна, а вся масса m системы сосредоточена на расстоянии R от оси вращения.

Ответ: $\omega = \dfrac{1}{mR^2}\left(at - \dfrac{1}{3}\text{ñ}t^3\right)$.

5.1.19. Гироскоп одним концом закреплен в подшипнике (рис. 5.27). На другой конец ги-

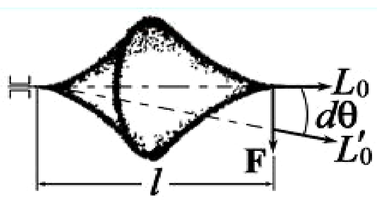


Рис. 5.27

роскопа подействовали силой F = 10 Н. Считая, что элементарное угловое смещение оси вращения в направлении действия силы равно $d\theta$, определите угловую скорость Ω прецессии гироскопа, если известно, что его длина l = 20 см, а момент импульса L_0 = 1,5 кг·м^2/с.

Ответ: $\Omega = Fl/L_0$ = 1,3 рад/с.

5.1.20. На горизонтальную ось насажан шкив на спицах. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз m. Опускаясь равноускоренно, груз прошел за первые t = 3 с расстояние h = 1,8 м. Масса шкива M = 480 г равномерно распределена по ободу. Используя основной закон динамики вращательного движения, определите массу подвешенного к шнуру груза.

Ответ: $m = M/[gt^2/(2h) - 1]$ = 20 г.

5.1.21. Найдите момент инерции J равностороннего треугольника, сторонами которого являются однородные стержни длиной l = 20 см и массой m = 10 г, относительно оси, проходящей через пересечение высот этого треугольника и перпендикулярно его плоскости.

Ответ: $J = (ml^2/4)\cdot(1 + 3\mathrm{tg}^2 30°) = 2\cdot10^{-4}$ кг·м^2.

5.1.22. В однородном диске массой m = 1 кг и радиусом R = 30 см вырезано круговое отверстие диаметром d = 20 см. Центр отверстия удален от оси диска на расстояние l = 15 см. Определите момент инерции J тела относительно оси, проходящей через центр диска и перпендикулярной его плоскости.

Ответ: $J = \frac{m}{2}\left[R^2 - \frac{d^2}{2R^2}\left(\frac{d^2}{8} + l^2\right)\right] = 4{,}2\cdot10^{-2}\ \text{êã}\cdot\text{ì}^{\,2}$.

5.1.23. Найдите момент инерции равностороннего треугольника ($\alpha = \pi/3$), в вершинах которого находятся шарики массой m = 10 г. Шарики соединены невесомыми стержнями, длины которых l = 20 см. Момент инерции определить: а) относительно оси, перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности; б) относительно оси, лежащей в плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности и одну из вершин.

Ответ: а) $J_1 = \frac{4}{3}\cdot\frac{ml^2}{\cos^2(\alpha/2)} = 4\cdot10^{-4}\ \text{êã}\cdot\text{ì}^{\,2}$; б) $J_2 = \frac{ml^2}{2} = 2\cdot10^{-4}\ \text{êã}\cdot\text{ì}^{\,2}$.

5.1.24. Найдите момент инерции J и момент количества движения L земного шара относительно оси вращения, если принять Землю за однородный шар массой M и радиусом R. Период вращения Земли T.

Ответ: $J = \dfrac{2}{5}MR^2 = 9{,}7\cdot 10^{37}$ êã·ì ^{2}; $L = \dfrac{4\pi MR^2}{5T} = 2\cdot 10^{33}$ êã·ì $^2/c$.

5.1.25. Четыре шара одинакового радиуса R = 10 см закреплены на концах двух взаимно перпендикулярных невесомых стержней. Расстояние между центрами шаров l = 1 м. Масса каждого шара m = 1 кг. Стержни пересекаются в центре их симметрии. Найдите момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости, в которой лежат стержни: а) считая шары объемными телами; б) считая шары материальными точками.

Ответ: а) $J_1 = m(8R^2/5 + l^2) = 1{,}016$ кг·м^2; б) $J_2 = ml^2 = 1$ кг·м^2.

5.2.1. Через блок массой m = 0,2 кг перекинут шнур, к концам которого подвешены грузы, масса которых равна m_1 = 0,3 кг и m_2 = 0,5 кг. Определите силы натяжения шнура по обе стороны блока во время движения, если массу блока считать равномерно распределенной по ободу. Шнур невесом. Трением пренебречь.

Ответ: $T_1 = \dfrac{m_1(2m_2 + m)}{m + m_1 + m_2}\cdot g = 3{,}53$ Í ; $T_2 = \dfrac{m_2(2m_2 + m)}{m + m_1 + m_2}\cdot g = 3{,}92$ Í .

5.2.2. Горизонтально расположенный однородный диск вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Масса диска m = 5 кг, радиус R = 0,2 м. Зависимость угловой скорости вращения диска от времени дается уравнением $\omega = A + Bt$, где B = 8 рад/с^2. Найдите величину касательной силы, приложенной к ободу диска. Трением пренебречь.

Ответ: $F = mRB/2 = 4$ Н.

5.2.3. Найдите момент инерции барабана, радиус которого равен R = 0,2 м, если известно, что груз массой m = 5 кг, прикрепленный к намотанному на барабан шнуру, опускается с ускорением a = 2 м/с^2.

Ответ: $J = mR^2(g/a - 1) = 0{,}78$ кг·м^2.

5.2.4. Два маленьких шарика массой m = 10 г каждый соединены тонким невесомым стержнем длиной l = 20 см. Определите момент инерции системы относительно оси, перпендикулярной стержню и а) проходящей через центр масс; б) смещенной относительно центра по перпендикуляру к стержню на расстояние $l/2$.

Ответ: а) $J_1 = ml^2/2 = 2\cdot 10^{-4}$ кг·м^2; б) $J_2 = ml^2 = 4\cdot 10^{-4}$ кг·м^2.

5.2.5. Определите момент инерции стержня длиной l = 30 см и массой m = 100 г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через точку, отстоящую от конца стержня на $1/3$ его длины.

Ответ: $J = 7ml^2/9 = 7{,}7\cdot10^{-3}$ кг·м^2.

5.2.6. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом R = 2 м, стоит человек. Масса платформы M = 90 кг, масса человека m = 80 кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через центр. Пренебрегая трением, найти, с какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек пойдет вдоль ее края со скоростью v = 2 м/с относительно платформы.

Ответ: $\omega = 2m\mathrm{v}/[R(2m + M)] = 0{,}64$ рад/с.

5.2.7. На скамье Жуковского стоит в центре человек и держит в руках стержень, расположенный вертикально по оси вращения. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью ω_1 = 1 рад/с. С какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться система, если повернуть стержень в горизонтальном положении так, что его середина совпадает с осью вращения? Длина стержня l = 2,4 м, его масса m = 8 кг. Суммарный момент инерции скамьи и человека J_0 = 6,0 кг·м^2.

Ответ: $\omega_2 = 12J_0\omega_1/(12J_0 + ml^2) = 0{,}61$ рад/с.

5.2.8. Платформа в виде диска может вращаться вокруг вертикальной оси. На краю платформы стоит человек. На какой угол φ повернется платформа, если человек обойдет ее по краю и вернется в исходную точку? Масса платформы M = 240 кг, масса человека m = 60 кг. Момент инерции для человека считать как для материальной точки.

Ответ: $\varphi = 4\pi m/(2m + M) = 2\pi/3$; $\varphi = 120°$.

5.2.9. Шарик массой m = 50 г, привязанный к нити длиной l_1 = 1 м, вращается с частотой n_1 = 1 об/с, описывая окружность в горизонтальной плоскости. Нить укоротили до значения l_2 = 0,5 м. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться шарик?

Ответ: $n_2 = n_1(l_1/l_2)^2 = 4$ об/с.

5.2.10. Однородный стержень длиной l = 1,0 м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В другой конец попадает пуля массой m_0 = 7 г, летящая перпендикулярно стержню, и застревает в нем. В результате стержень приобрел угловую скорость ω = 3,74 рад/с. Определите массу стержня, если скорость пули равнялась v_0 = 360 м/с.

Ответ: $m = 3m_0[\mathrm{v}_0/(\omega l) - 1] = 2$ кг.

5.2.11. Студент на скамье Жуковского держит на вытянутых руках гантели и вращается с угловой скоростью ω_1. Затем он прижимает руки к груди. В первоначальном положении расстояние между гантелями l_1 = 120 см, а во втором l_2 = 20 см. Считая, что момент импульса платформы и студента много меньше момента импульса гантелей, сравните начальную и конечную угловую скорости вращения.

Ответ: $\omega_1/\omega_2 = (l_2/l_1)^2 = 0{,}028$.

5.2.12. Имеются две одинаковые шайбы *А* и *Б*. Шайба *А* лежит неподвижно на абсолютно гладкой поверхности, а шайба *Б* движется поступательно и вращается с угловой скоростью $\omega_Б$ = 2 рад/с. Определите угловую скорость вращения системы из двух шайб после соударения, если удар был центральным и абсолютно неупругим.

Ответ: $\omega = \omega_Б/6 = 0{,}33$ рад/с.

5.2.13. На краю платформы массой M = 200 кг и радиусом R = 2 м стоит человек, масса которого равна m = 70 кг. Платформа вращается с угловой скоростью ω_1 = 1 рад/с. С какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек пойдет по ее краю со скоростью 5 км/ч относительно платформы? Рассмотреть два случая: а) человек движется по ходу вращения; б) против хода.

Ответ: а) $\omega_2 = \omega_1 - 2mv/\left[(2m+M)R\right] = 0{,}71$ рад/с;

б) $\omega_2 = \omega_1 + 2mv/\left[(2m+M)R\right] = 1{,}29$ рад/с.

5.2.14. В лаборатории для исследования магнитных полей используют магнитную стрелку на подставке. Муха, летящая на запад, села на конец стрелки. Определите начальную угловую скорость, приобретенную стрелкой после посадки. Принять: массу стрелки M = 20 г; длину стрелки l = 7 см; массу мухи m = 5 г; скорость её полета v = 5 м/с.

Ответ: $\omega = 6mv/\left[(3m+M)l\right] = 61{,}2$ рад/с.

5.2.15. Флюгер в виде однородного стержня может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через центр симметрии. Масса флюгера M = 100 г, а длина l = 20 см. Мальчик выстрелил в него из рогатки кусочком жвачки массой m = 30 г. Жвачка летела под углом α = 30° к линии флюгера в плоскости вращения последнего, и, попав в его конец, прилипла. При этом флюгер приобрел начальную угловую скорость ω = 2 рад/с. Определите жесткость k резинки рогатки, если мальчик растянул ее на Δx = 10 см. (Учесть, что у рогатки две резинки).

Ответ: $k = \dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{(3m+M)\omega l}{6\Delta x\cdot\sin\alpha}\right)^2 = 1{,}1$ Н/м.

5.2.16. Диск весом P катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью v. Найдите кинетическую энергию K диска.

Ответ: $K = \frac{3}{2}\frac{Pv^2}{g}$

5.2.17. Обруч и сплошной цилиндр поднимаются вверх по наклонной плоскости и достигают одинаковой высоты подъема. Определите отношение их линейных скоростей в начале подъема.

Ответ: $v_1/v_2 = \sqrt{3}/2$.

5.2.18. Маховик, обладающий кинетической энергией K = 160 Дж, останавливается под действием тормозящего момента M = 1 Н·м. Сколько оборотов N сделает маховик до полной остановки?

Ответ: $N = K/(2\pi M)$ = 25,5.

5.2.19. Сплошной цилиндр вращается вокруг оси, совпадающей с одной из образующих цилиндра. Цилиндр имеет массу m = 10 кг и радиус R = 20 см. Угловая скорость его вращения соответствует n = 1 об/с. Определите: а) импульс цилиндра; б) его кинетическую энергию.

Ответ: а) $p = 2\pi Rmn$ = 12,56 кг·м/с; б) $K = 3m(\pi Rn)^2$ = 11,8 Дж.

5.2.20. На покоящийся маховик, момент инерции которого равен J = 4,5 кг·м^2, начинает действовать вращающий момент M = 12,5 Н·м. Сколько оборотов N сделает маховик к этому моменту, когда его угловая скорость достигнет величины, соответствующей частоте n = = 100 об/мин?

Ответ: $N = \pi n^2 J/M$ = 3,14.

5.2.21. Твердое тело с моментом инерции J вращается с угловым ускорением ε и мгновенной угловой скоростью ω вокруг своей оси. Чему равна мощность N, сообщенная телу?

Ответ: $N = J\omega\varepsilon/2$.

5.2.22. Медный шар радиусом R = 10 см вращается, делая n = 2 об/с вокруг оси, проходящей через его центр масс. Какую работу A нужно совершить, чтобы увеличить угловую скорость вращения в k = 2 раза?

Ответ: $A = \frac{16}{15}\rho\pi^3 R^5 n^2 \left(k^2 - 1\right) = 35$ Дж, ρ – плотность меди.

5.2.23. С верхнего уровня наклонной плоскости одновременно скатываются без скольжения сплошной цилиндр и шар с одинаковыми массами и радиусами. Найдите отношение скоростей этих тел в любой точке наклонной плоскости.

Ответ: $v_{ц}/v_{ш} = \sqrt{14/15}$.

5.2.24. Плотность железного маховика ρ_1 = 7,8·10^3 кг/м^3, а маховика из плавленого кварца ρ_2 = 2,65·10^3 кг/м^3. Оба маховика имеют одинаковые прочности на разрыв и одинаковые массы. Каково отношение максимальных запасов энергии для этих маховиков? Известно, что максимальная кинетическая энергия зависит от предела прочности на разрыв по уравнению $K_{max} = V\sigma/4$, где V – объем; σ – предел прочности.

Ответ: $K_1/K_2 = \rho_2/\rho_1 =$ 0,34.

5.3.1. Вокруг горизонтальной оси может вращаться барабан радиусом R и моментом инерции J. На барабан намотан гибкий невесомый шнур. По шнуру вверх лезет обезьяна массой m. Определите ее ускорение, если ее скорость относительно Земли постоянна.

Ответ: $a = mR^2g/J$.

5.3.2. Уравнение силы, приложенной к частице, имеет вид $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$ (в ньютонах). Чему равен момент силы относительно точки с координатами, определяемыми радиусом-вектором $\mathbf{r}_{oo'} = 5\mathbf{j}$ (в метрах), если известно, что относительно начала координат (точки O) момент силы $\mathbf{M}_0 = 10\mathbf{k}$? Изобразите расположение точки O', силы $\mathbf{F}$ и моментов $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{M}_{0'}$.

Ответ: $\mathbf{M}_{0'} = 25\mathbf{k}$ Н·м.

5.3.3. Вращающийся с угловой скоростью ω_0 = 40 рад/с сплошной однородный цилиндр радиусом R = 0,2 м ставят без начальной поступательной скорости у основания наклонной плоскости, образующей угол α = 30° с горизонтом, и цилиндр катится без скольжения вверх по наклонной плоскости. Определите время, в течение которого цилиндр достигнет наивысшего положения на наклонной плоскости.

Ответ: $t = 3R\omega_0/(2g\sin\alpha) = 2{,}4$ с .

5.3.4. Однородный шар радиусом r скатывается без скольжения с вершины сферы радиусом R. Найти угловую скорость ω шара в момент отрыва от поверхности сферы.

Ответ: $\omega = \sqrt{10g(R+r)/(17r^2)}$.

5.3.5. Тонкий однородный стержень длиной l = 5 м и массой m = 500 кг лежит на двух опорах, расположенных по его концам. Одну из опор убрали. Какова будет максимальная нагрузка $F_{дав}$ на оставшуюся опору?

Ответ: $F_{дав} = mg/4 =$ 1226 Н.

5.3.6. Схема дисковой мельницы показана на рис. 3.28. Цилиндрический каток (бегун) вращается вокруг вертикальной оси OO' с угловой скоростью Ω, соответствующей n = 1 об/с, и катится по горизонтальной поверхности. Радиус бегуна R = 0,5 м и масса m = 10 кг. Определите полную силу давления бегуна на дно мельницы.

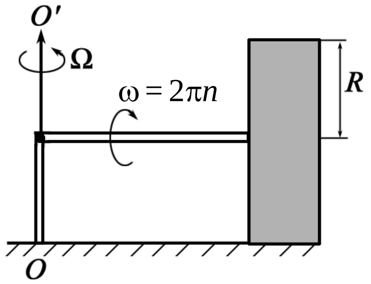


Рис. 5.28

Ответ: $F_{\text{дав}} = m\left(g + \Omega^2 R/2\right) = 200$ Н.

5.3.7. Концы тонкой нити плотно намотаны на ось радиуса r = 1 см диска Максвелла и прикреплены к горизонтальной штанге. Когда диск раскручивается, штангу поднимают так, что диск остается все время на одной высоте. Масса диска M = 2 кг и радиус R = 5 см. Масса стержня оси пренебрежимо мала. Найдите натяжение каждой нити и ускорение штанги.

Ответ: $T = Mg/2$ = 9,8 Н; $a = g\big/\left(R^2/(2r^2) - 1\right) = 0{,}73$ м/с^2.

5.3.8. На гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α = 30° с горизонтом, находится катушка с ниткой, конец которой прикреплен к вертикальной стенке так, что нитка параллельна наклонной плоскости. Масса катушки m = 200 г, ее момент инерции относительно собственной оси J = 0,45 г·м^2, радиус намотанного слоя ниток r = 3,0 см. Найдите ускорение оси катушки.

Ответ: $a = mg \cdot \sin\alpha\big/\left(m + J/r^2\right) = 0{,}14$ м/с^2.

5.3.9. Однородный сплошной цилиндр радиусом R и массой M подвешенный к потолку, может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. На цилиндр в один ряд намотан тонкий шнур длиной l и массой m. Найдите зависимость углового ускорения цилиндра от длины x свешивающегося шнура при раскручивании.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{2mg \cdot x}{Rl\left(M + 2m\right)}$.

5.3.10. По шару массой m = 5 кг и радиусом R = 10 см, лежащему на гладкой горизонтальной поверхности, быстро наносят удар в горизонтальном направлении, сообщая ему импульс p = 10 Н/с. Высота удара над центром шара равна $R/2$. Найдите скорость v центра масс шара после удара и его n частоту вращения.

Ответ: $v = p/m$ = 2 м/с; $n = 5p/(8\pi mR)$ = 4 об/с.

5.3.11. К однородному стержню массой m = 5 кг и длиной l = 1 м приложены две силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 5.29). Найдите ускорение a центра масс стержня и его угловое ускорение ε. Как изменится ответ, если силу $\mathbf{F}_2$ приложить к точке A? Модули сил соответственно равны $|\mathbf{F}_1|$ = 2 Н; $|\mathbf{F}_2|$ = 3 Н.

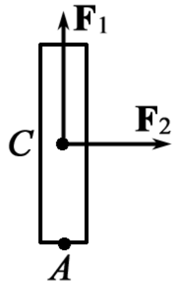


Рис. 5.29

Ответ: $a_1 = a_2 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}\Big/m = 0{,}72$ м/с^2;
$\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 6F_2/(ml) = 3{,}6$ с$^{-2}$.

5.3.12. Маховик в виде диска радиусом R и массой M может вращаться вокруг горизонтальной оси. На его цилиндрическую поверхность намотан шнур. К другому концу шнура привязан груз массой m. Груз подняли на высоту h и отпустили свободно. После падения с высоты h груз натянул шнур и привел маховик во вращательное движение. Какую угловую скорость приобрел при этом маховик?

Ответ: $\omega = 2m\sqrt{2gh}\Big/\big[(2m + M)R\big]$.

5.3.13. Шар массой m = 1 кг, катящийся без скольжения, ударяется о стенку и отскакивает от нее. Скорость шара до удара v_1 = 10 см/с, после удара v_2 = 8 см/с. Найдите количество теплоты Q, выделившееся при ударе.

Ответ: $Q = (7/10)\cdot m\left(v_1^2 - v_2^2\right) = 2{,}52$ мДж.

5.3.14. Два горизонтально расположенных диска вращаются вокруг общей оси. Ось проходит через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси равны: J_1 = 5 кг·м^2, J_2 = 10 кг·м^2, а угловые скорости: ω_1 = 2π рад/с и ω_2 = π рад/с. После падения верхнего диска на нижний, благодаря трению между ними, оба диска через некоторое время начинают вращаться как одно целое. Найдите общую угловую скорость ω системы из двух дисков и работу $A_{тр}$, которую совершили силы трения.

Ответ: $\omega = \left(J_1\omega_1 + J_2\omega_2\right)/\left(J_1 + J_2\right) = 1{,}3\pi$ рад/с;
$\left|A_{тр}\right| = J_1 J_2\left(\omega_1 - \omega_2\right)^2\Big/\left[2\left(J_1 + J_2\right)\right] = 16{,}4$ Дж.

5.3.15. На гладкой горизонтальной поверхности движется небольшая шайба со скоростью v. Двигаясь перпендикулярно к стержню, шайба ударяет абсолютно упруго стержень в конец. Масса стержня в η раз больше массы шайбы, а его длина равна l. Определите: а) скорость шайбы и угловую скорость вращения стержня после столкновения; б) значение η, при котором скорость шайбы после удара будет равна нулю; в) значение η, при котором шайба изменит направление движения на обратное.

Ответ: а) $v' = v\cdot\dfrac{4-\eta}{4+\eta}$, $\omega = \dfrac{12v}{l(4+\eta)}$; б) η = 4; в) η > 4.

5.3.16. Корабль движется со скоростью v = 36 км/ч по дуге радиусом R = 200 м. Найдите момент гироскопических сил, действующих на подшипник со стороны вала с маховиком, которые имеют момент инерции относительно оси вращения $J = 3{,}8\cdot10^3$ кг·м^2 и делают n = 300 об/мин. Ось вращения ориентирована вдоль корабля.

Ответ: $M = 2\pi nJ\text{v}/R =$ 6 кН·м.

5.3.17. Локомотив приводится в движение турбиной, ось которой параллельна осям колес. Направление вращения турбины совпадает с направлением вращения колес. Момент инерции ротора турбины относительно собственной оси J = 240 кг·м^2. Найдите добавочную силу давления на рельсы, обусловленную гироскопическими силами, когда локомотив движется по закруглению радиусом R = 250 м со скоростью v = 50 км/ч. Расстояние между рельсами l = 1,5 м. Турбина вращается с частотой n = 1500 об/мин.

Ответ: $F_{доб} = 2\pi nJ\text{v}/R^2 =$ 8,37 Н.

На наружный рельс давление увеличивается, на внутренний – уменьшается.

5.3.18. С какой наименьшей высоты должен съехать велосипедист, чтобы по инерции (без трения) проехать дорожку, имеющую форму «мертвой петли» радиусом R = 3 м, и не оторваться в верхней точке петли? Масса велосипедиста с велосипедом M = 75 кг, причем на массу колес приходится m = 3 кг. Колеса считать обручами.

Ответ: $H = 2R + \dfrac{R}{2}\left(1+\dfrac{m}{M}\right) = 7{,}56$ м.

5.3.19. Система состоит из груза m_1 = 1 кг, невесомого блока и сплошного цилиндра массой m = 10 кг и радиусом R = 10 см (рис. 5.30). Груз m_1 движется по горизонтальной плоскости без трения. Одновременно с цилиндра сматывается шнур. Определите: а) ускорение центра масс цилиндра; б) ускорение груза m_1; в) силу натяжения нити; г) угловое ускорение цилиндра.

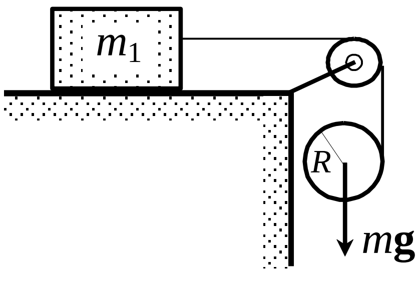


Рис. 5.30

Ответ: а) $a_c = g\cdot\dfrac{2+m/m_1}{3+m/m_1} = 9{,}1$ м/с^2; б) $a_1 = g\cdot\dfrac{m/m_1}{3+m/m_1} = 7{,}5$ м/с^2;

в) $T = mg/(3 + m/m_1) = 7{,}5$ Н; г) $\varepsilon = 2g/[R(3 + m/m_1)] = 15{,}1$ с$^{-2}$.

5.3.20. Сплошной однородный диск радиусом R = 10 см, имеющий начальную угловую скорость ω_0 = 50 рад/с (относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через центр масс), кладут на горизонтальную поверхность. Сколько оборотов N сделает диск до остановки, если коэффициент трения между поверхностью и диском μ = 0,1 и не зависит от угловой скорости вращения диска?

Рекомендации. Примените метод дифференцирования и интегрирования.

Ответ: $N = 3R\omega_0^2/(16\pi\mu g) \approx 15$.

5.3.21. Пользуясь приемом интегрирования, выведите формулу для определения момента инерции J шара.

Ответ: $J = 2mR^2/5$.

5.3.22. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска массой m_1 и на ней однородный шар массой m_2. К доске приложили постоянную горизонтальную силу F. С какими ускорениями будут двигаться доска и центр шара в отсутствие скольжения между ними?

Ответ: $a_д = F/(m_1 + 2m_2/7)$; $a_ш = 2a_д/7$.

5.3.23. Среднюю широту распространения льда на Земле можно принять равной 85° с.ш. и ю.ш. Если весь лед в приполярных областях растает, то талая вода повысит уровень Мирового океана на ΔR = 61 м. Пренебрегая неравномерным распределением талой воды по поверхности, а также моментом инерции льда до таяния, определить на сколько увеличится длительность суток. Землю считать однородным шаром радиусом $R_З$ и массой $M_З$.

Ответ: $\Delta T = T \cdot \dfrac{20\pi\rho_{H_2O} R_З^2 \Delta R}{3M_З} \approx 0{,}75$ с, где T = 24 часа.

5.3.24. Найдите кинетическую энергию гусеницы трактора, движущегося со скоростью v = 36 км/ч, если масса гусеницы m = 300 кг.

Ответ: $K = m\text{v}^2$ = 30 кДж.

5.3.25. Однородный шар массой m = 5 кг и радиусом r = 10 см катится без скольжения по горизонтальной плоскости, вращаясь вокруг оси симметрии. При этом центр шара движется со скоростью v = 5 м/с по окружности радиуса R = 40 см (рис. 5.31). Определите кинетическую энергию шара.

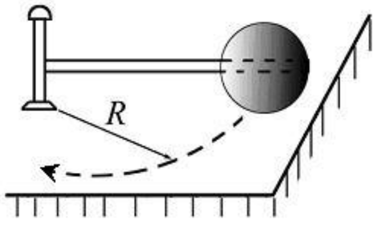


Рис. 5.31

Ответ: $K = \frac{7}{10} m v^2 \left(1 + \frac{2r^2}{7R^2}\right) = 89$ Дж.

6. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнение динамики точки в неинерциальной K'-системе отсчета, которая движется с постоянным ускорением **a** относительно инерциальной системы отсчета:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a},$$

где **F** – сила, с которой действуют на материальную точку другие тела; m – масса материальной точки; $\mathbf{a}'$ – ускорение точки относительно неинерциальной системы отсчета.

Уравнение динамики в неинерциальной K'-системе отсчета, которая вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг неподвижной оси:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + m\omega^2\mathbf{R} + 2m[\boldsymbol{\upsilon}', \boldsymbol{\omega}],$$

где **R** – радиус-вектор точки относительно оси вращения K'-системы

Центробежная сила инерции

$$\mathbf{F}_{цб} = m\omega^2\mathbf{R}.$$

Сила Кориолиса $\mathbf{F}_К = 2m[\boldsymbol{\upsilon}', \boldsymbol{\omega}]$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Через невесомый блок перекинута веревка с грузами массой m и M. Блок движется вниз с ускорением a. Пренебрегая трением на блоке, найти давление блока на ось, силу натяжения веревки и ускорения грузов.

Ответ: $F = 2T$; $T = \dfrac{2mM(g-a)}{m+M}$; $a_{отн} = \dfrac{(M-m)(g-a)}{(m+M)}$.

2. По поверхности вращающегося с угловой скоростью ω диска от края диска к его центру начинает ползти жук. Расстояние от жука до оси вращения зависит от времени как $r = R - bt^2$, где R и b – положительные постоянные. Определите ускорение жука как функцию времени.

Ответ: $a = \sqrt{\left(2b + \omega^2(R - bt^2)\right)^2 + \left(4\omega bt\right)^2}$.

3. Через блок, укрепленный на краю гладкого стола, перекинута веревка, соединяющая грузы с массой m и M (рис. 6.4). Стол движется вверх с

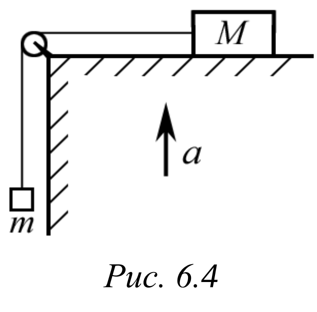


Рис. 6.4

ускорением a. Найдите ускорение груза m относительно стола. Трением и массой блока пренебречь.

Ответ: $a_{\text{отн}} = \dfrac{m}{m+M}(g+a)$.

4. Муфточка может свободно скользить вдоль кольца радиуса R = 20 см. С какой угловой скоростью ω вращается кольцо вокруг вертикальной оси, совпадающей с диаметром кольца, если муфточка при этом занимает устойчивое положение на высоте h = 10 см относительно нижней точки кольца.

Ответ: $\omega = \sqrt{g/(R-h)} = 9{,}9$ рад/с.

5. Движение частицы массой m = 10,0 г рассматривается в системе отсчета, вращающейся относительно инерциальной системы с угловой скоростью ω = 10,0 рад/с. Какую работу A совершают над частицей силы инерции при перемещении ее из точки, отстоящей от оси вращения на расстояние R_1 = 1,0 м, в точку, отстоящую на расстояние R_2 = 2,0 м?

Ответ: $A = m\omega^2(R_2^2 - R_1^2)/2 = 1{,}5$ Дж.

6. Винтовку навели на вертикальную черту мишени, находящуюся точно в северном направлении, и выстрелили. Пуля, попав в мишень, отклонилась на Δs = 5 см от черты. Выстрел произведен в горизонтальном направлении на широте φ = 60°, расстояние до мишени l = 800 м. Найдите скорость v пули. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $v = \omega l^2 \sin\varphi/\Delta s = 806{,}4$ м/с,

где ω = $2\pi/T$ – угловая скорость вращения Земли.

7. Горизонтальный диск вращают с угловой скоростью ω = 6 рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. По одному из диаметров диска движется небольшое тело массой m = 0,5 кг с постоянной относительно диска скоростью. Когда тело находится на расстоянии r = 30 см от оси вращения, диск действует на него силой F = 8 Н. Найдите скорость v′ тела относительно диска.

Ответ: $v' = \dfrac{1}{2\omega}\sqrt{\left(\dfrac{F}{m}\right)^2 - g^2 - r^2\omega^4} = 0{,}5$ м/с.

8. Самолет движется на восток вдоль параллели с географической широтой φ = 30°. Скорость самолета v = 200 м/с. Определите вес тела P на самолете, если взвешивание производится на пружинных весах. Вес того же тела, неподвижного относительно Земли, в той же точке земной поверхности равен $P_0 \approx mg$ = 10 Н.

Ответ: $P \approx P_0 \cdot \left(1 - 2\dfrac{\omega v}{g} \cdot \cos\varphi\right) = 9{,}97$ Н,

где $\omega = 2\pi/T = 7{,}27 \cdot 10^{-5}$ рад/с – угловая скорость вращения Земли.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

6.1.1. Ведерко с водой, привязанное к веревке длиной l = 60 см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найдите наименьшую скорость v_{min} вращения, при которой вода не выливается из ведерка в верхней точке траектории. Задачу рассмотреть с точки зрения вращающейся системы отсчета.

Ответ: $v_{\min} = \sqrt{gl} = 2{,}42$ м/с.

6.1.2. Кабина лифта, у которой расстояние от пола до потолка 3 м, начала подниматься с ускорением a = 1,3 м/с^2. Через Δt = 1 с после начала подъема с потолка кабины стал падать болт. Найдите время t свободного падения болта. Задачу решить относительно системы отсчета, связанной с лифтом.

Ответ: $t = \sqrt{2h/(g+a)} = 0{,}735$ с.

6.1.3. В ракете установлен математический маятник длиной l. Чему равен период T колебаний такого маятника, если ракета начнет подниматься с Земли вертикально вверх с ускорением a? Что станет с маятником в состоянии невесомости, если ракета будет выведена на орбиту и станет искусственным спутником Земли?

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{l/(g+a)}$. Колебания маятника прекратятся.

6.1.4. Тело массой m = 1 кг, привязанное к нити длиной l = 1 м, равномерно вращают в вертикальной плоскости. С какой максимальной частотой ν можно производить вращение, чтобы нить не порвалась, если максимальный груз, который может выдержать нить, M = 25 кг? Задачу рассмотреть относительно вращающейся системы отсчета.

Ответ: $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{(M-m)g/l} = 2{,}44$ с$^{-1}$.

6.1.5. На экваторе с высоты h = 500 м на поверхность Земли падает тело (без начальной скорости относительно Земли). На какое расстояние Δx и в какую сторону отклонится от вертикали тело при падении?

Ответ: $\Delta x \approx (2/3)\omega h \cdot \sqrt{2h/g} = 24$ см.

6.1.6. Мотоциклист совершает крутой поворот, двигаясь по дуге окружности радиусом R = 20 м со скоростью v = 20 м/с. Под каким углом α к вертикали он должен наклониться, чтобы сохранить равновесие? Задачу рассмотреть с точки зрения вращающейся системы отсчета.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(v^2/(gR)\right) = 63{,}9^\circ$.

6.1.7. Горизонтально расположенный гладкий стержень AB вращают с угловой скоростью ω = 2,0 рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец A. По стержню свободно скользит муфточка массой m = 0,50 кг, движущаяся из точки A с начальной скоростью v_0 = 1,0 м/с. Найдите действующую на муфточку силу Кориолиса $F_К$ (в системе отсчета, связанной со стержнем) в момент, когда муфточка оказалась на расстоянии r = 50 см от оси вращения.

Ответ: $F_К = 2m\omega^2 r \cdot \sqrt{1 + \left(v_0/(\omega r)\right)^2} = 2{,}8$ Н.

6.1.8. Скоростной поезд массой m = 2000 т движется на северной широте φ = 60°. Определите: а) модуль и направление силы бокового давления поезда на рельсы, если он движется вдоль меридиана со скоростью v_0 = 54 км/ч; б) в каком направлении и с какой скоростью должен был бы двигаться поезд, чтобы результирующая сил инерции, действующих на поезд в системе отсчета «Земля», была равна нулю.

Ответ: а) $F = 2mv\omega \cdot \sin\varphi$ = 3,8 кН (на правый рельс);
б) $v = (\omega R/2) \cdot \cos\varphi$ = 420 км/ч.

6.1.9. Трамвайный вагон массой m = 5 т идет по закруглению радиусом R = 128 м. Найдите силу бокового давления F колес на рельсы при скорости движения v = 9 км/ч. Задачу рассмотреть с точки зрения вращающейся системы отсчета.

Ответ: $F = mv^2/R = 244$ Н.

6.1.10. На экваторе выстрелили вертикально вверх пулей из ружья. На какое расстояние и в какую сторону отклонится от вертикали пуля при подъеме на максимальную высоту? Начальная скорость пули при выстреле v_0 = 500 м/с.

Ответ: $\Delta x = \dfrac{2}{3}\dfrac{v_0^3\omega}{g^2} = 63$ м,

где $\omega = 2\pi/T = 7{,}27 \cdot 10^{-5}$ рад/с – угловая скорость вращения Земли.

6.1.11. Самолет летает на постоянной высоте по окружности радиуса R с постоянной скоростью v. В кабине самолета установлены пружинные и маятниковые часы. Какое время полета t' покажут маятниковые часы, если это время, измеренное пружинными часами, равно t. Силу Кориолиса, ввиду ее малости, не учитывать.

Ответ: $t' = t[1 + v^4/(4R^2g^2)]$.

6.1.12. Тонкий стержень длины l = 1 м вращается с угловой скоростью ω = 5 рад/с вокруг одного из концов, описывая круговой конус (физический конический маятник). Найдите угол φ отклонения стержня от вертикали. Задачу рассмотреть с точки зрения вращающейся системы отсчета.

Ответ: $\varphi = \arccos\left(3g/(2l\omega^2)\right) = 54^\circ$.

6.1.13. Какова должна быть наименьшая скорость v_{min} мотоциклиста, для того чтобы он мог ехать по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом R = 4 м по горизонтальной окружности? Коэффициент трения скольжения между шинами мотоцикла и поверхностью цилиндра μ = 0,4. Задачу рассмотреть с точки зрения вращающейся системы отсчета.

Ответ: $v_{min} = \sqrt{gR/\mu} = 9{,}9$ м/с.

6.1.14. Через невесомый блок перекинута веревка с грузами массой m и M. Блок движется вверх с ускорением a. Пренебрегая трением на блоке, найти давление блока на ось, силу натяжения веревки и ускорения грузов.

Ответ: $F = 2T$; $T = \dfrac{2mM}{m+M}(g+a)$; $a_{отн} = \dfrac{(M-m)}{(m+M)}(g+a)$.

6.1.15. Человек массой m = 60 кг идет равномерно по периферии горизонтальной круглой платформы радиусом R = 3,0 м, которую вращают с угловой скоростью ω = 1,0 рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Найдите горизонтальную составляющую силы, действующей на человека со стороны платформы, если результирующая сил инерции, приложенных к нему в системе отсчета «платформа», равна нулю.

Ответ: $F = m\omega^2R/4 = 45$ Н.

6.1.16. Мотоциклист, масса которого вместе с мотоциклом равна m = 500 кг, совершает крутой поворот, двигаясь по окружности радиуса R = 20 м. При этом он наклонился на угол α = 30° от вертикали. Найдите скорость v мотоциклиста и центробежную силу $F_{цб}$ инерции, действующую на мотоциклиста.

Ответ: $v = \sqrt{Rg \cdot \mathrm{tg}\alpha} = 10{,}64$ м/с; $F_{цб} = mg \cdot \mathrm{tg}\alpha = 2829$ Н.

6.1.17. В системе отсчета, вращающейся вокруг неподвижной оси с $\omega = 5{,}0$ рад/с, движется небольшое тело массой $m = 100$ г. Какую работу , совершила центробежная сила инерции при перемещении этого тела по произвольному пути из точки 1 в точку 2, которые расположены на расстояниях $r_1 = 30$ см и $r_2 = 50$ см от оси вращения?

Ответ: $A = m\omega^2(r_2^2 - r_1^2)/2 = 0{,}2$ Дж.

6.1.18. Муфточка A может свободно скользить вдоль гладкого стержня, изогнутого в форме полукольца радиуса R (рис. 6.5). Систему привели во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OO'. Найдите угол θ, соответствующий устойчивому положению муфточки.

Ответ: 1) при $\omega^2 R > g$ $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \arccos[g/(\omega^2 R)]$;
при $\omega^2 R < g$ $\theta_1 = 0$.

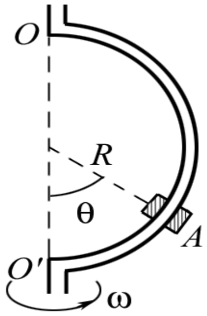


Рис. 6.5

6.1.19. Как изменится период колебаний математического маятника при перемещении его точки подвеса из инерциальной системы: 1) в вагон, движущийся прямолинейно в горизонтальном направлении с ускорением $a = 4{,}9$ м/с^2? 2) в вагон, движущегося с постоянной скоростью v = 90 м/с по окружности радиусом $R = 100$ м?

Ответ: 1) $T_1' = T\Big/\sqrt[4]{1+\left(\dfrac{a}{g}\right)^2} = 0{,}946T$; 2) $T_2' = T\Big/\sqrt[4]{1+\left(\dfrac{v^2}{gR}\right)^2} = 0{,}347T$,

где T – период колебаний маятника в инерциальной системе.

6.1.20. На широте $\varphi = 45°$ из ружья, закрепленного горизонтально в плоскости меридиана, произведен выстрел по мишени, установленной на расстоянии $l = 100{,}0$ м от дула ружья. Центр мишени находится на оси ружейного ствола. Считая, что пуля летит горизонтально с постоянной скоростью v = 500 м/с, определить, на какое расстояние Δx и в какую сторону отклонится пуля от центра мишени, если выстрел произведен в направлении: а) на север; б) на юг.

Ответ: а) $\Delta x_1 = (\omega l^2 \sin\varphi)/v = 1{,}03$ мм вправо на восток;
б) $\Delta x_2 = 1{,}03$ мм вправо на запад.

6.1.21. Во вращающейся системе отсчета частица массой $m = 20$ г переместилась из точки, отстоящей от оси вращения на расстояние $R_1 = 1$ м, в точку, отстоящую на расстояние $R_2 = 2$ м. При этом силы инерции совершили над частицей работу $A = 2$ Дж. Найдите угловую скорость ω вращения системы отсчета.

Ответ: $\omega = \sqrt{2A/\left[m\left(R_2^2 - R_1^2\right)\right]} = 8{,}165$ рад/с.

6.1.22. Шарик массой m = 500 г, движется с относительной скоростью v′ = 1 м/с вдоль жесткого стержня, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω = 100 рад/с, перпендикулярной к плоскости вращения. Чему равна сила F бокового давления шарика на стержень?

Ответ: $F = 2m\omega v'$ = 100 Н.

6.1.23. Поезд массой m = 3000 т движется на северной широте φ = 30°. С какой боковой силой F давят рельсы на колеса поезда, если скорость поезда равна v = 60 км/ч и направлена вдоль меридиана? В каком направлении и с какой скоростью v должен двигаться поезд, чтобы сила бокового давления была равна нулю?

Ответ: а) $F = 2mv\omega\cdot\sin\varphi$ = 3,66 кН; б) $v = \omega R\cos\varphi/2$ = 727,5 км/ч. Поезд движется на запад вдоль параллели.

6.1.24. Самолет летит с постоянной скоростью, описывая окружность на постоянной высоте. Под каким углом φ по отношению к полу салона самолета установится нить отвеса? Найдите период T малых колебаний математического маятника внутри самолета, если длина маятника равна l, корпус самолета наклонен к направлению горизонта под углом α.

Ответ: φ = 90°; $T = 2\pi\sqrt{l\cos\alpha/g}$.

6.1.25. Небольшое тело падает без начальной скорости на Землю на экваторе с высоты h = 10,0 м. В какую сторону и на какое расстояние Δx отклонится тело от вертикали за время падения τ? Сопротивлением воздуха пренебречь. Сравнить найденное значение Δx с разностью Δs путей, которые пройдут вследствие вращения Земли за время τ точка, находящаяся на высоте h, и точка, находящаяся на земной поверхности.

Ответ: $\Delta x = (2/3)\omega_З h\cdot\sqrt{2h/g} = 0{,}69$ мм; $\Delta s = \omega_З h\cdot\sqrt{2h/g}$, где $\omega_З$ – угловая скорость вращения Земли.

6.2.1. Вода течет со скоростью v по U-образной трубке, лежащей в горизонтальной плоскости. Площадь сечения трубки S, радиус закругления R. Найти: *а*) модуль силы F, действующей со стороны текущей воды на стенки изогнутой части трубки; *б*) суммарный импульс p воды в закругленной части трубки.

Ответ: *а*) $F = 2\rho S v^2$; *б*) $p = 2\rho S R v$, ρ – плотность воды.

6.2.2. Тело массой m_1 = 1 кг находится на наклонной плоскости подвижного клина массой m_2 = 5 кг. Плоскость клина составляет угол

α = 30° с горизонтом. Найдите величину силы инерции $F_{ин}$, действующей на тело массой m_1 в системе отсчета, связанной с клином. Силами трения пренебречь.

Ответ: $F_{ин} = m_1 g \sin\alpha \cos\alpha/(\sin^2\alpha + m_2/m_1) = 0{,}8$ Н.

6.2.3. Горизонтально расположенный стержень вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец. Расстояние от оси до другого конца стержня l = 1,5 м. На стержень надета муфта массой m = 200 г. Муфта закреплена с помощью нити на расстоянии l = 0,3 м от оси вращения. В момент t = 0 нить пережигают, муфта начинает скользить и, спустя время τ = 0,5 с, слетает со стержня. Найдите угловую скорость ω вращения стержня и силу F, с которой стержень действует на муфту в момент τ. Трением пренебречь.

Ответ: $\omega = \frac{1}{\tau}\cdot\ln\left(\frac{l}{l_1} + \sqrt{\left(\frac{l}{l_1}\right)^2 - 1}\right) = 4{,}58$ рад/с; $F = 2m\omega^2\sqrt{l^2 - l_1^2} = 12{,}3$ Н.

6.2.4. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. По диску движется равномерно на неизменном расстоянии от оси вращения частица. Найдите мгновенное значение: а) скорости частицы $\boldsymbol{\upsilon}'$ относительно диска, при которой сила Кориолиса будет уравновешиваться центробежной силой инерции. Выразить $\boldsymbol{\upsilon}'$ через мгновенное значение радиуса-вектора $\mathbf{r}$, проведенного к частице из центра диска; б) скорости частицы $\boldsymbol{\upsilon}$ относительно неподвижной системы отсчета при тех же условиях.

Ответ: а) $\boldsymbol{\upsilon}' = [\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}]/2$; б) $\boldsymbol{\upsilon} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]/2$.

6.2.5. По диаметру вращающегося диска движется небольшое тело массой m = 0,3 кг с постоянной относительно диска скоростью v = 0,5 м/с. Когда тело находится на расстоянии r = 20 см от оси вращения, диск действует на тело силой F = 3 Н. Найдите угловую скорость ω вращения диска.

Ответ: $\omega = \frac{\sqrt{2}v}{r}\sqrt{\sqrt{1 + r^2 a} - 1} = 1{,}86$ рад/с, где $a = \frac{1}{4v^4}\left(\frac{F^2}{m^2} + g^2\right)$.

6.2.6. По поверхности вращающегося с угловой скоростью ω диска от его центра по радиусу начинает двигаться небольшое тело. Ускорение тела относительно диска равно a'. Найдите зависимость от времени ускорения a тела относительно Земли.

Ответ: $a=\sqrt{\left(a'-\omega^2 a't^2/2\right)^2+\left(2\omega a't\right)^2}$.

6.2.7. Найдите дальность *s* полета тела, брошенного со скоростью v_0 = 10 м/с под углом α = 30° к горизонту, в неинерционной системе отсчета, движущейся с ускорением *a* = 1 м/с^2 в горизонтальном направлении, совпадающем с направлением полета тела.

Ответ: $s=\dfrac{2v_0^2\sin^2\alpha}{g^2}\left(g\cdot\mathrm{ctg}\alpha-a\right)=8{,}3$ м.

6.2.8. Имеется горизонтально расположенное ружье, дуло которого совпадает с осью вертикального цилиндра (рис. 6.6). Цилиндр вращается с угловой скоростью ω: а) Считая, что пуля, выпущенная из ружья, летит горизонтально с постоянной скоростью v, найти смещение *s* точки *B* цилиндра, в которую попадает пуля, относительно точки *A*, которая находится против дула в момент выстрела. Решить задачу двумя способами: в неподвижной системе отсчета и в системе отсчета, связанной с цилиндром; б) Зависит ли результат от того, вращается ружье вместе с цилиндром или неподвижно?

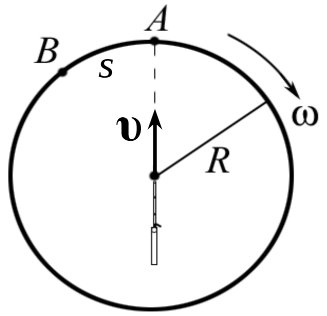


Рис. 6.6

Ответ: а) $s = \omega R^2/\mathrm{v}$; б) не зависит.

6.2.9. Горизонтально расположенный диск вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Вдоль радиуса диска движется частица массой *m*, расстояние которой от центра диска изменяется со временем по закону $r = at$, где *a* – константа. Найдите результирующий момент **M** сил, действующих на частицу в системе отсчета, связанной с диском. Имеется в виду момент относительно центра диска.

Ответ: $\mathbf{M} = -2ma^2t\cdot\boldsymbol{\omega}$.

6.2.10. Горизонтально расположенный диск вращается с угловой скоростью ω = 5,0 рад/с вокруг своей оси. Из центра диска с начальной скоростью v_0 = 2,0 м/с движется небольшая шайба массой *m* = 160 г. На расстоянии *r* = 50 см от оси ее скорость оказалась равной v = 3,0 м/с относительно диска. Найдите работу *A*, которую совершила при этом сила трения, действующая на шайбу, в системе «диск».

Ответ: $A=\dfrac{m}{2}\left(v^2-v_0^2-\omega^2r^2\right)=-0{,}1$ Дж.

6.2.11. Винтовку навели на вертикальную черту мишени, находящейся точно в северном направлении, и выстрелили. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти, на сколько x сантиметров и в какую сторону пуля, попав в мишень, отклонится от черты. Выстрел произведен в горизонтальном направлении на широте φ = 60°, скорость пули v = 900 м/с, расстояние до мишени s = 1000 м.

Ответ: $x = (\omega s^2/\text{v})\cdot\sin\varphi$ = 7 см.

6.2.12. Груз массой M находится на столе, который движется горизонтально с ускорением a. К грузу присоединена нить, перекинутая через блок (рис. 6.7). К другому концу нити подвешен груз массой m. Найдите ускорения a грузов и силу T натяжения нити.

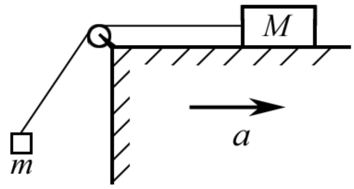


Рис. 6.7

Ответ: $a_{\text{отн}} = \dfrac{m\sqrt{a^2+g^2}+Ma}{m+M}$; $T = \dfrac{mM}{m+M}\left(\sqrt{a^2+g^2}-a\right)$.

6.2.13. Тело брошено со скоростью v_0 = 10 м/с под углом α = 30° к горизонту в неинерциальной системе отсчета, движущейся с горизонтальным ускорением a = 1 м/с^2, в направлении полета тела. Под каким углом φ к горизонту тело упадет на Землю?

Ответ: $\varphi = \operatorname{arctg}\left[1/\left(\operatorname{ctg}\alpha - 2a/g\right)\right] = 33{,}2°$.

6.2.14. Имеется система отсчета, вращающаяся относительно инерциальной системы вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω. Из точки O, находящейся на оси z, вылетает в перпендикулярном к оси направлении частица массой m и летит относительно инерциальной системы прямолинейно с постоянной скоростью v. Найдите наблюдаемый во вращающейся системе отсчета момент импульса $\mathbf{L}(t)$ частицы относительно точки O. Показать, что возникновение $\mathbf{L}(t)$ обусловлено действием силы Кориолиса.

Ответ: $\mathbf{L}(t) = -m\text{v}^2t^2\cdot\boldsymbol{\omega}$.

6.2.15. Горизонтальный диск радиусом R вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его край. По периферии диска равномерно относительно него движется частица массы m. В момент, когда она оказывается на максимальном расстоянии от оси вращения, результирующая сил инерции $F_{\text{ин}}$, действующих на частицу в системе «диск», обращается в нуль. Найдите: а) ускорение a' частицы относительно диска; б) зависимость $F_{\text{ин}}$ от расстояния до оси вращения.

Ответ: а) $a' = \omega^2 R$; б) $F_{\text{ин}} = m\omega^2 r\sqrt{(2R/r)^2-1}$.

6.2.16. Горизонтальный диск вращают с угловой скоростью ω = 6 рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. По одному из диаметров диска движется небольшое тело массой m = 0,5 кг с постоянной относительно диска скоростью v′ = 0,5 м/с. Найдите силу F, с которой диск действует на это тело в момент, когда оно находится на расстоянии r = 30 см от оси вращения.

Ответ: $F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 r^2 + (2v'\omega)^2} = 8$ Н.

6.2.17. По поверхности вращающегося с угловой скоростью ω диска из центра по радиусу начинает ползти жук. Расстояние от жука до оси вращения зависит от времени как $r = bt^2$. Определите ускорение жука как функцию времени.

Ответ: $a = \sqrt{\left(2b - \omega^2 bt^2\right)^2 + \left(4\omega bt\right)^2}$.

6.2.18. Через блок, укрепленный на краю гладкого стола, перекинута веревка, соединяющая грузы с массой m и M (рис. 6.8). Стол движется вниз с ускорением a. Найдите ускорение груза m относительно стола. Трением и массой блока пренебречь.

Ответ: $a_{\text{отн}} = \dfrac{m}{m+M}(g - a)$.

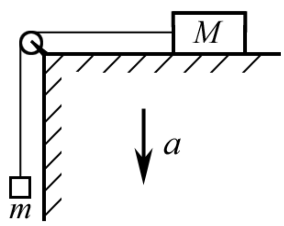


Рис. 6.8

6.2.19. Стержень OA вращается относительно вертикальной оси OB с угловой скоростью ω. Угол между осью и стержнем α. По стержню без трения скользит муфта массой M, связанная с точкой O пружиной жесткостью k (рис. 6.9). В недеформированном состоянии длина пружины l_0. Определите положение муфты при вращении.

Ответ: $l = (kl_0 - Mg\cos\alpha)/(k - M\omega^2\sin^2\alpha)$.

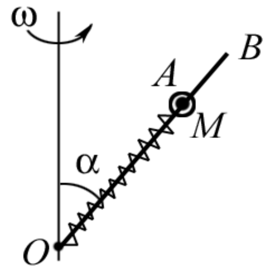


Рис. 6.9

6.2.20. Горизонтально расположенный стержень вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец, с угловой скоростью ω = 1,0 рад/с. Расстояние от оси до конца стержня l = 1 м. На стержень надета муфта массой m = 0,1 кг. Муфта закреплена с помощью нити на расстоянии l_0 = 0,1 м от оси вращения. В момент t = 0 нить пережигают, и муфта начинает скользить по стержню практически без трения. Найдите: а) время τ, спустя которое муфта слетит со стержня; б) силу F, с которой стержень действует на муфту в момент τ; в) работу A, которая совершается над муфтой за время τ в неподвижной системе отсчета.

Ответ: а) $\tau = \dfrac{1}{\omega}\ln\left(\dfrac{l}{l_0} + \sqrt{\left(\dfrac{l}{l_0}\right)^2 - 1}\right) = 3$ с;

б) $F = m\sqrt{4\omega^4\left(l^2 - l_0^2\right) + g^2} = 1$ Н; в) $A = m\omega^2\left(l^2 - l_0^2\right) \approx 0{,}1$ Дж.

6.2.21. Горизонтально расположенный гладкий стержень *AB* вращают с угловой скоростью ω = 2 рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец *A*. По стержню свободно скользит муфточка массой $m = 0{,}5$ кг, движущаяся из точки *A* с некоторой начальной скоростью. В тот момент, когда муфточка находится на расстоянии $r = 0{,}5$ м от оси вращения, на нее действует сила Кориолиса $F_{\text{К}}$, равная 3 Н. Найдите начальную скорость муфточки.

Ответ: $v_0 = \omega r\sqrt{\left(\dfrac{F_{\text{К}}}{2m\omega^2 r}\right)^2 - 1} = 1{,}1$ м/с.

6.2.22. Пластинка радиусом $r = 20$ см равномерно вращается в горизонтальной плоскости, совершая $n = 33$ оборота в минуту. От центра пластинки к ее краю ползет строго вдоль радиуса маленький жучок. Его скорость относительно пластинки постоянна по величине и составляет v = 0,1 м/с. При каком минимальном коэффициенте трения μ жучка о поверхность пластинки он сумеет добраться, таким образом, до края пластинки?

Ответ: $\mu = \dfrac{2\pi n}{g}\sqrt{\left(2\pi n r\right)^2 + 4v^2} = 0{,}25$.

6.2.23. Небольшое тело поместили на вершину гладкого шара радиусом *R*. Затем шару сообщили в горизонтальном направлении постоянное ускорение a_0, и тело начало скользить вниз. Найдите скорость v тела относительно шара в момент отрыва.

Пояснение: В точке отрыва сумма проекций силы инерции и силы тяжести на нормаль к поверхности шара равна $m\text{v}^2/R$, а кинетическая энергия равна работе силы инерции и силы тяжести.

Ответ: $v = \sqrt{2gR/3}$.

6.2.24. Гладкий горизонтальный диск вращают с угловой скоростью ω = 5,0 рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. В центре диска поместили небольшую шайбу массой $m = 60$ г и сообщили ей толчком горизонтальную скорость $\text{v}_0 = 2{,}6$ м/с. Найдите модуль силы Кориолиса $F_{\text{К}}$, действующей на шайбу в системе отсчета «диск» через $t = 0{,}50$ с после начала движения.

Ответ: $F_K = 2m\omega v_0\sqrt{1+\omega^2 t^2} = 4,2$ Н.

6.2.25. Винтовку навели на вертикальную черту мишени, находящуюся точно в северном направлении, и выстрелили. На каком расстоянии s находилась мишень, если пуля, попав в мишень, отклонилась на $h = 7$ см от черты. Выстрел произведен в горизонтальном направлении на широте φ = 60°, скорость пули v = 900 м/с. Сопротивление воздуха пренебречь.

Ответ: $s = \sqrt{hv/(\omega \sin\varphi)} = 10^3$ м.

7. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Постулаты Эйнштейна

1. Любой процесс протекает одинаково в изолированной материальной системе, находящейся в состоянии покоя или равномерного, прямолинейного движения, иначе говоря, все законы физики, имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

2. Скорость света в вакууме не зависит ни от движения источника света, ни от движения наблюдателя. Она инвариантна во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета.

Преобразование координат и времени Лоренца

Система K' движется со скоростью v вдоль оси Ox неподвижной системы отсчета K (рис. 7.1):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где x, y, z, t – координаты и время в неподвижной системе отсчета K; x', y', z', t' – координаты и время в подвижной относительно K системе отсчета K';

$$\beta = v/c,$$

где v – скорость системы K' относительно K; c – скорость света. Система K' движется относительно системы K со скоростью v вдоль оси Ox (оси x' и x совпадают (рис. 7.1), а оси y' и y и z' и z параллельны).

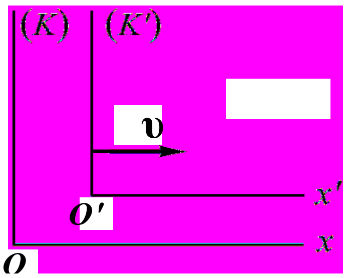


Рис. 7.1

Лоренцово сокращение длины

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1-\beta^2},$$

где l_0 – собственная длина стержня; l – длина стержня в лабораторной системе K, где наблюдатель неподвижен.

Релятивистское замедление времени

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ или } \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $\tau_0 = \Delta t_0$ – промежуток времени между двумя событиями, измеренный движущимися вместе с телом часами; $\tau = \Delta t$ – промежуток времени между теми же двумя событиями, измеренный покоящимися часами.

Релятивистский закон сложения скоростей

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}; \qquad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}; \qquad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}.$$

Эти формулы для системы K', движущейся со скоростью v в положительном направлении оси Ox неподвижной системы отсчета K (рис. 7.1).

Интервал s_{12} между событиями (инвариантная величина)

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \mathrm{inv},$$

где t_{12} – промежуток времени между событиями 1 и 2; l_{12} – расстояние между точками, где произошли события.

Масса релятивистской частицы

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где m_0 – масса покоя частицы.

Релятивистский импульс частицы

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где m_0 – масса частицы в системе K, связанной с частицей (собственная масса частицы).

Основной закон релятивистской динамики

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

где **p** – импульс релятивистской частицы.

Взаимосвязь массы и энергии релятивистской частицы

Энергия покоя частицы

$$E_0 = m_0 c^2.$$

Полная энергия релятивистской частицы

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$K = E - E_0 = \left(m - m_0\right)c^2; \qquad K = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2; \qquad pc = \sqrt{K\left(K + 2m_0c^2\right)}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Две ракеты движутся равномерно и прямолинейно с относительной скоростью v = 0,6*c*. Какое время пройдет для наблюдателя во второй ракете за Δt_1 = 8 ч, прошедших для наблюдателя в первой ракете? Как изменится промежуток времени между двумя событиями во второй ракете с точки зрения наблюдателя, находящегося в первой ракете?

Ответ: $\Delta t_2 = \dfrac{\Delta t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 10$ ч.

2. В космических лучах встречаются протоны с энергией порядка 10^{10} ГэВ. Если диаметр Галактики равен примерно 10^5 световых лет, то сколько времени $t_Г$ потребуется протону, чтобы пройти сквозь Галактику, с точки зрения наблюдателя, связанного с Галактикой, и «с точки зрения протона»?

Ответ: $t_Г = 10^5$ лет; $t_Р \approx 10^{-5}$ лет $\approx$ 5 мин.

3. Время жизни t_0 покоящегося мюона (одной из элементарных частиц) равно 2,2 мкс. От точки рождения до детектора, зарегистрировавшего его распад, мюон пролетел расстояние s = 6 км. С какой скоростью v (в долях скорости света) летел мюон? Какое расстояние должен был бы пролететь мюон согласно классической механике?

Ответ: $\dfrac{v}{c} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(l_0/l\right)^2}} \approx 1 - \dfrac{l_0^2}{2l^2} = 0{,}994$; $s_{кл} = vt_0$ = 656 м.

4. Элементарная частица, называемая нейтральным пи-мезоном π^0 распадается на два фотона: $\pi^0 \to \gamma + \gamma$. Определить импульсы фотонов, если распавшийся пи-мезон покоился. Масса частицы $m_{\pi 0} = 2{,}4 \cdot 10^{-28}$ кг.

Ответ: $p = m_{\pi 0}c/2 = 3{,}6 \cdot 10^{-20}$ кг · м/с.

5. Найдите в системе наблюдателя угол α между диагоналями квадрата, движущегося со скоростью v = 0,9*c* в направлении, параллельном одной из сторон.

Ответ: $\alpha = 2\cdot \mathrm{arctg}\sqrt{1 - v^2/c^2} = 47{,}1^\circ$.

6. Доказать, что при малых скоростях релятивистская формула кинетической энергии переходит в классическую.

7. Две ракеты движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = v_2 = 3c/4$ по отношению к неподвижному наблюдателю. Найдите скорость сближения ракет по классической и релятивистской формулам сложения скоростей.

Ответ: $v_{кл} = v_1 + v_2 = (3/2)c$; $v_{рел} = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2} = 0{,}96c$.

8. Ускоритель сообщил радиоактивному атому скорость $v_1 = 0{,}4c$. В момент вылета из ускорителя ядро выбросило в направлении своего движения β-частицу со скоростью $v_2 = 0{,}75c$ относительно ускорителя. Найти скорость v частицы относительно ядра.

Ответ: $v = \dfrac{v_2 - v_1}{1 - v_1 v_2/c^2} = 0{,}5c = 1{,}5\cdot 10^8$ м/с.

9. Найдите скорость частицы, если ее кинетическая энергия K составляет половину энергии покоя E_0.

Ответ: $v = \sqrt{\left(1 - \dfrac{1}{(1 + K/E_0)^2}\right)}\cdot c = 2{,}22\cdot 10^8$ м/с.

10. Скорость v частицы с массой покоя m_0 составляет kc, где $k < 1$. Найдите, во сколько раз увеличится масса частицы.

Ответ: $\dfrac{m}{m_0} = 1/\sqrt{1 - k^2}$.

11. Мощность излучения Солнца $N \approx 4\cdot 10^{26}$ Вт. На сколько уменьшается ежесекундно масса Солнца? С каким ускорением a двигалось бы Солнце и какую скорость v оно приобрело бы за $t = 1$ год, если бы весь свет испускался только в одном направлении («фотонный двигатель»)?

Ответ: $\Delta M/\Delta t = 4{,}44\cdot 10^9$ кг/с; $a = 6{,}7\cdot 10^{-13}$ м/с^2; $v \approx 2\cdot 10^{-5}$ м/с.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

7.1.1. Какую скорость v должно иметь движущееся тело, чтобы его продольные размеры уменьшились в два раза ($l_0/l = 2$)?

Ответ: $v = c\cdot\sqrt{1 - (l/l_0)^2} = 2{,}6\cdot 10^8$ м/с.

7.1.2. Стержень, собственная длина которого равна l_0, покоится в системе отсчета K': он расположен так, что составляет с осью x' угол φ_0. Какой угол φ составляет этот стержень с осью x другой системы отсчета K, движущейся относительно первой со скоростью v? Чему равна длина l этого стержня в системе K?

Ответ: $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\varphi_0 \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}\right)$; $l = l_0\sqrt{\sin^2\varphi + \left(1 - v_0^2/c^2\right)\cos^2\varphi_0}$.

7.1.3. В системе K', относительно которой стержень покоится, он имеет длину l_0 = 1 м и образует с осью x' угол φ_0 = 45°. Определить в системе K длину стержня l и угол φ, который образует стержень с осью x. Относительная скорость систем равна $v_0 = 0{,}5c$.

Ответ: $l = l_0\sqrt{\sin^2\varphi + \left(1 - v_0^2/c^2\right)\cos^2\varphi_0} = 0{,}94$ м;

$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\varphi_0 \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}\right) = 49{,}1^\circ$.

7.1.4. Неподвижное тело произвольной формы имеет объем V_0. Чему равен объем V того же тела, если оно движется со скоростью $v_0 = 0{,}866c$.

Ответ: $V = V_0\sqrt{1 - v_0^2/c^2} = 0{,}5V_0$.

7.1.5. Солнечная постоянная C (плотность потока энергии электромагнитного излучения Солнца на расстоянии R, равном среднему расстоянию от Земли до Солнца) равна 1,4 кВт/м^2. 1) Определить массу Δm_1, которую теряет Солнце в течение Δt = 1 года. 2) На сколько изменится масса воды в океане за один год Δm_2, если предположить, что поглощается η = 0,5 падающей на поверхность океана энергии излучения? При расчетах принять площадь S поверхности океана равной $3{,}6\cdot10^8$ км^2.

Ответ: $\Delta m_1 = 4\pi R^2 C\Delta t/c^2 \approx 1{,}4\cdot10^{17}$ кг; $\Delta m_2 = \eta CS\Delta t/c^2 \approx 8{,}8\cdot10^7$ кг.

7.1.6. Найдите расстояние, которое пролетела в K-системе отсчета нестабильная частица от момента ее рождения до распада, если ее время жизни в этой системе отсчета τ = 3 мкс, а собственное время τ_0 = 2,2 мкс.

Ответ: $s = c\tau\sqrt{1 - \left(\tau_0/\tau\right)^2} = 611{,}5$ м.

7.1.7. С какой скоростью v должна лететь частица относительно системы отсчета K для того, чтобы промежуток собственного времени $\Delta\tau_0$ был в k = 10 раз меньше промежутка $\Delta\tau$, отсчитанного по часам системы K?

Ответ: $v = c\cdot\sqrt{1 - 1/k^2} = 0{,}995c$.

7.1.8. Полная энергия частицы равна km_0c^2. Чему равна ее скорость v, если $k = 10$?

Ответ: $v = c \cdot \sqrt{1 - 1/k^2} = 0{,}995c$.

7.1.9. Космический корабль движется относительно неподвижного наблюдателя на Земле со скоростью v = 0,99*c*. Найдите, как изменяются линейные размеры тел (l/l_0) в ракете (по линии движения) для неподвижного наблюдателя.

Ответ: $l/l_0 = 0{,}14$.

7.1.10. В *K*-системе отсчета мю-мезон, движущийся со скоростью v = 0,99*c*, пролетел от места рождения до точки распада расстояние $s = 3$ км. Определите: 1) собственное время τ_0 жизни мезона; 2) расстояние s', которое пролетел мезон в *K*-системе с «его точки зрения».

Ответ: $\tau_0 = \frac{s}{v}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1{,}4$ мкс; $s' = s \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 0{,}42$ км.

7.1.11. Предположим, что мы можем измерить длину стержня с точностью $\Delta l = 0{,}1$ мкм. При какой относительной скорости и двух инерциальных систем отсчета можно было бы обнаружить релятивистское сокращение длины стержня, собственная длина которого $l_0 = 1$ м?

Ответ: $v = c\sqrt{2\Delta l/l_0} = 134$ км/ч.

7.1.12. Космический корабль с постоянной скоростью v = (24/25)*c* движется по направлению к центру Земли. Какое время Δt в системе отсчета, связанной с Землей, пройдет на корабле за промежуток времени $\Delta t' = 7$ с, отсчитанного по корабельным часам? Вращение Земли и ее орбитальное движение не учитывать.

Ответ: $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = 24$ с.

7.1.13. Фотонная ракета движется относительно Земли со скоростью v = 0,6*c*. Во сколько раз k замедлится ход времени в ракете с точки зрения земного наблюдателя?

Ответ: $k = 1\Big/\sqrt{1 - (v/c)^2} = 1{,}25$.

7.1.14. Две нестабильные частицы движутся в *K*-системе отсчета по некоторой прямой в одном направлении с одинаковой скоростью v = 0,99*c*. Расстояние между частицами в этой системе отсчета $l = 120$ м. В некоторый момент обе частицы распались одновременно в K'-системе отсчета, связанной с ними. Найдите: 1) промежуток времени Δt между моментами распада обеих частиц в исходной *К*-системе; 2) какая частица распалась позже в *К*-системе?

Ответ: 1) $\Delta t = \dfrac{l\beta}{c\left(1-\beta^2\right)} = 20$ мкс, где $\beta = v/c = 0{,}99$;

2) Позже распалась частица, двигавшаяся впереди.

7.1.15. На космическом корабле-спутнике находятся часы, синхронизированные до полета с земными. Скорость v_0 спутника составляет 7,9 км/с. На сколько Δt отстанут часы на спутнике по измерениям земного наблюдателя по своим часам за время $\tau_0 = 0{,}5$ года?

Ответ: $\Delta t = \tau_0 \left(1 \Big/ \sqrt{1-\left(v_0/c\right)^2} - 1 \right) = 5{,}5$ мс.

7.1.16. Двое часов после синхронизации были помещены в системы координат *К* и *К'*, движущиеся относительно друг друга. При какой скорости *u* их относительного движения возможно обнаружить релятивистское замедление хода часов, если собственная длительность τ_0 измеряемого промежутка времени составляет 1 с? Измерение времени производится с точностью до $\Delta\tau = 10$ пс.

Ответ: $u = c \cdot \sqrt{1 - \dfrac{1}{\left(\Delta\tau/\tau_0 + 1\right)^2}} = 1{,}34$ км/с.

7.1.17. В лабораторной системе отсчета (*К*-система) π-мезон с момента рождения до момента распада пролетел расстояние $l = 75$ м. Скорость π-мезона $v = 0{,}995c$. Определите собственное время жизни τ_0 мезона.

Ответ: $\tau_0 = \dfrac{l}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2} = 25$ нс.

7.1.18. Мезон, входящий в состав космических лучей, движется со v скоростью, составляющей 95 % скорости света. Какой промежуток времени τ по часам земного наблюдателя соответствует одной секунде «собственного времени» τ_0 мезона?

Ответ: $\tau = \tau_0 \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2} = 3{,}2$ с.

7.1.19. Во сколько раз увеличивается продолжительность существования нестабильной частицы (по часам неподвижного наблюдателя), если она начинает двигаться со скоростью v, составляющей 99 % скорости света?

Ответ: $\tau/\tau_0 = 1 \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2} = 7{,}1$ раза.

7.1.20. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы τ_0 = 10 нс. Найдите пут s, который пройдет эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни τ = 20 нс.

Ответ: $s = c\tau\sqrt{1-\left(\tau_0/\tau\right)^2} = 5$ м.

7.1.21. Неподвижная ракета на Земле имела длину L = 400 м. При скорости ракеты v = $1{,}5\cdot 10^8$ м/с относительно Земли с точки зрения наблюдателя, находящегося на ракете, ее длина будет равна.

Ответ: $L' = L\cdot\sqrt{1-\left(v/c\right)^2} = 346$ м.

7.1.22. Мю-мезоны, экспериментально обнаруживаемые на дне глубоких шахт, образуются в земной атмосфере и успевают до распада пролететь расстояние $s = 6\cdot 10^3$ м при скорости v = 0,955c. Найдите время жизни мю-мезона Δt для земного наблюдателя и собственное время жизни мю-мезона Δt_0.

Ответ: $\Delta t = s/\text{v} \approx 21$ мкс; $\Delta t_0 = \Delta t\cdot\sqrt{1-v^2/c^2} = 6{,}2$ мкс.

7.1.23. Электрон, кинетическая энергия которого K = 1,5 МэВ, движется в однородном магнитном поле по окружности. Индукция поля B = 0,02 Тл. Определить период T обращения электрона. Энергия покоя электрона E_0 = 0,51 МэВ.

Ответ: $T = \dfrac{2\pi}{c^2}\cdot\dfrac{E_0+K}{eB} = 7$ нс.

7.1.24. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле со скоростью v = 0,8c. Индукция поля B = 0,01 Тл. Определить радиус окружности: 1) не учитывая увеличения массы со скоростью (R_1); 2) учитывая это увеличение (R_2).

Ответ: $R_1 = \dfrac{m_0 v}{eB} = 13{,}6$ см; $R_2 = \dfrac{R_1}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}} = 22{,}7$ см.

7.1.25. Электрон движется в однородном магнитном поле по окружности с радиусом R = 2 см. Индукция поля B = 0,1 Тл. Определить кинетическую энергию электрона.

Ответ: $K = m_0c^2\left(1\Big/\sqrt{1-\beta^2}-1\right) = 0{,}28$ МэВ, где $\beta^2 = \left[\left(\dfrac{m_0c}{eBR}\right)^2+1\right]^{-1} = 0{,}579$.

7.2.1. Определить импульс p и кинетическую энергию K электрона, движущегося со скоростью равной v = 0,9c.

Ответ: $p = m_0 c \cdot \beta \Big/ \sqrt{1-\beta^2} = 5{,}6 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с;

$K = m_0 c^2 \left(1 \Big/ \sqrt{1-\beta^2} - 1 \right) = 0{,}66$ МэВ, где $\beta = \mathrm{v}/c$.

7.2.2. Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями $\mathrm{v}_1 = 0{,}5c$ и $\mathrm{v}_2 = 0{,}75c$ по отношению к лабораторной системе отсчета. Найдите скорость сближения частиц по классической $\mathrm{v}_{\text{кл}}$ и релятивистской $\mathrm{v}_{\text{рел}}$ формулам сложения скоростей. Сделайте вывод.

Ответ: $\mathrm{v}_{\text{кл}} = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 = (5/4)c$; $\mathrm{v}_{\text{рел}}\ \mathrm{v} = (\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2)/(1 + \mathrm{v}_1\mathrm{v}_2/c^2) = 0{,}91c$.

7.2.3. Две релятивистские частицы движутся в K-системе отсчета под прямым углом друг к другу, причем первая со скоростью v_1, а вторая со скоростью v_2. Найдите скорость одной частицы относительно другой.

Ответ: $v_2' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \left(\dfrac{v_1 v_2}{c} \right)^2}$.

7.2.4. Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчета со скоростями $\mathrm{v}_1 = 0{,}6c$ и $\mathrm{v}_2 = 0{,}9c$ вдоль одной прямой. Определите их относительную скорость u_{21} в двух случаях: 1) частицы движутся в одном направлении; 2) частицы движутся в противоположных направлениях.

Ответ: 1) $u_{21} = \dfrac{v_2 - v_1}{1 + v_1 v_2 / c^2} = 0{,}195c$; 2) $u_{21} = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} = 0{,}974c$.

7.2.5. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его скорость составила 95 % скорости света (v = 0,95c)?

Ответ: $U = \dfrac{m_0 c^2}{e} \left(1 \Big/ \sqrt{1 - (v/c)^2} - 1 \right) = 1{,}13 \cdot 10^6$ В.

7.2.6. С какой скоростью v движется β-частица, импульс которой равен ее комптоновскому импульсу (произведению массы покоя частицы на скорость света)?

Ответ: $v = c \big/ \sqrt{2} = 2{,}12 \cdot 10^8$ м/с, где c – скорость света.

7.2.7. Найти скорость v частицы, кинетическая энергия которой K = 500 МэВ и импульс p = 865 МэВ/c, где c – скорость света.

Ответ: $v = 2pK \Big/ \left(p^2 + K^2/c^2 \right) = 0{,}87c$.

7.2.8. Два ускорителя выбрасывают навстречу друг другу частицы со скоростями $|v| = 0{,}9c$. Определите относительную скорость u сближения частиц в системе отсчета, движущейся вместе с одной из частиц.

Ответ: $u = 2v\big/\left(1+v^2/c^2\right) = 0{,}994c$.

7.2.9. Ион, вылетев из ускорителя, испустил фотон в направлении своего движения. Определите скорость $v_ф$ фотона относительно ускорителя, если скорость v иона относительно ускорителя равна $0{,}8c$, где c – скорость света.

Ответ: $v_ф = c$.

7.2.10. Две частицы, двигавшиеся в лабораторной системе отсчета вдоль одной прямой с одинаковой скоростью $v = (3/4)c$, попали в неподвижную мишень с интервалом времени $\Delta t = 50$ нс. Найти собственное расстояние s_0 между частицами до попадания в мишень.

Ответ: $s_0 = v\cdot\Delta t\Big/\sqrt{1-\left(v/c\right)^2} = 17$ м.

7.2.11. При какой скорости кинетическая энергия частицы равна ее энергии покоя?

Ответ: $v = \sqrt{3/4}\cdot c = 2{,}6\cdot 10^8$ м/с.

7.2.12. Протон движется с импульсом $p = 10$ ГэВ/c, где c – скорость света. На сколько процентов отличается скорость протона от скорости света?

Ответ: $(c - v)/c = 1 - [1 + (m_{0p}c/p)^2]^{-1/2} = 0{,}44\%$.

7.2.13. Какую долю β скорости света должна составлять скорость частицы, чтобы ее кинетическая энергия была равна ее энергии покоя?

Ответ: $\beta = \sqrt{3/4} = 0{,}866$.

7.2.14. Сравните величину релятивистского $p_{рел}$ и классического $p_{кл}$ импульсов электрона при скорости $v = (24/25)c$.

Ответ: $\gamma = \dfrac{p_{рел}}{p_{кл}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}} = \dfrac{25}{7}$.

7.2.15. Покажите, что для частицы величина $E^2 - p^2c^2$ есть инвариант, т.е. имеет одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета. Каково значение этого инварианта?

Ответ: $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$.

7.2.16. Энергия π – мезона, возникающего в верхних слоях атмосферы, составляет $E = 6$ ГэВ, а его среднее время жизни в связанной с ним системе отсчета равно τ_0 = 26 нс. Принимая массу π – мезона, равной $m_\pi = 273m_e$, определите время его жизни τ в лабораторной системе отсчета. Здесь $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг – масса электрона.

Ответ: $\tau = \tau_0 E / (m_\pi c^2) = 1{,}11$ мкс.

7.2.17. В системе K некоторое событие произошло в точке с координатами (1, 1, 1) в момент времени t = 1 с. Определить координаты и время этого события в системе K', движущейся относительно K в направлении совпадающих осей x и x' со скоростью $v_0 = 0{,}8c$.

Ответ: $x' = -4 \cdot 10^8$ м; $y' = z' = 1$ м; $t' = 1{,}66$ с.

7.2.18. Определите кинетическую энергию K релятивистской частицы (в m_0c^2), если ее импульс $p = m_0c$.

Ответ: $K = 0{,}414 m_0c^2$.

7.2.19. Импульс p_1 релятивистской частицы равен m_0c. Под действием внешней силы импульс частицы увеличивается в два раза, $p_2 = 2p_1$. Во сколько раз возрастет при этом энергия частицы: 1) кинетическая? 2) полная?

Ответ: 1) $K_2/K_1 = 2{,}98$; 2) $E_2/E_1 = 1{,}58$.

7.2.20. Релятивистская частица с массой покоя m_0 и зарядом q движется в постоянном однородном магнитном поле, индукция которого B. Движение происходит по окружности радиуса R. Найдите импульс p, скорость v и круговую частоту ω обращения частицы по окружности.

Ответ: $p = qRB$; $v = c \Big/ \sqrt{1 + (m_0c)^2 / (qRB)^2}$,

$\omega = qB/m$, где $m = m_0 \Big/ \sqrt{1 - (v/c)^2}$.

7.2.21. Считая, что энергия покоя электрона m_0c^2 = 0,511 МэВ, вычислить: 1) импульс электрона с кинетической энергией, равной его энергии покоя; 2) кинетическую энергию электрона с импульсом m_0c = = 0,511 МэВ/c, где c – скорость света. (В настоящее время импульсы релятивистских частиц выражают в единицах – энергия, деленная на скорость света).

Ответ: p = 0,9 МэВ/c; K = 0,21 МэВ.

7.2.22. Определите, какая кинетическая энергия K должна быть сообщена ракете массой $m_р$ = 1,5 т, чтобы она приобрела скорость v = = 120 Мм/с.

Ответ: $K = m_р c^2 \left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) = 1{,}23 \cdot 10^{19}$ Дж.

7.2.23. Известно, что объем воды в океане равен V = 1,37·10^9 км^3. Определить, на сколько возрастет масса воды в океане, если температура воды повысится на Δt = 1 °С. Плотность ρ воды в океане принять равной 1,03·10^3 кг/м^3, теплоемкость воды $C_в$ = 4200 Дж/(кг·°С).

Ответ: $\Delta m = \rho V C_в \Delta t / c^2 = 6{,}59 \cdot 10^7$ кг.

7.2.24. Имеется две системы отсчета K и K', относительная скорость v_0 которых неизвестна. Параллельный оси x' стержень, движущийся относительно системы K' со скоростью v'_x = 0,1c, имеет в этой системе длину l' = 1,1 м. В системе K длина стержня l = 1 м. Найти скорость стержня v_x в системе K и относительную скорость систем v_0.

Ответ: $v_x = c\sqrt{1-\left(\dfrac{l}{l'}\right)^2\left(1-\dfrac{v_x'^2}{c^2}\right)} = 0{,}43c$; $v_0 = \dfrac{v_x - v_x'}{1 - v_x v_x'/c^2} = 0{,}34c$.

7.2.25. На рис. 7.3 изображена диаграмма пространства − времени. Каждая точка этой диаграммы (мировая точка) характеризует некоторое событие – его координату Δx и момент времени Δt, когда оно произошло. Найдите: а) промежуток времени между событиями A и B в той системе отсчета, где оба события одноместны (произошли в одной точке, $\Delta x'$ = 0); б) расстояние между точками, где произошли события A и C, в той системе отсчета, где они одновременны, $\Delta t'$ = 0.

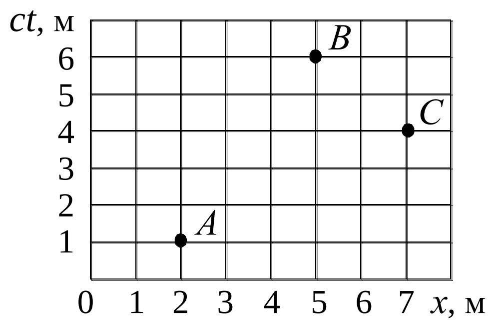


Рис. 7.3

Ответ: а) $\Delta t' = \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}/c = 13$ нс; б) $\Delta x' = \sqrt{(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2} = 4$ м.

7.3.1. Имеется прямоугольный треугольник, у которого катет a = 5 м и угол между этим катетом и гипотенузой α = 30°. Найдите в системе отсчета K', движущейся относительно этого треугольника со скоростью v = 0,886c вдоль катета a соответствующее значение угла α′.

Ответ: $\mathrm{tg}\alpha' = \mathrm{tg}\alpha \Big/ \sqrt{1-(v/c)^2} = 49°$.

7.3.2. За промежуток времени $\Delta\tau$ = 1 с, отсчитанный по часам некоторой системы отсчета K, частица, двигаясь равномерно и прямолинейно, переместилась из начала координат системы K в точку с координатами $x = y = z$ = 1,5·10^8 м. Найти промежуток собственного времени частицы $\Delta\tau_0$, за который произошло это перемещение.

Ответ: $\Delta\tau = \sqrt{\Delta\tau^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)/c^2} = 0{,}5$ с.

7.3.3. Плотность покоящегося тела равна ρ_0. Найти скорость системы отсчета относительно данного тела, в которой его плотность будет на $\eta = 0{,}25$ больше ρ_0.

Ответ: $v = c\sqrt{\eta(2+\eta)}\big/(1+\eta) = 0{,}6c$, где c – скорость света.

7.3.4. В системе K' покоится стержень, собственная длина l_0 которого равна 1 м. Стержень расположен так, что составляет угол $\varphi_0 = 45°$ с осью x'. Определите длину l стержня и угол φ в системе K, если скорость v_0 системы K относительно K' равна $0{,}8c$.

Ответ: $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\varphi_0 \big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}\right) = 59°$.

7.3.5. Система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью $v_0 = 0{,}5c$. Скорость некоторой частицы в системе K' равна $\boldsymbol{\upsilon}' = 0{,}1732c \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – орты координатных осей. Найти модуль скорости v' и угол α', образуемый $\boldsymbol{\upsilon}'$ с осью x'; скорость $\boldsymbol{\upsilon}$ частицы в системе K, модуль этой скорости v и угол α, образуемый $\boldsymbol{\upsilon}$ с осью x.

Ответ: $v' = 0{,}3c$, $\alpha' = 55°$;

$\boldsymbol{\upsilon} = c(0{,}620\mathbf{i} + 0{,}138\mathbf{j} + 0{,}138\mathbf{k})$, $v = 0{,}65c$, $\alpha = 17{,}5°$.

7.3.6. Найти скорость, при которой релятивистский импульс частицы в $\eta = 2$ раза превышает ее ньютоновский импульс.

Ответ: $v = c\sqrt{\eta^2 - 1}\big/\eta = 0{,}866c$, где c – скорость света.

7.3.7. Чему равно релятивистское сокращение размеров протона если его кинетическая энергия $K = 1{,}6 \cdot 10^{-9}$ Дж?

Ответ: $\dfrac{l}{l_0} = \dfrac{1}{K\big/\left(m_{0\text{p}}c^2\right) + 1} = 0{,}086$, где $m_{0\text{p}}$ – масса покоя протона.

7.3.8. Найти собственную длину стержня, если в лабораторной системе отсчета его скорость $v = c/2$, где c – скорость света. Длина $l = 1$ м и угол между ним и направлением движения $\alpha = 45°$.

Ответ: $l_0 = l \cdot \sqrt{\dfrac{1 - \beta^2 \sin^2\alpha}{1 - \beta^2}} = 1{,}08$ м, где $\beta = v/c = 0{,}5$.

7.3.9. Стержень движется в продольном направлении с постоянной скоростью v относительно инерциальной K-системы отсчета. При каком значении v длина стержня в этой системе будет на $\eta = 0{,}5$ % меньше его собственной длины?

Ответ: $v = c\cdot\sqrt{(2-\eta)\eta} = 0{,}1c$, где c – скорость света.

7.3.10. Система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью $v_0 = 0{,}5c$. В системе K' импульс протона $\mathbf{p}' = a_1\mathbf{i}' + a_2\mathbf{j}' + a_3\mathbf{k}'$, где $a_1 = 0{,}774\cdot10^{-19}$ кг·м/с, $a_2 = 1{,}548\cdot10^{-19}$ кг·м/с, $a_3 = 2{,}322\cdot10^{-19}$ кг·м/с, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ – орты координатных осей. Определите 1) энергию E' и модуль скорости v' протона в системе K'; 2) импульс $\mathbf{p}$, энергию E и модуль скорости v протона в системе K.

Ответ: 1) $E' = 1{,}15E_0 = 1{,}74\cdot10^{-10}$ Дж, $v' = 0{,}5c$;
2) $\mathbf{p} = 1\cdot10^{-19}\cdot(4{,}24\mathbf{i} + 1{,}548\mathbf{j} + 2{,}322\mathbf{k})$ кг·м/с,
$E = 1{,}42E_0 = 2{,}14\cdot10^{-10}$ Дж, $v = 0{,}71c$, где c – скорость света.

7.3.11. В K-системе отсчета μ-мезон, движущийся со скоростью $v = 0{,}99c$, где c – скорость света, пролетел от места рождения до точки распада расстояние $l = 3$ км. Определите: 1) собственное время τ_0 жизни мезона; 2) расстояние l', которое пролетел μ-мезон в K-системе с «его точки зрения».

Ответ: $\tau_0 = \dfrac{l}{v}\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} = 1{,}4$ мкс; $l' = l\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} = 0{,}42$ км.

7.3.12. Две одинаковые частицы массы m каждая летят навстречу друг другу с одинаковой по модулю скоростью v. Столкнувшись, частицы сливаются в одну частицу. Какова масса M образовавшейся частицы? Найти M для v, равной $0{,}1c$; $0{,}5c$; $0{,}999c$, где c – скорость света.

Ответ: $M = 2m\big/\sqrt{1-(v/c)^2}$; $M_1 = 2{,}01m$; $M_2 = 2{,}31m$; $M_3 = 44{,}7m$.

7.3.13. Относительная скорость систем отсчета K и K' равна $v_0 = 0{,}8c$. В системе K' импульс частицы $\mathbf{p}' = a(\mathbf{i}' + \mathbf{j}' + \mathbf{k}')$, где $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ – орты координатных осей, $a = 2{,}3\cdot10^{-18}$ кг·м/с, а энергия $E' = 1{,}5\cdot10^{-9}$ Дж. Найти импульс $\mathbf{p}$ и энергию частицы E в системе K.

Ответ: $\mathbf{p} = 1\cdot10^{-18}\cdot(10{,}5\mathbf{i} + 2{,}3\mathbf{j} + 2{,}3\mathbf{k})$ кг·м/с; $E = 3{,}4\cdot10^{-9}$ Дж.

7.3.14. Найти средний путь $\langle l\rangle$, проходимый π – мезонами с кинетической энергией, которая в $\eta = 1{,}2$ раза превышает их энергию покоя. Среднее время жизни очень медленных π – мезонов $\tau_0 = 25{,}5$ нс.

Ответ: $\langle l\rangle = c\tau_0\sqrt{\eta(\eta+2)} = 15$ м, где c – скорость света.

7.3.15. Протон и α-частица проходят одинаковую разность потенциалов, после чего масса протона составила треть массы α-частицы ($n = m_\alpha/m_p = 3$). Определите разность потенциалов U.

Ответ: $U = (m_{0\alpha} - nm_{0p})c^2 / ((n-2)e) \approx 918$ МВ; $n = 3$,

где m_{0p} и $m_{0\alpha}$ – масса покоя протона и α-частицы, c – скорость света.

7.3.16. Найдите скорость v космической частицы, если ее полная энергия в k раз превышает энергию покоя.

Ответ: $v = \frac{c}{k}\sqrt{k^2 - 1}$, где c – скорость света.

7.3.17. Какую работу A нужно совершить, чтобы сообщить электрону скорость, равную: а) $v_1 = 0{,}5c$; б) $v_2 = 0{,}999c$? Энергия покоя электрона $E_0 = 8{,}17 \cdot 10^{-14}$ Дж, c – скорость света.

Ответ: $A = E_0\left(1 / \sqrt{1-(v/c)^2} - 1\right)$: а) $A_1 = 1{,}3 \cdot 10^{-14}$ Дж; б) $A_2 = 1{,}8 \cdot 10^{-12}$ Дж.

7.3.18. Кинетическая энергия релятивистской частицы равна ее энергии покоя. Во сколько k раз возрастает импульс частицы, если ее кинетическая энергия увеличится в $n = 4$ раза?

Ответ: $k = \sqrt{n(n+2)/3} = 2{,}83$.

7.3.19. Показать, что выражение релятивистского импульса через кинетическую энергию $p = \frac{K}{c}\sqrt{\frac{2E_0 + K}{K}}$ при v << c переходит в соответствующее выражение классической механики.

7.3.20. Над частицей массы $m = 0{,}911 \cdot 10^{-30}$ кг, двигавшейся первоначально со скоростью $v_1 = 0{,}1c$, была совершена работа $A = 8{,}24 \cdot 10^{-14}$ Дж. Как изменились в результате этого скорость Δv, импульс Δp и кинетическая энергия частицы K?

Ответ: $\Delta v = c\sqrt{1 - 1/\alpha^2} - v_1 = 0{,}77c$;

$\Delta p = mc\left(\sqrt{\alpha^2 - 1} - \beta_1 / \sqrt{1-\beta_1^2}\right) = 4{,}5 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с; $\Delta K = A = 8{,}24 \cdot 10^{-14}$ Дж,

где $\alpha = 1/\sqrt{1-\beta_1^2} + A/mc^2$; $\beta = v_1/c$; c – скорость света.

7.3.21. Какую работу $A_{\text{рел}}$ необходимо совершить, чтобы увеличить скорость v частицы с массой покоя m_0 от $0{,}6c$ до $0{,}8c$, где c – скорость света? Сравнить полученный результат со значением $A_{\text{кл}}$, вычисленным по нерелятивистской формуле.

Ответ: $A_{\text{рел}} = 0{,}42m_0c^2$; $A_{\text{кл}} = 0{,}14m_0c^2$.

7.3.22. Частицы с зарядами z_1e и z_2e и с массами покоя m_{01} и m_{02} соответственно прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов U, после чего масса частицы 1 составила $1/k$ массы частицы 2. Найдите ускоряющую разность потенциалов.

Ответ: $U = (m_{02} - km_{01})c^2 / \left[e(kz_1 - z_2)\right]$, где c – скорость света.

7.3.23. Отрицательные π^--мезоны с кинетической энергией K = = 100 МэВ пролетают от места рождения до распада в среднем расстояние l = 11 м. Найти собственное время τ_0 жизни этих мезонов.

Ответ: $\tau_0 = lm_0c \Big/ \sqrt{K\left(K + 2m_0c^2\right)} = 26$ нс,

где m_0 – масса π^--мезона, c – скорость света.

7.3.24. Над первоначально покоившимся протоном силами электрического поля была совершена работа A = 10^{-10} Дж. Найти импульс p и скорость v, которые приобрел в результате этого протон.

Ответ: $p = \sqrt{A\left(A + 2E_0\right)} \Big/ c = 6{,}7 \cdot 10^{-19}$ кг · м/с;

$v = c\sqrt{\left(A^2 + 2AE_0\right) \big/ \left(A + E_0\right)^2} = 0{,}8c$, где E_0 – энергия покоя протона.

7.3.25. В K-системе отсчета частица с массой покоя m_0 и кинетической энергией K налетает на покоящуюся частицу с такой же массой покоя. Найдите массу покоя M_0 и скорость v составной частицы, образовавшейся в результате столкновения.

Ответ: $M_0 = \sqrt{2m_0\left(K + 2m_0c^2\right)} \Big/ c$; $v = c \cdot \sqrt{K \big/ \left(K + 2m_0c^2\right)}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1

Физические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Ускорение свободного падения	$g = 9{,}81$ м/с^2
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}314$ Дж/(моль·К)
Число Авогадро	$N_А = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/ К
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Постоянная в законе Кулона	$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $\hbar = h/(2\pi)$
Скорость света в вакууме	$c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с
Элементарный заряд	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Постоянная Фарадея	$F = 9{,}65 \cdot 10^4$ Кл/моль
Радиус первой боровской орбиты	$a_0 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ м
Энергия связи электрона в атоме водорода	$E = 13{,}6$ эВ
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_e = 2{,}426 \cdot 10^{-12}$ м
Классический радиус электрона	$r_e = 2{,}82 \cdot 10^{-15}$ м
Нормальное атмосферное давление	$p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па

Таблица 2

Некоторые астрономические величины

Наименование	Числовое значение
Солнечная постоянная	$C = 1{,}37 \cdot 10^3$ Дж/(м^2·с)
Средний радиус Земли	$R_З = 6{,}371 \cdot 10^6$ м
Радиус Солнца	$R_С = 6{,}95\ 10^8$ м
Радиус Луны	$R_Л = 1{,}74 \cdot 10^6$ м
Масса Земли	$M_З = 5{,}98\ 10^{24}$ кг
Масса Солнца	$M_С = 1{,}98\ 10^{30}$ кг
Масса Луны	$M_Л = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг
Период обращения Земли вокруг Солнца	$T_{ЗС} = 1$ год $= 3{,}156 \cdot 10^7$ с
Период обращения Земли вокруг своей оси	$T_З = 1$ сут $= 8{,}64 \cdot 10^4$ с
Период обращения Луны вокруг Земли	$T_{ЛЗ} = 2{,}36 \cdot 10^6$ с
Среднее расстояние от Земли до Луны	$r_{ЗЛ} = 3{,}84 \cdot 10^8$ м
Среднее расстояние от Земли до Солнца	$r_{ЗС} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ м
Астрономическая единица (1 а. е. = $r_{ЗС}$)	1 а. е. = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ м
Парсек (единица длины в астрономии)	1 пк = 206 265 а. е. ≈ $3 \cdot 10^{16}$ м
Световой год (1 с.г = $T_{ЗС} \cdot c$)	1 с.г. = 0,3068 пк = $9{,}46 \cdot 10^{15}$ м

Таблица 3

Плотность ρ некоторых твердых тел и жидкостей

Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3	Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3
Алюминий	2,7	Лед	0,92
Вода	1,0	Медь	8,9
Глицерин	1,26	Натрий	0,97
Железо (сталь)	7,8	Никель	8,8
Золото	19,3	Олово (°t > 14 °C)	7,3
Калий	0, 96	Ртуть	13,6
Кварц	2,65	Серебро	10,5
Керосин	0,8	Спирт (этиловый)	0,794

Таблица 4

Некоторые дополнительные физические характеристики

Скорость звука в воздухе при нормальных условиях	$v_{зв}$ = 340 м/с
Нормальное атмосферное давление	$p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па
Температура кипения воды при $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па	t = 100 °C
Удельная теплота сгорания бензина	$q = 4{,}5 \cdot 10^7$ Дж/кг

Таблица 5

Некоторые десятичные приставки

Наименование	тера	гига	мега	микро	нано	пико	фемто	Атто
Приставка	Т	Г	М	мк	н	п	ф	А
Множитель	10^{12}	10^9	10^6	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}

Таблица 6

Таблица производных

Функция	Производная	Функция	Производная	Функция	Производная
x^n	nx^{n-1}	$\sin x$	$\cos x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathrm{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathrm{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathrm{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{sh} x$	$\mathrm{ch} x$
e^x	e^x	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\mathrm{ch} x$	$\mathrm{sh} x$

e^{nx}	ne^{nx}	$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$	$\mathrm{th}x$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\dfrac{u}{\upsilon}$	$\dfrac{\upsilon u' - u\upsilon'}{\upsilon^2}$	$\mathrm{cth}x$	$-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		

Таблица 7

Таблица интегралов

$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$	$\int \mathrm{tg}x dx = -\ln\cos x$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln x$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x$	
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x$	

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ТЮРИН Юрий Иванович, ЛАРИОНОВ Виталий Васильевич, ЧЕРНОВ Иван Петрович, КУПРЕКОВА Елена Ивановна, РУДКОВСКАЯ Вера Федоровна, СЕМКИНА Людмила Иосифовна, ТОЛМАЧЕВА Нелла Дмитриевна, ХОРУЖИЙ Владимир Дмитриевич

ФИЗИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ

ЧАСТЬ 1

Механика

Учебное пособие

Научный редактор *доктор физико-математических наук, профессор Ю.И. Тюрин*
Ответственный редактор *Н.Д. Толмачева*
Редактор *И.О. Фамилия*
Компьютерная верстка *И.О. Фамилия*
Дизайн обложки *И.О. Фамилия*

Подписано к печати 19.02.2012. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 10,23. Уч.-изд.л. 9,26.
Заказ . Тираж 100 экз.

Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru