__Разработчик курса доцент кафедры высшей математики кандидат технических наук Некряч Е.Н.(2009 г.)__

БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Очень часто приходится встречаться с задачами, когда один и тот же опыт или похожие опыты повторяются неоднократно много раз подряд. В результате одного такого опыта может появиться или не появиться некоторое событие А. Результат каждого отдельного опыта нас не интересует, а нас интересует только общее число появлений события А в результате серии опытов. Если опыты проводятся в одинаковых условиях, то вероятность появления события А в каждом опыте одна и та же. В противном случае, то есть когда опыты проводятся в разных условиях, то вероятность события меняется от опыта к опыту. К первому случаю относится частная теорема о повторении опытов, а ко второму случаю относится общая теорема о повторении опытов.

ЧАСТНАЯ ТЕОРЕМА О ПОВТОРЕНИИ ОПЫТОВ

Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых событие А может появиться или не появиться. Будем считать, что вероятность появления события А в каждом опыте одна и та же и равна p, тогда вероятность появления противоположного события $\bar{A}$ (не появления события А) в каждом опыте также постоянна и равна 1-p=q. Поставим задачу: вычислить вероятность того, что при n независимых опытах событие А появится ровно m раз. Искомую вероятность будем обозначать так: $P_{m,n}$. Событие, которое заключается в том, что событие А появится m раз в серии из n независимых опытов, обозначим B_m. Это событие представим в виде суммы произведений событий A_i и $\bar{A}_i$:

$A_1A_2A_3 \dots A_m\bar{A}_{m+1} \dots \bar{A}_n$,

$A_1A_2A_3 \dots A_{m-1}\bar{A}_m \dots \bar{A}_{n-1}A_n$,

....,

$\bar{A}_1\bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-m}A_{n-m+1} \dots A_n$.

В каждое произведение событий A_i и $\bar{A}_i$ события A_i входят m раз и события $\bar{A}_i$ входят (n-m) раз. По теореме умножения вероятность каждой такой комбинации из n произведений равна

$p^m q^{n-m}$. Число всех возможных комбинаций из n элементов, в которых m раз появилось событие A_i в различном порядке равно C_n^m , таким образом

P(B_m)=$C_n^m p^m q^{n-m}$. Этим самым доказана теорема: вероятность того, что событие А появится ровно m раз в серии из n опытов вычисляется по формуле:

$$P_{m,n} = \ C_n^m p^m q^{n-m}.$$

В этой формуле p – вероятность появления события А в одном опыте и q – вероятность не появления события А в одном опыте, то есть вероятность не появления события А в одном опыте.

Эта формула известна как формула БЕРНУЛЛИ.

Рассмотрим двучлен (p+q). Возведём этот двучлен в степень n:

$(p+q)^n$=$C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + \cdots + C_n^m p^m q^{n-m} + \cdots + C_n^0 q^n$.

Здесь мы воспользовались формулой бинома НЬЮТОНА. В связи с этим рассмотренное распределение называют БИНОМИАЛЬНЫМ.

Рассмотрим случайную величину X – число появлений события А в n независимых опытах. Очевидно, что возможные значения этой случайной величины принимают следующие значения: 0; 1; 2 ;… ; n. Вероятности соответствующие считаются, очевидно, по формуле Бернулли. Представим всё это в виде таблицы:

X	0	1	2	………	m	…….	n
P	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$		$C_n^m p^m q^{n-m}$		$C_n^n p^n q^0$

ТЕОРЕМА 1: математическое ожидание числа появлений события А в n независимых опытах, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна, равно произведению числа опытов на вероятность появления события А в одном опыте:

M(X)=np.

Доказательство: M(X)=0× q^n+1× $C_n^1 p q^{n-1} + 2 \times C_n^2 p^2 q^{n-2} + \cdots + n \times C_n^n p^0 q^n$=np$q^{n-1} + n(n-1)p^2 q^{n-2}$+...+np^n=np($q^{n-1}$+(n-1) pq^{n-2}+...+p^{n-1})=np$(p+q)^{n-1} = np$, так как p+q=1.

ТЕОРЕМА 2: дисперсия числа появлений события А в n независимых опытах, в каждом из которых вероятность появления события постоянна, равна произведению числа опытов на вероятность появления и не появления события А в одном опыте.

$$D(X)=npq.$$

Доказательство: пусть X – случайная величина – число появлений события А в n независимых опытах, X_1 – число появлений события А в первом опыте, X_2 – число появлений события А во втором опыте, . . . , X_n – число появлений события А в n – ом опыте. Общее число появлений события А в n опытах $X=X_1+X_2+ . . .+X_n$. Все случайные величины $X_1,X_2, . . .,X_n$ – независимые, поэтому

$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+. . . +D(X_n)$.

Для нахождения дисперсии запишем законы распределения случайных величин X_i и X_i^2:

X_i	0	1
P	q	p

X_i^2	0	1
P	q	p

Имеем: $M(X_i)=0\cdot q + 1\cdot p = p$,

$$M(X_i^2) = 0\cdot q + 1\cdot p = p.$$

Применим формулу для вычисления дисперсии: $D(X)=M(X^2) – (M(X))^2$, получим

$$D(X_i) = p – p^2 = p (1 – p) = pq.$$

Подставим в (1), получим: $D(X) = pq + pq + . . . + pq = npq$. Теорема доказана.

ОБЩАЯ ТЕОРЕМА О ПОВТОРЕНИИ ОПЫТОВ

Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться событие А. Будем считать, что вероятность появления события А в каждом опыте меняется от опыта к опыту, то есть различна. Найдём вероятность того, что событие А появится ровно m раз в серии из n опытов. Очевидно, что событие B_m , которое заключается в том, что событие A появится m раз в серии из n опытов представляет сумму произведений A и $\bar{A}$, в каждое произведение A входит m раз и $\bar{A}$ входит n-m раз.

Определение. Функция $\varphi_n(z)$, разложение которой по степеням параметра z даёт в качестве коэффициентов вероятности $P_{m,n}$ называется производящей функцией.

$$\varphi_n(z) = P_{0,n} + P_{1,n}z + P_{2,n}z^2 + \ldots + P_{m,n}z^m + \ldots + P_{n,n}z^n \text{, или}$$

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i z)$$

Теорема. Вероятность того, что событие A появится ровно m раз в серии из n независимых опытов равна коэффициенту при z^m в выражении производящей функции $\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i z)$.

Пример. Производится 4 независимых опыта – выстрела по мишени с различных расстояний; вероятности попаданий при этих выстрелах равны соответственно: $p_1=0{,}1$; $p_2=0{,}2$; $p_3=0{,}3$; $p_4=0{,}4$. Найти вероятности следующих событий: а) ни одного попадания; б) одного попадания; в) двух попаданий; г) трёх попаданий; д) четырёх попаданий.

Решение: $\varphi_4(z) = \prod_{i=1}^{4}(q_i + p_i z) = (0{,}9 + 0{,}1z)(0{,}8+0{,}2z)(0{,}7+0{,}3z)(0{,}6+0{,}4z) =$

$$= 0{,}302 + 0{,}440z + 0{,}215z^2 + 0{,}040z^3 + 0{,}002z^4.$$

$P_{0,4} = 0{,}302$; $P_{1,4} = 0{,}44$; $P_{2,4} = 0{,}215$; $P_{3,4} = 0{,}04$; $P_{4,4} = 0{,}002$.