Разработчик курса доцент кафедры высшей математики кандидат технических наук Некряч Е.Н.(2009 г.)

ЗАКОН ПУАССОНА

Пусть X – дискретная случайная величина, которая может принимать целые неотрицательные значения 0, 1, 2, . . . , m, ... Последовательность этих значений теоретически можно считать неограниченной. Говорят, что случайная величина X распределена по закону ПУАССОНА, если вероятность того, что она примет определённое значение m (X=m) вычисляется по формуле

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad \text{(m=0,1,2,...)},$$

где a - некоторая постоянная величина, которую называют параметром закона Пуассона.

Ряд распределения имеет следующий вид:

X	0	1	2	...	m	...
P	e^{-a}	$\frac{ae^{-a}}{1!}$	$\frac{a^2}{2!}e^{-a}$	...	$\frac{a^m}{m!}e^{-a}$	...

Покажем, что закон Пуассона является предельным для биномиального закона распределения, если число опытов n устремить к бесконечности, а вероятность p устремить к нулю, причём их произведение np сохраняет постоянное значение: np=a. Найдём предел биномиального распределения

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}\left(\frac{a}{n}\right)^m \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{a^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{n^m}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m} =$$

$$= \frac{a^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot \ldots \cdot (1-\frac{m-1}{n})\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{a^m}{m!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = \frac{a^m}{m!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-\frac{n}{a}\cdot(-a)} = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad .$$

Таким образом, это предельное свойство биномиального распределения можно записать в виде:

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad .$$

Этим предельным свойством биномиального распределения часто пользуются на практике. Предположим, что производится большое число независимых опытов, в каждом из которых событие А имеет очень малую вероятность (p→0), тогда для вычисления вероятности того, что событие появится ровно m раз в серии из n опытов, когда n очень велико (n→∞), можно воспользоваться формулой:

$P_{m,n} \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}$, где np=a – параметр того закона Пуассона, которым приближённо заменяется биномиальное распределение.

Вычислим математическое ожидание случайной величины, распределённой по закону Пуассона. Имеем: M(X) = $\sum x_i p_i = 0 \cdot e^{-a} + 1 \cdot \frac{a}{1!} e^{-a} + 2 \cdot \frac{a^2}{2!} + \ \dots =$

$=a \cdot e^{-a} \cdot(1+a + \frac{a^2}{2!} + \ \frac{a^3}{3!} + \ \dots + \frac{a^m}{m!} + \ \dots) = a \cdot e^{-a} \cdot \ e^a = a.$ Таким образом,

$$M(X) = a.$$

Вычислим дисперсию случайной величины, распределённой по закону Пуассона..Для этого воспользуемся формулой $D(X) = M(X^2) - \ M^2(X)$. Построим ряд распределения для квадрата случайной величины:

X^2	0	1	4	. . . . .	m^2	. . . . .
P	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{a^2}{2!} e^{-a}$	. . . . .	$\frac{a^m}{m!} e^{-a}$	. . . . .

$M(X^2) = ae^{-a} + 4\frac{a^2}{2!} e^{-a} + \dots + m^2 \frac{a^m}{m!} e^{-a} + \dots = ae^{-a} \left(1 + 2a + 3\frac{a^2}{2!} + \ \dots\right) =$

$=ae^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ma^{m-1}}{(m-1)!}$.

Рассмотрим разложение : $e^a = \sum \frac{a^{m-1}}{(m-1)!}$. Умножим на a: $ae^a = \sum \frac{a^m}{(m-1)!}$. Продифференцируем последнее равенство по (обе части): $e^a + ae^a = \sum \frac{ma^{m-1}}{(m-1)!}$. Подставим для вычисления

$M(X^2) = \ ae^{-a}(e^a + ae^a) = a + \ a^2$, тогда $D(X) = a + \ a^2 - \ a^2 \ = \ a.$

Математическое ожидание равно дисперсии: $M(X) = D(X) = \ a.$

Задача. По некоторой цели производят 100 независимых выстрелов с вероятностью попадания 0,02 при одном выстреле. Найти вероятность

1). В цель не попадёт ни один снаряд;

2). В цель попадёт только один снаряд;

3).В цель попадут два снаряда.

Решение. n = 100; p = 0,02; np = 100·0,02=2.

$P_{0,100} \approx \frac{2^0}{0!} e^{-2}$=0,1353; $P_{1,100} \approx \frac{2^1}{1!} e^{-2}$ =0,2707; $P_{2,100} \approx \frac{2^2}{2!} e^{-2}$ =0,2707.