ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Такое понятие, как множество, вообще говоря, не определяется, однако множество считается заданным, если о любом предмете можно сказать совершенно определённо, принадлежит он этому множеству или не принадлежит. Мы условимся обозначать множества большими латинскими буквами, а элементы множества будем обозначать строчными буквами. Множества будем считать равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Когда количество элементов множества можно выразить натуральным числом, множество называется конечным. В противном случае множество будем называть бесконечным. Число элементов конечного множества X будем обозначать n(X). Конечное множество можно задать списком элементов. Бесконечное множество нельзя задать списком. Бесконечное множество задают характеристическим свойством элементов этого множества. Это делают, например, так: $\{x|F(x)\}$. Эта запись означает, что элементы множества обладают свойством $F(x)$. Так запись $\{x|\ x^2-5x+6=0\}$ означает, что задано множество, которое удовлетворяет квадратному уравнению, то есть множество $\{2,3\}$. Можно записать: $\{x|\ x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$, так как эти множества равны.

Определение 1.Пересечением множеств X и Yназывается множество $X\cap Y$, состоящее из элементов, которые принадлежат как X, так и Y.

Определение 2.Объединеием множеств X и Yназывается множество $X\cup Y$, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X или Y.

Определение 3.Разностью множеств X и Yназывается множество $X\backslash Y$, состоящее из элементов множества X , не принадлежащих множеству Y. Если $Y\subset X$, то разность $X\backslash Y$ называется дополнением множества Y во множестве X и обозначается Y'_x.

Определение 4.Если каждый элемент множества X является элементом множества Y, то говорят, что X - часть множества Y . В этом случае пишут $X\subset Y$.

Определение 5.Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым множеством. Пустое множество обозначают $\emptyset$. Для любого множества X справедливо $\emptyset\subset X$.

АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

Операции над множествами обладают следующими свойствами:

1. $X\cup Y=Y\cup X$, $X\cap Y=Y\cap X$.
2. $(X\cup Y)\cup Z=X\cup(Y\cup Z), (X\cap Y)\cap Z=X\cap(Y\cap Z)$.
3. $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z), (X\cap Y)\cup Z=(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$.

Очевидны следующие равенства и соотношения:

$$X \cup \varnothing = X; \quad X \cap \varnothing = \varnothing; \quad X \cup X = X; \quad X \cap X = X.$$

Если $X \subset Y$ и $Y \subset Z$ то $X \subset Z$. Если $X \subset Y$ и $Y \subset X$, то $X = Y$.

Если $X \subseteq Y$, то $X \cap Y = X$ и $X \cup Y = Y$.

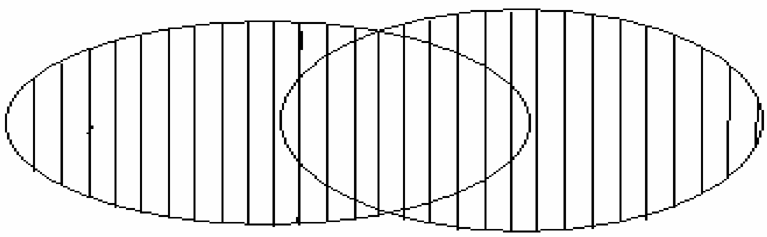
Если все рассматриваемые множества являются подмножествами одного и того же универсального множества U, тогда результаты выполнения операций объединения и пересечения дают подмножества из того же универсального множества U. При фиксированном универсальном множестве дополнение к X обозначают X'.

Операция дополнения имеет следующие свойства:

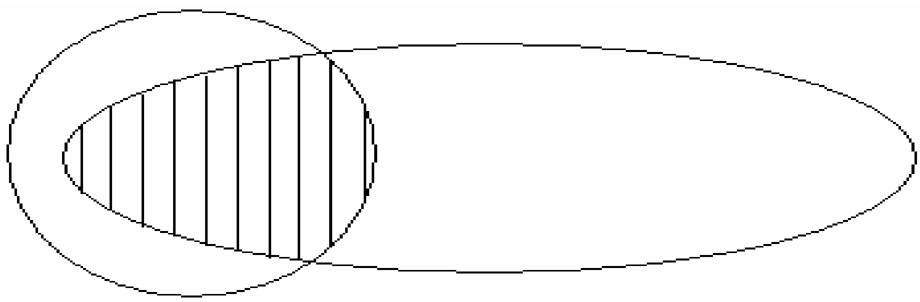
$(X')' = X$; $\varnothing' = U$; $U' = \varnothing$; $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$; $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$.

Схематически операции над множествами изображают при помощи диаграмм Эйлера – Венна.

Объединение $X \cup Y$



Пересечение $X \cap Y$



ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ

При решении практических задач часто нужно из некоторой совокупности предметов (некоторого множества) тем или иным способом выбирать элементы из этого множества, обладающие определёнными свойствами, располагать их в определённом порядке или выполнять над предметами некоторые действия, связанные с подсчётом количества вариантов или искать способы выполнения какого – либо действия с предметами множества. Все такие задачи называют комбинаторными задачами, а раздел математики, где занимаются решением таких задач, называют комбинаторикой. Мы рассмотрим только такие задачи, где надо найти число способов реализации той или иной комбинаторной проблемы. Такие задачи решает перечислительная комбинаторика. Другое название этого раздела комбинаторики – теория перечислений.

Рассмотрим первое основное правило комбинаторики – правило суммы:

Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b можно выбрать n способами, причём каждый выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b, то выбор «a или b»можно осуществить m+n способами.

На языке теории множеств это правило можно сформулировать следующим образом:

Если пересечение конечных множеств A и B пусто $A \cap B = \emptyset$, то число элементов в их объединении , $A \cup B$, равно сумме чисел элементов множеств A и B :

$$A \cap B = \emptyset \to n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Здесь через $n(A)$ обозначено количество элементов множества A .

В случае, когда множества имеют непустые пересечения, имеет место следующая формула:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Эта формула получается просто, если учесть, что $n(A)$ и $n(B)$ дважды учитывают число элементов общей части: один раз – первое слагаемое, а второй раз – второе слагаемое. Эту формулу часто называют либо формулой перекрытий, либо формулой включений и исключений. Вообще имеет место более общая формула:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_k) - n(A_1 \cap A_2) - n\ (A_1 \cap A_3) - \cdots$$
$$n(A_1 \cap A_k) - n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_4) - \cdots - n(A_2 \cap A_k) - \cdots - n(A_{k-1} \cap A_k) + n(A_1 \cap\ A_2 \cap\ A_3) \cdot$$
$$(-1)^{m+1} n(A_1 \cap \ldots \cap\ A_m) + \cdots + (-1)^{k+1} n(A_1 \cap \ldots \cap\ A_k).$$

В эту формулу кроме чисел элементов самих множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$ входят всевозможные числа элементов пересечений исходных множеств по 2, по 3, по 4,…, по k.Если число пересекающихся множеств нечётно, то соответствующее слагаемое входит в формулу со знаком «плюс», а если число пересекающихся множеств чётно, то со знаком «минус».

Второе основное правило комбинаторики – правило произведения:

Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b можно выбрать n способами, причём каждый элемент $a \in A$ и $b \in B$, то выбор пары «a и b»можно осуществить m·n способами.

Это правило на языке теории множеств формулируется так:

Если множества A и B конечны, то число пар «a , b» , где $a \in A$ и $b \in B$, равно произведению чисел элементов этих множеств.

Пример.

1. В потоке из 100 студентов первого курса 70 студентов знают английский язык, 45 студентов знают французский язык и 23 студента знают оба языка. Сколько студентов потока не знают ни английского ни французского языка?

Решение: обозначим множество студентов, знающих английский язык через A, знающих французский язык – через Ф. Можем записать: $n(A) = 70, n(\Phi) = 45, n(A \cap \Phi) = 23.$ По формуле включений и исключений находим: $n(A \cup \Phi) = n(A) + n(\Phi) - n(A \cap \Phi) = 70 + 45 - 23 = 92.$ Так как множество $A \cup \Phi$ представляет тех, кто знает хотя бы один из этих языков, то студентов, которые не знают ни тот ни другой язык, будет 100-92=8.

2.В спортивном лагере из 40 спортсменов по различным видам спорта 30 имеют разряд по плаванию, 27 – по по шахматам и пятеро не имеют спортивных разрядов ни по плаванию ни по щахматам. Сколько разрядников по шахматам имеют спортивные разряды по плаванию?

Решение: $n(S) = 30; n(C) = 27; n(\bar{S} \cap \bar{C}) = 5$. $n(S) + n(C) - n(S \cap C) = n(S \cup C);$

$n(S \cup C) + n(\bar{S} \cap \bar{C}) = 40;$ $n(S \cup C) = 40 - n(\bar{S} \cap \bar{C}) = 40 - 5 = 35;$ 30+27- $n(S \cup C) = 35;$

$n(S \cup C) = 30 + 27 - 35 = 22.$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Пусть имеется конечное множество A, состоящее из n элементов.

Определение 1. Размещением из n элементов по m называется всякое подмножество множества A, состоящее из m элементов, которое отличается от других подмножеств либо самими элементами, либо порядком элементов в подмножестве.

Число размещений, которые могут быть получены из элементов данного множества, обозначают символом A_n^m.

Теорема. Число размещений из n элементов по m элементов может быть найдено по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Первый элемент может быть выбран n способами, второй – (n-1) способом, третий – (n-2) способами,…, элемент с номером m может быть выбран (n-m+1) способом. Имеем: A_n^m=(n-1) (n-1)… (n-m+1).

Умножим и разделим последнее равенство на (n-m)!, получим:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример.

Комиссия состоит из семи членов: председателя, заместителя и пяти членов. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности председателя и его заместителя?

Решение: так, как порядок, кто председатель, а кто его заместитель, важен, то всего существует

$A_7^2 = \frac{7!}{5!} = 42$ способа распределения обязанностей.

Определение 2. Перестановками из n элементов называются такие их комбинации, которые отличаются друг от друга только порядком элементов.

Число перестановок из n элементов обозначают P_n.

Теорема. Число перестановок из n элементов равно n!

Действительно, достаточно в формуле вычисления числа размещений положить m=n , тогда получим: $P_n = n!$.

Пример.

Сколько существует различных способов расставить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы ни одна ладья не била другую ладью?

Решение: рассмотрим некоторую расстановку ладей, причём будем считать, что первую ладью возьмём из первой стоки, вторую - из второй строки, третью ладью – из третьей строки и т.д.. Расстановка ладей имеет, например, такой вид:

$(1, i_1); (2, i_2); (3, i_3); (4, i_4); (5, i_5); (6, i_6); (7, i_7); (8, i_8)$

В этой расстановке главное, чтобы среди первых индексов все были бы различные (ладьи не должны бить друг друга); вторые индексы тоже должны быть все различные. Чтобы это выполнялось, достаточно вместо этих индексов подставить любую перестановку из восьми номеров столбцов. Таких перестановок существует 8! = 40320. Это и есть ответ на задачу.

Определение 3. Сочетаниями из n элементов по m элементов называются всевозможые комбинации из данных n элементов по m в каждой комбинации, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначают C_n^m. Совершим в каждом сочетании всевозможные перестановки, их будет m! И у нас получатся размещения, поэтому можно записать: $A_n^m = m!\, C_n^m$, откуда получим формулу:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример1.

Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти клавишах фортепиано, если звукосочетание может содержать от двух до десяти звуков?

Решение: так как звукосочетание - неупорядоченный набор звуков, то решение будет иметь вид:

$$N = C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 2^{10} - C_{10}^0 - C_{10}^1 = 1024-1-10=1013.$$

Пример 2.

В чемпионате региона по баскетболу принимают участие 15 команд. Игры проходят в четыре круга. Сколько всего будет сыграно матчей?

Решение: каждый матч представить можно как пару команд, причём порядок команд в этой паре не важен, поэтому в одном круге будет сыграно C_{15}^2=105 матчей, а всего за четыре круга будет сыграно 420 матчей.

Пример 3.

В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы 5 гвоздик одного цвета?

Решение: можно выбрать 5 розовых гвоздик или 5 красных гвоздик. Розовые гвоздики можно выбрать $C_5^5 = 1$ способом, а красные гвоздики можно выбрать $C_{10}^5 = 252$. Всего это можно сделать 253 способами.

Пример 4.

Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата – белый и чёрный?

Решение: по правилу произведения в комбинаторике первое действие – выбор белого квадрата можно осуществить 32 способами; второе действие – выбор чёрного квадрата можно выбрать тоже 32 способами, тогда пару действий можно осуществить $32 \cdot 32 = 1024$ способами.

Пример 5.

Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата, если нет ограничений на цвет квадратов?

Решение: так как два квадрата – неупорядоченная пара, то ответ:
$C_{64}^2 = \frac{64!}{2!62!} = \frac{64 \cdot 63}{2} = 2016.$

Пример 6.

Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два чёрных квадрата?

Решение: два чёрных квадрата – неупорядоченная пара, следовательно:
$C_{32}^2 = \frac{32!}{2!30!} = \frac{32 \cdot 31}{2} = 496.$

Пример 7.

В профсоюзный комитет факультета избрано 7 студентов, из которых нужно выбрать председателя, его заместителя, секретаря и ответственного за культурно – массовую работу. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: председателя можно выбрать семью способами, заместителя – шестью, секретаря – пятью и ответственного за культурно – массовую работу – четырьмя способами. Всего по правилу произведения получим: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$

Пример 8.

На собрании должны выступить докладчики А, Б, В, Г и Д. Сколькими способами можно установить очерёдность выступлений, если докладчик А не должен выступать раньше Б?

Решение: если Б выступает первым, то получим 4!=24 варианта;

если Б выступает вторым, то получим $3 \cdot 3! = 18$ вариантов;

если Б выступает третьим, то получим $2 \cdot 3! = 12$ вариантов;

если Б выступает четвёртым, то получим 3!=6 вариантов. Всего 60 вариантов.