ПЕРЕСТАНОВКИ

Определение 1. Перестановкой степени n называется любая упорядоченная запись натуральных чисел 1, 2, 3, . . . , n в строчку одно за другим.

Например, 2, 4, 3, 1, 5. Это перестановка пятой степени. Вообще можно говорить о перестановках не только чисел, но и объектов любой природы, но сейчас для нас наибольший интерес представляет перестановка натуральных чисел. В принципе можно каждому объекту присвоить свой номер, тогда любая перестановка объектов может быть заменена перестановкой чисел. Можно смотреть на перестановку элементов как на перестановку их номеров.

ТЕОРЕМА 1. Существует n! различных перестановок n-ой степени из n чисел.

Докажем эту теорему. Рассмотрим n различных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. На первое место перестановки существует n способов выбора записи чисел; на второе место остаётся уже (n-1) способ выбора чисел; на третье место останется (n-2) варианта выбора и т.д., а на последнее место остаётся один единственный вариант. Тогда можем записать, что число всех перестановок n-ой степени из n элементов равно: $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ . \ . \ . \ \cdot 2\cdot 1=n!$. Символ n! читается эн- факториал. Таким образом, n! означает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих данного числа. Теорема доказана.

Определение 2. Говорят, что в данной перестановке два числа образуют инверсию (беспорядок), если большее из чисел в данной перестановке стоит левее меньшего. В противном случае эти два числа образуют порядок. Рассмотрим перестановку шестого порядка

2, 5, 1, 4, 6, 3

Подсчитаем общее количество инверсий в данной перестановке. Для этого поступим следующим образом: возьмём единицу и сосчитаем ,сколько чисел стоит левее единицы:

1 – две инверсии, затем единицу вычеркнем из перестановки; теперь возьмём двойку и подсчитаем, сколько чисел стоит левее двойки; 2 – ноль инверсий; вычёркиваем двойку и принимаемся за тройку; левее тройки стоит три числа, то есть тройка даёт нам три инверсии; вычёркиваем тройку и считаем, сколько чисел будет левее четвёрки; четвёрка даёт одну инверсию, вычёркиваем четвёрку и считаем количество чисел левее пятёрки; пятёрка даёт 0 инверсий, вычёркиваем пятёрку и считаем количество инверсий, которые даёт шестёрка; шестёрка даёт 0 инверсий.

1 – две инверсии; 2 – ноль инверсий; 3 – три инверсии; 4 – одна инверсия; 5 – ноль инверсий; 6 – ноль инверсий.

Общее число инверсий ,таким образом получается шесть.

Определение 3. Перестановка называется чётной, если общее количество инверсий есть чётное число и, соответственно, нечётной, если общее количество инверсий, содержащихся в этой перестановке , число нечётное.

Определение 4. Транспозицией называется такое преобразование перестановки, при котором какие – либо два её элемента меняются местами, а все остальные элементы остаются на своих местах.

Теорема 2. Все n! перестановок можно записать в таком порядке, что каждая следующая будет получаться из предыдущей с помощью одной транспозиции (такой порядок называется идеальным), при этом ни одна перестановка не встретится дважды, а начинать можно с любой перестановки. Доказательство опустим.

Следствие из теоремы 2: из какой–либо перестановки n-ой степени можно получить любую другую перестановку n-ой степени с помощью нескольких транспозиций.

Теорема 3. Любая транспозиция меняет чётность перестановки на противоположную.

Доказательство опустим.

Определение 5. Подстановкой n-ой степени называется любое отображение множества натуральных чисел от 1 до n самого на себя.

Каждую подстановку будем записывать в две строки, предполагая, что под каждым числом записано именно то число, которое ему соответствует. Заметим, что порядок чисел в верхней строчке является несущественным, например, рассмотрим подстановку пятой степени:

$$\begin{pmatrix} 3\,2\,5\,1\,4 \\ 2\,4\,1\,5\,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,3\,1\,4\,2 \\ 1\,2\,5\,3\,4 \end{pmatrix}.$$

Здесь и в той и в другой подстановке 1 переходит в 5; 2 переходит в 4; 3 переходит в 2; 4переходит в 3 и 5 переходит в 1. Поэтому эти подстановки тождественные. Каждую подстановку можно записывать так, чтобы все числа в первой строке располагались в порядке возрастания. При такой записи подстановок любые две подстановки одной степени будут отличаться только перестановками во второй строке. Отсюда следует довольно простой и важный вывод: существует n! различных подстановок n – ой степени.

Определение 6. Будем называть подстановку чётной, если общее количество инверсий, содержащихся и впервой и во второй строчках чётное число и нечётной, если общее число инверсий в двух строчках – число нечётное.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определение 7. Пусть имеется n^2 каких – либо чисел, записанных в виде квадратной таблицы, называемой квадратной матрицей n – го порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}a_{n2}a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определителем порядка n, или детерминантом квадратной матрицы, называется алгебраическая сумма из n! слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение n элементов нашей матрицы, взятых каждый раз по одному из каждой строчки и из каждого столбца, при этом слагаемые берутся со знаком (+), если индексы его сомножителей образуют чётную подстановку, и со знаком (-) , если его индексы образуют нечётную подстановку.

Пример. Рассмотрим случай n=3.

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}$$

Определитель для этой матрицы будет содержать 3!=6 слагаемых. Найдём, например, с каким знаком будет входить в этот определитель произведение $a_{12}a_{31}a_{23}$. То, что это произведение будет в определителе, следует из того, что первые индексы все различные и вторые индексы тоже различные. Рассмотрим подстановку индексов:

$$\begin{pmatrix} 1\ 3\ 2 \\ 2\ 1\ 3 \end{pmatrix}$$

Найдём количество инверсий в каждой строке. В первой строке единичка инверсий не образует; двойка образует одну инверсию; тройка после вычёркивания двойки инверсий не образует. Во второй строке единичка образует одну инверсию, после её вычёркивания ни двойка, ни тройка инверсий не образуют. Итого получилось две инверсии и подстановка – чётная. Это означает, что рассматриваемое произведение входит в определитель со знаком (+).

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Определитель не изменится, если все его строчки сделать столбцами, а все его столбцы сделать строчками с прежними номерами. Такое преобразование называется транспонированием.

Доказательство: очевидно, что произведение $(a_{1i_1}a_{2i_2}\ \dots\ a_{ni_n})$ будет одним из слагаемых и для второго определителя, так как все его сомножители взяты по одному из каждой строчки и из каждого столбца. Выясним знак этого слагаемого. Знак этого произведения для первого определителя зависит от чётности подстановки $\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ i_1, i_2, \dots, i_n \end{pmatrix}$, а для второго определителя чётностью подстановки $\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_n \\ 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$. Чётности этих подстановок совпадают, поэтому слагаемые входят в определители с одинаковыми знаками, поэтому определители совпадут.

Это свойство говорит о равноправии строк и столбцов: всякое утверждение, доказанное для строк можно автоматически считать доказанным и для столбцов.

2. Если в определителе все элементы какой – либо строки равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Доказательство очевидно, так как каждое произведение будет иметь сомножителем нуль, и вся сумма будет равна нулю.

3. От перестановки двух строк абсолютная величина определителя не меняется, а знак меняется на противоположный.

При перестановке двух строк чётность подстановки индексов меняется на противоположную, поэтому все произведения меняют свои знаки, и сменит знак определитель.

4.Если в определителе имеются две одинаковые строчки, то определитель равен нулю.

Переставим эти две строчки. По предыдущему свойству знак определителя сменится на противоположный, но в силу того, что строки одинаковые, определитель не изменится. Такое возможно только тогда, когда определитель равен нулю.

5.Если в определителе какую-либо строку умножить на некоторое число, то весь определитель умножится на это число. Это означает, что общий множитель можно выносить за знак определителя.

Доказательство этого свойства совершенно очевидно, так как каждое слагаемое определителя имеет множителем какой-либо элемент этой строчки, то есть каждое слагаемое умножено на это число.

6.Если в определителе есть две пропорциональные строчки, то такой определитель равен нулю.

Вынесем общий множитель (пропорциональности) за знак определителя, тогда в определителе будут две равные строчки, а такой определитель по свойству 4 равен нулю.

7.Если в определителе какая-либо i-я строка представлена в виде суммы двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме этой строки такие же, как у исходного определителя, а i-я строка у одного определителя составлена из первых слагаемых, а у второго определителя i-я строка составлена из вторых слагаемых.

Доказательство очевидно. Достаточно рассмотреть общий член исходного определителя и общие члены двух полученных определителей.

Определение 8. Говорят, что в определителе i-я строка является линейной комбинацией остальных строк, если для каждой из этих строк можно подобрать такие коэффициенты, что после умножения этих строк на эти коэффициенты и почленного суммирования мы получим i-ю строчку.

8.Если в определителе какая-либо строка является линейной комбинацией остальных строк, то такой определитель равен нулю.

Это свойство легко доказывается при помощи свойства 7. Достаточно такой определитель расписать на сумму нескольких определителей, в каждом из которых будут пропорциональные строчки, а такие определители по свойству 6 равны нулю.

9.Определитель не изменится, если к какой-либо строке прибавить любую другую строку, умноженную на любое число.

Это свойство тоже очевидно, если воспользоваться для доказательства свойством 7.

Определение 9.Выберем в определителе произвольным образом k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется минором k-го порядка для первоначального определителя.

Определение 10.Если в определителе взять оставшиеся $(n-k)$ строк и $(n-k)$ столбцов, то полученный новый минор называется дополнительным минором для минора k-го порядка. Очевидно, дополнительный минор можно получить , если просто вычеркнуть те строчки и столбцы, в которых расположен минор.

Определение 11.Произведение дополнительного минора на (-1) в степени суммы номеров строк и столбцов минора называется алгебраическим дополнением для минора .

Теорема ЛАПЛАСА. (Частный случай). Величина определителя равна сумме произведений элементов строки определителя на их алгебраические дополнения.

Пример 1. Вычислим определитель второго порядка по теореме Лапласа. Имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель второго порядка равен разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагонали.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. Воспользуемся теоремой Лапласа. Возьмём строчку 3. В этой строчке стоят элементы 3, 2 и 4. Найдём алгебраические дополнения этих элементов. Алгебраическим дополнением элемента 3 является определитель второго порядка

$(-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$=1. Алгебраическим дополнением элемента 2 будет $(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$=4. Алгебраическим дополнением элемента 4 будет $(-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$=-3. Таким образом, величина определителя будет равна: 3 $\cdot$1+2$\cdot$4+4$\cdot$(-3)=3+8-12=-1.

Вычислим этот же определитель, но для этого воспользуемся свойством 9. Умножим вторую сроку определителя на (-2) и, полученный результат, прибавим к третьей строке, получим определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

В силу свойства 9 величина исходного и полученного определителя одна и та же.

Применим к последнему определителю теорему Лапласа и разложим его по третьей строке, получим: (-1)$\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$+0+0=1.

Тот же самый определитель мы вычислили гораздо проще: нам пришлось считать всего одно слагаемое. Свойство 9 позволяет сводить определитель n-го порядка к вычислению одного определителя (n-1)-го порядка, тогда как применение непосредственно теоремы Лапласа сводит вычисление определителя n-го порядка к n определителям (n-1) порядка.

МАТРИЦЫ

Определение 1. Система из m$\cdot$n чисел, записанная в вид таблицы из m строк и n столбцов, называется числовой матрицей, например,

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицы будем обозначать большими буквами: А, В, …, С. Числа, из которых образованы матрицы будем обозначать теми же , но малыми буквами, у которых будем писать два индекса. Первый индекс будет обозначать номер строки, из которой взят этот элемент, а второй индекс будет обозначать номер строки, из которой взят этот элемент.

a_{ij} – это элемент матрицы A, взятый из строки с номером I и из столбца с номером j. Иногда матрицу будем записывать в виде: $\{a_{ij}\}$, I = 1, 2,…,m; j = 1, 2,… ,n.

Определение 2. Матрица называется прямоугольной, если $m \neq n$. В случае, когда $m = n$

матрица называется квадратной.

Определение3. Матрица называется нулевой, или нуль - матрицей, если все её элементы равны нулю.

У квадратной матрицы элементы, имеющие одинаковые первый и второй индексы, образуют главную диагональ (она идёт из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол). Вторая диагональ, идущая из правого верхнего угла в левый нижний угол, называется побочной диагональю.

Определение 4. Матрица называется диагональной , если у неё все элементы , кроме элементов на какой – либо диагонали, равны нулю.

Определение 5. Матрица называется единичной, если на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю.

Определение 6. Произведением матрицы на число называют новую матрицу, у которой все элементы умножены на это число.

Если $B = \mu \cdot A$, то $b_{ij} = \mu \cdot a_{ij}$.

Определение 7. Под суммой двух матриц понимают третью матрицу, соответствующие элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц – слагаемых:

$$C = A + B \to c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Из приведённой формулы следует, что суммировать можно только матрицы одинаковых размеров.

Определение 8. Под произведением двух матриц A и B понимают третью матрицу C , элементы которой $c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$.

Из этой формулы следует, что для того, чтобы можно было перемножить две матрицы число столбцов первого сомножителя (первой матрицы) должно совпадать с числом строк второго сомножителя (второй матрицы). Матрица – произведение (матрица C) будет иметь столько строк, сколько строк у первого сомножителя (матрицы A) и столько столбцов, сколько их у второго сомножителя (матрицы B).

Обратная матрица

Определение 9. Линейным преобразованием неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ в неизвестные $y_1, y_2, \dots, y_n$называется такой переход от старых неизвестных в новые, при котором каждое старое неизвестное представляет линейную комбинацию всех новых неизвестных , то есть можно записать:

$$(1)\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}.$$

Матрица A из элементов a_{ij} в этом случае называется матрицей линейного преобразования (1). Итак, у каждого линейного преобразования имеется своя квадратная матрица. Обратно, если взять произвольную квадратную матрицу, то с её помощью можно записать линейное преобразование. Для линейных преобразований легко ввести понятие произведения преобразований.

Определение 10.Пусть имеются два линейных преобразования (1) и

$$(2)\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1n}z_n \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2n}z_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{nn}z_n \end{cases}$$

. Произведением этих преобразований называют результат их последовательного выполнения. Если проделать все вычисления, то получится, что произведение линейных преобразований снова будет линейным преобразованием, элементы матрицы которого определяются через элементы матриц A и B по следующему закону:

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}b_{kj}$. Это и будет произведение двух матриц.

Определение 11. Матрица B называется обратной для матрицы A , если $A \cdot B = B \cdot A = E$, где E - единичная матрица.

Определение 12.Квадратная матрица называется вырожденной, если её определитель равен нулю и невырожденной, если её определитель не равен нулю.

Имеет место теорема: всякая невырожденная квадратная матрица имеет обратную матрицу.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1.Заменим каждый элемент матрицы его алгебраическим дополнением, получим новую матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11}A_{12}\dots A_{1n} \\ A_{21}A_{22}\dots A_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n1}A_{n2}\dots A_{nn} \end{pmatrix}.$$

2.Транспонируем эту матрицу и разделим каждый элемент на величину определителя матрицы, получим обратную матрицу B

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Для обратной матрицы применяют привычное обозначение $B = A^{-1}$.

Следует заметить, что умножение матриц не обладает переместительным свойством, как это имеет место для обычных чисел, более того найти произведение можно не для любых матриц. Перемножить можно матрицы тогда, когда число столбцов первого множителя совпадает с числом строк второго множителя. Матрица – произведение будет иметь столько строк, сколько строк у первого множителя и столько столбцов, сколько столбцов у второго множителя. Это следует из формулы общего члена: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} b_{kj}$.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Возьмём m произвольных чисел λ_1, λ_2, . . ., λ_m. Умножим первую строчку на первое число, вторую строчку на второе число и т.д., последнюю строчку умножим на последнее число и просуммируем, получим: $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \dots + \lambda_m S_m$. Это выражение называется линейной комбинацией строк. Здесь S_1 – первая строка, S_2 – вторая строка, . . . , S_m – последняя строка матрицы.

Определение 1. Система строк называется линейно зависимой, если линейная комбинация строк равна нулю, а среди коэффициентов линейной комбинации есть хотя бы один отличный от нуля коэффициент.

Определение 2. Система строк называется линейно независимой, если линейная комбинация равна нулю тогда и только тогда, когда равны нулю все коэффициенты линейной комбинации.

Определение 3. Минор порядка r называется базисным для матрицы, если он отличен от нуля и все миноры порядка r+1 равны нулю или их вообще не существует.

Определение 4. Рангом матрицы называется порядок базисного минора.

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАНГА МАРИЦЫ

Существует два способа вычисления ранга матрицы: метод окаймляющих миноров и метод элементарных преобразований.

Метод окаймляющих миноров. Находят минор какого – либо порядка, который отличен от нуля, затем находят все окаймляющие миноры. Если все окаймляющие миноры равны нулю, то ранг матрицы будет равен порядку отличного от нуля минора. Этот метод требует довольно вычислений, так как окаймляющих миноров может быть довольно много.

Метод элементарных преобразований . Элементарными называются следующие преобразования:

1.Перестановка строк или столбцов.

2.Умножение строки или столбца на отличное от нуля число.

3.Прибавление к строке (столбцу) линейной комбинации остальных строк (столбцов).

Имеет место теорема: элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы.

Для вычисления ранга матрицы при помощи элементарных преобразований матрицу нужно привести к диагональному виду. Ранг такой матрицы равен количеству ненулевых элементов диагонали матрицы.

Замечание: матрицу не обязательно приводить к диагональному виду. Достаточно привести к треугольному виду. Ранг треугольной матрицы равен числу ненулевых строк треугольной матрицы.

Найдём ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Применим метод окаймляющих миноров. Возьмём минор, стоящий на пересечении второй и третьей строки с вторым и третьим столбцами. Он отличен от нуля (равен 12). Окаймляем его минором третьего порядка, для этого добавим элементы, стоящие на пересечении первой, второй и третьей строки с четвёртым, третьим и вторым столбцами:

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Этот минор отличен от нуля (равен -18). Так как миноров более высокого порядка для данной матрицы не существует, то ранг матрицы равен трём.

Вычислим ранг той же матрицы при помощи элементарных преобразований. Для этого умножим первую строчку матрицы на -1 и результат прибавим к строке три. Умножим первую строку на -2 и результат прибавим к строке номер два, получим матрицу

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Переставим в полученной матрице столбцы второй и четвёртый, получим матрицу:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Это треугольная матрица, у неё три отличные от нуля строчки, поэтому ранг этой матрицы равен трём.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим произвольную систему из m уравнений с n неизвестными:

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Рассмотрим две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n}b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn}b_m \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется матрицей системы, а матрица A^* называется расширенной матрицей системы. Имеет место

теорема Кронекера – Капелли: система уравнений (1) совместна только в том случае, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы.

Доказательство. Необходимость. Пусть система совместна, т.е. у неё есть решение

$$x_1 = k_1; x_2 = k_2; \dots; x_n = k_n.$$

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n = b_1, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \cdots + a_{mn}k_n = b_m. \end{cases}$$

(2) можно рассматривать как линейную зависимость столбцов: столбец свободных членов является линейной комбинацией столбцов при неизвестных, но тогда добавление столбца свободных членов не может изменить ранг матрицы, т.е. ранги матриц равны.

Достаточность. Пусть ранги равны, тогда базисный минор матрицы A будет базисным и для матрицы A^*. Это значит, что столбец свободных членов выражается через столбцы базисного минора, тем более через всю систему столбцов, а это означает, что коэффициенты , при помощи которых столбец выражается через базисные столбцы есть решение системы. Теорема доказана.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Пусть $RangA = RangA^* = r \le n$ Это означает, что система совместна. Выберем в матрице A минор M наивысшего порядка отличный от нуля. Назовём этот минор БАЗИСНЫМ. Этот минор будет базисным и для матрицы A^*. За счёт перестановки строк и столбцов можно сделать так, чтобы этот минор стоял бы в левом верхнем углу. Будем считать , что так оно и есть. Рассмотрим систему уравнений:

$$(2)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases}$$

Очевидно, что каждое решение системы (2) является решением и системы (1). Покажем, что и каждое решение системы (1) является решением и системы (2). Для этого стоит только вспомнить, что любую строчку системы (1) можно получить из строчек базисного минора, то есть из строчек системы (2), следовательно ,любое решение системы (1) является решением и системы (2). Системы (1) и (2) – эквивалентны. Мы показали, что достаточно решить систему (2). Перенесём в уравнениях системы (2) все неизвестные, начиная с x_{r+1} в правые части, получим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - a_{1r+2}x_{r+2} - \ \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - a_{2r+2}x_{r+2} - \ \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - a_{rr+2}x_{r+2} - \ \dots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Все неизвестные, начиная с x_{r+1} назовём свободными неизвестными. Придадим свободным неизвестным какие – либо произвольные значения. Система может быть решена по формулам Камера.

Формулы Крамера: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$,здесь Δ – определитель матрицы системы; Δ_i – вспомогательный определитель , полученный из определителя матрицы системы заменой столбца с номером i на столбец свободных членов.

Поведение системы уравнений зависит от рангов матриц A и A^* .

Если $r = n$, то система имеет единственное решение.

Если $r < n$, то система имеет бесконечно много решений.

Рассмотрим пример:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

Исследуем систему на совместность при помощи теоремы Кронекера – Капелли. Рассмотрим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 8 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right)$$. Умножим вторую строчку на (-2) и прибавим к первой строке; умножим вторую строку на (-3) и прибавим к третьей строке, получим:

$\begin{pmatrix} 0 & 7 & -7 & 5 & & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & \vdots & 2 \\ 0 & 14 & 14 & 10 & & -6 \end{pmatrix}$. Умножим первую строчку на (-2) и прибавим к третьей строке:

$\begin{pmatrix} 0 & 7 & -7 & 5 & & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$. Получили диагональную матрицу, у которой две ненулевые строки, а это значит, что ранг этой матрицы равен двум. Выберем базисный минор. За базисный минор можно выбрать минор, который стоит первой и второй строчках и в первом и втором столбцах. Все уравнения, коэффициенты которых не попали в базисный минор отбрасываем, и все неизвестные, коэффициенты которых не попали в базисный минор переносим в правую часть, получим:

$$\begin{cases} 7x_2 = -3 + 7x_3 - 5x_4 \\ x_1 - 2x_2 = 2 - 3x_3 + 2x_4 \end{cases}.$$

Будем решать эту систему, считая x_3 и x_4 известными величинами, получим:

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{3}{7} + x_3 - \frac{5}{7}x_4 \\ x_1 = \frac{8}{7} - x_3 - \frac{4}{7}x_4 \end{cases}.$$

Мы получили так называемое общее решение, то есть формулы, по которым несвободные неизвестные выражаются через свободные неизвестные. По этим формулам можно получить любое конкретное решение исходной системы уравнений.

Матричный метод решения системы линейных уравнений. Введём обозначения: $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. С помощью этих обозначений систему линейных уравнений можно записать в матричной форме: $A \cdot X = B$. Умножим последнее равенство на матрицу, обратную матрице A слева: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$. Последняя формула позволяет сделать такой вывод: матричным способом можно решать системы линейных уравнений, если число уравнений совпадает с числом неизвестных и определитель системы отличен от нуля.