# АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Это способ построения научной теории, при которой в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые АКСИОМАМИ теории, а все остальные предложения теории получаются как логические следствия аксиом.

В математике АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД зародился в работах древнегреческих геометров. Блестящим, остававшимся единственным вплоть до XIX века образцом применения АКСИОМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА была геометрическая система, известная под названием «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА (около 300 лет до новой эры). Хотя в то время не вставал ещё вопрос об описании логических средств, применяемых для извлечения содержательных следствий из аксиом, в системе ЕВКЛИДА уже достаточно чётко проведена идея получения всего основного содержания геометрической теории чисто дедуктивным путём из некоторого, относительно небольшого, числа утверждений – АКСИОМ, истинность которых представлялась наглядно очевидной.

Открытие в XIX веке неевклидовой геометрии Н.И. ЛОБАЧЕВСКИМ и Я. БОЛЬЯЙ (J. BOLYAI) явилось толчком к дальнейшему развитию АКСИОМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА. Они установили, что, заменив привычный и, казалось бы, единственный объективно истинный V постулат ЕВКЛИДА о параллельных его отрицанием, можно развивать чисто логическим путём геометрическую теорию, столь же стройную и богатую содержанием, как и геометрия ЕВКЛИДА. Этот факт заставил математиков XIX века обратить специальное внимание на дедуктивный (метод) способ построения математических теорий, что повлекло за собой возникновение новой проблематики, связанной с самим понятием АКСИОМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА, и формальной (аксиоматической) математической теории. По мере того, как накапливался опыт аксиоматического изложения математических теорий – здесь надо отметить прежде всего завершение логически безупречного (в отличие от «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА) построения элементарной геометрии (М. ПАШ (M. PASCH), Дж. ПЕАНО ( G. PEANO), Д. ГИЛЬБЕРТ (D. HILBERT)) и первые попытки аксиоматизации арифметики (Дж. ПЕАНО), - уточнялось понятие формальной аксиоматической системы, о чём будет сказано ниже, возникла специфическая проблематика, на основе которой выросла так называемая ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ как основной раздел современной МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ.

Понимание необходимости обоснования математики и конкретные задачи в этой области зародились в более или менее отчётливой форме уже в XIX веке. При этом, с одной стороны, уточнение основных понятий и сведение более сложных понятий к простейшим на точной и логически всё более строгой основе проводились главным образом в области анализа ( язык «ε – δ» A. Cauchy (Коши)), теоретико – функциональные концепции Больцано (B. Bolzano) и Вейерштрасса (K. Weierstrass), континуум Кантора (G. Cantor) и Дедекинда (R. Dedekind), с другой стороны, открытие неевклидовых геометрий стимулировало развитие АКСИОМАТИЧЕСКОГО метода, стимулировало возникновение новых идей и постановку проблем более общего метаматематического характера, прежде всего проблем, связанных с понятием произвольной аксиоматической теории, таких, как проблемы непротиворечивости, полноты и независимости той или иной системы аксиом. Первые результаты в этой области принёс метод ИНТЕРПРЕТАЦИЙ, который грубо можно описать следующим образом: пусть каждому исходному понятию и отношению данной аксиоматической теории T поставлен в соответствие некоторый конкретный математический объект. Совокупность таких объектов называется ПОЛЕМ ИНТЕРПРЕТАЦИЙ. Всякому утверждению U теории T естественным образом ставится в соответствие некоторое высказывание $U^*$ об элементах поля интерпретаций, которое может быть истинным или ложным. Тогда говорят, что утверждение U теории T, соответственно, истинно или ложно в данной интерпретации. Поле интерпретаций и его свойства сами обычно являются объектами рассмотрения какой – либо, вообще говоря, другой математической теории $T_1$ , которая, в частности, тоже может быть аксиоматической. Метод интерпретаций следующим образом позволяет устанавливать факт ОТНОСИТЕЛЬНОЙ непротиворечивости, то есть доказывать суждения типа: «если теория $T_1$ непротиворечива, то непротиворечива и теория T». Пусть теория T проинтерпретирована в теории $T_1$ таким образом, что все аксиомы $A_i$ теории T интерпретируются истинными суждениями $A_i^*$ теории $T_1$, тогда всякая теорема теории T, то есть всякое утверждение A, логически выведенное из аксиом $A_i$ в T, интерпретируется в $T_1$ некоторым утверждением A*, выводимым в $T_1$ из интерпретаций $A_i$* аксиом $A_i$, и, следовательно, является истинным. Последнее утверждение опирается ещё на одно неявно делаемое нами допущение известного подобия логических средств теорий T и $T_1$, но практически это условие обычно выполняется. На заре применения метода интерпретаций об этом допущении даже не задумывались, оно представлялось само собой разумеющимся; на самом деле в случае первых опытов доказательства теорем об относительной непротиворечивости логические средства теорий T и $T_1$ просто совпадали – это была классическая логика предикатов.

Пусть теперь теория T противоречива, то есть некоторое утверждение A этой теории выводимо в ней вместе со своим отрицанием Ā, тогда из вышесказанного следует, что  непротиворечивости теории, которая получается,утверждение A* и не A* ( $\bar{A}^*$) будут одновременно истинными утверждениями теории $T_1$, то есть теория $T_1$ противоречива. Этим методом, например, была доказана (Ф. Клейн (F. Klein),A. Пуанкаре (H. Poincare)) непротиворечивость неевклидовой геометрии Лобачевского, в предположении, что непротиворечива геометрия Евклида, а вопрос о непротиворечивости гильбертовой аксиоматизации евклидовой геометрии был сведён к проблеме непротиворечивости арифметики. Метод интерпретаций позволяет также решать вопрос о независимости систем аксиом: для доказательства того, что аксиома A теории T не зависит от остальных аксиом этой теории, то есть не выводима из них, и, следовательно, существенно необходима для получения всего объёма данной теории, достаточно построить такую интерпретацию теории T, в которой аксиома A была бы ложной, а все остальные аксиомы этой теории истинны. Иной формой этого способа доказательства независимости A является установление непротиворечивости теории, которая получается, если в данной теории T аксиому A заменить её отрицанием Ā.

Упомянутое выше сведе́ние проблемы непротиворечивости геометрии Лобачевского к проблеме непротиворечивости евклидовой геометрии, а этой последней к вопросу о непротиворечивости арифметики, имеет своим следствием утверждение, что V постулат Евклида не выводим из остальных аксиом геометрии, если только непротиворечива арифметика натуральных чисел. Слабая сторона метода интерпретаций состоит в том, что в вопросах непротиворечивости и независимости систем аксиом он даёт возможность получать результаты, носящие лишь относительный характер. Однако, важным достижением этого метода стал факт, что с его помощью была выявлена на достаточно точной основе особая роль арифметики как такой математической теории, к вопросу о непротиворечивости которой сводится аналогичный вопрос для целого ряда других теорий.

Дальнейшее развитие аксиоматический метод получил в работах Д. Гильберта и его шкоы в виде так называемого метода ФОРМАЛИЗМА основаниях математики. В рамках этого метода была выработана следующая стадия уточнения понятия аксиоматической теории, а именно ФОРМАЛЬНОЙ системы. В результате этого уточнения оказалось возможным представлять сами математические теории как точные математические объекты и строить общую теорию, или МЕТАТЕОРИЮ, таких теорий.

Основным понятием этого направления является понятие формальной системы. Всякая формальная система строится как точно очерченный класс выражений – формул, в котором некоторым точным образом выделяется подкласс формул, называемых ТЕОРЕМАМИ данной формальной системы. При этом формулы формальной системы непосредственно не несут в себе никакого содержательного смысла, и их можно строить из произвольных, вообще говоря. Знаков или элементарных символов, руководствуясь только соображениями технического удобства. На самом деле способ построения формул и понятие теоремы той или иной формальной системы выбираются с таким расчётом, чтобы весь этот аппарат можно было применять для выражения, возможно более адекватного и полного, той или иной конкретной математической ( и не математической) теории, точнее, как её фактического содержания, так и её дедуктивной структуры. Общая схема построения (задания) произвольной формальной системы S такова:

1.Язык системы S;

а). алфавит – перечень элементарных символов системы;
б). правила образования (синтаксис) – правила, по которым из элементарных символов строятся формулы системы S, при этом последовательность элементарных символов считается формулой тогда и только тогда, когда она может быть построена с помощью правил образования.

2.Аксиомы системы S

Выделяется некоторое множество формул (обычно конечное или перечислимое), которые называются аксиомами системы S.

3.Правила вывода системы S

Фиксируется (обычно конечная ) совокупность предикатов $R_1,R_2,\ldots,R_k$ на множестве всех формул системы S. Пусть $R_i(x_1,x_2,\ldots,x_{n_{j+1}})$ – какие – либо из этих предикатов, если для данных формул $F_1,F_2,\ldots,F_{n_{j+1}}$ утверждение $R_i(x_1,x_2,\ldots,x_{n_{j+1}})$ истинно, то говорят, что формула $F_{n_{j+1}}$ непосредственно следует из формул $F_1,F_2,\ldots,F_{n_i}$ по правилу $R_i$.

Заданием языка системы, аксиом системы и правил вывода системы исчерпывается задание формальной системы S как точного математического объекта, поскольку понятие теоремы или выводимой формулы системы Sобразуется для всех формальных систем следующим единообразным способом (степень точности определяется уровнем точности задания алфавита, правил образования и правил вывода). Всякую конкретную математическую теорию T можно перевести на язык подходящей формальной системы S таким образом, что каждое осмысленное (логичное или истинное) предложение теории T выражается некоторой формулой системы S.