ЛЕКЦИИ

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

СОСТАВИЛ

ДОЦЕНТ ТПУ

КРИЦКИЙ О.Л.

СЕМЕСТР 6, 2017/2018 УЧЕБНЫЙ ГОД

ТПУ

2017 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. ВВЕДЕНИЕ

Статистические задачи занимают значительно место в матеметике, физике, экономике, особенно в случае необходимости учета флуктуационные эффекты. Наибольшую популярность и простоту имеют стохастические процессы, построенные на основе теории марковских случайных процессов диффузионного типа, а так же процессы, флуктуирующие параметры которых являются гауссовыми случайными величинами.

Цель данного курса – показать взаимосвязь экономики, физики и теории стохастических процессов – как различные задачи, описываемые стохастическими уравнениями, могут быть решены при помощи общего подхода, известного в уравнениях математической физики.

Определение: пусть G – некоторое множество, содержащее все подмножества множества Ω, т.е. $G=2^{\Omega}$. Если

1. $\forall k \in G, \forall A_k \in G$ следует, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in G$,
2. $\forall k \in G, \forall A_k \in G$ следует, что $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in G$,
3. $\Omega \in G$,
4. Если $A \in G$, то и $\bar{A} \in G$.

При выполнении свойств 1) – 4) G называют σ – алгеброй пространства событий Ω.

Определение: вероятностью P называют отображение $P: G \to [0,1]$, что

1. $\forall A \in G \ \ P(A) \geq 0$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k)$, причем $A_k \in G$ попарно не пересекаются друг с другом.

При выполнении свойства 3) говорят о σ–аддитивности вероятности. Если справедливо равенство $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P(A_k)$, то принято говорить только об аддитивности вероятности.

Определение: тройка (Ω, G, P) называется вероятностным пространством.

Определение: случайной величиной называется функция $\xi: \Omega \to \Re^n$, отображающая вероятностное пространство в одномерное евклидово пространство.

Определение: случайным процессом называется отображение $\xi: T \times \Omega \to \Re$, если для каждого момента времени t она представляет собой случайную величину.

Определение: пусть Ω – вероятностное пространство, $\omega_0 \in \Omega$ – фиксированное элементарное событие. Пусть $\xi(t,\omega)$ – случайный процесс. Детерминированная функция $\xi(t,\omega_0) \equiv \xi(t)$ называется реализацией (выборочной функцией), соответствующей элементарному событию $\omega_0 \in \Omega$.

В соответствии с данным определением случайный процесс можно трактовать как совокупность сечений или пучок траекторий.

Определение: пусть $\xi(t,\omega), \eta(t,\omega)$ – два случайных процесса. Они называются стохастически эквивалентными на *T*, если вероятность их отклонений в любой момент времени $t \in T$ равна нулю:

$$P(\omega \in \Omega,\ \xi(t,\omega) \neq \eta(t,\omega)) = 0.$$

1.1. ПРИМЕРЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1) Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение с некоторым случайным возмущением:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x^2 + f(t),\ x\big|_{t=0} = x_0,\ \lambda > 0. \quad (1)$$

Пусть $f(t) = 0,$ т.е. исходное уравнение превращается в уравнение с разделяющимися переменными. Тогда

$$\dot{x}(t) = -\lambda x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = -\lambda\, dt \Rightarrow \int_0^t \frac{dx}{x^2} = -\lambda \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} + \lambda t \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\lambda}{\lambda x_0} + \lambda t \Rightarrow \frac{1}{x} = \lambda\left(\frac{1}{\lambda x_0} + t\right).$$

Обозначим через $t_0 = -\frac{1}{\lambda x_0}$. Тогда окончательно имеем:

$$x(t) = \frac{1}{\lambda(t - t_0)}. \quad (2)$$

Данное решение имеет особенность в точке $t = t_0$. Проанализируем эту особенность. Если $x_0 > 0$, то t_0 отрицательно и $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$, так как в знаменателе выражения (2) будет стоять произведение двух положительных числа. В случае $x_0 < 0$ параметр t_0 положителен. Односторонние пределы в т. t_0 равны следующим выражениям:

$$\lim_{t \to t_0 - 0} x(t) = \lim_{t \to t_0 - 0} \frac{1}{\lambda(t - t_0)} = -\infty,\ \lim_{t \to t_0 + 0} x(t) = \lim_{t \to t_0 + 0} \frac{1}{\lambda(t - t_0)} = \infty.$$

Односторонние пределы не равны друг другу, т.е. в $t = t_0$ функция (2) теряет непрерывность. Более того, можно говорить о взрывном характере поведения в окрестности t_0, так как функция совершает бесконечный скачок с $-\infty$ до $+\infty$.

Вспомним про случайную силу $f(t)$ и исследуем оказываемое ею влияние на поведение решения задачи (1). При $x_0 > 0$ она несущественно (мало) влияет на $x(t)$ в (1). Однако с ростом *t* функция $x(t)$ убывает. Поэтому начиная с некоторого момента времени $x(t)$ будет слегка флуктуировать около нуля из–за $f(t)$, так как случайная сила будет преобладать. Стремясь к нулю, $x(t)$ перебрасывается случайной силой $f(t)$ в область отрицательных значений, причем это происходит до момента t_0. Как следствие, $x(t)$ стремится к $-\infty$ слева и $+\infty$ справа и имеет взрывной характер в т. t_0. Проходя точку t_0, из–за отсутствие других особенностей в (2) функция $x(t)$ вновь стремится к нулю при $t \to \infty$. Начиная с некоторого момента времени опять будут наблюдаться флуктуации около нуля из–за влияния на решение случайной силы.

Вид решения показан схематично на рис. 1.

2) Поведение на финансовых рынках.

Допустим, что на финансовом рынке производится покупка или продажа некоторого товара стоимостью S_i, где $i = \overline{0,N}$ – номер дня покупки. Наша прибыль или убыток за день составит в абсолютном безразмерном выражении $\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \overset{def}{=} R_i$. R_i называется относительным приращением цен и соответствует начислению сложного стохастического процента.

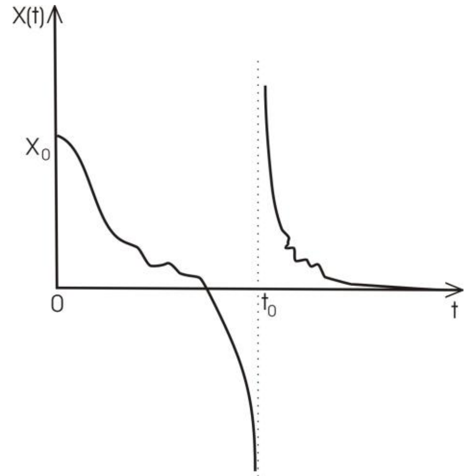

Рис. 1. Поведение решения задачи (1) в окрестности особой точки

Предположим, что величина прибыли имеет нормальное распределение: $R_i \sim N(a, \sigma_*^2)$. Тогда средняя прибыль за N дней составит $\bar{R} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} R_i$, а выборочная смещенная дисперсия (квадрат отклонения от средней прибыли):

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}(R_i - R)^2 . \tag{3}$$

Кроме того, в силу сделанных ранее предположений R_i можно записать в виде

$$R_i = a + \sigma_* \varphi ,$$

где $\varphi \sim N(0,1)$ – стандартная нормальная случайная величина.

Действительно, R_i имеет функцию распределения вида $F(x) = (1/2\pi)^{1/2}\sigma^{-1} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(t-a)^2}{\sigma_*^2}\right)dt$. Делая замену $s = \frac{(t-a)}{\sigma_*}$, переходим к интегралу $F(x) = (1/2\pi)^{1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{(x-a)/\sigma_*} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds$, т.е. к функции распределения случайной величины $\varphi \sim N(0,1)$.

Рассмотрим промежуток $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. На этом промежутке изменение между S_i и S_{i+1} зависит от времени, причем чем больше времени между продажей и покупкой, тем более сильным может быть это изменение. Пусть имеет место линейная зависимость:

$$a = \mu \Delta t_i ,$$

где μ – коэффициент пропорциональности или дрифт, или средняя ожидаемая доходность за время Δt_i. Тогда

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \mu \Delta t_i + \sigma_* \varphi . \tag{4}$$

Определение: волатильностью σ случайного процесса S_t называется его стандартное отклонение, вычисленное в течение интервала времени Δt.

Волатильность характеризует неустойчивость случайного процесса. Чем она больше, тем процесс менее устойчив и тем сложнее его поведение.

Для проведения оценки σ_* потребуем ограниченности волатильности σ по времени. По определению волатильности

$$\sigma_* = \sigma\sqrt{\Delta t} . \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), имеем:

$$\frac{S_{i+1}-S_i}{S_i}=\mu\,\Delta t_i+\sigma\sqrt{\Delta t}\,\varphi. \tag{6}$$

Вспоминая, что $\varphi \sim N(0,1)$, можно считать φ функцией только от пространственной переменной *x*, так как она имеет функцию распределения

$$F(x)=(1/2\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt,$$

которая зависит только от *x*.

Обозначим через $\Delta W \overset{def}{=} \sqrt{\Delta t}\,\varphi(x)$. Это соотношение называют приращением винеровского случайного процесса, который в равенстве (6) играет роль белого шума, вносящего в детерминированный процесс $S=S_0e^{\mu t}$ стохастически малые изменения.

Найдем параметры процесса ΔW и покажем, что он нормально распределен. Имеем: $E(\Delta W)=E\left(\sqrt{\Delta t}\,\varphi(x)\right)=\sqrt{\Delta t}\cdot E(\varphi(x))=\sqrt{\Delta t}\cdot 0=0$, $D(\Delta W)=E\left[\left(\sqrt{\Delta t}\,\varphi(x)\right)^2\right]=\Delta t\cdot D(\varphi(x))=\Delta t$. Наконец, так как $\varphi \sim N(0,1)$, то функция распределения для ΔW будет иметь вид $F_W(x)=\sqrt{\Delta t}\,(1/2\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds=$ (делаем замену переменного под знаком интеграла $\xi=\sqrt{\Delta t}\,s$) $=(1/2\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{\sqrt{\Delta t}\,x}\sqrt{\Delta t}\,\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\Delta t}\right)d\xi$. Последнее равенство есть функция распределения нормальной случайной величины с нулевым средним и дисперсией Δt. Значит, $\Delta W \sim N(0,\Delta t)$.

В соответствии со сделанным обозначением (6) запишется в виде $\frac{S_{i+1}-S_i}{S_i}=\mu\,\Delta t_i+\sigma\Delta W$. Переходя в нем к пределу при $\Delta t_i \to 0$, получим дифференциальное уравнение Ито:

$$dS=\mu S\,dt+\sigma S\,dW. \tag{7}$$

Это основное уравнение данного курса. Можно показать (см. (17)-(19)), что его решение имеет вид

$$S_t=S_0e^{\int_0^t\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\int_0^t\sigma dW},$$

если μ,σ – некоторые случайные функции от времени, винеровского процесса и (в самом общем случае) случайной функции S_t.

Рассмотрим частный случай. Пусть $\sigma=0$. Так как в этом случае изменчивость цены равна нулю, то рисковый актив с ценой S_t превращается в безрисковый актив цены B_t. Таким свойством, например, обладает облигация или банковский вклад. При этом уравнение (7) преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dB=\mu B\,dt$$

с известным решением $B_t=B_0e^{\int_0^t\mu dt}$, не содержащим случайных воздействий. Если же ожидаемая доходность $\mu=const$, то

$$B_t=B_0e^{\mu t}.$$

Коэффициент $e^{\mu t}$ в выражении называется дисконтирующим фактором для первоначального капитала B_0, а B_t – его будущая или приведенная к моменту времени *t* стоимость. В случае $\mu=\mu(t,W)$ говорят о форвардной процентной ставке бескупонной облигации стоимости $B_t = B_0 e^{\int_0^t \mu dt}$ и номиналом B_0 (подробнее см. гл. 5).

В заключение заметим, что уравнение (7) описывает случайное блуждание частицы или системы частиц в некоторой среде. При этом предполагается, что время между столкновениями двух соседних частиц пренебрежимо мало по сравнению со временем жизни системы в целом. Это так называемое броуновское движение.

1.2. СХОДИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В СРЕДНЕКВАДЖРАТИЧНОМ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ.

Определение: пусть $\xi_n, \xi : T\times\Omega \to R$ случайные процессы. Говорят, что ξ_n сходится по вероятности к ξ на интервале *T*, если $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\xi_n-\xi|>\varepsilon)=0$ в каждый фиксированный момент времени *t*.

Определение: пусть $\xi_n, \xi : T\times\Omega \to R$ случайные процессы. Говорят, что ξ_n сходится к ξ почти наверное (п.н.), если $P(\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi)=1$ в каждый фиксированный момент времени *t*.

Определение: пусть $X_n, X : T\times\Omega \to R-$ случайные процессы. Говорят, что X_n сходится к *X* в среднем порядка *p*>0, если $\lim\limits_{n\to\infty} E(|X_n-X|^p)=0$.

Определение: пусть $\xi_n, \xi : T\times\Omega \to R$ случайные процессы. Говорят, что ξ_n сходится к ξ в среднеквадратичном, если $\lim\limits_{n\to\infty} E((\xi_n-\xi)^2)=0$ при условии $E[\xi_n^2]<\infty$.

Определение (см., например, [6,13,15]): пусть $X_n, X : T\times\Omega \to R$ случайные процессы. Говорят, что X_n сходится к *X* по распределению, если $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$, где $F_n(x), F(x)$ – соответствующие функции распределения для X_n и *X*.

Можно показать (см. [19]), что выполнены следующие соотношения между данными определениями:

1) сходимость п.н. $\Rightarrow$ сходимость по вероятности. Обратное неверно.
2) сходимость п.н. т.и.т.т, когда $\forall\varepsilon>0 \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\sup\limits_{m\ge n}|X_m-X_n|\ge\varepsilon\right)=0$.
3) сходимость в среднем порядка р $\Rightarrow$ сходимость по вероятности. Обратное неверно.
4) если есть сходимость в среднем порядка р, то справедлива сходимость порядка (*p*-1), (*p*-2),…,1.

В теории курса наиболее важным является сходимость в среднеквадратичном, поэтому остановимся на ней более подробно. Докажем справедливость утверждения следующей леммы.

***Лемма 1.2.1*:** пусть $X_n \to X$ в среднеквадратичном. Тогда $X_n \to X$ по вероятности.

Доказательство: Так как последовательность $X_n \to X$ в среднеквадратичном, то $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n\ge N(\varepsilon)\ E((X_n-X)^2)<\varepsilon$, или, что т.ж. самое, $\frac{1}{\varepsilon^2}E[(X_n-X)^2]<\frac{1}{\varepsilon}$. Пользуясь неравенством Чебышева $\frac{1}{\varepsilon^2}E[x^2]>P\{|x|>\varepsilon\}$, при $x=X_n-X$ получаем:

$$\frac{1}{\varepsilon}>\frac{1}{\varepsilon^2}E[(X_n-X)^2]>P\{|X_n-X|>\varepsilon\},$$

причем оно справедливо для любого ε>0. Пусть $\varepsilon_1=\varepsilon^{-1}$. Тогда $\forall\varepsilon_1>0\ \exists N(\varepsilon_1)$ (тот же номер, что и выше), что $\forall n\ge N(\varepsilon)\ P\{|X_n-X|>\varepsilon\}<\varepsilon_1$. Последнее означает, что $X_n\to X$ по вероятности в т. $t=t_0$, ч.т.д.

СВОЙСТВА СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОМ

Теорема 1.2.1. пусть X_n – последовательность СП.
$E|X_n-X_m|^2\to 0 \Leftrightarrow$ когда существует процесс $X=X(t)$, что $E|X_n-X|^2\to 0$ при $n\to\infty$.

Теорема 1.2.2. пусть X_n – последовательность СП. Если $E|X_n-X|^2\to 0$ при $n\to\infty$, то $E|X_n|^2\to E|X|^2$, $E|X_n|\to E|X|$.

Теорема 1.2.3. пусть X_n, Y_n – две последовательности СП. Тогда $E|X_nY_n|\to E|XY|$ при $n\to\infty$
.

Теорема 1.2.4. пусть X_n – последовательность СП. $X_n\to X$ при $n\to\infty$ в среднеквадратичном $\Leftrightarrow$ когда $E|X_nX_m|\to a\in R$, *a*=const, при $n,m\to\infty$.

Доказательство:

Достаточность: рассмотрим $E|X_n-X_m|^2=$(раскрываем скобки)$=E|X_n|^2-2E|X_nX_m|+E|X_m|^2$. Так как $E|X_nX_m|\to a$ для любых *n*, *m*, то при *n*=*m* $E|X_n|^2\to a$, $E|X_m|^2\to a$. Следовательно, $E|X_n-X_m|^2=a^2-2a^2+a^2=0$. Тогда по теореме 1.2.1 следует, что $E|X_n-X|^2\to 0$ при $n\to\infty$.

Необходимость: пусть имеет место сходимость в среднеквадратичном: $E|X_n-X|^2\to 0$ при $n\to\infty$. Рассмотрим $\lim\limits_{m,n\to\infty} E(X_nX_m)=$(так как *m*=*n*) $=\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n X_n)=\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)^2$ (так как из сходимости в с.к. (*p*=2) следует сходимость в среднем (*p*=1))$=E(X)^2=E(X\cdot X)$=const (эту константу обозначим через *a*), ч.т.д.

КОВАРИАЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

Ковариационная функция играет важную роль при выявлении характера поведения случайного процесса.

Определение: ковариационной функцией случайного процесса $X:T\times\Omega\to R$ называется функция $A_X(s,t)=E(X_sX_t)$.

Определение: пусть $X_t, Y_t:T\times\Omega\to R$ – два случайных процесса, причем $E(X_t^2)=E(Y_t^2)=0$. Взаимной ковариационной функцией называется функция вида

$$A_{XY}(s,t)=\operatorname{cov}(X_sY_t)=E(X_sY_t).$$

СВОЙСТВА КОВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

1. $A_X(s,t)=A_X(t,s)$

Доказательство очевидно.

2. $A_{XY}(s,t)=A_{YX}(t,s)$

Доказательство очевидно.

3. $A_{X+Y}(s,t)=A_X(s,t)+A_{XY}(s,t)+A_{YX}(s,t)+A_Y(s,t)$

Доказательство: по определению, $A_{X+Y}(s,t)=E(X_s+Y_s)(X_t+Y_t)=$ (раскрываем скобки)= $=E(X_sX_t+Y_sY_t+X_sY_t+X_tY_s)$ = (по введенным ранее обозначениям)= $A_X(s,t)+A_Y(s,t)+A_{XY}(s,t)+A_{YX}(s,t)$, ч.т.д.

4. Функция $A_X(s,t)$ является положительно определенной, т.е. для любого $n\geq 1$ для точек времени $t_1,t_2,...,t_n$ и для действительных чисел $a_1,a_2,...,a_n$ выполнено неравенство $\sum_{i,j=1}^{n} A_X(t_i,t_j)a_ia_j \geq 0$

Доказательство: рассмотрим искусственное неравенство $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i a_i\right)^2 \geq 0$, которое справедливо, так как математическое ожидание неотрицательной СВ есть неотрицательное число. Тогда, раскрывая в нем скобки, получаем:

$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i a_i\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 a_i^2\right)+2E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_iX_j a_ia_j\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 E(X_i^2)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_jE(X_iX_j)=$ (так как по определению все вторые начальные моменты равны нулю, все первое слагаемое равно нулю)= $2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_jE(X_iX_j)=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_jA_X(t_i,t_j)\geq 0$. Значит, $\sum_{i,j=1}^{n} A_X(t_i,t_j)a_ia_j \geq 0$, ч.т.д.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ В СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОМ

Определение: пусть $X_t : T\times\Omega \to R$ случайный процесс. Говорят, что X_t непрерывен в точке $t=t_0$ в среднеквадратичном (пишут: $\lim\limits_{t\to t_0} E(X_t - X_{t_0})^2 = 0$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall t \in T,\ |t-t_0| < \delta$ следует, что $E[X_t - X_{t_0}]^2 < \varepsilon$, или, если $f(x)$ – функция плотности случайного процесса $X_t = X(t,\omega)$, $\left|\int_R (X(t,s)-X(t_0,s))^2 f(s)ds\right| < \varepsilon$.

Приведем примеры непрерывных в среднеквадратичном процессов.

Примеры:

1) пусть $X_t = \xi t$, где $\xi \sim N(0,1)$ – стандартная нормально распределенная СВ. Покажем, что $X_t = \xi t$ непрерывна в с.к.

Действительно, найдем значение $\lim\limits_{t\to t_0} E(X_t - X_{t_0})^2 = \lim\limits_{t\to t_0} E(\xi t - \xi t_0)^2 = \lim\limits_{t\to t_0} (t-t_0)^2 E(\xi)^2 =$ $= \lim\limits_{t\to t_0} (t-t_0)^2 = 0$, т.е. $X_t = \xi t$ действительно непрерывна в с.к.

2) пусть теперь $X_t = \sin(\xi t)$, где $\xi \sim N(0,1)$. В этом случае

$$\lim_{t\to t_0} E(X_t - X_{t_0})^2 = \lim_{t\to t_0} E(\sin\xi t - \sin\xi t_0)^2 = \lim_{t\to t_0}\left[\int_R (\sin\xi t - \sin\xi t_0)^2 \frac{\exp(-s^2/2)}{\sqrt{2\pi}} ds\right].$$

Воспользуется тем, что наибольшее значение функции $\exp(-s^2/2)$ на рассматриваемом промежутке равно единице. Тогда по теореме о среднем и по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$\lim\limits_{t\to t_0} E(X_t - X_{t_0})^2 \leq \lim\limits_{t\to t_0}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R (\sin\xi t - \sin\xi t_0)^2 ds\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \lim\limits_{t\to t_0}(\sin\xi t - \sin\xi t_0)^2 ds =$ (в силу непрерывности функции синус)=0.

3) заметим, что $X_t = \dfrac{\xi}{t}$, очевидно, не является непрерывной в с.к. при $t \to 0$.

Действительно, $\lim\limits_{t\to t_0} E\left(X_t - X_{t_0}\right)^2 = \lim\limits_{t\to t_0}\left[\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t_0}\right]^2 E(\xi)^2 = \infty \neq 0$

Выявление непрерывности в с.к. случайного процесса X_t тесно связано с непрерывностью его ковариационной функции. Докажем следующую теорему.

Теорема 1.2.5: Случайный процесс X_t непрерывен в с.к. в т. t=τ ⇔ когда ковариационная функция $A_X(s,t)$ непрерывна в обычном смысле в точках s=t=τ как функция двух переменных.

Доказательство: докажем сначала **достаточность.** Рассмотрим $\lim\limits_{h\to 0} E\left|X_{\tau+h} - X_\tau\right|^2 = \lim\limits_{h\to 0}\left[A_X(\tau+h,\tau+h) - A_X(\tau+h,\tau) - A_X(\tau,\tau+h) + A_X(\tau,\tau)\right]=$ (так как $A_X(s,t)$ непрерывна как функция двух переменных)$= A_X(\tau,\tau) - A_X(\tau,\tau) - A_X(\tau,\tau) + A_X(\tau,\tau)$=0. Последнее означает, что для моментов времени t=τ+h и t_0=τ мы можем записать $\lim\limits_{t\to t_0} E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 = 0$, что означает непрерывность в с.к. в точке τ по определению**.**

Необходимость: для доказательства необходимости воспользуемся неравенством Коши – Буняковского: $E(XY) \leq \sqrt{E\left(X^2\right)}\sqrt{E\left(Y^2\right)}$. Тогда

$\left|A_x(\tau+h,\tau+k) - A_x(\tau,\tau)\right| \leq E\left(\left|X(\tau+h) - X(\tau)\right|\left|X(\tau+k) - X(\tau)\right|\right) +$
$+ E\left(\left|X(\tau+h) - X(\tau)\right|\left|X(\tau)\right|\right) + E\left(\left|X(\tau+k) - X(\tau)\right|\left|X(\tau)\right|\right) \leq$(теперь применяем неравенство Коши-Буняковского) $\leq \sqrt{E\left(\left|X(\tau+h) - X(\tau)\right|^2\right)E\left(\left|X(\tau+k) - X(\tau)\right|^2\right)} + \sqrt{E\left(\left|X(\tau+h) - X(\tau)\right|^2\right)E\left(\left|X(\tau)\right|^2\right)} +$
$+ \sqrt{E\left(\left|X(\tau+k) - X(\tau)\right|^2\right)E\left(\left|X(\tau)\right|^2\right)}$. При $h,k \to 0$ видим, что в каждом слагаемом есть сомножитель, который стремится к нулю в среднеквадратичном по условию теоремы: $\lim\limits_{h\to 0} E\left(X(\tau+h) - X(\tau)\right)^2 = \lim\limits_{k\to 0} E\left(X(\tau+k) - X(\tau)\right)^2 = 0$. Поэтому $\left|A_x(\tau+h,\tau+k) - A_x(\tau,\tau)\right| \to 0$ при $h,k \to 0$, что и означает непрерывность функции двух переменных $A_X(s,t)$ в точках s=t=τ.

Замечание: нетрудно проверить, что ковариационная функция $A_{XY}(s,t)$ задает скалярное произведение в пространстве случайных процессов $(X_s, Y_t) \equiv A_{XY}(s,t)$ и норму $\left\|X_s\right\| \equiv A_X(s,s) = E(X_s)^2$.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОМ

Определение: пусть $X: T\times\Omega \to R$ случайный процесс. Говорят, что X_t дифференцируем в среднеквадратичном в точке t, если существует случайный процесс X'_t, что $\lim\limits_{h\to 0} E\left[\dfrac{(X(t+h) - X(t))}{h}\right]^2 = E\left(X'_t\right)^2$.

Теорема 1.2.6: процесс X_t дифференцируем в т. t в среднеквадратичном ⇔ когда в т. t существует смешанная производная $\dfrac{\partial^2 A_X(t,s)}{\partial t\,\partial s}(t,t)$, где $A_X(t,s)$ – ковариационная функция процесса X_t.

Доказательство:

Начнем с доказательства **достаточности**. Пусть существует $\frac{\partial^2 A_X(t,s)}{\partial t \partial s}(t,t)$. Это означает, что существует и конечен предел $\lim\limits_{h,k\to 0}\frac{1}{hk}\left[A_X(t+h,t+k)-A_X(t+h,t)-A_X(t,t+k)+A_X(t,t)\right]$. Так как $A_X(t+h,t+k)=E(X_{t+h}X_{t+k})$; $A_X(t+h,t)=E(X_{t+h}X_t)$; $A_X(t,t+k)=E(X_tX_{t+k})$, то $E(X_{t+h}-X_t)(X_{t+k}-X_t)=E[X_{t+h}X_{t+k}-X_{t+h}X_t-X_{t+k}X_t+X_tX_t]=$(в силу приведенных выше равенств) $=A_X(t+h,t+k)-A_X(t+h,t)-A_X(t,t+k)+A_X(t,t)$. Поэтому

$$\lim_{h,k\to 0}\frac{1}{hk}\left[A_X(t+h,t+k)-A_X(t+h,t)-A_X(t,t+k)+A_X(t,t)\right]=\lim_{h,k\to 0}\frac{1}{hk}E(X_{t+h}-X_t)(X_{t+k}-X_t)=$$

$=\lim\limits_{h,k\to 0}E\frac{(X_{t+h}-X_t)}{h}\frac{(X_{t+k}-X_t)}{k}$, причем последний предел существует по условию теоремы. Так как в этом пределе *h, k* равноправны, положим их равными друг другу.

Итак, существует предел

$\frac{\partial^2 A_X(t,s)}{\partial t\partial s}(t,t)=\lim\limits_{h\to 0}E\left[\frac{(X_{t+h}-X_t)}{h}\right]^2$, что гарантирует существование производной, для которой $E(X_t')^2=\lim\limits_{h\to 0}E\left[\frac{(X(t+h)-X(t))}{h}\right]^2$.

Необходимость: пусть СП X_t дифференцируем в с.к. в точке *t*, т.е. существует предел $\lim\limits_{h\to 0}E\left[\frac{(X(t+h)-X(t))}{h}\right]^2=E(X_t')^2$. Воспользуемся идеей доказательства достаточности т. 1.2.5:

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}E\left|X_{\tau+h}-X_\tau\right|^2=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left[A_X(t+h,t+h)-A_X(t+h,t)-A_X(t,t+h)+A_X(t,t)\right]=$(заменяем одно *h* на *k*, так как они равноправны)$=\lim\limits_{h,k\to 0}\frac{1}{hk}\left[A_X(t+h,t+k)-A_X(t+h,t)-A_X(t,t+k)+A_X(t,t)\right]$

=(по определению смешанной производной)= $\frac{\partial^2 A_X(t,s)}{\partial t\partial s}(t,t)$, ч.т.д.

Теорема 1.2.7: пусть в каждый момент времени *t* существует производная $\frac{\partial^2 A(t,s)}{\partial t\partial s}$. Тогда справедливы следующие равенства:

1) $\frac{\partial A_X(t,s)}{\partial t}=E(X_t'X_s)$, 2) $\frac{\partial^2 A_X(t,s)}{\partial t\partial s}=E(X_t'X_s')=A_{X'}(t,s)$ (последнее равенство следует по определению ковариационной функции).

Доказательство: действительно,

$$\frac{\partial A_X}{\partial t}=\lim_{h\to 0}\frac{A_X(t+h,s)-A_X(t,s)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E(X_{t+h}X_s-X_tX_s)=\text{(выносим } X_s\text{)}=$$

$$\lim_{h\to 0}E\left(X_s\frac{X_{t+h}-X_t}{h}\right)=E\left[X_s\lim_{h\to 0}\left(\frac{X_{t+h}-X_t}{h}\right)\right]=E(X_sX_t').$$

Далее,

$\frac{\partial^2 A_X(t,s)}{\partial t \partial s} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_X(t,s)}{\partial s}\right) =$ (по доказанному)=

$$\frac{\partial}{\partial t}(E(X_t X_s')) = \lim_{h\to 0}\frac{E(X_{t+h}X_s') - E(X_t X_s')}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{E(X_{t+h}X_s' - X_t X_s')}{h} = \lim_{h\to 0} E\left[X_s' \frac{X_{t+h} - X_t}{h}\right] =$$

$$= E\left[X_s' \lim_{h\to 0}\left(\frac{X_{t+h} - X_t}{h}\right)\right] = E(X_s' X_t') = A_{X'}(t,s), \text{ ч.т.д.}$$

1.3. ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Винеровский процесс является наиболее простым и изученным среди случайных процессов. Его широкие применения в экономической теории, в теории фракталов, в финансовой математике обусловливают повышенный теоретический интерес к его свойствам. В основе винеровского процесса лежат так называемые марковские процессы, когда вероятность занять системой определенное местоположение в заданном диапазоне в будущий момент времени однозначно определяется только текущими ее координатами и не зависит от прошлых состояний. В соответствии с этим допущением можно получить следующее определение:

Определение: винеровским процессом $W_t = W(t,\omega)$ называют случайный процесс, для которого выполнены следующие аксиомы:

1) для любого разбиения временного интервала $[0,T]$ точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 ... < t_{n-1} < t_n = T$ приращения $W(t_1) - W(t_0)$, $W(t_2) - W(t_1)$, $W(t_3) - W(t_2)$, ..., $W(t_n) - W(t_{n-1})$ независимы;
2) пусть $t, s \in T$, $t < s$. Тогда случайная величина $W(t) - W(s)$ распределена нормально с нулевым средним и дисперсией $t - s$;
3) реализации $W(t,\omega_0)$ непрерывны по t на T.

Вероятное поведение винеровского процесса приведено на рис. 2.

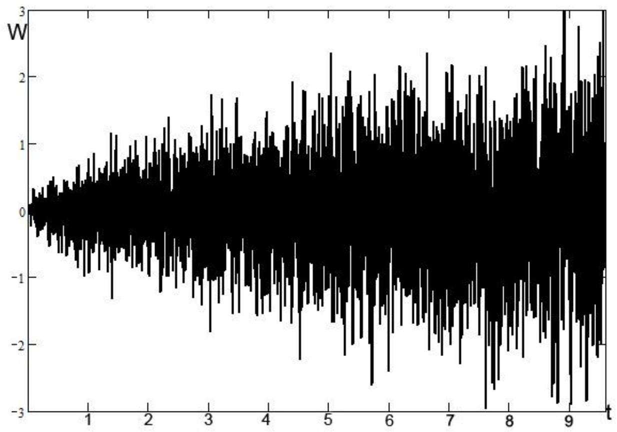

Рис.2. Одна из возможных реализаций винеровского процесса W_t.

Для того чтобы работать с винеровским процессом, требуется знание начальных и центральных моментов нормальных случайных величин.

Пусть имеется случайная величина $\xi \sim N(a,\sigma^2)$. Найдем для нее начальные моменты $\nu_k = E(x)^k$ и центральные моменты $\mu_k = E(x-a)^k$. Имеем:

$$\mu_1 = E(x-a) = Ex - Ea = a - a = 0.$$

Далее проинтегрируем по частям выражение для $\mu_k = E(x-a)^k = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)\right)dx$:

$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{(x-a)^k}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)\right)dx = \left|\begin{matrix} u = \exp\left(-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \\ dv = (x-a)^k\,dx \end{matrix}\right| = \mu_{k+2}\frac{1}{\sigma^2(k+1)}.$$

Выражая μ_{k+2} и сдвигая индекс, окончательно имеем:

$$\mu_k = (k-1)\mu_2\,\mu_{k-2}, \tag{8}$$

где $\mu_2 = \sigma^2$ – дисперсия, $k > 2$, $\mu_1 = 0$.

По аналогии выводится формула для начальных моментов:

$$\nu_k = (k-1)\mu_2\,\nu_{k-2}, \tag{9}$$

где $\mu_2 = \sigma^2$ – дисперсия, $k > 2$, ν_1 – некоторое число.

Теорема 1.3.1: пусть $[0,T]$–некоторый временной интервал, пусть $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ – его разбиение, $\lambda = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}}(t_{i+1}-t_i)$ - величина разбиения. Тогда

$$\lim_{\lambda\to 0} E\left[\sum_{i=0}^{n-1}(W_{i+1}-W_i)^2 - T\right]^2 = 0,$$

где $W_i = W(t_i)$– винеровский процесс в точках разбиения интервала.

Доказательство: найдем математическое ожидание выражения $\sum\limits_{i=0}^{n-1}(W_{i+1}-W_i)^2$:

$E\left[\sum\limits_{i=0}^{n-1}(W_{i+1}-W_i)^2\right] = \left[\sum\limits_{i=0}^{n-1}E(W_{i+1}-W_i)^2\right] =$(так как мат. ожидание винеровского процесса равно нулю)= $\left[\sum\limits_{i=0}^{n-1}D(W_{i+1}-W_i)^2\right] =$ (по аксиоме 2) винеровского процесса) $= \sum\limits_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i) = t_n - t_0 = T$.

Теперь найдем дисперсию $D\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1}(W_{i+1}-W_i)^2\right)$:

$D\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1}(W_{i+1}-W_i)^2\right) =$(по аксиоме 1) винеровского процесса) = $\sum\limits_{i=0}^{n-1}D(W_{i+1}-W_i)^2 =$ (для каждого приращения используем свойство дисперсии $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$) $= \sum\limits_{i=0}^{n-1}E(W_{i+1}-W_i)^4 - \sum\limits_{i=0}^{n-1}\left[E(W_{i+1}-W_i)^2\right]^2$.

Так как в выражении для дисперсии записаны четвертый и второй начальные моменты нормальной случайной величины (ибо приращения винеровского процесса нормальны), то для продолжения доказательства воспользуемся рекуррентной формулой (9) для начальных моментов:

$E(W_{i+1}-W_i)^4 = \nu_4 = 3(t_{i+1}-t_i)\nu_2 = 3(t_{i+1}-t_i)E(W_{i+1}-W_i)^2 = 3(t_{i+1}-t_i)D(W_{i+1}-W_i) = 3(t_{i+1}-t_i)^2$.

$E(W_{i+1}-W_i)^2 = \nu_2 = E(W_{i+1}-W_i)^2 = D(W_{i+1}-W_i) = (t_{i+1}-t_i)$.

Поэтому окончательно

$$D\left(\sum_{i=0}^{n-1}(W_{i+1}-W_i)^2\right) = \sum_{i=0}^{n-1}E(W_{i+1}-W_i)^4 - \sum_{i=0}^{n-1}\left[E(W_{i+1}-W_i)^2\right]^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\left[3(t_{i+1}-t_i)^2 - (t_{i+1}-t_i)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1}2(t_{i+1}-t_i)^2 \le$$

$\le \lambda \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)=\lambda T \to 0$ при $\lambda \to 0$.

Так как по доказанному выше математическое ожидание $E\left(\sum_{i=0}^{n-1}(W_{i+1}-W_i)^2\right)$ равно *T*, то по определению дисперсии имеем:

$$E\left[\sum_{i=0}^{n-1}(W_{i+1}-W_i)^2 - T\right]^2 = D\left[\sum_{i=0}^{n-1}(W_{i+1}-W_i)^2\right] \le \lambda T \to 0 \text{ в при } \lambda \to 0, \text{ ч.т.д.}$$

Замечание: определение винеровского процесс справедливо с точностью до произвольной случайной величины φ, которая играет роль константы. Для доказательства рассмотрим процесс $\widetilde{W}(t,\omega)=W(t,\omega)+\varphi$ и докажем, что он винеровский, если $W(t,\omega)$ – винеровский процесс.

1) приращения $\widetilde{W}(t_1)-\widetilde{W}(t_0), \widetilde{W}(t_2)-\widetilde{W}(t_1), \widetilde{W}(t_3)-\widetilde{W}(t_2), \ldots, \widetilde{W}(t_n)-\widetilde{W}(t_{n-1})$ независимы, так они равны приращениям $W(t_1)-W(t_0), W(t_2)-W(t_1), W(t_3)-W(t_2), \ldots, W(t_n)-W(t_{n-1})$;
2) случайная величина $\widetilde{W}(t_2)-\widetilde{W}(t_1)$ распределена нормально с нулевым средним и дисперсией t_2-t_1, так как $\widetilde{W}(t_2)-\widetilde{W}(t_1)=W(t_2)-W(t_1)$;
3) реализации $\widetilde{W}(t,\omega_0)$ непрерывны по *t* на *T* в силу непрерывности $W(t,\omega)$.

В дальнейшем, чтобы зафиксировать конкретный винеровский процесс, будем фиксировать начало этого процесса – точку $W_0 = W(t_0,\omega)=0$.

Теорема 1.3.2: винеровский процесс не дифференцируем в среднеквадратичном в любой момент времени интервала *T*.

Доказательство: рассмотрим левую и правую производные в точке (t,ω). Имеем: $\lim\limits_{h\to+0} E\left[\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right]^2 =$ (так как h^2 – число)= $\lim\limits_{h\to+0}\frac{1}{h^2}E[W(t+h)-W(t)]^2 =$ (так как приращения винеровского процесса распределены нормально)= $\lim\limits_{h\to+0}\frac{1}{h^2}(t+h-t)=+\infty$. По аналогии, предел слева равен $\lim\limits_{h\to-0} E\left[\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right]^2 = -\infty$. Значит, производной в т. *t* не существует, ч.т.д.

Заметим, что если в аксиоме 2) винеровского процесса положить $t_1 = 0,\ t_2 = t$, то $W(t)-W(0) \sim N(0,t)$. Если условиться, что $W(0)\equiv W_0 = 0$, то $W(t)\sim N(0,t)$.

Вычислим ковариационную функцию $A_W(t_1,t_2)$.

Теорема 1.3.3 (о ковариационной функции винеровского процесса): пусть начальная точка винеровского процесса $W_0 = 0$. Тогда $\forall\, t_1,t_2 > 0$ ковариационная функция винеровского процесса равна $A(t_1,t_2)=\min\{t_1,t_2\}$.

Доказательство:

1) Пусть $t_1 > t_2$. Тогда

$$A_W(t_1,t_2)\overset{def}{=}E(W_1W_2)=E(W_1W_2-W_2^2+W_2^2)=E(W_1W_2-W_2^2)+E(W_2^2)=E(W_2(W_1-W_2))+E(W_2-0)^2=$$

$=E((W_2-W_0)(W_1-W_2))+E(W_2-W_0)^2 =$ (так как приращения винеровского процесса независимы) $= E(W_2-W_0)E(W_1-W_2)+D(W_2-W_0)=0\cdot 0+t_2$.

2) Пусть $t_1 < t_2$. Тогда

$A(t_1,t_2)\overset{def}{=}E(W_1W_2)=E\left(W_1W_2-W_1^2+W_1^2\right)=E\left(W_1W_2-W_1^2\right)+E\left(W_1^2\right)=E(W_1(W_2-W_1))+E(W_1-0)^2=$
$=E((W_1-W_0)(W_2-W_1))+E(W_1-W_0)^2=$(так как приращения винеровского процесса независимы) $=E(W_1-W_0)E(W_2-W_1)+D(W_1-W_0)=0\cdot 0+t_1$.

Объединяя вместе два этих случая, получаем, что $A_W(t_1,t_2)=\min\{t_1,t_2\}$, ч.т.д.

Замечание: зная ковариационную функцию $A_W(t_1,t_2)$ и пользуясь теоремой 1.2.6 нетрудно получить аналогичный утверждению теоремы 1.3.2 результат: стохастический процесс W_t не дифференцируем в среднеквадратичном, так как не существует даже первой частной производной $\dfrac{\partial A_W(t,s)}{\partial t}$, не говоря о смешанной $\dfrac{\partial^2 A_W(t,s)}{\partial t\,\partial s}$.

1.4. ИНТЕГРАЛ ИТО. СВОЙСТВА. ФОРМУЛА ИТО

При решении стохастических дифференциальных уравнений и систем необходимо проводить их интегрирование. Для формального задания определенного интеграла по стохастическим переменным используем теорию, развитую для винеровского процесса $W(t)$. Для этого рассмотрим некоторую случайную функцию $X_t:T\times\Omega\to\Re_+$. Фиксируя временной интервал $[0,T]$, разобьем его точками $0=t_0<t_1<t_2\ldots<t_{n-1}<t_n=T$ на непересекающиеся интервалы, $t_i=i\cdot h$, $i=\overline{0,n}$, $h=T\,n^{-1}$. На каждом интервале $[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,n}$, выберем промежуточную точку τ_i и зададим последовательность частичных сумм

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}X(\tau_i)\Delta W_i, \tag{10}$$

где $\Delta W_i=W_i-W_{i-1}$ – приращение винеровского процесса.

В качестве τ_i выберем точку t_i, т.е. левую границу интервала $[t_i,t_{i+1}]$. Определим интеграл Ито как предел:

$$\int_0^T X_s\,dW_s=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}X(t_i)\,\Delta W_{i+1}\right),$$

где $\lambda=\max\limits_{i=\overline{1,n}}(t_i-t_{i-1})$.

Определение (неформальное): пусть X_t – СП, $E|X_t|<\infty$. Интегралом Ито назовем стохастический процесс $I(t,\omega)=\int_0^T X_s\,dW_s=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1}X(t_i)\,\Delta W_{i+1}\right)$.

Определение интеграла существенным образом зависит от выбора промежуточных точек τ_i. Так, если выбрать в качестве τ_i правый конец интервала $[t_i,t_{i+1}]$, т.е. $\tau_i=t_{i+1}$, то получается определение интеграла Климонтовича. Если положим $\tau_i=\left(\dfrac{t_{i-1}+t_i}{2}\right)$, то (10) определяет интеграл Стратоновича. Стоит отметить, что свойства этих интегралов отличаются кардинальным образом, так как между ними нет единого соответствия.

Тем не менее, данное ранее неформальное определение интеграла не совсем корректно, так как не учитывает возможного расхождения предела частичных сумм. Поэтому дадим другое, более точное определение.

Определение (интеграла Ито): пусть имеется случайная функция $X_t:T\times\Omega\to\Re_+$. Зададим временной интервал $[0,T]$, который разобьем точками $0=t_0<t_1<t_2\ldots<t_{n-1}<t_n=T$ на непересекающиеся интервалы, $t_i=i\cdot h$, $i=\overline{0,n}$, $h=T\,n^{-1}$. Пусть во всех точках разбиения

t_i приращения $\Delta W_{i+1} \sim N(0, \Delta t_{i+1})$ не зависят от $X_i = X(t_i, \omega)$, а $E(X_i^2) < \infty$. Тогда интегралом Ито называется стохастический процесс

$$I(t,\omega) = \int_0^T X(t,\omega) dW(t) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} X(t_i,\omega)\, \Delta W_{i+1} \right).$$

Заметим, что накладываемые в процессе определения дополнительные требования на X_t очень существенны. Действительно, т.к. $\Delta W_{i+1} \sim N(0, \Delta t_{i+1})$, то второй момент $E(X_i \Delta W_{i+1})$ в силу независимости $X_i = X(t_i, \omega)$ от ΔW_{i+1} вычисляется как

$$E(X_i \Delta W_{i+1})^2 = E(X_i^2) E(\Delta W_{i+1}^2) = E(X_i^2) \Delta t_{i+1}.$$

Значит, $E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\ \Delta W_{i+1} \right)^2 = E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i^2 \Delta W_{i+1}^2 \right) + 2E\left(\sum_{i\neq j} \sum X_i X_j \Delta W_{i+1} \Delta W_{j+1} \right) =$(так как $E(\Delta W_{i+1}) = 0$)$= E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i^2 \Delta W_{i+1}^2 \right) + 2 \cdot 0 = \sum_{i=0}^{n-1} E(X_i^2) E(\Delta W_{i+1}^2)$ (последнее – в силу того, что дисперсия произведения независимых есть произведение дисперсий) = (так как $E(\Delta W_{i+1}^2) = D(\Delta W_{i+1}^2) = \Delta t_{i+1}$) = $\sum_{i=0}^{n-1} E(X_i^2) \Delta t_{i+1}$. Если теперь воспользоваться определением обычного интеграла Лебега, то

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\ \Delta W_{i+1} \right)^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} E(X_i^2) \Delta t_{i+1} = \int_0^T E(X_s^2) ds.$$

Опять же в силу независимости

$E(I(t,\omega)) = \lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\ \Delta W_{i+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} E(X_i \Delta W_{i+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} EX_i E\Delta W_{i+1} = 0$, т.е. математическое ожидание от интеграла Ито равно нулю:

$$E(I(t,\omega)) = 0.$$

Именно поэтому $\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\ \Delta W_{i+1} \right)^2 = \lim_{n\to\infty} D\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\ \Delta W_{i+1} \right) = D(I(t,\omega)) = \int_0^T E(X_s^2) ds$.

Окончательно,

$$D(I(t,\omega)) = \int_0^T E(X_s^2) ds \text{ } \textbf{(изометрия Ито)},$$

т.е. дисперсия интеграла Ито будет конечной, если $E(X_s^2) < \infty$ на промежутке интегрирования. Это же условие гарантирует существование предела $\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\ \Delta W_{i+1} \right)^2$, а значит, и самого интеграла Ито, стоящего под знаком математического ожидания.

Приведем примеры вычисления интеграла Ито по определению.

Примеры:

1) $\int_0^T dW = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta W_{i+1} = \lim_{n\to\infty} (\Delta W_1 + \ldots + \Delta W_n) = \lim_{n\to\infty} (W_1 - W_0 + \ldots + W_n - W_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} (W_n - W_0) = T$

2) $\int_0^t W\, dW = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t$.

Действительно, сделаем обозначение: $\Delta(W_{i+1}^2) = W_{i+1}^2 - W_i^2$. Преобразуем $\Delta(W_{i+1}^2)$, выделив полный квадрат:

$$\Delta(W_{i+1}^2) = (W_{i+1} - W_i)^2 + 2W_i (W_{i+1} - W_i) = (\Delta W_{i+1})^2 + 2W_i \Delta W_{i+1}.$$

Так как $\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\left(W_{i+1}^2\right)=\Delta\left(W_1^2\right)+\Delta\left(W_2^2\right)+\ldots+\Delta\left(W_n^2\right)=W_1^2-W_0^2+W_2^2-W_1^2+\ldots+W_n^2-W_{n-1}^2=W_n^2$, то

Просуммируем $\Delta\left(W_{i+1}^2\right)=\left(\Delta W_{i+1}\right)^2+2W_i\Delta W_{i+1}$ по индексу i от нуля до n-1:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\left(W_{i+1}^2\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{i+1}\right)^2+2\sum_{i=0}^{n-1}W_i\Delta W_{i+1},$$

откуда $\sum_{i=0}^{n-1}W_i\Delta W_{i+1}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\left(W_{i+1}^2\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{i+1}\right)^2=$(значение последней суммы нам известно)$=\frac{1}{2}W_n^2-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{i+1}\right)^2$.

По определению, $\int_0^t W\,dW=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}W_i\,\Delta W_{i+1}$. Поэтому, в силу того, что $\sum_{i=0}^{n-1}W_i\Delta W_{i+1}=\frac{1}{2}W_n^2-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{i+1}\right)^2$, имеем:

$$\int_0^t W\,dW=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}W_i\,\Delta W_{i+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}W_n^2-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{i+1}\right)^2\right).$$

По теореме 1.3.1 $\lim_{n\to\infty}E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\Delta W_{i+1}{}^2-t\right]^2=0$, т.е. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{i+1}\right)^2=t$ в с.к. Кроме того, $\lim_{n\to\infty}W_n^2=W_t^2$. Поэтому $\int_0^t W\,dW=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}W_i\,\Delta W_{i+1}=\frac{1}{2}W_t^2-\frac{1}{2}t$.

Замечание: добавок $-\frac{1}{2}t$ в интеграле Ито возникает из-за стохастичности подынтегральной функции. Если функция детерминирована, то этот добавок отсутствует.

1.4.1.СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА ИТО

Пусть всюду далее выполнено условие существования интеграла Ито: пусть процесс X_t не зависит от ΔW_t, а $E\left(X_t^2\right)<\infty$. Справедливы следующие свойства.

1. Для любой точки $c\in[0,t]$ справедливо равенство $\int_0^t X(t,\omega)dW(t)=\int_0^c X(t,\omega)dW(t)+\int_c^t X(t,\omega)dW(t)$.

Доказательство очевидно, если подобрать разбиение так, чтобы одна из его точек совпала с точкой c.

2. Интеграл Ито линеен: для любых ненулевых чисел α, β, для любых интегрируемых по Ито процессов X_t, Y_t справедливо равенство

$$\int_0^t\left(\alpha X_t+\beta Y_t\right)dW_t=\alpha\int_0^t X_t dW_t+\beta\int_0^t Y_t dW_t.$$

Доказательство следует из определения интеграла Ито.

3. Пусть X_t – непрерывный случайный процесс. Тогда функционал $\int_0^t X_t\,dW_t$ непрерывен в среднеквадратичном как функция переменного верхнего предела.

Доказательство: по определению непрерывности необходимо доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall t_1 \in [0,t],\ |t_1 - t_2| < \delta$ следует, что $E\left[\int\limits_0^{t_1} X_t\, dW - \int\limits_0^{t_2} X_t\, dW\right]^2 < \varepsilon$. Предположим для определенности, что $t_1 < t_2$. По теореме Кантора на компакте непрерывный процесс достигает своего максимума $C = \max\limits_{t \in T} X(t)$. Тогда

$E\left[\int\limits_0^{t_1} X_t\, dW_t - \int\limits_0^{t_2} X_t\, dW_t\right]^2 =$ (по свойству 1) для интеграла Ито) =

$= E\left[-\int\limits_{t_1}^{t_2} X_t\, dW_t\right]^2 = E\left[\int\limits_{t_1}^{t_2} X_t\, dW_t\right]^2 \le E\left(\max\limits_{t\in T} X(t)\int\limits_{t_1}^{t_2} dW\right)^2 =$ (по обозначениям через C)=

$= E\big(C(W_2 - W_1)\big)^2 =$ (по определению винеровского процесса)$= C^2(t_2 - t_1) < C^2\delta < \varepsilon/2 < \varepsilon$, где $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2C^2}$.

Аналогично доказывается случай $t_2 < t_1$, ч.т.д.

4. О математическом ожидании интеграла Ито: математическое ожидание интеграла Ито равно нулю: $E(I(t,\omega)) = 0$.

Доказательство: по определению,

$E(I(t,\omega)) = \lim\limits_{n\to\infty} E\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i\, \Delta W_{i+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1} E(X_i \Delta W_{i+1}) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1} EX_i E\Delta W_{i+1} = 0$, ч.т.д.

5. О дисперсии интеграла Ито: $D(I(t,\omega)) = \int_0^T E(X_t^2)dt$.

Доказательство: т.к. $\Delta W_{i+1} \sim N(0, \Delta t_{i+1})$, то второй момент $E(X_i \Delta W_{i+1})$ в силу независимости $X_i = X(t_i, \omega)$ от ΔW_{i+1} вычисляется как

$$E(X_i \Delta W_{i+1})^2 = E(X_i^2)E(\Delta W_{i+1}^2) = E(X_i^2)\Delta t_{i+1}.$$

Значит, $E\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i\ \Delta W_{i+1}\right)^2 = E\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i^2 \Delta W_{i+1}^2\right) + 2E\left(\sum\limits_{i\ne j}\sum X_i X_j \Delta W_{i+1}\Delta W_{j+1}\right) =$(так как $E(\Delta W_{i+1}) = 0$)$= E\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i^2 \Delta W_{i+1}^2\right) + 2\cdot 0 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} E(X_i^2)E(\Delta W_{i+1}^2)$ (последнее – в силу того, что дисперсия произведения независимых есть произведение дисперсий) = (так как $E(\Delta W_{i+1}^2) = D(\Delta W_{i+1}^2) = \Delta t_{i+1}$) $= \sum\limits_{i=0}^{n-1} E(X_i^2)\Delta t_{i+1}$. Если теперь воспользоваться определением обычного интеграла Лебега, то

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\, \Delta W_{i+1}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} E(X_i^2)\Delta t_{i+1} = \int_0^T E(X_t^2)dt.$$

По свойству 4) интеграла Ито $E(I(t,\omega)) = 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i\, \Delta W_{i+1}\right)^2 = \lim\limits_{n\to\infty} D\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i\, \Delta W_{i+1}\right) = D(I(t,\omega)) = \int_0^T E(X_t^2)dt$, ч.т.д.

6. Интеграл Ито является мартингалом относительно фильтрации F_t, т.е. для моментов времени $s<t$ $E\left(\int_0^t X_t\, dW_t\Big|_{F_s}\right) = \int_0^s X_t\, dW_t$.

Доказательство: докажем сначала, что винеровский процесс является мартингалом, т.е. $E\left(W_t\big|_{F_s}\right)=W_s$, если *s<t*.

Действительно, $E\left(W_t\big|_{F_s}\right)=E\left(W_t-W_s+W_s\big|_{F_s}\right)=E\left(W_t-W_s\big|_{F_s}\right)+E\left(W_s\big|_{F_s}\right)=$(так как вне зависимости от условий приращение винеровского процесса имеет нулевое математическое ожидание)= $=0+E\left(W_s\big|_{F_s}\right)=$(так как на момент *s* вся информация о поведении процесса W_s уже заложена в F_s и $W_s\big|_{F_s}$ - просто число W_s) = W_s, т.е. винеровский процесс действительно является мартингалом.

Далее, обозначим через $I_t=\int\limits_0^t X_t\,dW_t$. Тогда

$$E\left(I_t\big|_{F_s}\right)=E\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}X_i\,\Delta W_{i+1}\bigg|_{F_s}\right)=E\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}X_i\,(W_{i+1}-W_i)\bigg|_{F_s}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}X_i\left(E\left(W_{i+1}\big|_{F_s}\right)-E\left(W_i\big|_{F_s}\right)\right).$$

По доказанному ранее, винеровский процесс является мартингалом относительно фильтрации. Поэтому для моментов времени $t_{i+1}\ge s$ $E\left(W_{i+1}\big|_{F_s}\right)=W_s$, для моментов $t_i\ge s$ $E\left(W_i\big|_{F_s}\right)=W_s$. В случае $t_{i+1}<s$, $t_i<s$, когда для траектория винеровского процесса известна, $E\left(W_{i+1}\big|_{F_s}\right)=W_{i+1}$, $E\left(W_i\big|_{F_s}\right)=W_i$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}X_i\left(E\left(W_{i+1}\big|_{F_s}\right)-E\left(W_i\big|_{F_s}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{s-2}X_iW_{i+1}+\sum_{i=s-1}^{n-1}X_iW_s-\sum_{i=0}^{s-1}X_iW_i-\sum_{i=s}^{n-1}X_iW_s\right).$$

Соберем слагаемые по-другому: объединим первое и третье, выделяя приращение винеровского процесса, и второе и четвертое слагаемые.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{s-2}X_iW_{i+1}+\sum_{i=s-1}^{n-1}X_iW_s-\sum_{i=0}^{s-1}X_iW_i-\sum_{i=s}^{n-1}X_iW_s\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{s-2}X_i\Delta W_{i+1}+\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{i=s-1}^{n-1}X_i-\sum_{i=s}^{n-1}X_i\right)W_s\right]-X_{s-1}W_{s-1}.$$

Заметим, что

$\left(\sum_{i=s-1}^{n-1}X_i-\sum_{i=s}^{n-1}X_i\right)=X_{s-1}+X_s+\ldots+X_{n-1}-X_s-X_{s+1}-\ldots-X_{n-1}=X_{s-1}$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}X_i\left(E\left(W_{i+1}\big|_{F_s}\right)-E\left(W_i\big|_{F_s}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{s-2}X_i\Delta W_{i+1}+X_{s-1}W_s-X_{s-1}W_{s-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{s-2}X_i\Delta W_{i+1}+X_{s-1}\Delta W_s=$$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{s-1}X_i\Delta W_{i+1}=$(по определению интеграла Ито)= $\int_0^s X_t dW_t$, ч.т.д.

7. пусть $X_t:T\times\Omega\to\Re$ – СП. Тогда

$$\int\limits_0^t X_t\,dW_t^2=\int\limits_0^t X_t dt\,,$$

или в более короткой эквивалентной форме

$$dW^2=dt$$

Доказательство: по условию теоремы, докажем, $\lim_{n\to\infty}E\left(\sum_{i=0}^{n-1}X_i\,\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)\right)=0$, или в с.к. $\lim_{n\to\infty}E\left(\sum_{i=0}^{n-1}X_i\,\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)\right)^2=0$. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \left(\Delta W_{i+1}^2 - \Delta t_{i+1}\right)\right)^2 = \lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i^2 \left(\Delta W_{i+1}^2 - \Delta t_{i+1}\right)^2 + 2\sum_{i>j} X_i X_j \left(\Delta W_{i+1}^2 - \Delta t_{i+1}\right)\left(\Delta W_{j+1}^2 - \Delta t_{j+1}\right)\right).$$

По определению интеграла Ито процесс X_t не зависит от ΔW_t. Поэтому математическое ожидание произведения есть произведение математических ожиданий и тогда

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \left(\Delta W_{i+1}^2 - \Delta t_{i+1}\right)\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} E\left(X_i^2\right) E\left(\Delta W_{i+1}^2 - \Delta t_{i+1}\right)^2 + 2\lim_{n\to\infty} \sum_{i>j} EX_i EX_j E\left(\Delta W_{i+1}^2 - \Delta t_{i+1}\right) E\left(\Delta W_{j+1}^2 - \Delta t_{j+1}\right).$$

Вспомним, что $E\left(\Delta W_{i+1}\right)^2 = \Delta t_{i+1}$. Поэтому двойная сумма $\sum_{i>j} EX_i EX_j E\left(\Delta W_{i+1}^2 - \Delta t_{i+1}\right) E\left(\Delta W_{j+1}^2 - \Delta t_{j+1}\right) = 0$. Окончательно,

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \left(\Delta W_{i+1}^2 - \Delta t_{i+1}\right)\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} E\left(X_i^2\right) E\left(\Delta W_{i+1}^2 - \Delta t_{i+1}\right)^2 . \quad (11)$$

Так как $E\left(\Delta W_{i+1}^2 - \Delta t_{i+1}\right)^2 = E\left(\Delta W_{i+1}^4 - 2\Delta W_{i+1}^2 \Delta t_{i+1} + \Delta t_{i+1}^2\right) =$ {по рекуррентной формуле (9) $E\left(\Delta W_{i+1}^4\right) = 3\nu_2^2 = 3\Delta t_{i+1}^2$, а $E\left(\Delta W_{i+1}^2\right) = \Delta t_{i+1}$} $= 3\Delta t_{i+1}^2 - 2\Delta t_{i+1}^2 + \Delta t_{i+1}^2 = 2\Delta t_{i+1}^2$. Поэтому в (11) имеем ():

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} E\left(X_i^2\right) E\left(\Delta W_{i+1}^2 - \Delta t_{i+1}\right)^2 = 2\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} E\left(X_i^2\right) \Delta t_{i+1}^2 \le \lim_{n\to\infty} \lambda \left(\sum_{i=0}^{n-1} E\left(X_i^2\right) \Delta t_{i+1}\right) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda \int_0^t E\left(X_t^2\right) dt = 0,$$

так как последний интеграл существует и конечен, а длина разбиения стремится к нулю.

Доказали сходимость в с.к., что эквивалентно доказательству исходного утверждения теоремы, ч.т.д.

Замечание: для сокращения записи пишут, что $dW^2 = dt$. Однако эту запись нужно понимать только как равенство нулю интеграла $\int_a^b X_t \left[dW^2 - dt\right]$.

8. $dW^{2+N} = 0,\ dWdt = 0,\ (dt)^{N+1} = 0,\ N > 0$ в смысле последнего замечания.
9. Свойство и**нтегрирования многочленов**: Докажем, что

$$\int_0^t W^n\, dW = \frac{1}{n+1}\left(W^{n+1}(t) - W^{n+1}(0)\right) - \frac{n}{2}\int_0^t W^{n-1}\, dt . \quad (12)$$

Доказательство: рассмотрим производную по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(W^n\right) \overset{def}{=} \lim_{\Delta t\to 0} \frac{(W + \Delta W)^n - W^n}{\Delta t} . \quad (13)$$

Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(W + \Delta W)^n = W^n + C_n^1 W^{n-1}\Delta W + C_n^2 W^{n-2}\Delta W^2 + \ldots + C_n^n \Delta W^n .$$

Следовательно, (13) преобразуется к виду:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{(W + \Delta W)^n - W^n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{C_n^1 W^{n-1}\Delta W + C_n^2 W^{n-2}\Delta W^2 + \ldots + C_n^n \Delta W^n}{\Delta t} .$$

Применим свойства 7), 8). Тогда $\frac{\Delta W^{2+N}}{\Delta t} = 0$, $\frac{\Delta W^2}{\Delta t} = 1$ при $\Delta t \to 0$ и поэтому

$$d\left(W^n\right) = C_n^1 W^{n-1} dW + C_n^2 W^{n-2}\, dt .$$

Интегрируя это выражение на промежутке $[0, t]$, имеем:

$$\int_0^t d\left(W^n\right) = \int_0^t n\, W^{n-1} dW + \frac{n(n-1)}{2}\int_0^t W^{n-2}\, dt ,$$

или

$$W^n\Big|_0^t=\int_0^t n\,W^{n-1}dW+\frac{n(n-1)}{2}\int_0^t W^{n-2}\,dt\,.$$

Выразим $\int_0^t W^{n-1}dW$: $\int_0^t W^{n-1}dW=\frac{1}{n}W^n\Big|_0^t-\frac{(n-1)}{2}\int_0^t W^{n-2}\,dt$. Сдвигая индекс на единицу в этом выражении, окончательно получаем:

$$\int_0^t W^n\,dW=\frac{1}{n+1}\left(W^{n+1}(t)-W^{n+1}(0)\right)-\frac{n}{2}\int_0^t W^{n-1}\,dt\,,$$

что и требовалось доказать.

Замечание: формула интегрирования многочленов является аналогом формулы интегрирования по частям. Кроме того, нетрудно заметить, что в (12) имеется добавок $-\frac{n}{2}\int_a^b W^{n-1}\,dt$, возникающий только из–за стохастичности подынтегральной функции W^n.

1.4.2. ФОРМУЛА ИТО

Формула Ито является основной при интегрировании случайных процессов. Ее замечательные свойства позволяют получить основные уравнения и краевые задачи, являющие следствием соответствующих математических моделей. Рассматривая свойства интеграла, мы вплотную подошли к ее формулировке.

Теорема 1.4.1 (одномерная формула Ито): пусть $f(t,W)$ – некоторый случайный процесс. Тогда

$$df(t,W)=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}\right)dt+\frac{\partial f}{\partial W}dW\,, \tag{14}$$

или в интегральной форме

$$f\Big|_0^t=\int_0^t\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}\right)dt+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial W}dW\,. \tag{15}$$

Если имеется случайный процесс $X(t,S)$, где $S=S(t,W)$, то формула Ито будет иметь вид:

$$dX=\frac{\partial X}{\partial t}dt+\frac{\partial X}{\partial W}dW+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial W^2}dX^2\,.$$

Доказательство: докажем только формулу (14), для чего рассмотрим функцию $f(t,W)$ как функцию двух переменных. Применим к ней разложение в ряд Тейлора в окрестности точек разбиения $0=t_0<t_1<t_2\ldots<t_{n-1}<t_n=t$:

$$\Delta f_i=\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t_i+\frac{\partial f}{\partial W}\Delta W_i+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}\Delta W_i^2+\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial W}\Delta W_i\Delta t_i+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t_i^2+o\left(\Delta t_i^2,\Delta W_i^2\right),\ i=\overline{1,n-1}.$$

Суммируя по $i=\overline{1,n-1}$ и устремляя $\lambda=\max\limits_{i=\overline{0,n-1}}(t_{i+1}-t_i)$ к нулю, имеем:

$$f_n-f_0=\int_0^t\frac{\partial f}{\partial t}\,d\,t+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial W}\,dW+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}dt\,. \tag{16}$$

Заметим, что при этом мы воспользовались свойствами 7) и 8) интеграла Ито: $dW^2=d\,t,\ dW^{2+N}=0,\ dW\,dt=0,\ (dt)^{N+1}=0,\ N>0$.

Таким образом, выражение (16) совпадает с (15). Вспоминая о принятых обозначениях, получаем (14), ч.т.д.

По аналогии с теоремой 1.4.1 можно доказать справедливость двумерной формулы Ито:

Теорема 1.4.2 (двумерная формула Ито): пусть $f(t, W_1, W_2)$ – некоторый двумерный случайный процесс. Тогда

$$df(t,W) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial W_1}dW_1 + \frac{\partial f}{\partial W_2}dW_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W_1^2}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W_2^2}dt + \frac{\partial^2 f}{\partial W_1 \partial W_2}\rho dt,$$

где $\rho = corr(dW_1, dW_2)$ – взаимная корреляция между двумя независимыми винеровскими процессами.

Приведем примеры на применение формулы Ито.

Примеры:

1) Рассмотрим процесс поведения на финансовых рынках, который был введен в п. 1.1. Дифференциальное уравнение (7) определяет стоимость некоторого актива, подвергающегося случайному взаимодействию с внешним миром:

$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dW = S(\mu\, dt + \sigma dW).$$

Введем новую переменную $F = \ln S$. Тогда согласно (14) имеем (зависимость от времени отсутствует):

$$dF = \frac{dF}{dS}dS + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dS^2}dS^2 = \frac{1}{S}dS - \frac{1}{2S^2}dS^2.$$

Используем (7). Тогда $dS^2 = (\mu S\, dt + \sigma S\, dW)^2 = \mu^2 S^2\, dt^2 + \sigma^2 S^2\, dW^2 + 2\mu\sigma S^2\, dt\, dW =$ (по свойствам 7), 8) интеграла Ито) $=$ $\sigma^2 S^2\, dt$. Окончательно,

$$dF = \frac{1}{S}(\mu S\, dt + \sigma S\, dW) - \frac{1}{2S^2}\sigma^2 S^2\, dt = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW. \tag{17}$$

Заметим, что такая замена переменного помогает в нахождении решения (7). Действительно, используя формулу Ито и свойство 2) интеграла Ито (п. 1.4.1) имеем:

$$\int_0^t \frac{dS}{S} = \int_0^t \mu d\,t + \int_0^t \sigma^2 dW. \tag{18}$$

Вся сложность нахождения решения уравнения (7) заключается в вычислении стохастического интеграла $\int_0^t \frac{dS}{S}$, так как остальные интегралы вычисляются по известным алгоритмам курса математического анализа. Например, $\int_0^t \mu\, dt$ является обычным римановым интегралом.

Вычислим $\int_0^t \frac{dS}{S}$ по формуле Ито. Для этого используем равенство (17):

$$d(\ln S) = \frac{dS}{S} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt,$$

откуда

$$\frac{dS}{S} = d(\ln S) + \frac{1}{2}\sigma^2 dt.$$

Поэтому $\int_0^t \frac{dS}{S} = \int_0^t d(\ln S) + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t dt = \ln S\big|_0^t + \frac{1}{2}\sigma^2 t$. Подставляя все члены в (18), окончательно получим:

$$\ln S\big|_0^t + \frac{1}{2}\sigma^2 t = \int_0^t \mu\, dt + \int_0^t \sigma^2\, dW,$$

где σ, μ –некоторые известные функции.

Полагая, что в начальный момент времени случайная величина $S(t,\omega)$ имела распределение $S(0,\omega)=S_0$, находим решение $S(t,\omega)$ дифференциального уравнения:

$$S = S_0 \exp\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma^2 W\right). \tag{19}$$

Полученное решение имеет интересные свойства:

a) если $\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)>0$, то $\exp\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)$ с ростом времени неограниченно возрастает и $S(t,\omega)$ стремится к бесконечности. Это означает, что стоимость товара стремится к бесконечности. Кроме того, прибыль за время *t*, которая может быть найдена как $\int_0^t \frac{dS}{S}$, по (19) так же неограниченно возрастает;

b) если $\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)<0$, то с ростом времени стоимость товара и прибыль от него бесконечно мала;

c) если $\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)=0$, то имеет место неравновесное состояние рынка, когда с течением времени $S(t,\omega)$ будет флуктуировать от нуля до бесконечности.

2) Процесс Орнштейна – Уленбека.

Пусть $S(t,\omega)$ – скорость частицы массой *m*, находящейся в подвижной среде и движущейся под воздействием множественных случайных взаимодействий частиц друг с другом. Пусть при этом имеется трение вида $\beta S(t,\omega)$. Тогда $S(t,\omega)$ удовлетворяет уравнению Ланжевена:

$$dS = m\beta S\,dt+\sigma dW = \mu S\,dt+\sigma dW, \tag{20}$$

где $\mu=m\beta$.

Уравнению (20) можно дать и экономическую формулировку: пусть $S(t,\omega)$ – скорость продажи или покупки некоторого актива стоимостью *m*, причем плата за ведение торговых операций равна $\beta S(t,\omega)$. Тогда $S(t,\omega)$ удовлетворяет (20).

Стохастическое уравнение (20) принято называть уравнением Орнштейна – Уленбека. Оно существенно нелинейно и разделить переменные, как это было проделано в примере 1), не удается.

Для нахождения решения умножим (20) на интегрирующий множитель. В самом общем случае вид множителя будет зависеть от типа решаемого уравнения. К сожалению, общего алгоритма для определения этого множителя не существует.

Умножим (20) на функцию $\exp(-\mu t)$:

$$e^{-\mu t}dS = e^{-\mu t}\mu S\,dt + e^{-\mu t}\sigma dW. \tag{21}$$

Пользуясь формулой Ито, сделаем замену переменного $F=e^{-\mu t}S$ в (21):

$$d\left(e^{-\mu t}S\right) = -\mu e^{-\mu t}S\,dt + e^{-\mu t}dS + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot dS^2. \tag{22}$$

Заметим, что в (21) $e^{-\mu t}dS - e^{-\mu t}\mu S\,dt = e^{-\mu t}\sigma dW$. В соответствии с (22) имеем:

$$d\left(e^{-\mu t}S\right) = e^{-\mu t}dS - \mu e^{-\mu t}S\,dt = e^{-\mu t}\sigma dW,$$

или, отбрасывая промежуточное соотношение,

$$d\left(e^{-\mu t}S\right) = e^{-\mu t}\sigma dW.$$

Данная форма записи является более удобной. Она позволяет проинтегрировать (21) и найти его решение напрямую. После интегрирования по промежутку $[0,t]$, имеем:

$$\int_0^t d\left(e^{-\mu t}S\right)=\int_0^t e^{-\mu t}\sigma\, dW .$$

Вследствие неизвестной функциональной природе параметров μ,σ (они могут быть произвольными функциями) вычислить $\int_0^t e^{-\mu t}\sigma\, dW$ в общем случае не представляется возможным. Тем не менее, $\int_0^t d\left(e^{-\mu t}S\right)$ легко вычисляется:

$$\int_0^t d\left(e^{-\mu t}S\right)=e^{-\mu t}S\Big|_0^t=e^{-\mu t}\left(S-S_0\right),$$

где S_0 – некоторое начальное распределение случайного процесса $S(t,\omega)$. Предположим, что это распределение нормально. Тогда

$$S=S_0+\int_0^t \sigma e^{\mu\,(t-s)}dW(s) \tag{23}$$

так же будет нормальным с некоторыми параметрами.

Данная формула определяет вид решения уравнения (20). Остается найти параметры нормального распределения. Предположим, что $S(t,\omega)$ является процессом, независимым от приращений винеровского процесса. Тогда согласно (23) имеем:

a) $E(S)=E(S_0)+E\left(\int_0^t \sigma e^{\mu\,(t-s)}dW(s)\right)=$ (по свойству 4 интеграла Ито) $=E(S_0)$.

b) $D(S)=E(S-E(S))^2=$ (по свойству 4 интеграла Ито. Пользуемся тем, что S_0 не зависит от dW, т.е.
$E\left(S_0\int_0^t \sigma e^{\mu\,(t-s)}dW(s)\right)=0=$
$=E\left(S_0+\int_0^t \sigma e^{\mu\,(t-s)}dW(s)-E(S_0)\right)^2=E(S_0-E(S_0))^2+E\left(\int_0^t \sigma e^{\mu\,(t-s)}dW(s)\right)^2=D(S_0)+$
$+D\left(\int_0^t \sigma e^{\mu\,(t-s)}dW(s)\right).$

Замечание: техника решения уравнения Ланжевена, продемонстрированная в примере 2), может быть расширена. Рассмотрим обобщенное уравнение Орнштейна-Уленбека

$$dS=f(t,S)dt+c(t)S\,dW,\ S\big|_{t=0}=S_0,$$

где $f(t,S), c(t)$ – некоторые непрерывные функции, вид которых известен. В этом случае имеет место следующий алгоритм:

a) Вводим интегрирующий **множитель Гирсанова** $F=\exp\left(-\int_0^t c\,dW+\frac{1}{2}\int_0^t c^2dt\right)$. Умножая на него исходное уравнение, получаем:

$$F\,dS=F\ f\,dt+FcS\,dW . \tag{24}$$

b) Найдем $d(FS)$ по формуле Ито и **формуле интегрирования по частям**

$$d(FS)=F\,dS+S\,dF+dF\,dS .$$

По формуле Ито имеем:

$$dF = \left[\exp\left(-\int_0^t c\, dW + \frac{1}{2}\int_0^t c^2 dt \right) \right]' = -cFdW + \frac{c^2}{2} Fdt + \frac{c^2}{2} Fdt ,$$

где $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{c^2}{2} F$, $\frac{\partial F}{\partial W} = -cF$, $\frac{\partial^2 F}{\partial W^2} = c^2 F$. Поэтому, собирая,

$$dF = F\left(c^2\, dt - c\, dW\right).$$

Поэтому $d(FS) = F\, dS - cSF\, dW$. Сравнивая это выражение с (24), получаем, что исходное дифференциальное уравнение перепишется в виде

$$d(F\,S) = F\ f\ d\,t\,. \tag{25}$$

c) Введем новую переменную $Z(t,\omega) = F(t,\omega) S(t,\omega)$. Тогда уравнение (25) запишется в виде

$$d\,Z = F\ f\left(t, \frac{Z}{F}\right) d\,t\,, \tag{26}$$

с начальным условием $Z(0,\omega) = F(0,\omega) S(0,\omega) =$ (так как $S|_{t=0} = S_0$) = $1 \cdot S_0 = S_0$.

d) Полагая элементарные события фиксированными параметрами, решаем (26) как обычное дифференциальное уравнение первого порядка. Найдя $Z(t,\omega) = F(t,\omega) S(t,\omega)$, делаем обратную замену и переходим к искомому решению $S(t,\omega) = \dfrac{Z(t,\omega)}{F(t,\omega)}$.

Замечание: этот подход применяется при решении класса дифференциальных уравнений

$$dS = S^{\gamma} d\,t + \alpha\ S\,dW,\ S|_{t=0} = S_0\,,$$

α, γ – некоторые константы. Не стоит путать такое уравнение с CEV-моделью (уравнением Кокса):

$$dS = \mu S d\,t + \sigma S^{\gamma}\, dW,\ S|_{t=0} = S_0\,,$$

μ – дрифт, $\gamma \geq 0, \gamma \neq 1, \gamma$ – параметр, определяющий соотношение между волатильностью и ценой актива. При $\gamma<1$ наблюдается левередж (рост волатильности при падении цен), при $\gamma>1$ – делевередж.

Замечание: в практике решения стохастических дифференциальных уравнений различают следующие способы решения уравнений:

1. разделение переменных (пример 1 и решение (19));
2. введение интегрирующего множителя (процесс Орнштейна – Уленбека);
3. введение множителя Гирсанова (см. решение обобщенного уравнения Орнштейна-Уленбека);
4. замена переменного под знаком дифференциала (выделение полного дифференциала по формуле Ито. Например, для $dS = \frac{1}{3}\sqrt[3]{S}dt + \sqrt[3]{S^2}\, dW$ выгодна замена $Z = 3S^{1/3}$);
5. замена переменного F=F(t,S), найденная из формулы Ито сравнением $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(dS)^2$ с детерминированной частью стохастического уравнения (например, для $dS = \frac{1}{S^{1/2}} dt + \alpha\sqrt{S}\, dW$ нужно сначала разделить обе части на $\sqrt{S}$, а потом найти замену из равенства $\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = \frac{2}{\alpha^2 S^2}$);
6. комбинацией способов 1)-5), например, $dS = (S+t)dt + dW$, когда необходимо ввести новый винеровский процесс $\overline{W} = W + \frac{t^2}{2}$ и перейти к уравнению $dS = Sdt + d\overline{W}$.

ТАБЛИЦА СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

В практике вычисления определенных интегралов или при решении стохастических дифференциальных уравнений часто требуется знать значения интегралов от элементарных функций винеровского процесса по детерминированной переменной *t*. Основные значения таких интегралы приведены в таблице приложения 7. Все равенства в ней понимаются «почти наверное», т.е. для произвольных случайных функций $f(\omega), g(\omega)$, ω – элементарное событие, $f(\omega)\overset{п.н.}{=} g(\omega)$ тогда и только тогда, когда $P(\omega, f(\omega)=g(\omega))=1$.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Примеры решения стохастических дифференциальных уравнений, представленные в п. 1.4.2 (особенно способ нахождения решения уравнения Ланжевена) не являются универсальными и не могут быть применены для абсолютно произвольного дифференциального уравнения. Тем не менее, в общем случае отыскать решение возможно, если перейти от стохастических к соответствующим уравнениям в частных производных. Для последних имеется развитая теория и существует большое число методов решения (например, метод разделения переменных Фурье).

2.1. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА-КОЛМОГОРОВА

Первое уравнение, которое будет рассмотрено ниже, называется уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова. Оно является одним из основных в теории случайных процессов. Оно будет получено из так называемого диффузионного приближения (броуновского движения), что является частным случаем общей теории марковских процессов.

Броуновское движение было открыто в 1827 году английским ботаником Робертом Броуном. Он заинтересовался стохастическим движением пыльцы, которое наблюдал при помощи микроскопа. Пытаясь найти ответ на вопрос «а не является ли подобное движение проявлением жизни пыльцы?», он провел ряд экспериментов и выяснил, что такое движение присуще и пыли, и взвести краски.

Дальнейшее развитие теория броуновского движения получила в работах А. Эйнштейна в 1905 г., в которых было дано его математически строгое описание и обоснование.

Определение: броуновским движением называется движение частиц, причем движение каждой частицы в отдельности не зависит от движения других частиц. Кроме того, движения этой частицы в разные временные интервалы считаются независимыми до тех пор, пока временные интервалы движения не слишком малы (т.е. бесконечно малые интервалы по времени отбрасываются).

Эйнштейн показал, что движение броуновской частицы вызывается частыми соударениями с окружающими ее частицами. Полагая нерегулярность таких взаимодействий, а так же допуская статистически независимые удары, приходим к выводу, что поведение частицы может быть описано только вероятностным законом. Найдем этот закон распределения вероятности. Для этого обозначим через $P(t, x_1, t_1, x)$ вероятность перехода частицы с координатами x_1 в момент времени t в точку с координатами x в момент времени $t_1, t_1 > t$. Допустим, что переходы частицы совершаются в моменты времени $t_0 = t_{s_0} < t_{s_2} ... < t_{s_k} < t < t_1 < t_{s_{k+1}} < ... t_{s_n}$. Пусть вероятность перехода из состояния x_1 в состояние x не зависит от $t_{s_0}, t_{s_1}, ..., t_{s_n}$, а зависит только от t_1, t. Так как движения в разные временные интервалы независимы, то суммируя по ним, получаем, что вероятность перехода частицы из точки x_0 в момент времени t_0 в область состояний от точки x до точки $x + \Delta x$ к моменту времени t_1 есть

$$P(t_0, x_0, t_1, x)\,\Delta x, \tag{1}$$

потому что вероятность перейти в каждую точку интервала постоянна и равна $P(t_0, x_0, t_1, x)$.

Покажем, что справедливо равенство вида:

$$P(t_0, x_0, t_1, x) = \int P(t_0, x_0, t, z) P(t, z, t_1, x) dz\,. \tag{2}$$

Действительно, вероятность перехода из точки x_0 в промежуток $[z, z+\Delta z]$ к моменту t равна (по (1)) $P(t, z, t_1, x)\,\Delta x$. Учитывая, что Δx имеет один порядок малости с Δz, получаем, что переход из z в x ко времени t_1 будет осуществлен с вероятностью $P(t, z, t_1, x)\,\Delta z$. В силу взаимной независимости переходов из x_0 в z и из z в x получаем, что вероятность перехода из x_0 в x равна произведению вероятностей перехода:

$$P(t_0, x_0, t_1, x) = P(t_0, x_0, t, z) P(t, z, t_1, x) \Delta z\,. \tag{3}$$

Пусть $z_0 < z_1 ... < z_n$ – некоторые промежуточные состояния между z и $z + \Delta z$. Так как (3) выполнено для всех z_i, $i = \overline{0, n}$, то

$$P(t_0, x_0, t_1, x) = \sum_{i=1}^{n} P(t_0, x_0, t_1, z_i) P(t_1, z_i, t, x) \Delta z_i\,.$$

Переходя к пределу при $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} (z_i - z_{i-1})$ стремящемся к нулю, получаем, что

$$P(t_0, x_0, t_1, x) = \int P(t_0, x_0, t, z) P(t, z, t_1, x) dz\,,$$

что и требовалось доказать.

Уравнение (2) называют уравнением Чепмена – Колмогорова. Это нелинейное функциональное уравнение связывает все вероятности перехода друг с другом. Вследствие своей сложности и нелинейности оно редко решается в чистом виде. Однако оно часто применяется при выводе других уравнений, описывающих ту или иную систему частиц.

Используем (2) при выводе уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (УФПК). Умножим обе части (2) на трижды непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условию $\varphi|_{x=a} = \varphi'|_{x=b} = \varphi|_{x=b} = \varphi'|_{x=a} 0$. Затем интегрируем обе части полученного равенства по x на $[a, b]$:

$$\int_a^b \varphi(x) P(t_0, x_0, t_1, x) dx = \int_a^b \varphi(x) \left\{ \int P(t_0, x_0, t, z) P(t, z, t_1, x) dz \right\} dx\,.$$

Пусть интервал изменения переменной z есть интервал $[a, b]$. По теореме Фубини,

$$\int_a^b \varphi(x) P(t_0, x_0, t_1, x) dx = \int_a^b P(t_0, x_0, t, z) \left\{ \int_a^b \varphi(x) P(t, z, t_1, x) dx \right\} dz\,. \tag{4}$$

Разложим $\varphi(x)$ в ряд Тейлора до второго члена включительно в окрестности точки Z:

$$\varphi(x) = \varphi(z) + \varphi'(z)(x - z) + \frac{1}{2}\varphi''(z)(x - z)^2 + \frac{1}{6}\varphi'''(\theta)(x - z)^3,\ \theta \in [x, z]\,.$$

Заметим, что последнее слагаемое является остаточным членом в форме Лагранжа. Обозначим его через $r_2(x) = \dfrac{1}{6}\varphi'''(\theta)(x - z)^3$. Тогда, подставляя выражение для $\varphi(x)$ в правую часть (4), имеем:

$$\int_a^b \varphi(x) P(t_0, x_0, t_1, x) dx = \int_a^b P(t_0, x_0, t, z) \Bigg(\varphi(z) \int_a^b P(t, z, t_1, x) dx + \int_a^b \varphi'(z)(x - z) P(t, z, t_1, x) dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_a^b \varphi''(z)(x - z)^2 P(t, z, t_1, x) dx + \int_a^b r_2(x) P(t, z, t_1, x) dx \Bigg) dz\,.$$

Так как $P(t,z,t_1,x)$ – плотность распределения вероятности, то $\int\limits_a^b P(t,z,t_1,x)dx=1$.

Поэтому

$$\int\limits_a^b \varphi(x)P(t_0,x_0,t_1,x)dx-\int\limits_a^b P(t_0,x_0,t,z)\varphi(z)dz=\int\limits_a^b P(t_0,x_0,t,z)\left(\int\limits_a^b \varphi'(z)(x-z)P(t,z,t_1,x)dx+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \varphi''(z)(x-z)^2P(t,z,t_1,x)dx+\int\limits_a^b r_2(x)P(t,z,t_1,x)dx\right)dz\ . \tag{5}$$

Обозначим $\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{E(x-z)}{\tau}=A(x,t),\ \lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{E(x-z)^2}{\tau}=2k_{11}(x,t),$ если они существуют.

Предположим, что вероятность больших отклонений за малое время стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{E(r_2(x))}{\tau}=0$.

Деля (5) на τ, интегрируя полученное выражение по частям, учитывая, что $\int\limits_a^b P(t,z,t_1,x)dx=1$, перейдем к пределу при $\tau\to 0$. Тогда в силу условий на $\varphi(x,y)$ и в силу сделанных обозначений получим:

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\left[\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial(AP)}{\partial x}-\frac{\partial^2(k_{11}P)}{\partial x^2}\right]dx=0$$

,

Так как $\varphi(x,y)$ – произвольная функция, то последнее равенство справедливо $\Leftrightarrow$ когда выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю. Следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial^2(k_{11}P)}{\partial x^2}-\frac{\partial(AP)}{\partial x}\ . \tag{6}$$

Уравнение вида (6) называют УФПК или уравнением Колмогорова вперед, т.к. его решение определяется через начальную вероятность $P(t_0,x_0)=p_0$ и вычисляется в будущие моменты времени. Движение происходит вперед. Наряду с (6) можно рассмотреть уравнение Колмогорова назад:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial^2(k_{11}P)}{\partial x^2}+\frac{\partial(AP)}{\partial x}\ .$$

Если задаться вопросом о связи (6) с (7) из п. 1.1, то можно показать, что

$$A(x,t)=\mu x,\ k_{11}(x,t)=\sigma^2 x^2,$$

где μ – дрейф, σ – волатильность.

Замечание (о применимости УФПК): при построении (6) был осуществлен предельный переход в (5) при $\tau\to 0$. Если границы временного промежутка есть $[0,T]$, то условие малости параметра $\dfrac{\tau}{T}$ является необходимым (но недостаточным) для возможности описывать броуновское движение с помощью (6). Выполнение этого условия означает, что время между случайными взаимодействиями между частицами пренебрежимо мало по сравнению с общим временем T жизни системы. Это так называемое диффузионное приближение.

Интересный случай возникает при вероятности перехода $P(t,x,t_1,x_1)=\delta(x_1-x)$. Очевидно, что это случай винеровского процесса. Тогда (6) не будет зависеть от координаты *x*:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=Z(t),\ P(0)=0,$$

где $Z(t)$ – случайный процесс с математическим ожиданием нуль и ковариационной функцией $A(t_1,t_2)=2(t_2-t_1)$.

2.1.1. ГРАНИЧНЫЕ УЛОВИЯ УФПК

Перепишем (6) через поток вероятности, для чего выделим производную по *x*:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(k_{11}P)}{\partial x}-AP\right).$$

Вводя обозначение $\bar{I}=\frac{\partial(k_{11}P)}{\partial x}-AP$, получаем

$$\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial I}{\partial x}=0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) имеет вид уравнения сохранения или уравнения неразрывности (см. подробнее [19]). В данном случае имеет место сохранение вероятности.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2.1 **(о полном потоке вероятности):** $\int\limits_{S=\partial G}(\bar{\mathrm{I}},\bar{\mathrm{n}})ds$ задает полный поток вероятности через поверхность S, являющуюся границей исходной области.

Граничные условия задаются обычно через вектор потока $\bar{I}$. Существует три основных вида граничных условий:

1) граничные условия первого рода: $P\big|_{\partial G}=\alpha(x,t),\ \alpha(x,t)$ – некоторая функция.
2) граничные условия второго рода: $\left.\frac{\partial P}{\partial \mathrm{n}}\right|_{\partial G}=(\nabla P,\mathrm{n})\big|_{\partial G}=\mathrm{I}\big|_{\partial G}=\beta(x,t),\ \beta(x,t)$ – некоторая функция.

   Граничные условия второго рода часто называют мягкими граничными условиями.
3) граничные условия третьего рода (условия непротекания, жесткие граничные условия): $\varphi(x)P\big|_{\partial G}+\psi(x)\left.\frac{\partial P}{\partial \mathrm{n}}\right|_{\partial G}=\alpha(x,t),\quad \alpha(x,t)$ – некоторая функция, $\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0$. При $\alpha(x,t)=0$ говорят об исчезающем потоке на границе.

Заметим, что граничные условия третьего рода обобщают и понятие граничных условий первого, и граничных условий второго рода. Они получаются, если положить $\psi(x)=0,\ \varphi(x)=0$ соответственно.

Запишем граничные условия исходя из физических условий, накладываемых на частицы, совершающих броуновское движение.

а) Отражающая граница – пусть частица не может покинуть границы заданной области *G*, т.е. поток вероятности на границе равен нулю. Согласно теореме 1, $(\bar{\mathrm{I}},\bar{\mathrm{n}})=0$. В одномерном случае, который нами рассматривается, это означает, что $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=a}=\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=b}=0,\ G=[a,b]$, т.к. направление вектора нормали совпадает с направлением оси *OX*. Очевидно, что отражающая граница соответствует граничным условиям второго рода.

b) Поглощающая граница – пусть при попадании частицы на границу ∂G она удаляется из системы частиц. В частности, если говорить о пакете акций как о такой системе, то случай поглощающей границы соответствует условию покупки или продажи при достижении правой или левой границ интервала $G=[a,b]$.

По условию, частица не должна находиться на границе, т.е. вероятность находиться на ∂G равна нулю: $P\big|_{\partial G}=0$.

c) Разрывные граничные условия – пусть в (6) коэффициенты $k_{11}(x,t), A(x,t)$ разрывны, но через ∂G происходит свободное движение частиц. Тогда $[P]\big|_{\partial G}=0, [\mathrm{I}]\big|_{\partial G}=0$, где $[\cdot]$ – скачок функции.

d) Выходная граница (например, для определенности, $x=a$).

Пусть $G=[a,b]$ и $k_{11}(a,t)=\left.\dfrac{\partial k_{11}}{\partial x}\right|_{x=a}=0$. Пусть $A(a,t)<0$. Тогда частица, достигающая границу $x=a$, уходит в область $x<a$. Можно показать, что среднее время достижения такой границы конечно, а решение $P(x,t)$ зависит от времени.

e) Входная граница (например, для определенности, $x=a$).

Пусть $G=[a,b]$ и $k_{11}(a,t)=\left.\dfrac{\partial k_{11}}{\partial x}\right|_{x=a}=0$. Пусть $A(a,t)>0$. В этом случае частица, достигающая границы $x=a$, возвращается в область G, т.е. частица никогда не покидает G через $x=a$. Можно показать, что в этом случае существует стационарное решение $P(x)$, но среднее время достижения границы бесконечно велико.

f) Хотя бы одно достижение границы за время t.

Пусть $P(x,t)$ – вероятность того, что частица, находящаяся в момент времени $t=0$ в точке $x\in[a,b]$, за время t хотя бы раз достигнет точки $x=a$ или $x=b$. Пусть $B(x,t,\xi)\Delta\xi$ – вероятность перехода частицы за время t из т. x в интервал $(\xi,\xi+\Delta\xi)$. Предположим при этом, что частица не будет находиться на границе $x=a$ или $x=b$ ни разу.

В соответствии со сделанными обозначениями вероятность того, что частица, находящаяся в т. x в момент $t=0$, будет лежать внутри (a,b), ни разу не коснувшись границ, равна
$\int\limits_a^b B(x,t,\xi)d\xi$. В то же время, вероятность коснуться границ равна $P(x,t)$. Суммируя вероятности $\int\limits_a^b B(x,t,\xi)d\xi$ и $P(x,t)$, получаем единицу, так как это вероятности противоположных событий:

$$\int\limits_a^b B(x,t,\xi)d\xi+P(x,t)=1.$$

Покажем, что для $P(x,t)$ справедлив аналог теоремы Чепмена – Колмогорова (см. (2) п. 2.1.):

$$P(x,t+\Delta t)=P(x,\Delta t)+\int\limits_a^b B(x,\Delta t,\xi)P(\xi,t)d\xi. \tag{8}$$

Действительно, вероятность $P(x,t+\Delta t)$ того, что за время $(t+\Delta t)$ произойдет хотя бы одно достижение границы, равно сумме вероятности $P(x,\Delta t)$ хотя бы одного достижения границы за время Δt и вероятности того, что за время Δt этого не произойдет (а произойдет за оставшееся время t). Вероятность того, что граница будет достигнута за время t

вычисляется по формуле (2) п. 2.1.: $\int_a^b B(x,\Delta t,\xi)P(\xi,t)d\xi$. Складывая вероятности, получаем, что (8) справедлива.

Пользуясь (8), вычислим вероятность нахождения в точке границы $x=a$:

$$P(a,t)=P(a,0)+\int_a^b B(a,0,\xi)P(\xi,t)d\xi .$$

Заметим, что $P(a,0)=1$, так как частица уже находится на границе, т.е. достигла ее в момент времени t=0. Кроме того, $\int_a^b B(a,0,\xi)P(\xi,t)d\xi=0$, т.к. частица не движется и $B(a,0,\xi)=0$. Следовательно,

$$P(a,t)=1 .$$

По аналогии,

$$P(b,t)=P(b,0)+\int_a^b B(b,0,\xi)P(\xi,t)d\xi=1.$$

Определим начальное условие. Заметим, что если $x\neq a$ или $x\neq b$, то $P(x,0)=0$, т.к. частица не движется и лежит вне границы. Если же $x=a$ или $x=b$, то $P(x,0)=1$.

Таким образом, решение задачи хотя бы одного достижения границы удовлетворяет (6) с граничными условиями $P(a,t)=1$, $P(b,t)=1$ и начальному условию $P(x,0)=\begin{cases}0, & x\in(a,b)\\ 1, & x=a,\ x=b\end{cases}$.

2.1.2. НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА

Уравнение (6) с граничными условиями, приведенными в п. 2.1.1., решаются аналитически с применением методов, известных из курса математической физики (см. [11,16]). Например, хорошо известный метод разделения переменных или метод Фурье. Рассмотрим несколько случаев:

1) Поглощающие границы.

Пусть (6) имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial^2(k_{11}P)}{\partial x^2} . \tag{9}$$

т.е. коэффициент дрейфа (процент, с которым выплачивается дивиденд) равен нулю. Пусть начальное условие есть

$$P(x,0)=\delta(x-x_0),$$

где x_0 – начальная точка процесса.

Пусть границы области $G=[0,1]$, где задано уравнение, являются поглощающими, т.е.

$$P(0,t)=P(1,t)=0 .$$

Решение краевой задачи ищем в виде $P(x,t)=X(x)T(t)$. Подставляя его в (9), получаем, что $T'X=TX''$, или

$$\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}=\lambda=const .$$

Тогда решение последнего уравнения сводится к решению задачи Штурма – Лиувилля вида:

$$X''=\lambda X,\ X(0)=X(1)=0 .$$

Общее его решение (ненулевое) будет только в случае $\lambda<0$:

$$X = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}\, x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}\, x.$$

Данное решение должно удовлетворять граничным условиям. Используя граничные условия, определяем, что

$$C_1 = 0,\ C_2 \sin\sqrt{-\lambda} = 0,$$

Решением последнего тригонометрического уравнения являются собственные числа $\lambda_n = -\pi^2 n^2, n \in Z$. Подставляя их в общее решение, находим собственные функции:

$$X_n = C_2 \sin\sqrt{-\lambda_n}\, x = C_2 \sin(\pi n x),$$

причем константа C_2 определяется произвольным образом. Положим для определенности $C_2 = 1$.

Зная систему собственных функций, можно найти разложение Фурье для $X(x)$:

$$X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k X_k,$$

где $C_k = \int_0^1 X(x) X_n(x) dx$ – коэффициенты ряда Фурье.

Перейдем ко второму уравнению из соотношения $\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda = const$, заменяя λ на уже известные собственные числа $\lambda_n = -\pi^2 n^2, n \in Z$:

$$T' = \lambda_n T \Rightarrow T = C\exp(\lambda_n t) \Rightarrow T = C\exp\left(-\pi^2 n^2 t\right).$$

Значит, общее решение краевой задачи (9) будет выражаться по формуле:

$$P(x,t) = X(x)T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k C \exp\left(-\pi^2 n^2 t\right)\sin(\pi n x), \tag{10}$$

причем коэффициенты C_k, C пока не определены.

Неизвестные коэффициенты находятся из покоэффициентного сравнения ряда Фурье, записанного по системе собственных функций $X_n = \sin(\pi n x)$ для начального условия $P(x,0) = \delta(x - x_0)$, с (10). Так как ряд Фурье функции Дирака есть

$$\delta(x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin(\pi n x),$$

где $C_k = \int_0^1 \delta(x - x_0)\sin(\pi n x) dx = \sin(\pi n x_0)$, то

$$\delta(x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(\pi n x)\sin(\pi n x_0). \tag{11}$$

Подставим в (10) точку t=0:

$$P(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k C \sin(\pi n x). \tag{12}$$

Сравнивая (11) и (12), получаем, что $C_k C = \sin(\pi n x_0)$, т.е. решение (9) окончательно имеет вид:

$$P(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-\pi^2 n^2 t\right)\sin(\pi n x)\sin(\pi n x_0).$$

Эта функция определяет вероятность перехода из точки x в точку x_0. При $t \to \infty$ $P(x,t) \to 0$.

2) Отражающие границы.

Решим (9) с начальным условием

$$P(x,0) = \delta(x - x_0),$$

где x_0 – начальная точка процесса.

Пусть границы области $G=[0,1]$, где задано уравнение, являются отражающими, т.е.

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial P}{\partial x}(1,t)=0.$$

Решение краевой задачи ищем аналогично случаю 1), рассмотренному выше. При этом собственные числа $\lambda_n=-\pi^2 n^2, n\in Z$, собственные функции:

$$X_n=\cos(\pi n x).$$

Решение (9) с отражающими границами окончательно имеет вид:

$$P(x,t)=1+\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left(-\pi^2 n^2 t\right)\cos(\pi n x)\cos(\pi n x_0).$$

Эта функция определяет вероятность перехода из точки *x* в точку x_0 и при $t\to\infty$ $P(x,t)\to 1$.

3) Процесс Орнштейна – Уленбека (уравнение Ланжевена).

Для этого процесса уравнение (6) имеет вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=k_{11}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial(AxP)}{\partial x}.$$

Выберем начальное условие $P(x,0)$ произвольной функцией.

По аналогии с предыдущими случаями, решение этой задачи Коши ищем в виде

$$P(x,t)=X(x)T(t),$$

откуда

$$X''-\frac{Ax}{k_{11}}X'+\frac{\lambda}{k_{11}}X=0.$$

Делая замену аргумента $y=x\sqrt{\frac{A}{k_{11}}}$, получаем уравнение для полиномов Эрмита $H_n(y)$, решение которого есть собственные функции $X_n(y)=\left(2^n n!\right)^{-1/2}H_n(y)$ и собственные числа $\lambda_n=nA, n\in Z$. Общее решение записывается в виде:

$$P(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\frac{A}{2^n n!\pi k_{11}}}\exp\left(-Ax^2/k_{11}\right)\exp(-nAt)\,A_n\,H_n(y),$$

где $A_n=\left(2^n n!\right)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P(x,0)H_n(y)dx$.

2.2. УРАВНЕНИЕ БЛЭКА – ШОУЛСА (BLACK – SCHOLES)

Уравнение Блэка – Шоулса является основным при моделировании покупки и продажи так называемых опционов или производных ценных бумаг.

Определение: опционом покупателя (продавца) называется ценная бумага (контракт), дающая держателю опциона **право** купить (продать) определенный актив (пакет акций, облигаций, фьючерсов и т.п.) в установленный период или момент времени на заранее известных условиях. Контрагент **обязан** исполнить обязательства, связанные с правами держателя деривата, за что он получает плату, называемую ценой контракта. В случае опциона покупателя ее принято обозначать через *C*, в случае опциона продавца – *P*.

Уравнение Блэка – Шоулса возникло из задачи определения справедливой (или равновесной) цены опциона, которая устраивает и покупателя, и продавца. Эта задача была решена Фишером Блэком и Майроном Шоулсом в 1973 году, за что Майрон Шоулс и Роберт Мертон получили Нобелевскую премию в области экономики в 1997 г.

Различают опционы покупателя (call options) и опционы продавца (put options). Если опцион предъявляется к исполнению в определенный момент времени *N*, то говорят об опционе европейского типа. Если же опцион может быть предъявлен к исполнению в любой случайный момент $t \le N$, то говорят об опционе американского типа.

Рассмотрим подробнее оперирование с опционами европейского типа.

1) Опцион покупателя

Пусть цена опциона равна *C*. Пусть опцион дает право приобрести в момент времени *N* акции ценой *K* (цена фиксирована). Пусть в момент времени *N* фактическая (реальная) стоимость акций равна *S*. Она может быть как больше, так и меньше *K*.

Найдем прибыль покупателя:

a) $S < K$.

В этом случае покупателю выгоднее приобрести акции на рынке, чем предъявить опцион к исполнению. Поэтому прибыль покупателя составит (–*C*).

b) $S > K$.

В этом случае прибыль покупателя составит (*S*–*K*–*C*).

По аналогии, прибыль продавца составит величину *C* и (*K* +*C*– *S*) соответственно.

В соответствии с рассуждениями, сделанными выше, следует, что покупка опциона покупателя связана с надеждой на повышение цены актива.

2) Опцион продавца.

Пусть цена опциона равна *P*. Пусть опцион дает право продать в момент времени *N* акции ценой *K* (цена фиксирована). Пусть в момент времени *N* фактическая (реальная) стоимость акций равна *S*. Она может быть как больше, так и меньше *K*. Прибыль продавца в момент времени *N* составит (*K* – *S*–*P*) в случае $S < K$ и (–*P*), если $S > K$. Таким образом, покупка опциона продавца связана с надеждой на понижение цены актива.

Для определенности, в дальнейшем будем рассматривать опцион покупателя (случай опциона продавца рассматривается аналогично, см. соотношение call-put). Пусть $V(S,t,\sigma,\mu,E,T,r)$ – равновесная (справедливая) цена опциона покупателя, устраивающая и продавца опциона, и его контрагента (держателя опциона), *E* – цена исполнения (страйк-прайс), по которой покупатель имеет право приобрести актив в момент времени *T* (экспирэйшн дэйт, момент окончания действия опциона), *t* – текущее время, *S* – фактическая цена актива в момент *t*, μ – средняя (ожидаемая) доходность базового актива, σ – величина риска (волатильность, риск больших отклонений случайного процесса *V*), *r* – безрисковая процентная ставка.

Заметим, что для классической модели Блэка-Шоулса в функции $V(S,t,\sigma,\mu,E,T,r)$ переменными считаются только S, t, остальные же играют роль параметров. Поэтому будем обозначать справедливую цену через $V(S,t)$.

Пусть S – текущая стоимость одной акции, пусть Δ – их количество. Тогда справедливая цена портфеля акций, состоящего из проданного опциона покупателя на Δ акций, предназначенных для их покупки в момент экспирации *T* (первоначально в наличии акций нет), равна

$$\Pi = V(S,t) - \Delta \cdot S . \qquad (13)$$

Предположим, что *S* удовлетворяет дифференциальному уравнению Ито

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW ,$$

рассмотренному нами ранее (см. п.1, формулу (7)).

Дифференцируя (13), имеем:

$$d\Pi = dV(S,t) - \Delta \cdot dS , \qquad (14)$$

По формуле Ито, примененной для стохастического процесса $V(S,t)$, имеем:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 + \frac{\partial V}{\partial S}dS .$$

Так как $dS^2 = \mu^2 S^2\,dt^2 + \sigma^2 S^2\,dW^2 + 2\mu\sigma S^2\,dW dt = \sigma^2 S^2\,dt$, то

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} d\,t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS\,.$$

Таким образом, изменение цены портфеля равно

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} d\,t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS - \Delta \cdot dS\,. \qquad (15)$$

В равенстве (15) есть два вида слагаемых – детерминированные, стоящие при *dt*) и стохастические (при *dS*). Последние заранее неизвестны и их можно считать риском оперирования с нашим активом, так как они мешают точному оцениванию текущей стоимости активов:

$$Risk = \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) \cdot dS\,.$$

Если предположить, что $\frac{\partial V}{\partial S} = \Delta$, то систематический риск будет равен нулю. В этом случае говорят о безрисковом активе, цена которого может быть вычислена в произвольный момент времени. В этом случае изменение цены портфеля будет удовлетворять уравнению

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} d\,t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt\,. \qquad (16)$$

Операцию уменьшения риска называют хеджированием (страхованием). Для случая, рассмотренного выше, применяют специальное название – Δ– хеджирование. Более того, (16) является примером так называемой динамической стратегии страхования, так как производная $\frac{\partial V}{\partial S}$ является некоторой функцией времени и с ее изменением число акций пакета должно так же меняться.

Продолжим исследование (16). Так как портфель безрисковый, то за момент *dt* портфель стоимостью Π принесет альтернативный доход (если, например, положить деньги в банк) в сумме

$$d\Pi = r\Pi\, dt\,,$$

где r – безрисковая процентная ставка.

Учитывая (13), имеем:

$$d\Pi = r(V - \Delta \cdot S)dt\,.$$

Пользуясь тем, что $\frac{\partial V}{\partial S} = \Delta$, и учитывая (16), последовательно получаем

$$d\Pi = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} \cdot S \right) dt\,,$$

$$r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} \cdot S \right) dt = \frac{\partial V}{\partial t} d\,t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt\,,$$

или

$$\frac{\partial V}{\partial t} d\,t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} \cdot S \right) dt = 0\,,$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} \cdot S \right) \right] dt = 0\,.$$

Интегрируя последнее соотношение по промежутку [0, *t*], получаем, что

$$\int_0^t \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} \cdot S \right) \right] dt = 0 .$$

Интеграл по множеству ненулевой меры равен нулю $\Leftrightarrow$ когда подынтегральная функция равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r \frac{\partial V}{\partial S} \cdot S - rV = 0 . \tag{17}$$

Уравнение (17) называется уравнением Блэка – Шоулса (Black – Scholes).

Несмотря на сделанные ранее предположения о функциональной зависимости $V(S,t,\sigma,E,T,r)$, решение уравнения не зависит от величины дрейфа μ. Это связано с тем, что величина риска в модели равна нулю и нет необходимости перерестраховываться и учитывать излишние риски, которые возникли бы в результате проведения операции хеджирования.

Заметим также, что при выводе уравнения (17) мы не учитывали выплату дивидендов по базовому активу. Так как за время dt на капитал Δ^*S можно потерять сумму $-D\Delta Sdt$ (акций в настоящее время нет, их нужно предоставить в будущий момент времени и заплатить дивиденды), то выражение (16) примет вид

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} d\,t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - D\Delta Sdt.$$

Все остальные выражения остаются в силе. Поэтому

$$\frac{\partial V}{\partial t} d\,t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - D\Delta Sdt = r\Pi dt,$$

или, учитывая проведенное хеджирование, окончательно получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-D) \frac{\partial V}{\partial S} \cdot S - rV = 0.$$

2.2.1. Допущения модели Блэка – Шоулса (Black – Scholes)

Уравнение (17) записано при следующих важных предположениях, ограничивающих его применение на практике:

1) Модель Блэка – Шоулса построена в предположении о нормальном законе распределения прибыли от торговли. Это означает, что предполагается выполнение логнормального распределения для решения дифференциального уравнения S:
$$d\,S = \mu S\,d\,t + \sigma S\,dW .$$
2) Волатильность σ в (17) есть некоторая постоянная, хотя на практике она является некоторой неизвестной функцией времени $\sigma(t)$. Иногда при проведении реальных расчетов полагают известной зависимость $\sigma(t,S)$, но в этом случае решение (17) будет иметь бесконечную дисперсию.
3) Согласно модели фактическая цена актива $S(t,\omega)$ лежит в полуинтервале $[0,\infty)$.
4) Безрисковая процентная ставка $r(t)$ – известная функция времени. Это ограничение позволяет найти решение уравнения (17) явно. На практике такая зависимость не известна и является случайной. Зачастую действительная ставка $r = r(t,W,S)$ определяется по эмпирическим данным (например, по результатам торгов) или с помощью асимптотического подхода, например, пользуясь ядерными функциями для фьючерсов и опционов на один базовый актив или по соотношениям неприятия риска для деривативов различного порядка на один актив).
5) По акциям пакета не производится дивидендных выплат

Если по акциям пакета производятся дивидендные выплаты с дивидендной ставкой по акциям D, то (17) преобразуется к виду (подробнее см. Халла, 7 изд, гл. 13, стр. 295):

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-D)\frac{\partial V}{\partial S}\cdot S-rV=0.$$

6) Δ – хеджирование осуществляется непрерывно.
   Это самое существенное и самое жесткое ограничение модели, так как на практике хеджирование производится в дискретные моменты времени в период функционирования биржи. Зачастую время для переоценки риска и вычисления Δ зависит от стоимости ведения торговых операций с ценными бумагами, входящими в пакет. Однако если за ведение торговых операций плата не берется, то ограничение модели будет напрямую связано с минимальным количеством времени, необходимым для обработки брокером заказа на покупку или продажу акций пакета (чтобы довести размер пакета до оптимального, равного Δ).
7) В соответствии с 6), модель не учитывает плату за ведение торговых операций с ценными бумагами.
8) Модель не учитывает возможность одновременной покупки или продажи ценных бумаг, а также коротких продаж и покупок бумаг за счет брокера (сделки РЕПО и т.п.).

Замечание: начальное и граничные условия для (17) задаются по аналогии с УФПК (см. 2.1.1).

2.2.2. Приведение уравнения Блэка – Шоулса к каноническому виду. Формулы Блэка – Шоулса

Приведем (17) к каноническому виду, удобному для нахождения решения стандартными методами.

a) Введем новую переменную $U(S,t)$ по правилу $V=e^{-r(T-t)}U$ и подставим ее в (17):

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}+r\frac{\partial U}{\partial S}\cdot S=0. \qquad (18)$$

b) Изменим знак производной по времени, для чего введем новую временную переменную

$$\tau=(T-t),$$

где T – время окончания контракта, t – текущее время.

Имеем следующие равенства:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(\tau)=-\frac{\partial U}{\partial t}(t),\ \frac{\partial U}{\partial S}(\tau)=\frac{\partial U}{\partial S}(t),\ \frac{\partial^2 U}{\partial S^2}(\tau)=\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}(t).$$

Поэтому преобразуется в равенство вида:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}+r\frac{\partial U}{\partial S}\cdot S. \qquad (19)$$

c) В (19) введем новую переменную ξ: $\xi=\ln S$, или $S=\exp(\xi)$. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial S}=\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dS}=\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{1}{S}=e^{-\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi};$$

$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}=\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)=$ (по равенству выше) $=\frac{\partial}{\partial S}\left(e^{-\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)=$ (по правилу дифференцирования произведения) $=-e^{-\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dS}+e^{-\xi}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right).$

Для того чтобы найти $\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)$, необходимо посмотреть по какому правилу находится производная по *S*. Рассмотрим выражение $\frac{\partial U}{\partial S}=e^{-\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi}$. Из него следует, что при взятии производной по *S* функция *U* дифференцируется по переменной ξ, а результат умножается на $e^{-\xi}$. Поэтому $\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)=e^{-\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)=e^{-\xi}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$.

Окончательно имеем:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}=-e^{-2\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi}+e^{-2\xi}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

Используя соотношения для производных, запишем (19) в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial U}{\partial \xi}. \qquad (20)$$

Заметим, что коэффициенты при производных уравнения стали постоянными.

d) Введем переменную x по правилу: $x=\xi+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\tau$ и вместо $U(\xi,\tau)$ будем рассматривать новую функцию $W(x,\tau)=U(\xi,\tau)$. Тогда

$U(\xi,\tau)=W(x,\tau)=W\left(\xi+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\tau,\tau\right)$ и

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial W}{\partial \tau}\frac{d\tau}{d\tau}=\frac{\partial W}{\partial x}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\frac{\partial W}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial W}{\partial \tau}\frac{d\tau}{d\xi}=\frac{\partial W}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\frac{d\tau}{d\xi}=\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

Подставляя найденные выражения в (20), имеем

$$\frac{\partial W}{\partial x}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\frac{\partial W}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial W}{\partial x},$$

или

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \qquad (21)$$

Уравнение (21) является канонической формой записи уравнения диффузии или уравнения параболического типа. Его фундаментальным решением является функция

$$W_\Phi(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\,\sigma}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2\tau}\right),$$

где x_0 – начальное условие.

При подстановке $W_\Phi(x,\tau)$ в (21) получаем дельта–функцию:

$$\frac{\partial W_\Phi}{\partial \tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W_\Phi}{\partial x^2}=\delta(x-x_0).$$

Общее решение уравнения (21) получается с помощью фундаментального решения посредством формулы

$$W(x,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} W_{\Phi}\, W(x,0)\,dx,$$

где $W(x,0)$ – начальное условие.

Вспоминая о сделанных обозначениях $x=\ln S+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot(T-t)$, получаем, что общее решение уравнения (18) выражается по формуле

$$V(S,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma}\int_{0}^{\infty}\exp\left(-\frac{\left(\ln S-\ln S_0+\left(r-0.5\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)\frac{V(S_0,T)}{S_0}dS_0, \qquad (22)$$

где $V(S_0,T)$ – функция вознаграждения во время окончания контракта.

Рассмотрим два частных случая применения этой формулы.

a) Опцион покупателя

Так как функция вознаграждения равна $V(S_0,T)=\max\{S_0-E,0\}$, то (22) приобретает следующий вид:

$$V(S,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma}\int_{-\infty}^{E}\exp\left(-\frac{\left(\ln S-\ln S_0+\left(r-0.5\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)\frac{(S_0-E)}{S_0}dS_0.$$

Делая замену $S_0=\exp(x_0)$, получаем:

$$V(S,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma}\int_{-\infty}^{\ln E}\exp\left(-\frac{\left(-x_0+\ln S+\left(r-0.5\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)\exp(x_0)dx_0-$$

$$-E\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma}\int_{-\infty}^{\ln E}\exp\left(-\frac{\left(-x_0+\ln S+\left(r-0.5\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)dx_0.$$

Делая соответствующие замены переменного под знаками обоих интегралов, окончательно получим:

$$V(S,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}S\int_{-\infty}^{d_1}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}E\,e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{d_2}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt,$$

где

$$d_1=\frac{\ln S-\ln E+\left(r+0.5\sigma^2\right)(T-t)}{\sqrt{(T-t)}\sigma},\ d_2=\frac{\ln S-\ln E+\left(r-0.5\sigma^2\right)(T-t)}{\sqrt{(T-t)}\sigma}=d_1-\sigma\sqrt{T-t}. \qquad (23)$$

Таким образом, для опциона покупателя справедливая цена равна

$$V(S,t)=S\,\Phi(d_1)-E\,e^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \qquad (24)$$

где $\Phi(d_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_i}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины, $i=1,2$.

b) Опцион продавца

Так как функция вознаграждения равна $V(S_0,T)=\max\{E-S_0,\,0\}$, то (22) будет иметь вид:

$$V(S,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma}\int_{-\infty}^{E}\exp\left(-\frac{\left(\ln S-\ln S_0+\left(r-0.5\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)\frac{(E-S_0)}{S_0}dS_0.$$

По аналогии можно получить, что для опциона продавца справедливая цена равна

$$V(S,t)=-S\,\Phi(-d_1)+E\,e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2), \qquad (25)$$

где $\Phi(d_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{d_i}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины, $i=1,2$.

Найдем число акций Δ, при котором риск равен нулю. Ранее (см. п. 2.2.) было найдено, что $\frac{\partial V}{\partial S}=\Delta$. Дифференцируя (24) и (25) и учитывая, что d_i – константы, $i=1,2$, получаем (см.):

a) Опцион покупателя: $\Delta=\Phi(d_1),\ d_1$ вычисляется по (23).

b) Опцион продавца: $\Delta=-\Phi(-d_1),\ d_1$ вычисляется по (23).

Замечание: если $S=E$ и $r=0$, т.е. в случае когда цена акции по опциону совпадает с фактической ценой на рынке и когда безрисковая процентная ставка равна нулю, (24) – (25) приобретают вид:
для опциона покупателя:

$$V(S,t)=S\left(\Phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right)-\Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right)\right).$$

для опциона продавца:

$$V(S,t)=-S\left(1+\Phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right)-\Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right)\right).$$

При тех же условиях для опциона покупателя справедливо асимптотическое приближение:

$$V(S,t)=S\sigma\sqrt{\frac{T-t}{2\pi}} \text{ при } t\to T .$$

Отметим, что (24)–(25) называются формулами Блэка – Шоулса для определения равновесной (справедливой) цены опциона покупателя и продавца соответственно.

Теорема 2.2.1 (**соотношение call-put**): справедливая цена на опцион покупателя *C* имеет связь со справедливой ценой на опцион продавца *P* вида:

$$P=C-S_0+Ee^{-rT},$$

где $C=S\Phi(d_1)-Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$.

Доказательство: известно соотношение между максимумами:

$$(S_T-E)^+-(E-S_T)^+=S_T-E .$$

Разделим его на e^{rT} и возьмем от обоих частей получившегося равенства риск-нейтральное математическое ожидание:

$$e^{-rT}\left[E^*(S_T-E)^+-E^*(E-S_T)^+\right]=e^{-rT}E^*(S_T-E).$$

Так как $e^{-rT}E^*(S_T-E)^+=C$, а $e^{-rT}E^*(E-S_T)^+=P$, то последнее выражение преобразуется к виду

$C-P=E^*\left(\frac{S_T}{e^{rT}}-\frac{E}{e^{rT}}\right)=E^*\left(\frac{S_T}{e^{rT}}\right)-\frac{E}{e^{rT}}=$ (так как $E^*\left(\frac{S_T}{e^{rT}}\right)=S_0$ по свойству мартингальности дисконтированной цены) $=S_0-\frac{E}{e^{rT}}$. Собирая, окончательно имеем $P=C-S_0+Ee^{-rT}$, ч.т.д.

Замечание: теорема 2.2.1 говорит о дуальности цен опционов покупателя и продавца: зная лишь одну из них, можно вычислить и другую. Это связано с тем, что все цены равновесны и справедливы для обоих контрагентов сделки.

«Греческие» для европейского опциона

Определение: греческими для опциона со справедливой ценой V называются следующие соотношения:

1) $\Delta=\frac{\partial V}{\partial S}$ - коэффициент Δ-хеджирования;
2) $\Gamma=\frac{\partial\Delta}{\partial S}=\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ - коэффициент чувствительности портфеля ценных бумаг к хеджированию, показывающий как часто нужно проводить процедуру хеджирования, чтобы добиться риск-нейтральности портфеля. Определяет скорость изменения Δ в зависимости от изменения базового актива;
3) $\rho=\frac{\partial V}{\partial r}$ - коэффициент чувствительности цены опциона к изменению безрисковой процентной ставки;
4) $Vega=\frac{\partial V}{\partial\sigma}$ - определяет скорость изменения стоимости портфеля по отношению к изменению волатильности базового актива. Если Vega>>0, то стоимость портфеля очень чувствительна к изменениям волатильности;
5) $\Theta=\frac{\partial V}{\partial t}$ - коэффициент, отвечающий за минимальную доходность риск-нейтрального портфеля, равную безрисковой процентной ставке.

Замечание: все греческие используются в риск-менеджменте. Например, для формирования риск-нейтрального портфеля акций стоимостью S_t и облигаций стоимостью B_t с помощью опциона покупателя, необходимо продать долю $\Phi(d_1)$ первоначального количества акций и долю $\frac{C-S\,\Phi(d_1)}{e^{rT}}$ первоначального количества облигаций.

Аналитические выражения греческих для опциона покупателя приведены в утверждении теоремы 2.2.2.

Теорема 2.2.2 (о «греческих» для опциона покупателя):

Пусть $C=S\,\Phi(d_1)-E\,e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$ - справедливая цена опциона покупателя. Тогда

1) $\Delta=\Phi(d_1)$ 2) $\Gamma=\Delta'_S=\frac{\Phi'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$ 3) $\rho=E(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$

4) $Vega=\frac{S\sqrt{(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right)$ 5) $\Theta=-\frac{\sigma S}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}}\exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right)-E\,re^{-r(T-t)}\Phi(d_2).$

Доказательство: проведем доказательство только для $\Delta=\frac{\partial V}{\partial S}$. Остальные формулы получаются по аналогии прямым дифференцированием формулы Блэка – Шоулса.

$$\frac{\partial C}{\partial S}=\Phi(d_1)+S\,\varphi(d_1)(d_1)_s'-Ee^{-r(T-t)}\varphi(d_2)(d_2)_s',$$

где $\varphi(x)=\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$.

Так как $(d_1)_s'=\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}},(d_2)_s'=(d_1)_s'$, то

$$\frac{\partial C}{\partial S}=\Phi(d_1)+\varphi(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}-Ee^{-r(T-t)}\varphi(d_2)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Преобразуем $\varphi(d_2)$:

$$\varphi(d_2)=\frac{\exp\left(-d_2^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}}=\frac{\exp\left(-\left(d_1-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}}=\varphi(d_1)\exp\left(d_1\sigma\sqrt{T-t}-\sigma^2(T-t)/2\right).$$ Поэтому

$$\Delta=\Phi(d_1)+\varphi(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}-E\varphi(d_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}\exp\left(-r(T-t)-\sigma^2(T-t)/2+d_1\sigma\sqrt{T-t}\right).$$

Заметим, что $d_1\sigma\sqrt{T-t}=\ln S-\ln E+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$. Значит,

$$\Delta=\Phi(d_1)+\varphi(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}-E\varphi(d_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}\exp\left(\ln S-\ln E\right),$$ или

$$\Delta=\Phi(d_1)+\varphi(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}-\varphi(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}=\Phi(d_1),$$

ч.т.д.

Замечание: пользуясь соотношением call-put нетрудно убедиться в том, что некоторые «греческие», записанные для опциона покупателя, изменятся. Например, величина ρ. Но параметр Vega будет одинаковым для опционов и покупателя, и продавца. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.2.1 (о «греческих» для опциона продавца):

Пусть $P=Ee^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)-S\,\Phi(-d_1)$ - справедливая цена опциона продавца. Тогда

2) $\Delta=\Phi(d_1)-1$ 2) $\Gamma=\Delta'_S=\frac{\Phi'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$ 3) $\rho=-E(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)$

4) $Vega=\frac{S\sqrt{(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right)$ 5) $\Theta=-\frac{\sigma S}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}}\exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right)+E\,re^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)$.

Замечание: уравенение Блэка-Шоулса (17) может быть записано через греческие буквы. Так можно получить соотношение между ними. Для цены V произвольного европейского опциона имеем:

$$\Theta+\frac{\sigma^2S^2}{2}\Gamma+r\cdot S\Delta=rV\ .$$

В то же время, если портфель (13) ***риск-нейтральный***, то $\Theta+\frac{\sigma^2S^2}{2}\Gamma=rV$, т.е. в случае больших отрицательных значений Θ параметр Γ дожен быть большим и положительным.

Некоторые графические представления поведения греческих коэффициентов приведены на следующих рисунках.

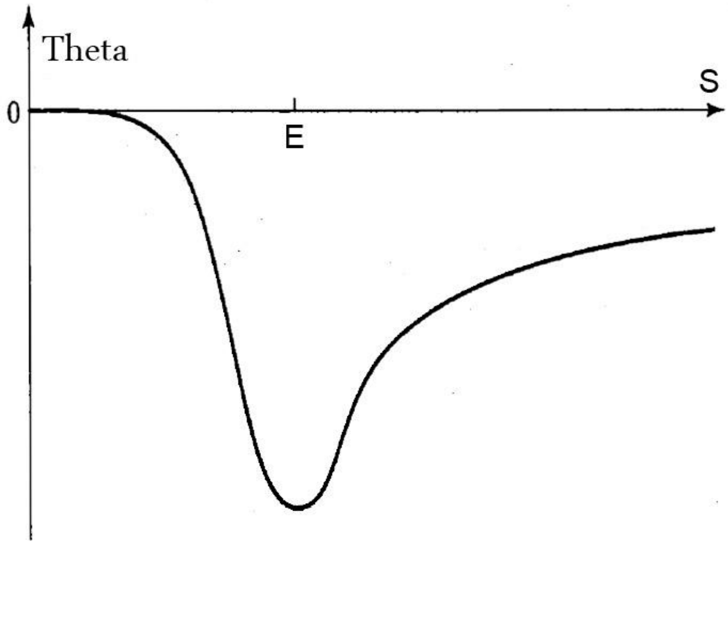

Рис. 3. Поведение коэффициента Θ для опциона call
в зависимости от цены базового актива S (по данным [22])

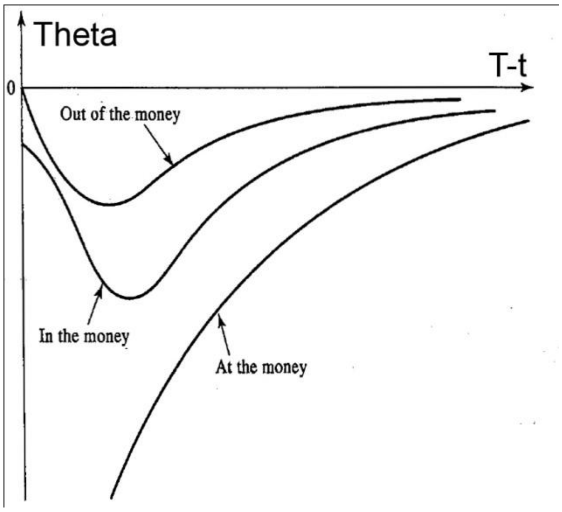

Рис. 4. Поведение коэффициента Θ для опциона call
в зависимости от срока до исполнения (по данным [22])

2.2.3. Опционы на фьючерс, формула Блэка–Шоулса

Теорема 2.2.3 (о формуле Блэка-Шоулса для опциона покупателя на фьючерс): пусть цена фьючерса в момент времени t со сроком до исполнения τ=(T-t) и ценой S_t базового актива есть $F_{t,\tau} = S_t e^{r(T-t)}$, где r –безрисковая процентная ставка. Тогда формула Блэка–Шоулса для справедливой цены опциона покупателя на фьючерс с ценой исполнения E имеет вид

$$c = F_t e^{-r(T-t)}\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \ ,$$

где $d_1 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln F_{t,\tau} - \ln X + \sigma^2(T-t)/2\right), d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, E = F_T$.

Доказательство:

Продадим опцион покупателя на Δ фьючерсов со временем до исполнения τ за цену $C\left(F_{t,\tau},\tau\right)$. Пусть эволюция цены рискового актива S_t, являющегося базовым для фьючерса с ценой $F_{t,\tau}$, задаётся стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$d\,S_t = \mu S_t\,d\,t + \sigma S_t\,dW \ .$$

К справедливой цене фьючерса со стохастической процентной ставкой $F_{t,\tau} = S_t e^{r_{t,\tau}\tau}$ применим формулу Ито:

$$dF_{t,\tau} = \frac{\partial F_{t,\tau}}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_{t,\tau}}{\partial S_t^{\ 2}}\left(dS_t\right)^2 + \frac{\partial F_{t,\tau}}{\partial S_t}dS_t .$$

Так как $\dfrac{\partial F_{t,\tau}}{\partial t} = e^{r\tau}$, а $\dfrac{\partial^2 F_{t,\tau}}{\partial S_t^{\ 2}} = 0$, то

$$dF_{t,\tau} = \frac{\partial F_{t,\tau}}{\partial t}dt + e^{r\tau}dS_t = \left(-rS_t dt + dS_t\right)e^{r\tau}.$$

Далее, $\left(dF_{t,\tau}\right)^2 = \left(dS_t\right)^2 e^{2r\tau}$, $\left(dS_t\right)^2 = \sigma^2 S_t^{\ 2} dt$. Окончательно,

$$\left(dF_{t,\tau}\right)^2 = \sigma^2 S_t^2 e^{2r\tau} dt = \sigma^2 F_{t,\tau}^2\, dt.$$

Применим к $C\left(F_{t,\tau}, \tau\right)$ формулу Ито:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial F_{t,\tau}^2}\left(dF_{t,\tau}\right)^2 + \frac{\partial C}{\partial F_{t,\tau}}dF_{t,\tau} = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial F_{t,\tau}^2}\sigma^2 F_{t,\tau}^2 dt + \frac{\partial C}{\partial F_{t,\tau}}dF_{t,\tau}.$$

Рассмотрим портфель из опциона покупателя на фьючерс и Δ фьючерсов:

$$\Pi = C - \Delta F_{t,\tau},$$

$$d\Pi = dC - \Delta dF_{t,\tau}.$$

Поэтому

$$d\Pi = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial F_{t,\tau}^2}\sigma^2 F_{t,\tau}^2 dt + \frac{\partial C}{\partial F_{t,\tau}}dF_{t,\tau} - \Delta dF_{t,\tau}.$$

Члены, содержащие $dF_{t,\tau}$ в последнем равенстве, отвечают за стохастическую часть, которую необходимо обнулить для получения безрискового портфеля П. Потребуем, чтобы $\Delta = \dfrac{\partial C}{\partial F_{t,\tau}}$. Следовательно,

$$d\Pi = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial F_{t,\tau}^2}\sigma^2 F_{t,\tau}^2 dt.$$

Таким образом, задача сведена к определению цены опциона европейского типа, решением которой является известная формула Блэка–Шоулса с базовым активом S_t. Для нахождения окончательной цены используем формулу (24), положив в ней $S_t = F_{t,\tau}e^{-r\tau}$. После несложных преобразований получим утверждение теоремы, причем

$$d_1 = \frac{\ln\dfrac{S_t}{X} + \left(r + \sigma^2/2\right)\tau}{\sqrt{\tau}\,\sigma} = \frac{\ln\dfrac{S_t e^{-r\tau}}{X} + \ln e^{-r\tau} + r\tau + \sigma^2/2\tau}{\sqrt{\tau}\,\sigma} = \frac{\ln\dfrac{F_{t,\tau}}{X} + \dfrac{\sigma^2}{2}\tau}{\sqrt{\tau}\,\sigma}.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание:

По аналогии, можно доказать, что цена опциона продавца на фьючерс есть:

$$p = Ee^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - F_t e^{-r(T-t)}\Phi(-d_1).$$

Можно показать, что для опциона на фьючерс в начальный момент времени справедливо соотношение call-put вида

$$p = c - S_0 + Ee^{-rT},$$

аналогичное соотношению call-put для опционов европейского типа. Оно может быть обобщено и на случай произвольного времени t:

$$p_t = c_t - S_0 + Ee^{-r(T-t)}.$$

В обеих формулах через p обозначена справедливая цена на опцион продавца на фьючерс, через c обозначена справедливая цена на опцион покупателя на фьючерс.

Выведем аналог уравнения Блэка-Шоулса для опциона на фьючерс. Пусть F_t – текущая стоимость фьючерса, Δ – их количество. Пусть c – справедливая цена опциона покупателя на фьючерс. Купим один опцион покупателя на фьючерс с поставкой в будущий момент T фьючерсов в количестве Δ. Так как сам фьючерс в начальный момент не стоит ничего, то стоимость портфеля будет:

$$\Pi = -c + \Delta \cdot F_0 = -c.$$

Предположим, что F_t удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dF = \mu F\,dt + \sigma F\,dW,$$

рассмотренному нами ранее (см. п.1, формулу (7)).

По формуле Ито, примененной для стохастического процесса f, имеем:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2}dF^2 + \frac{\partial c}{\partial F}dF.$$

Так как $dF^2 = \mu^2 F^2 dt^2 + \sigma^2 F^2 dW^2 + 2\mu\sigma F^2 dW dt = \sigma^2 F^2 dt$, то

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{\sigma^2 F^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2}dt + \frac{\partial c}{\partial F}dF.$$

Таким образом, изменение цены портфеля равно

$$d\Pi = \Delta \cdot dF - dc = \Delta \cdot dF - \frac{\partial c}{\partial t}dt - \frac{\sigma^2 F^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2}dt - \frac{\partial c}{\partial F}dF.$$

Хеджируем риск: пусть

$$\frac{\partial c}{\partial F} = \Delta.$$

Тогда сомножитель, стоящий при dF, обнулится, и

$$d\Pi = -\frac{\partial c}{\partial t}dt - \frac{\sigma^2 F^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2}dt$$

Так как портфель безрисковый, то за момент dt портфель стоимостью Π принесет альтернативный доход (если, например, положить деньги в банк) в сумме

$$d\Pi = r\Pi\,dt,$$

где r – безрисковая процентная ставка.

Учитывая это, имеем (т.к. $\Pi = -c$):

$$d\Pi = -rc\,dt.$$

Значит,

$$-rc\,dt = -\frac{\partial c}{\partial t}dt - \frac{\sigma^2 F^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2}dt.$$

Интегрируя последнее соотношение по промежутку $[0, t]$, получаем, что

$$\int_0^t \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2 F^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial F^2} - rc \right] dt = 0 .$$

Интеграл по множеству ненулевой меры равен нулю $\Leftrightarrow$ когда подынтегральная функция равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2 F^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial F^2} = rc .$$

Уравнение почти полностью совпадает с уравнением Блэка – Шоулса для опциона покупателя (отсутствует слагаемое $rF \dfrac{\partial c}{\partial F}$, отвечающее за «конвективный перенос» акций от одних владельцев другим).

Зная формулы «греческих» для опциона покупателя нетрудно вычислить их и для фьючерса, и для опциона на фьючерс. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.4 (о значении дельта для опциона покупателя на фьючерс):

Пусть $c = F_t\, e^{-r(T-t)}\Phi(d_1) - E\, e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$ - справедливая цена опциона покупателя на фьючерс, где $d_1 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln F_t - \ln E + \sigma^2\tau/2\right),\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$ Тогда $\Delta = e^{-r(T-t)}\Phi(d_1)$.

Доказательство:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial F} = e^{-r(T-t)}\Phi(d_1) + F_t\, e^{-r(T-t)}\varphi(d_1)(d_1)_s' - Ee^{-r(T-t)}\varphi(d_2)(d_2)_F' ,$$

где $\varphi(x) = \dfrac{\exp\left(-x^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}}$.

Так как $(d_1)_F' = \dfrac{1}{F_t\sigma\sqrt{T-t}},\ (d_2)_s' = (d_1)_s'$, то

$$\frac{\partial c}{\partial F} = e^{-r(T-t)}\Phi(d_1) + \varphi(d_1)\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{T-t}} - Ee^{-r(T-t)}\varphi(d_2)\frac{1}{F_t\sigma\sqrt{T-t}} .$$

Преобразуем $\varphi(d_2)$:

$\varphi(d_2) = \dfrac{\exp\left(-d_2^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{\exp\left(-\left(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}} = \varphi(d_1)\exp\left(d_1\sigma\sqrt{T-t} - \sigma^2(T-t)/2\right).$ Поэтому

$$\Delta = e^{-r(T-t)}\Phi(d_1) + \varphi(d_1)\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{T-t}} - Ee^{-r(T-t)}\varphi(d_1)\frac{1}{F_t\sigma\sqrt{T-t}}\exp\left(-\sigma^2(T-t)/2 + d_1\sigma\sqrt{T-t}\right).$$

Заметим, что $d_1\sigma\sqrt{T-t} = \ln F_t - \ln E + \dfrac{\sigma^2}{2}(T-t)$. Значит,

$$\Delta = e^{-r(T-t)}\Phi(d_1) + \varphi(d_1)\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{T-t}} - \varphi(d_1)\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{T-t}} = e^{-r(T-t)}\Phi(d_1), \text{ ч.т.д.}$$

Теорема 2.2.5 (о цене фьючерса):

Справедливая цена на фьючерс есть $F_0 = E^*(S_T)$*, или, в произвольный момент времени*

$$F_t = S_t\, e^{r(T-t)}.$$

Теорема 2.2.6 (о «греческих» для фьючерса):

Пусть $F_t = S_t\, e^{r(T-t)}$ - справедливая цена фьючерса. Тогда

1) $\Delta = e^{r(T-t)}$ 2) $\Gamma = \Delta_S' = 0$ 3) $\rho = (T-t)F_t$ 4) $Vega = 0$ 5) $\Theta = -rF_t$.

Доказательство очевидно.

2.3. МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Основным недостатком модели Блэка – Шоулса, рассмотренной в п.2.2., является предположение о постоянном уровне волатильности σ=*const*. Оно наиболее существенно ограничивает анализ реальных рисковых активов, торгуемых на фондовых рынках, так как зачастую эти финансовые инструменты обладают переменной волатильностью с функциональной зависимостью вида $\sigma=\sigma(t,S)$ или более сложной, когда σ является стохастическим процессом. Поэтому в данном параграфе будет рассмотрена модель стохастической волатильности, обобщающая теорию Блэка – Шоулса.

Пусть S – текущая стоимость актива, удовлетворяющего уравнению

$$dS=\mu S\,dt+\sigma S\,dW_1,$$

W_1 – винеровский процесс.

Пусть σ – некоторый стохастический процесс, причем

$$d\sigma=p(s,\sigma,t)dt+q(s,\sigma,t)dW_2,$$

где $p(s,\sigma,t)$, $q(s,\sigma,t)$ – некоторые непрерывные функции, W_2 – винеровский процесс, отличный от W_1.

Пусть W_1, W_2 коррелированны между собой с корреляцией

$$\rho=corr(dW_1,dW_2).$$

Пусть, как и прежде, $V(S,\sigma,t)$ – справедливая цена опциона покупателя. Вследствие того, что модель описывается двумя стохастическими уравнениями, то, по аналогии с п.2.2., требуется проводить уже два вида страхования активов. Первым из них будет уже рассмотренное $\Delta-$ хеджирование, вторым – страхование так называемого рыночного риска. Образуем портфель, продав опцион покупателя по справедливой цене $V(S,\sigma,t)$ и взяв на себя обязательства купить в будущем Δ акций стоимостью S и Δ_1 опционов страхования с ценой $V_1(S,\sigma,t)$.

Суммарная стоимость портфеля составит

$$\Pi=V(S,t)-\Delta\cdot S-\Delta_1\cdot V_1.$$

Изменение стоимости за время dt будет

$$d\Pi=dV(S,t)-\Delta\cdot dS-\Delta_1\cdot dV_1.$$

По формуле Ито, примененной для стохастического процесса $V(S,\sigma,t)$, имеем:

$$dV=\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{\partial V}{\partial S}dS+\frac{\partial V}{\partial\sigma}d\sigma+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2V}{\partial S^2}dS^2+\frac{\partial^2V}{\partial\sigma^2}d\sigma^2+2\frac{\partial^2V}{\partial\sigma\partial S}d\sigma dS\right).$$

По аналогии, применим формулу Ито для функции $V_1(S,\sigma,t)$:

$$dV_1=\frac{\partial V_1}{\partial t}dt+\frac{\partial V_1}{\partial S}dS+\frac{\partial V_1}{\partial\sigma}d\sigma+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2V_1}{\partial S^2}dS^2+\frac{\partial^2V_1}{\partial\sigma^2}d\sigma^2+2\frac{\partial^2V_1}{\partial\sigma\partial S}d\sigma dS\right).$$

Подставляя dV, dV_1 в выражение для $d\Pi$, и учитывая $\rho=corr(dW_1,dW_2)$, получаем:

$$d\Pi=\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{\partial V}{\partial S}dS+\frac{\partial V}{\partial\sigma}d\sigma+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2V}{\partial S^2}dS^2+\frac{\partial^2V}{\partial\sigma^2}d\sigma^2+2\frac{\partial^2V}{\partial\sigma\partial S}d\sigma dS\right)-\Delta\cdot dS-\Delta_1\cdot\frac{\partial V_1}{\partial t}dt-$$

$$-\Delta_1\cdot\left(\frac{\partial V_1}{\partial S}dS+\frac{\partial V_1}{\partial\sigma}d\sigma+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2V_1}{\partial S^2}dS^2+\frac{\partial^2V_1}{\partial\sigma^2}d\sigma^2+2\frac{\partial^2V_1}{\partial\sigma\partial S}d\sigma dS\right)\right),$$

или, преобразуя $d\sigma^2$, dS^2:

$$d\Pi=\left(\frac{\partial V}{\partial t}-\Delta_1\cdot\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{\sigma^2S^2}{2}\left(\frac{\partial^2V}{\partial S^2}-\Delta_1\frac{\partial^2V_1}{\partial S^2}\right)+\rho\sigma qS\left(\frac{\partial^2V}{\partial\sigma\partial S}-\Delta_1\frac{\partial^2V_1}{\partial S\,\partial\sigma}\right)+\frac{q^2}{2}\left(\frac{\partial^2V}{\partial\sigma^2}-\Delta_1\frac{\partial^2V_1}{\partial\sigma^2}\right)\right)dt+$$
$$+\left(\frac{\partial V}{\partial S}-\Delta_1\cdot\frac{\partial V_1}{\partial S}-\Delta\right)dS+\left(\frac{\partial V}{\partial\sigma}-\Delta_1\cdot\frac{\partial V_1}{\partial\sigma}\right)d\sigma.$$

Чтобы избавиться от стохастичности, в последнем выражении приравняем нулю коэффициенты, стоящие при $d\sigma, dS$. Получим так называемые хеджирующие соотношения:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}-\Delta_1\cdot\frac{\partial V_1}{\partial S}-\Delta\right)=0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial\sigma}-\Delta_1\cdot\frac{\partial V_1}{\partial\sigma}\right)=0.$$

Они позволяют обнулить риск, связанный с покупкой опционов страхования и опциона покупателя.

Окончательно,

$$d\Pi=\left(\frac{\partial V}{\partial t}-\Delta_1\cdot\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{\sigma^2S^2}{2}\left(\frac{\partial^2V}{\partial S^2}-\Delta_1\frac{\partial^2V_1}{\partial S^2}\right)+\rho\sigma qS\left(\frac{\partial^2V}{\partial\sigma\partial S}-\Delta_1\frac{\partial^2V_1}{\partial S\,\partial\sigma}\right)+\frac{q^2}{2}\left(\frac{\partial^2V}{\partial\sigma^2}-\Delta_1\frac{\partial^2V_1}{\partial\sigma^2}\right)\right)dt.$$

После применения хеджирующих соотношений портфель активов становится безрисковым. Поэтому за момент dt портфель стоимостью Π принесет доход в сумме

$$d\Pi=r\Pi\,dt,$$

где r – безрисковая процентная ставка.

Учитывая что $\Pi=V(S,t)-\Delta\cdot S-\Delta_1\cdot V_1$, имеем:

$$d\Pi=r(V(S,t)-\Delta\cdot S-\Delta_1\cdot V_1)dt.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}-\Delta_1\cdot\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{\sigma^2S^2}{2}\left(\frac{\partial^2V}{\partial S^2}-\Delta_1\frac{\partial^2V_1}{\partial S^2}\right)+\rho\sigma qS\left(\frac{\partial^2V}{\partial\sigma\partial S}-\Delta_1\frac{\partial^2V_1}{\partial S\,\partial\sigma}\right)+\frac{q^2}{2}\left(\frac{\partial^2V}{\partial\sigma^2}-\Delta_1\frac{\partial^2V_1}{\partial\sigma^2}\right)\right)dt=$$
$$=r(V(S,t)-\Delta\cdot S-\Delta_1\cdot V_1)dt.$$

Соберем слева все, что связано с V, а справа – все, что связано с V_1:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\sigma}\right)^{-1}\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2S^2}{2}\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+\rho\sigma qS\frac{\partial^2V}{\partial\sigma\partial S}+\frac{q^2}{2}\frac{\partial^2V}{\partial\sigma^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial V_1}{\partial\sigma}\right)^{-1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{\sigma^2S^2}{2}\frac{\partial^2V_1}{\partial S^2}+\rho\sigma qS\frac{\partial^2V_1}{\partial\sigma\partial S}+\frac{q^2}{2}\frac{\partial^2V_1}{\partial\sigma^2}+rS\frac{\partial V_1}{\partial S}-rV_1\right).$$

Так как опционы со справедливыми ценами V, V_1 имеют разные параметры (сроки исполнения, функции вознаграждения и т.п.), то обе части равенства должны быть независимы от типа контракта – т.е. они должны зависеть только от S, t, σ. Определим эту функцию как

$$-p+\lambda q, \tag{26a}$$

где λ – пока неизвестная функция, называемая рыночной ценой риска, p, q – фиксированные функции из уравнения $d\sigma=p(s,\sigma,t)dt+q(s,\sigma,t)dW_2$. Тогда

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\sigma}\right)^{-1}\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2S^2}{2}\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+\rho\sigma qS\frac{\partial^2V}{\partial\sigma\partial S}+\frac{q^2}{2}\frac{\partial^2V}{\partial\sigma^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV\right)=-p+\lambda q, \tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial\sigma}\right)^{-1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{\sigma^2S^2}{2}\frac{\partial^2V_1}{\partial S^2}+\rho\sigma qS\frac{\partial^2V_1}{\partial\sigma\partial S}+\frac{q^2}{2}\frac{\partial^2V_1}{\partial\sigma^2}+rS\frac{\partial V_1}{\partial S}-rV_1\right)=0.$$

Рассмотрим случай, когда не производится страхование риска покупки опционов. Таким образом, решим вопрос – выгодно ли проводить процедуру страхования, не является ли она излишней? Пусть портфель состоит из проданного опциона покупателя и обязательств на покупку Δ акций стоимостью S. Следовательно, стоимость портфеля составит

$$\Pi = V(S,\sigma,t) - \Delta \cdot S\,,$$

причем волатильность удовлетворяет уравнению

$$d\sigma = p(s,\sigma,t)d\,t + q(s,\sigma,t)dW_2\,.$$

По формуле Ито, примененной к $V(S,\sigma,t)$, получаем:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}d\,t + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial \sigma}d\sigma + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}d\sigma^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S}d\,\sigma\,dS\right) = \frac{\partial V}{\partial t}d\,t + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial \sigma}d\sigma +$$

$$+\frac{q^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}dt + \rho\sigma S q\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S}dt + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt\,.$$

Так как $d\Pi = dV(S,\sigma,t) - \Delta \cdot dS$, то

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma S q\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S} + \frac{q^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}\right)dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)dS + \frac{\partial V}{\partial\sigma}d\sigma\,.$$

Как обычно, проведем Δ – хеджирование по имеющейся у нас информации (не учитывая страхование волатильного риска). Тогда $\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) = 0$. Так как портфель становится «безрисковым», то $d\Pi = r\Pi\,dt$ или $d\Pi - r\Pi\,dt = 0$. Тогда

$$d\Pi - r(V - \Delta \cdot S)dt = 0\,.$$

Подставим в него найденное значение $d\Pi$ и учтем, что $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma S q\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S} + \frac{q^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}\right)dt - rVdt + rS\frac{\partial V}{\partial S}dt + \frac{\partial V}{\partial\sigma}d\sigma = 0\,.$$

Воспользуемся тем, что $d\sigma = p(s,\sigma,t)d\,t + q(s,\sigma,t)dW_2$. Заметим так же, что в соответствии с (26а – см выше) выражение при dt равно $(\lambda q - p)\frac{\partial V}{\partial\sigma}$. Тогда

$$d\Pi - r\Pi dt = q\frac{\partial V}{\partial\sigma}(\lambda dt + dW_2).$$

Это равенство означает, что на единицу изменения риска волатильности $\frac{\partial V}{\partial\sigma}dW_2$ должно приходиться λ единиц дополнительных страховых средств. Если же не проводить страхования, то $\lambda = 0$ и в этой формуле $d\Pi - r\Pi dt = q\frac{\partial V}{\partial\sigma}dW_2 \neq 0$, т.е. портфель будет содержать ненулевой незастрахованный риск.

Изменим в равенстве $\Pi = V(S,\sigma,t) - \Delta \cdot S$ параметр Δ на Δ_1, S – на V_1, что означает рассмотрение пакета из двух опционов. Тогда $\Pi = V - \Delta_1 \cdot V_1$. Повторяя выкладки, получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (\mu - \lambda\sigma)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0\,.$$

Добьемся того, чтобы $V = S$ была частным решением этого уравнения (тогда цена торгуемого актива совпадает со справедливой ценой опциона). Для этого подберем соответствующую функцию λ. Подставляя $V = S$ в него, имеем:

$$(\mu - \lambda\sigma)S - rS = 0\,,$$

откуда $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ – коэффициент Шарпа или мера рыночного риска.

Определив рыночную стоимость риска торговли активом, подставим его в исходное уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

т.е. учитывая риск λ, получаем обычное уравнение Блэка – Шоулса, рассмотренное в п.2.2.

Подводя итог, можно сказать, что волатильность является важнейшим параметром при торговле опционами. Ее трудно оценить, наблюдать или предугадать, т.к. зачастую она является стохастической функцией. Использование постоянной волатильности приводит к неверным результатам. Предполагая ее стохастичный характер, получаем систему уравнений (26). Для уменьшения рисков должны быть проведены мероприятия по выполнению хеджирующих соотношений $\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta\right) = 0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} - \Delta_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial \sigma}\right) = 0$. При отсутствии дополнительного страхования появляется систематический риск $q\frac{\partial V}{\partial \sigma}dW_2 \neq 0$, который не позволяет рассматривать портфель как безрисковый. Цена риска равна $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$, где μ – ожидаемый возврат средств (дрейф), r – безрисковая процентная ставка, σ – волатильность актива.

2.3.1. МОДЕЛЬ ПОСТОЯННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТИ ДИСПЕРСИИ (CEV)

Рассмотрим модель постоянной эластичности дисперсии (CEV-модель), являющуюся частным случаем модели стохастической волатильности (п.2.3) и учитывающую эффект «левереджинга», когда росту цен акций соответствует падение уровня волатильности. В отличие от классической модели Блэка-Шоулса, использующей в качестве генератора цен геометрическое броуновское движение и строящейся в предположении о постоянстве ожидаемой доходности акций μ и волатильности цен σ, CEV-модель позволяет лучше учесть случайность и изменчивость функции $\sigma=\sigma(S,t)$, наблюдаемую при торгах.

Модель CEV была предложена Коксом в 1975 г. Пусть S– цена базового актива в момент времени t, μ – его ожидаемая доходность, δ–волатильность, $0<\beta<2$ – некоторый коэффициент. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$dS = \mu S\,dt + \delta S^{\beta/2}\,dW,\ S_0 \text{ известно,}$$

которое при $\beta=0$ превращается в уравнение Орнштейна-Уленбека (процесс абсолютной диффузии), при $\beta=2$ – в геометрическое броуновское движение (процесс Ито), при $\beta=1$ – в модель Кокса-Росса (1976).

В общем случае CEV-модель не имеет явного аналитического решения и может быть разрешена относительно S только численно, например, с помощью формул Рунге-Кутты.

Пусть всюду далее $\nu = (2-\beta)^{-1}, \tau = T - t$ **и** $m = \exp(r(2-\beta)\tau)$**.**

Рассмотрим некоторые свойства модели. Пусть $\sigma = \delta S^{\beta/2-1}$ – локальная волатильность. Тогда по формуле обычного дифференцирования $d\sigma = \delta\left(\frac{\beta}{2} - 1\right)S^{\frac{\beta}{2}-2}dS$ и

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{\delta(\beta/2-1)S^{\beta/2-2}dS}{\delta S^{\beta/2-1}} = (\beta/2-1)\frac{dS}{S},$$

т.е. $\frac{d\sigma}{\sigma}\Big/\frac{dS}{S} = (\beta/2-1) = const$. Поэтому β можно назвать коэффициентом эластичности дисперсии.

Далее, к CEV-модели можно применить так называемое F –преобразование по формуле

$$F = \frac{S^{1-\beta/2}}{\delta(1-\beta/2)}.$$

По формуле Ито

$$dF = \frac{S^{-\beta/2}}{\delta}dS + \frac{1}{2\delta}\left(-\frac{\beta}{2}\right)S^{-1-\beta/2}(dS)^2,$$

где $(dS)^2 = \delta^2 S^\beta dt$.

Поэтому $dF = \frac{S^{-\beta/2}}{\delta}dS - \frac{\delta\beta}{4}S^{\beta/2-1}dt$.

Разделим исходное уравнение модели $dS = \mu S\,dt + \delta S^{\beta/2}dW$ на выражение, стоящее при дифференциале винеровского процесса, и заменим левую часть полученного уравнения на дифференциал от F:

$$\frac{dS}{\delta S^{\beta/2}} = \frac{\mu}{\delta}S^{1-\beta/2}\,dt + dW,$$

$$dF + \frac{\delta\beta}{4}S^{\beta/2-1}dt = \frac{\mu}{\delta}S^{1-\beta/2}\,dt + dW,$$

$$dF = \left(\frac{\mu S}{\delta S^{\beta/2}} - \frac{\delta\beta}{4S}S^{\beta/2}\right)dt + dW.$$

Вспоминая, что $S^{1-\beta/2} = F\delta(1-\beta/2)$ из замены переменного, получаем:

$$dF = \left(\mu F\left(1-\frac{\beta}{2}\right) - \frac{\beta}{4F(1-\beta/2)}\right)dt + dW,$$

или

$$dF = \left(\mu\alpha F - \frac{\beta}{4\alpha F}\right)dt + dW,$$

где $\alpha = (1-\beta/2)$. Так как $\beta = 2-2\alpha$, то

$$dF = \left(\mu\alpha F + \frac{\alpha-1}{2\alpha F}\right)dt + dW,$$

которое удобно для численного решения, например, с помощью биномиальных деревьев, так как локальная волатильность постоянна и равна единице. На практике часто нужно знать не цену базового актива S, а только цену деривативa на него, например, цену европейского опциона покупателя C. Известно [24], что она имеет вид:

$$C = S\,Q\left(2y;2+\frac{2}{2-\beta},2x\right) - Ee^{-r(T-t)}Q\left(2y;2-\frac{2}{2-\beta},2x\right) =$$

$$= S\,Q\left(2y;2+\frac{2}{2-\beta},2x\right) - Ee^{-r(T-t)}\left(1-Q\left(2x;\frac{2}{2-\beta},2y\right)\right),$$

где $x = kS^{2-\beta}\exp\left(r(2-\beta)(T-t)\right)$, $y = kE^{2-\beta}$, $k = \frac{2r}{\delta^2(2-\beta)\left[\exp\left(r(2-\beta)(T-t)\right)-1\right]}$,

$Q(2y;2\nu,2x)-$хвостовое нецентрированное χ^2-распределение с числом степеней свободы 2ν и параметром сдвига $2x$. Оно определяется следующей формулой:

$$Q(2y;\nu,2x) = \int_{2y}^{\infty}\frac{e^{-\frac{2x+u}{2}}}{2}\left(\frac{u}{2x}\right)^{\frac{\nu-2}{4}}I_{\frac{\nu-2}{2}}\left(\sqrt{2xu}\right)du = \sum_{n=1}^{\infty}g(n,x)G(n+\nu-1,y),$$

где $g(n,x)$ – плотность хвостового (дополнительного) Гамма-распределения, $g(n,x)=\frac{e^{-x}x^{n-1}}{\Gamma(n)}$, $\Gamma(n)$ – гамма-функция, $G(n+\nu-1,y)$ – хвостовое (дополнительное) Гамма-распределение, $G(n+\nu-1,y)=\int_y^\infty g(n+\nu-1,t)dt$, $I_q(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^q\sum_{j=0}^\infty\frac{(z^2/4)^j}{j!\Gamma(q+j+1)}$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка q.

При больших значениях параметров x, y функция $Q(2y;2\nu;2x)$, выраженная через $G(n+\nu-1,y)$ и $g(n,x)$, достаточно медленно сходится. Поэтому для вычисления $Q(2y;2\nu,2x)$ можно использовать аппроксимацию вида:

$$Q(2y;2\nu,2x)=\Phi(R),$$

где $R=\frac{1-hp\left(1-h+\left(1-\frac{h}{2}\right)mp\right)-\left(\frac{y}{\nu+x}\right)^h}{h\sqrt{2p(1+mp)}}$, $h=1-\frac{2}{3}\frac{(\nu+x)(\nu+3x)}{(\nu+2x)^2}$, $p=\frac{(\nu+2x)}{2(\nu+x)^2}$, $m=(h-1)(1-3h)$.

Цену опциона продавца легко найти из соотношения «call-put»:

$$P=S_0Q\left(2y;2+\frac{2}{2-\beta},2x\right)-Ee^{-r(T-t)}Q\left(2y;2-\frac{2}{2-\beta},2x\right)-S_0+Ee^{-rT}=$$

$$=-S_0\left(1-Q\left(2y;2+\frac{2}{2-\beta},2x\right)\right)+Ee^{-r(T-t)}\left(1-Q\left(2y;2-\frac{2}{2-\beta},2x\right)\right).$$

Известно свойство хвостового нецентрированного χ^2-распределения [24]:

$$Q(2y;2\nu,2x)=1-Q(2y;2\nu-2,2x).$$

Поэтому окончательно формула приобретает вид:

$$P=-S_0Q\left(2y;\frac{2}{2-\beta},2x\right)+Ee^{-r(T-t)}Q\left(2y;-\frac{2}{2-\beta},2x\right).$$

Или, наконец,

$$P=-S_0Q\left(2y;\frac{2}{2-\beta},2x\right)+Ee^{-r(T-t)}Q\left(2x;\frac{2}{2-\beta},2y\right).$$

Исследуем предельное поведение справедливой цены опциона покупателя, для чего найдем значения пределов справедливой цены при $\tau\to0$, $E\to\infty$, $r\to\infty$, $\sigma\to\infty$, $T\to\infty$.

1. $\tau\to0$.

$$\lim_{\tau\to0}C=S\lim_{\tau\to0}Q(2y;2+2\nu,2x)-E\lim_{\tau\to0}e^{-r\tau}(1-Q(2x;2\nu,2y)).$$

Очевидно, что $\lim_{\tau\to0}k=\lim_{\tau\to0}x=\lim_{\tau\to0}y=\infty$, где $x=kS^{2-\beta}\exp(r(2-\beta)\tau)$, $y=kE^{2-\beta}$, $k=\frac{2r}{\delta^2(2-\beta)[\exp(r(2-\beta)\tau)-1]}$. Вычислим предел каждого слагаемого.

Предел **Зальмежа**:

$$\lim_{\tau\to0}Q(2y;2+2\nu,2x).$$

Для нахождения предела найдем асимптотику функции $Q(2y;2+2\nu,2x)$ при $\tau\to0$ и сведем получаемый таким образом интеграл к функции стандартного нормального распределения. $Q(2y;2+2\nu,2x)=\int_{2y}^\infty\frac{e^{-\frac{2x+u}{2}}}{2}\left(\frac{u}{2x}\right)^{\frac{\nu}{2}}I_\nu\left(\sqrt{2xu}\right)du=$ (замена u=$2xt$, du=$2xdt$, новый нижний предел есть y/x, верхний – бесконечность) $= \frac{1}{2}\int_{y/x}^{\infty} e^{-\frac{2x(1+t)}{2}} \left(\frac{2xt}{2x}\right)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left(2x\sqrt{t}\right)2xdt =$

$= \int_{y/x}^{\infty} e^{-x(1+t)} t^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left(2x\sqrt{t}\right)xdt =$(замена $z=\sqrt{t}, t=z^2, dt=2zdz$, новый нижний предел $\sqrt{y/x}$, верхний - бесконечность) =

$\int_{y/x}^{\infty} e^{-x(1+t)} t^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left(2x\sqrt{t}\right)xdt = x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x\left(1+z^2\right)} z^{\nu} I_\nu(2xz)2zdz = 2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x\left(1+z^2\right)} z^{\nu+1} I_\nu(2xz)dz$.

Воспользуемся известной асимптотикой для бесселевой функции при $z \to \infty$:

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}},$$

Тогда $I \sim 2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x\left(1+z^2\right)} z^{\nu+1} \frac{e^{2xz}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2xz}}dz = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x-xz^2+2xz} z^{\nu+1/2}dz =$(сворачиваем полный квадрат в показателе экспоненты)$= \sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x(z-1)^2} z^{\nu+1/2}dz =$(замена $z=1+t, dz=dt$, новый нижний предел $\sqrt{y/x}-1$, верхний - бесконечность)$= \sqrt{\frac{x}{\pi}}\int\limits_{\sqrt{y/x}-1}^{\infty} e^{-xt^2}(1+t)^{\nu+1/2}dt =$(замена: $t=\frac{p}{\sqrt{2x}}, dp=\sqrt{2x}dt$, новый верхний предел – бесконечность, нижний $\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)$) =

$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}\left(1+\frac{p}{\sqrt{2x}}\right)^{\nu+1/2}dp = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}dp + O\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)$. Переходим к пределу в последнем выражении:

$$\lim_{\tau\to 0} Q(2y;2+2\nu,2x) = \lim_{\tau\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}dp\right) = \begin{cases} 0, \sqrt{y/x}-1>0 \\ 1, \sqrt{y/x}-1<0 \\ 1/2, \sqrt{y/x}-1=0 \end{cases}.$$

Нулевое значение предела получается потому, что $\sqrt{2x} \to \infty$ при $\tau \to 0$ и нижний предел интегрирования стремится к верхнему. Равенство предела единице следует из того, что $\sqrt{2x} \to \infty$ при $\tau \to 0$ и нижний предел интегрирования $\to -\infty$ (получается полный интеграл, равный единице). Наконец, $\lim\limits_{\tau\to 0} Q(2y;2+2\nu,2x) = \lim\limits_{\tau\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-p^2/2}dp\right) = \frac{1}{2}$, если $y=x$ до перехода к пределу $\tau \to 0$, что возможно только в момент исполнения τ=0, когда по условиям контракта *S*=*E*. Это невозможно, так как опцион в момент τ=0 не торгуется. Поэтому в дальнейшем случай *S*=*E* при $\tau \to 0$ нами будет опускаться.

Вычислим предел второго слагаемого.

$$\lim_{\tau\to 0} Ee^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right) = \lim_{\tau\to 0} Ee^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right).$$

Так как $Q(2x;2\nu,2y) = \int_{2x}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2y+u}{2}}}{2}\left(\frac{u}{2y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} I_{\nu-1}\left(\sqrt{2yu}\right)du$ =(замена *u*=2*yt*, *du*=2*ydt*, новый нижний предел *x*/*y*, верхний – бесконечность)= $y\int\limits_{x/y}^{\infty} e^{-y(1+t)} t^{\frac{\nu-1}{2}} I_{\nu-1}\left(2y\sqrt{t}\right)dt$ =(замена

$z=\sqrt{t}, t=z^2, dt=2zdz$, новый нижний предел $\sqrt{x/y}$, верхний - бесконечность) =

$=2y\int\limits_{\sqrt{x/y}}^{\infty} e^{-y\left(1+z^2\right)} z^{\nu} I_{\nu-1}(2yz)dz$, то используя асимптотическое поведение бесселевой функции на бесконечности $I_{\nu}(z)\sim\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}$, получаем:

$Q(2x;2\nu,2y)\sim 2y\int\limits_{\sqrt{x/y}}^{\infty} e^{-y\left(1+z^2\right)} z^{\nu}\frac{e^{2yz}}{\sqrt{4\pi yz}}dz=$(сворачиваем полный квадрат в показателе экспоненты)= $\sqrt{\frac{y}{\pi}}\int\limits_{\sqrt{x/y}}^{\infty} e^{-y(z-1)^2} z^{\nu-1/2}dz=$ (замена $z=1+t, dz=dt$, новый нижний предел $\sqrt{x/y}-1$, верхний – бесконечность) = $\sqrt{\frac{y}{\pi}}\int\limits_{\sqrt{x/y}-1}^{\infty} e^{-yt^2}(1+t)^{\nu-1/2}dt=$ (замена $t=\frac{p}{\sqrt{2y}}, dp=\sqrt{2y}dt$, новый верхний предел – бесконечность, нижний $\sqrt{2y}\left(\sqrt{x/y}-1\right)$)=

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2y}\left(\sqrt{x/y}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}\left(1+\frac{p}{\sqrt{2y}}\right)^{\nu-1/2}dp=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2y}\left(\sqrt{x/y}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}dp+O\left(\frac{1}{\sqrt{2y}}\right).$$

Переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{\tau\to 0} Ee^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)=E\lim_{\tau\to 0}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)=\begin{cases}0, \sqrt{x/y}-1<0\\ E, \sqrt{x/y}-1>0\end{cases}.$$

Собирая результаты, окончательно имеем:

$$\lim_{\tau\to 0} C=\begin{cases}0, if\ x<y\\ S, if\ x>y\end{cases}-\begin{cases}0, if\ x<y\\ E, if\ x>y\end{cases}=\begin{cases}0, S<E\\ (S-E), S>E\end{cases}.$$

Значения пределов полностью соответствуют поведению цены опциона покупателя в рамках модели Блэка-Шоулса.

2. $\sigma\to\infty$.

Вычислим

$$\lim_{\sigma\to\infty} C=S\lim_{\sigma\to\infty} Q(2y;2+2\nu,2x)-E\lim_{\sigma\to\infty} e^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right).$$

По построению CEV модели $\sigma^2=\delta^2 S^{\beta-2}, \beta<2.$ Поэтому очевидно, что $\sigma\to\infty$, когда $\delta\to\infty$. Тогда $\lim\limits_{\sigma\to\infty} k=\lim\limits_{\sigma\to\infty} x=\lim\limits_{\sigma\to\infty} y=0$.

Вычислим предел каждого слагаемого.

$$\lim_{\sigma\to\infty} Q(2y;2+2\nu;2x).$$

$Q(2y;2+2\nu;2x)=\int_{2y}^{\infty}\frac{e^{-\frac{2x+u}{2}}}{2}\left(\frac{u}{2x}\right)^{\frac{\nu}{2}} I_{\nu}\left(\sqrt{2xu}\right)du=$ (замена *u*=2*xt*, *du*=2*xdt*, новый нижний предел есть *y*/*x*, верхний – бесконечность) $=\frac{1}{2}\int_{y/x}^{\infty} e^{-\frac{2x(1+t)}{2}}\left(\frac{2xt}{2x}\right)^{\frac{\nu}{2}} I_{\nu}\left(2x\sqrt{t}\right)2xdt=$

$=\int_{y/x}^{\infty} e^{-x(1+t)} t^{\frac{\nu}{2}} I_{\nu}\left(2x\sqrt{t}\right)xdt=$(замена $z=\sqrt{t}, t=z^2, dt=2zdz$, новый нижний предел $\sqrt{y/x}$, верхний - бесконечность) =

$$\int_{y/x}^{\infty} e^{-x(1+t)} t^{\frac{\nu}{2}} I_{\nu}\left(2x\sqrt{t}\right)xdt=x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x\left(1+z^2\right)} z^{\nu} I_{\nu}(2xz)2zdz=2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x\left(1+z^2\right)} z^{\nu+1} I_{\nu}(2xz)dz.$$

Воспользуемся известным разложением бесселевой функции в ряд Маклорена при $z \to 0$:

$$I_\nu(2zx) \sim \frac{x^\nu z^\nu}{\Gamma(\nu+1)},$$

Тогда $I \sim 2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x(1+z^2)} z^{2\nu+1} \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)} dz = 2\frac{x^{\nu+1}e^{-x}}{\Gamma(\nu+1)}\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-xz^2} z^{2\nu+1}\, dz =$(замена: $z = \frac{p}{\sqrt{2x}}, dp = \sqrt{2x}dt$, новый верхний предел – бесконечность, нижний $\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}\right) = \sqrt{2y}$) $= 2\frac{x^{\nu+1}e^{-x}}{\Gamma(\nu+1)}\int_{\sqrt{2y}}^{\infty} e^{-p^2/2} \frac{p^{2\nu+1}}{(2x)^{\frac{2\nu+2}{2}}} dp = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)e^x}\int_{\sqrt{2y}}^{\infty} e^{-p^2/2} p^{2\nu+1} dp =$(замена: $t = \frac{p^2}{2}, dt = pdp$, новый верхний предел – бесконечность, нижний y)$= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)e^x}\int_y^\infty e^{-t}t^\nu dt$.

Переходим к пределу.

$S\lim_{\sigma\to\infty} Q(2y;2+2\nu,2x) = (\, x \to 0, y \to 0\,) = \frac{S}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty e^{-t}t^\nu dt =$(по определению гамма-функции)$= \frac{S}{\Gamma(\nu+1)}\Gamma(\nu+1) = S$.

Вычислим теперь предел второго слагаемого исходного выражения.

$$\lim_{\sigma\to\infty} Ee^{-r\tau}\left(1 - Q(2x;2\nu,2y)\right).$$

Так как $Q(2x;2\nu,2y) = \int_{2x}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2y+u}{2}}}{2}\left(\frac{u}{2y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} I_{\nu-1}\left(\sqrt{2yu}\right)du$ =(замена u=2yt, du=2ydt, новый нижний предел x/y, верхний – бесконечность)$= y\int_{x/y}^{\infty} e^{-y(1+t)} t^{\frac{\nu-1}{2}} I_{\nu-1}\left(2y\sqrt{t}\right)dt$ =(замена $z = \sqrt{t}, t = z^2, dt = 2zdz$, новый нижний предел $\sqrt{x/y}$, верхний - бесконечность) $= 2y\int_{\sqrt{x/y}}^{\infty} e^{-y(1+z^2)} z^\nu I_{\nu-1}(2yz)dz$, то пользуясь известным разложением бесселевой функции в ряд Маклорена при $z \to 0$,

$$I_\nu(2zx) \sim \frac{x^\nu z^\nu}{\Gamma(\nu+1)},$$

получаем

$Q(2x;2\nu,2y) \sim 2y\int_{\sqrt{x/y}}^{\infty} e^{-y(1+z^2)} z^\nu \frac{y^{\nu-1}z^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} dz = \frac{2y^\nu e^{-y}}{\Gamma(\nu)}\int_{\sqrt{x/y}}^{\infty} e^{-yz^2} z^{2\nu-1} dz$ =(замена $z = \frac{p}{\sqrt{2y}}$, $dp = \sqrt{2y}dz$, новый верхний предел – бесконечность, нижний $\sqrt{2x}$)$= \frac{2y^\nu e^{-y}}{\Gamma(\nu)}\int_{\sqrt{2x}}^{\infty} e^{-p^2/2} \frac{p^{2\nu-1}}{(2y)^\nu} dp = \frac{e^{-y}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\int_{\sqrt{2x}}^{\infty} e^{-p^2/2} p^{2\nu-2} pdp =$(замена: $t = \frac{p^2}{2}, dt = pdp$, новый верхний предел – бесконечность, нижний x)$= \frac{e^{-y}}{\Gamma(\nu)}\int_x^\infty e^{-t}t^{\nu-1}dt$.

Переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{\sigma\to\infty} Ee^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right) = Ee^{-r\tau}\lim_{\sigma\to\infty}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right) = Ee^{-r\tau}\left(1-\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1}dt\right) =$$

$$= Ee^{-r\tau}\left(1-\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu)}\right) = 0\,.$$

Собирая результаты, окончательно имеем:

$$\lim_{\sigma\to\infty} C = S\,.$$

3. $E\to\infty$.

Вычислим

$$\lim_{E\to\infty} C = S\lim_{E\to\infty} Q(2y;2+2\nu,2x) - \lim_{E\to\infty} Ee^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right).$$

Очевидно, что при $E\to\infty$ имеют место пределы $\lim\limits_{E\to\infty} k = k = \text{const}, \lim\limits_{E\to\infty} x = x = \text{const}, \lim\limits_{E\to\infty} y = \infty$.

Поэтому имеем:

$S\lim\limits_{E\to\infty} Q(2y;2+2\nu,2x) = \lim\limits_{E\to\infty} S\int_{2y}^\infty \frac{e^{-\frac{2x+u}{2}}}{2}\left(\frac{u}{2x}\right)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left(\sqrt{2xu}\right)du =$ (замена u=2xt, du=2xdt, новый нижний предел есть y/x, верхний – бесконечность) $= xS\lim\limits_{E\to\infty}\int_{y/x}^\infty e^{-x(1+t)}t^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left(2x\sqrt{t}\right)2xdt = 0$, так как нижний предел стремится к верхнему, а подынтегральное выражение не зависит от E.

Рассчитать вторую часть предела намного сложнее.

$Q(2x;2\nu,2y) =$ (как и раньше, производим последовательно замены u=2xt, $z=\sqrt{t}$)=

$$= 2y\int_{\sqrt{x/y}}^\infty e^{-y\left(1+z^2\right)} z^\nu I_{\nu-1}(2yz)dz\,.$$

Аргумент функции Бесселя стремится к бесконечности, поэтому используем асимптотику

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \text{ при } z\to\infty\,.$$

Тогда $Q(2x;2\nu,2y) \sim 2y\int\limits_{\sqrt{x/y}}^\infty e^{-y\left(1+z^2\right)} z^\nu \dfrac{e^{2yz}}{\sqrt{4\pi yz}}dz =$ (сворачиваем полный квадрат)$= \sqrt{\dfrac{y}{\pi}}\int\limits_{\sqrt{x/y}}^\infty e^{-y(z-1)^2} z^{\nu-1/2}dz =$ (замена $z=1+t$, новый нижний предел $\sqrt{x/y}-1$, верхний – бесконечность) $= \sqrt{\dfrac{y}{\pi}}\int\limits_{\sqrt{x/y}-1}^\infty e^{-yt^2}(1+t)^{\nu-1/2}dt =$ (замена $t=\dfrac{p}{\sqrt{2y}}$, $\sqrt{2y}\left(\sqrt{x/y}-1\right) = \sqrt{2x}-\sqrt{2y}$)=

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}}^\infty e^{-p^2/2}\left(1+\frac{p}{\sqrt{2y}}\right)^{\nu-1/2}dp = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}}^\infty e^{-p^2/2}dp + O\left(\frac{1}{\sqrt{2y}}\right).$$

Поэтому $\lim\limits_{E\to\infty} Ee^{-r\tau}\left(1-Q(2y;2\nu,2x)\right)=\lim\limits_{E\to\infty} Ee^{-r\tau}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}}^{\infty} e^{-p^2/2}dp\right)$=(в пределе добавим и вычтем интеграл $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}} e^{-p^2/2}dp$)$=\lim\limits_{E\to\infty} Ee^{-r\tau}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2/2}dp+\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}} e^{-p^2/2}dp\right)=$

$=\lim\limits_{E\to\infty} Ee^{-r\tau}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}} e^{-p^2/2}dp$.

Известна асимптотика поведения функции распределения стандартной нормальной случайной величины при $y\to-\infty$:

$$\Phi(y)\sim-\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}y}.$$

Тогда $\lim\limits_{E\to\infty} Ee^{-r\tau}\Phi\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2y}\right)=-\lim\limits_{E\to\infty} Ee^{-r\tau}\frac{e^{-\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2y}\right)^2/2}}{\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2y}\right)}=0$, так как экспонента подавляет рост полинома любой конечной степени.

Окончательно,

$$\lim_{E\to\infty} C=0.$$

4. $r\to\infty$

Исследуем интересную зависимость справедливой цены опциона от роста безрисковой процентной ставки.

$$\lim_{r\to\infty} C=S\lim_{r\to\infty} Q(2y;2+2\nu,2x)-\lim_{r\to\infty} Ee^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right).$$

Очевидно, что при $r\to\infty$ $\lim\limits_{r\to\infty} k=0, \lim\limits_{r\to\infty} x=\infty, \lim\limits_{r\to\infty} y=0$. Как и ранее,

$Q(2y;2+2\nu,2x)=$(замены u=$2xt$, $z=\sqrt{t}$) $=2x\int\limits_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x\left(1+z^2\right)}z^{\nu+1}I_\nu(2xz)dz$. Аргумент функции Бесселя стремится к бесконечности, поэтому используем асимптотику $I_\nu(z)\sim\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}$ при $z\to\infty$. Имеем:

$Q(2y;2+2\nu,2x)\sim 2x\int\limits_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x\left(1+z^2\right)}z^{\nu+1}\frac{e^{2xz}}{\sqrt{4\pi xz}}dz=$(сворачиваем полный квадрат)$=$

$=\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int\limits_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x(z-1)^2}z^{\nu+1/2}dz=$(замена $z=1+t$, новый нижний предел $\sqrt{y/x}-1$, верхний – бесконечность) $=\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int\limits_{\sqrt{y/x}-1}^{\infty} e^{-xt^2}(1+t)^{\nu+1/2}dt=$ (замена $t=\frac{p}{\sqrt{2x}}$, $\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)=\sqrt{2y}-\sqrt{2x}$)=

$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2y}-\sqrt{2x}}^{\infty} e^{-p^2/2}\left(1+\frac{p}{\sqrt{2x}}\right)^{\nu+1/2}dp=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2y}-\sqrt{2x}}^{\infty} e^{-p^2/2}dp+O\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)$. Тогда

$$S\lim_{r\to\infty} Q(2y;2+2\nu,2x)=S\lim_{r\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2y}-\sqrt{2x}}^{\infty} e^{-p^2/2}dp=S\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2/2}dp=S.$$

Вычислим предел второго слагаемого. Преобразуем функцию.

$Q(2x;2\nu,2y)=$ (производим последовательно замены u=2xt, $z=\sqrt{t}$)=
$=2y\int\limits_{\sqrt{x/y}}^{\infty}e^{-y\left(1+z^2\right)}z^{\nu}I_{\nu-1}(2yz)dz$. Так как аргумент бесселевой функции стремится к нулю, используем первый член разложения вряд Маклорена

$$I_{\nu-1}(2zy)\sim\frac{y^{\nu-1}z^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}.$$

Тогда $Q(2x;2\nu,2y)\sim\frac{2y^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\int\limits_{\sqrt{x/y}}^{\infty}e^{-y\left(1+z^2\right)}z^{2\nu-1}dz=$ (замена $z=\frac{p}{\sqrt{2y}}$, новый предел $\sqrt{2y}\sqrt{x/y}=\sqrt{2x}$)= $=\frac{2y^{\nu}e^{-y}}{\Gamma(\nu)}\int\limits_{\sqrt{2x}}^{\infty}e^{-p^2/2}\frac{p^{2\nu-1}}{2^{\frac{2\nu-1}{2}}y^{\frac{2\nu-1}{2}}\sqrt{2y}}dp=\frac{e^{-y}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\int\limits_{\sqrt{2x}}^{\infty}e^{-p^2/2}p^{2\nu-1}dp$.

Переходим к пределу:

$\lim\limits_{r\to\infty}Ee^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)=\lim\limits_{r\to\infty}Ee^{-r\tau}\left(1-\frac{e^{-y}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\int\limits_{\sqrt{2x}}^{\infty}e^{-p^2/2}p^{2\nu-1}dp\right)=0$, так как нижний предел интеграла стремится к верхнему и интеграл стремится к нулю, а $e^{-r\tau}\to 0$, $e^{-y}\to 1$.
Окончательно,

$$\lim_{r\to\infty}C=S,$$

что соответстует поведению формулы Блэка-Шоулса.

5. $T\to\infty$.

Очевидно, что $\lim\limits_{T\to\infty}k=0,\lim\limits_{T\to\infty}x=C,\lim\limits_{T\to\infty}y=0$, где C – некоторая константа, не зависящая от T.
$Q(2y;2+2\nu,2x)=2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty}e^{-x\left(1+z^2\right)}z^{\nu+1}I_{\nu}(2xz)dz\to 2C\int_0^{\infty}e^{-C\left(1+z^2\right)}z^{\nu+1}I_{\nu}(2Cz)dz$ =(замена $z=\sqrt{t}$)=
$=Ce^{-C}\int_0^{\infty}e^{-Ct}t^{\nu/2}I_{\nu}\left(2C\sqrt{t}\right)dt$. Последний интеграл является преобразованием Лапласа для функции $t^{\nu/2}I_{\nu}\left(2C\sqrt{t}\right)$ и равен[1] e^{C}/C. Поэтому $Q(2y;2+2\nu,2x)\to 1$ и $S\lim\limits_{T\to\infty}Q(2y;2+2\nu,2x)=S$.

Для нахождения $-\lim\limits_{T\to\infty}Ee^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)$ заметим, что

$Q(2x;2\nu,2y)=$(замены u=2yt, $z=\sqrt{t}$)$=2y\int\limits_{\sqrt{x/y}}^{\infty}e^{-y\left(1+z^2\right)}z^{\nu}I_{\nu-1}(2yz)dz\sim\frac{2y^{\nu}e^{-y}}{\Gamma(\nu)}\int\limits_{\sqrt{x/y}}^{\infty}e^{-yz^2}z^{2\nu-1}dz=$
=(замена $z=\frac{p}{\sqrt{2y}}$)$=\frac{e^{-y}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\int\limits_{\sqrt{2x}}^{\infty}e^{-p^2/2}p^{2\nu-1}dp\to\frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\int\limits_{\sqrt{2C}}^{\infty}e^{-p^2/2}p^{2\nu-1}dp=\text{const}$.

Поэтому

$$-\lim_{T\to\infty}Ee^{-r(T-t)}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)=0,$$

так как $e^{-r(T-t)}\to 0$.
Окончательно,

$$\lim_{T\to\infty}C=S.$$

Вычислим значения некоторых **«греческих»** коэффициентов для опциона покупателя в рамках CEV модели [25].

[1] Bateman H. (1954) Table of Integral Transforms. Vol. I. McGraw-Hill Book Company, New York, p. 197, f. (18).

1. Вычислим Δ_C.

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial Q(2y;2+2\nu,2x)}{\partial S}=\frac{\partial(2x)}{\partial S}p(2y;4+2\nu,2x)=\frac{2x(2-\beta)}{S}p(2y;4+2\nu,2x),$$

$$\frac{\partial Q(2x;2\nu,2y)}{\partial S}=-\frac{\partial(2x)}{\partial S}p(2x;2\nu,2y)=-\frac{2x(2-\beta)}{S}p(2x;2\nu,2y),$$

где $p(2y;2\nu+4,2x)=\frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}I_{\nu+1}\left(\sqrt{4xy}\right)$, $p(2x;2\nu;2y)=\frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}\left(\sqrt{4xy}\right)$, функция $I_q(z)$ определена выше.

Окончательно,

$$\Delta_C=Q(2y;2+2\nu,2x)+2x(2-\beta)p(2y;4+2\nu,2x)-\frac{2x(2-\beta)}{S}Ee^{-r(T-t)}p(2x;2\nu,2y).$$

Аналогично, используя соотношение «call-put» для опциона продавца получаем:

$$\Delta_P=Q(2y;2+2\nu,2x)-1+2x(2-\beta)p(2y;4+2\nu,2x)-\frac{2x(2-\beta)}{S}Ee^{-r(T-t)}p(2x;2\nu,2y),$$

т.е. $\Delta_P=\Delta_C-1$.

2. Вычислим Г. Для вычисления второй производной по S учтем, что $\frac{\partial p(y;\nu,x)}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(p(y;\nu+2,x)-p(y;\nu,x)\right)$, $\frac{\partial p(y;\nu,x)}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(p(y;\nu-2,x)-p(y;\nu,x)\right)$. Кроме того, формула интегрирования по частям позволяет записать следующее соотношение:

$$p(y;\nu-2,x)=\frac{x}{y}p(y;\nu+2,x)+\frac{\nu-2}{y}p(y;\nu,x).$$

Тогда

$$\Gamma_C=\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}=\Gamma_P=\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}=\frac{2x(2-\beta)^2}{S}\left(\frac{3-\beta}{2-\beta}-x\right)p(2y;4+2\nu,2x)+\frac{2x^2(2-\beta)^2}{S}p(2y;6+2\nu,2x)+$$
$$+\frac{2x^2(2-\beta)^2}{S^2}Ee^{-r(T-t)}p(2x;2\nu,2y)-\frac{2xy(2-\beta)^2}{S^2}Ee^{-r(T-t)}p(2x;2+2\nu,2y).$$

3. Приведем без доказательства выражения для Θ.

$$\Theta_C=\frac{\partial C}{\partial t}=-\frac{\partial C}{\partial \tau}=-Ere^{-r(T-t)}Q(2y;2-2\nu,2x)+\frac{2rx(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)(T-t)}-1}\big(Sp(2y;4+2\nu,2x)-$$
$$-Ee^{-r(T-t)}p(2x;2\nu,2y)\big).$$

$$\Theta_P=\frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{\partial P}{\partial \tau}=Ere^{-r(T-t)}Q(2x;2\nu,2y)+\frac{2rx(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)(T-t)}-1}\left(Sp(2y;4+2\nu,2x)-Ee^{-r(T-t)}p(2x;2\nu,2y)\right).$$

4. Приведем без доказательства выражение для Vega (одинаковое для опционов покупателя и продавца).

$$Vega_C=\frac{\partial C}{\partial \sigma}=Vega_P=\frac{\partial P}{\partial \sigma}=\frac{-4x}{\sigma_0}\left(Sp(2y;4+2\nu,2x)-Ee^{-r(T-t)}p(2x;2\nu,2y)\right).$$

5. Приведем без доказательства выражение для ρ.

$$\rho_C=\frac{\partial C}{\partial r}=E\tau e^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)+2x\left(\frac{1}{r}-\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\right)\left(Sp(2y;4+2\nu,2x)-Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)\right),$$

$$\rho_P=\frac{\partial C}{\partial r}=-E\tau e^{-r\tau}Q(2x;2\nu,2y)+2x\left(\frac{1}{r}-\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\right)\left(Sp(2y;4+2\nu,2x)-Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)\right).$$

Исследуем поведение «греческих» коэффициентов, вычислив некоторые предельные соотношения.

1. $\lim\limits_{\tau\to 0}\Delta_C = \begin{cases}1, S>E\\ 0, S<E\end{cases}$.

Действительно,

$$\lim_{\tau\to 0}\Delta_C = \lim_{\tau\to 0} Q(2y;2+2\nu,2x) + \lim_{\tau\to 0} 2x(2-\beta)p(2y;4+2\nu,2x) - \lim_{\tau\to 0}\frac{2x(2-\beta)}{S}Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y).$$

Очевидно, что $\lim\limits_{\tau\to 0} k = \lim\limits_{\tau\to 0} x = \lim\limits_{\tau\to 0} y = \infty$. Вычислим предел каждого из трех слагаемых.

Найдем первый предел (см. предел ***Зальмежа*** выше):

$$\lim_{\tau\to 0} Q(2y;2+2\nu,2x).$$

$Q(2y;2+2\nu,2x) = \int_{2y}^{\infty}\frac{e^{-\frac{2x+u}{2}}}{2}\left(\frac{u}{2x}\right)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left(\sqrt{2xu}\right)du$ =(как и раньше, замена u=2xt, du=2xdx, потом замена $z=\sqrt{t}, t=z^2, dt=2zdz$)=

$$=\int_{y/x}^{\infty} e^{-x(1+t)} t^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left(2x\sqrt{t}\right)xdt = x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x\left(1+z^2\right)} z^{\nu} I_\nu(2xz)2zdz = 2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x\left(1+z^2\right)} z^{\nu+1} I_\nu(2xz)dz .$$

Так как аргумент подынтегральной функции при $\tau\to 0$ стремится к бесконечности, используем асимптотику поведения модифицированной бесселевой функции на бесконечности:

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} .$$

Тогда $I \sim 2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x\left(1+z^2\right)} z^{\nu+1}\frac{e^{2xz}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2xz}}dz = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x-xz^2+2xz} z^{\nu+1/2}dz$ = (сворачиваем полный квадрат в показателе экспоненты)= $\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x(z-1)^2} z^{\nu+1/2}dz =$ (замена $z=1+t, dz=dt$, новый нижний предел $\sqrt{y/x}-1$, новый верхний - бесконечность)= $\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int\limits_{\sqrt{y/x}-1}^{\infty} e^{-xt^2}(1+t)^{\nu+1/2}dt =$ (замена $t=\frac{p}{\sqrt{2x}}, dp=\sqrt{2x}dt$, новый верхний предел – бесконечность, нижний $\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)$) = $=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}\left(1+\frac{p}{\sqrt{2x}}\right)^{\nu+1/2}dp = = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}dp + O\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)$. Переходим к пределу в последнем выражении:

$$\lim_{\tau\to 0} Q(2y;2+2\nu,2x) = \lim_{\tau\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}dp\right) = \begin{cases}0, \sqrt{y/x}-1>0\\ 1, \sqrt{y/x}-1<0\end{cases}.$$

Равенство предела нулю следует из того, что $\sqrt{2x}\to\infty$ при $\tau\to 0$ и нижний предел интегрирования стремится к верхнему. Равенство предела единице следует из того, что $\sqrt{2x}\to\infty$ при $\tau\to 0$ и нижний предел интегрирования $\to -\infty$ (получается полный интеграл, равный единице).

Вычислим теперь предел $\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{-2x(2-\beta)}{S}Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)$ (третье слагаемое исходного выражения).

Асимптотически $p(2x;2\nu,2y)=\frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}\left(\sqrt{4xy}\right)\sim e^{-x}e^{-y}e^{2\sqrt{x}\sqrt{y}}C\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}$, где C – некоторая постоянная, не зависящая от τ. Выделяем полный квадрат:

$$p(2x;2\nu;2y)=\frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}\left(\sqrt{4xy}\right)\sim e^{-x}e^{-y}e^{2\sqrt{x}\sqrt{y}}C\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}\sim\frac{C}{\sqrt[4]{xy}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\sim\frac{C}{e^{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\sqrt[4]{xy}}\sim$$

(расписываем x, y и выносим сомножитель k за скобки)

$$\sim\frac{C}{e^{k\left(\sqrt{mS^{2-\beta}}-\sqrt{E^{2-\beta}}\right)^2}\sqrt[4]{xy}},$$

где m определена выше.

Следовательно, предел третьего слагаемого есть

$$\lim_{\tau\to0}\frac{2x(2-\beta)}{S}Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)=\frac{2E(2-\beta)}{S}\lim_{\tau\to0}xp(2x;2\nu,2y)=\frac{2E(2-\beta)}{S}\lim_{\tau\to0}\frac{Cx}{e^{k\left(\sqrt{mS^{2-\beta}}-\sqrt{E^{2-\beta}}\right)^2}\sqrt[4]{xy}}.$$

При $S\neq E$ экспонента знаменателя подавляет первую степень полинома по k числителя и предел равен нулю:

$$\lim_{\tau\to0}\frac{2x(2-\beta)}{S}Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)=0.$$

Вычислим $\lim_{\tau\to0}2x(2-\beta)p(2y;4+2\nu,2x)$, стоящий во втором слагаемом. Заметим, что

$$p(2y;4+2\nu,2x)\sim e^{-x}e^{-y}e^{2\sqrt{x}\sqrt{y}}C_1\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}\sim\frac{C_1}{\sqrt[4]{xy}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\sim\frac{C_1}{e^{k\left(\sqrt{mS^{2-\beta}}-\sqrt{E^{2-\beta}}\right)^2}\sqrt[4]{xy}},$$

где C_1 – константа, не зависящая от τ. Значит, при $S\neq E$

$$\lim_{\tau\to0}2x(2-\beta)p(2y;4+2\nu,2x)=2(2-\beta)\lim_{\tau\to0}\frac{C_1x}{e^{k\left(\sqrt{mS^{2-\beta}}-\sqrt{E^{2-\beta}}\right)^2}\sqrt[4]{xy}}=0.$$

Окончательно, $\lim_{\tau\to0}\Delta_C=\begin{cases}1, S>E\\0, S<E\end{cases}$.

2. $E\to\infty$.

Очевидно, что $\lim_{E\to\infty}k=k=\mathrm{const}, \lim_{E\to\infty}x=x=\mathrm{const}, \lim_{E\to\infty}y=\infty$. Тогда после замен u=2xt и $z=\sqrt{t}$ имеем:

$$Q(2y;2+2\nu,2x)=2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty}e^{-x\left(1+z^2\right)}z^{\nu+1}I_\nu(2xz)dz\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{\sqrt{2y}-\sqrt{2x}}^{\infty}e^{-p^2/2}dp\to0,$$

так как нижний предел стремится к верхнему. Далее,

$$p(2y;4+2\nu,2x)=\frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}I_{\nu+1}\left(\sqrt{4xy}\right)\sim\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}}{\sqrt[4]{xy}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}\to0,$$

$$p(2x;2\nu,2y)\sim\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}}{\sqrt[4]{xy}}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu}{2}}\to0.$$

Сомножители, стоящие при функции плотности $p(2y;4+2\nu,2x)$ во втором слагаемом выражения для Δ_C, не зависят от E. Оно стремится к нулю:

$$\lim_{E\to\infty}2x(2-\beta)p(2y;4+2\nu,2x)=0.$$

Наконец,

$$-\lim_{E\to\infty}\frac{2x(2-\beta)}{S}Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)=-\lim_{E\to\infty}\frac{x(2-\beta)}{2\sqrt{\pi}S}Ee^{-r\tau}\frac{e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}}{\sqrt[4]{xy}}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu}{2}}=0\,.$$

Окончательно, $\lim\limits_{E\to\infty}\Delta_C=0$.

3. $r\to\infty$.

Очевидно, что $\lim\limits_{r\to\infty}k=0,\lim\limits_{r\to\infty}x=\infty,\lim\limits_{r\to\infty}y=0$. Тогда, делая стандартные замены переменного u=2xt и $z=\sqrt{t}$, имеем:

$$Q(2y;2+2\nu,2x)=2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty}e^{-x\left(1+z^2\right)}z^{\nu+1}I_\nu(2xz)dz\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2y}-\sqrt{2x}}^{\infty}e^{-p^2/2}dp\to1\,.$$

Далее, пользуясь первым членом разложения в ряд Маклорена для модифицированной функции Бесселя, получаем нулевые значения пределов для плотностей:

$$p(2y;4+2\nu,2x)=\frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}I_{\nu+1}\left(\sqrt{4xy}\right)\sim\frac{1}{2}\frac{e^{-x-y}}{\Gamma(\nu+2)}y^{\nu+1}\to0\,,$$

$$p(2x;2\nu,2y)\sim\frac{1}{2}\frac{e^{-x-y}}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}\to0\,.$$

Значит,

$$\lim_{r\to\infty}2x(2-\beta)p(2y;4+2\nu,2x)=\lim_{r\to\infty}x(2-\beta)\frac{e^{-x-y}}{\Gamma(\nu+2)}y^{\nu+1}=0\,,$$

$$-\lim_{r\to\infty}\frac{2x(2-\beta)}{S}Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)=-\lim_{r\to\infty}\frac{(2-\beta)}{S}Ee^{-r\tau}\frac{e^{-x-y}}{\Gamma(\nu)}x^{\nu}=0\,.$$

Окончательно,

$$\lim_{r\to\infty}\Delta_C=1\,.$$

4. $\sigma\to\infty$.

Очевидно, что $\lim\limits_{\sigma\to\infty}k=0,\lim\limits_{\sigma\to\infty}x=0,\lim\limits_{\sigma\to\infty}y=0$. Тогда наблюдается такое же асимптотическое поведение функций плотности, как и в случае $r\to\infty$. Поэтому

$$p(2y;4+2\nu,2x)\sim\frac{1}{2}\frac{e^{-x-y}}{\Gamma(\nu+2)}y^{\nu+1}\to0\,,$$

$$p(2x;2\nu,2y)\sim\frac{1}{2}\frac{e^{-x-y}}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}\to0\,.$$

В то же время,

$$Q(2y;2+2\nu,2x)=2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty}e^{-x\left(1+z^2\right)}z^{\nu+1}I_\nu(2xz)dz\sim2\frac{x^{\nu+1}e^{-x}}{\Gamma(\nu+1)}\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty}e^{-xz^2}z^{2\nu+1}dz=$$

$$=\text{(замены } z=\frac{p}{\sqrt{2x}},t=\frac{p^2}{2}\text{)}=\frac{e^{-x}}{\Gamma(\nu+1)}\int_{y}^{\infty}e^{-t}t^{\nu}dt\to\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}=1\,.$$

Окончательно,

$$\lim_{\sigma\to\infty}\Delta_C=1\,.$$

5. $T\to\infty$

Очевидно, что $\lim_{T\to\infty} k=0, \lim_{T\to\infty} x=C, \lim_{T\to\infty} y=0$, где C – некоторая константа, не зависящая от T. Так как $\lim_{T\to\infty} xy=0$, то асимптотическое поведение модифицированной функции Бесселя будет таким же, как и в случае $\sigma\to\infty$:

$$p(2y;4+2\nu,2x)\sim\frac{1}{2}\frac{e^{-x-y}}{\Gamma(\nu+2)}y^{\nu+1}\to 0,$$

$$p(2x;2\nu,2y)\sim\frac{1}{2}\frac{e^{-x-y}}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}\to \mathrm{const}.$$

Поэтому

$$\lim_{T\to\infty} 2x(2-\beta)p(2y;4+2\nu,2x)=0,$$

$$-\lim_{T\to\infty}\frac{2x(2-\beta)}{S}Ee^{-r(T-t)}p(2x;2\nu,2y)=0.$$

Далее,

$Q(2y;2+2\nu,2x)=2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x(1+z^2)}z^{\nu+1}I_\nu(2xz)dz \to 2C\int_0^\infty e^{-C(1+z^2)}z^{\nu+1}I_\nu(2Cz)dz$ =(замена $z=\sqrt{t}$)= $=Ce^{-C}\int_0^\infty e^{-Ct}t^{\nu/2}I_\nu\left(2C\sqrt{t}\right)dt$. Последний интеграл является преобразованием Лапласа для функции $t^{\nu/2}I_\nu\left(2C\sqrt{t}\right)$ и равен[2] e^C/C. Поэтому $Q(2y;2+2\nu,2x)\to 1$.

Окончательно, $\lim_{T\to\infty}\Delta_C=1$.

Далее исследуем поведение коэффициента

$$\Theta_C=-Ere^{-r(T-t)}Q(2y;2-2\nu,2x)+\frac{2rx(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)(T-t)}-1}\left(Sp(2y;4+2\nu,2x)-Ee^{-r(T-t)}p(2x;2\nu,2y)\right)$$

при $\tau\to 0$, $E\to\infty$, $r\to\infty$, $\sigma\to\infty$, $T\to\infty$.

6. $\tau\to 0$.

Очевидно, что $\lim_{\tau\to 0} k=\lim_{\tau\to 0} x=\lim_{\tau\to 0} y=\infty$. Вычислим предел каждого из трех слагаемых в Θ_C. Найдем сначала $-\lim_{\tau\to 0} Ere^{-r\tau}Q(2y;2-2\nu,2x)$. Так как

$Q(2y;2-2\nu;2x)=1-Q(2x;2\nu;2y)=1-\int_{2x}^{\infty}\frac{e^{-\frac{2y+u}{2}}}{2}\left(\frac{u}{2y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}\left(\sqrt{2yu}\right)du$ =(замены u=2yt, $z=\sqrt{t}$)

$$=2y\int_{\sqrt{x/y}}^{\infty} e^{-y(1+z^2)}z^\nu I_{\nu-1}(2yz)dz.$$

Так как аргумент подынтегральной функции при $\tau\to 0$ стремится к бесконечности, используем асимптотику поведения модифицированной бесселевой функции на бесконечности:

$$I_{\nu-1}(2yz)\sim\frac{e^{2yz}}{\sqrt{4\pi yz}}.$$

$Q(2x;2\nu,2y)\sim 2y\int_{\sqrt{x/y}}^{\infty} e^{-y(1+z^2)}z^\nu\frac{e^{2yz}}{\sqrt{4\pi yz}}dz$ =(сворачиваем полный квадрат в показателе экспоненты)= $\sqrt{\frac{y}{\pi}}\int_{\sqrt{x/y}}^{\infty} e^{-y(z-1)^2}z^{\nu-1/2}dz$ = (замена $z=1+t$) = $\sqrt{\frac{y}{\pi}}\int_{\sqrt{x/y}-1}^{\infty} e^{-yt^2}(1+t)^{\nu-1/2}dt$ = (замена

[2] Bateman H. (1954) Table of Integral Transforms. Vol. I. McGraw-Hill Book Company, New York, p. 197, f. (18).

$$t=\frac{p}{\sqrt{2y}})=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2y}\sqrt{x/y}-1}^{\infty}e^{-p^2/2}\left(1+\frac{p}{\sqrt{2y}}\right)^{\nu-1/2}dp=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2y}\sqrt{x/y}-1}^{\infty}e^{-p^2/2}dp+O\left(\frac{1}{\sqrt{2y}}\right).$$

Переходя к пределу, получаем:

$$-\lim_{\tau\to 0}Ere^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)=-Er\begin{cases}0, S<E\\ 1, S>E\end{cases}.$$

Вычислим второй предел

$$\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{2rSx(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}p(2y;4+2\nu,2x)\right).$$

Заметим, что при $\tau\to 0$

$$p(2y;4+2\nu,2x)\sim e^{-x}e^{-y}e^{2\sqrt{x}\sqrt{y}}C\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}\sim\frac{C}{\sqrt[4]{xy}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\sim\frac{C}{e^{k\left(\sqrt{mS^{2-\beta}}-\sqrt{E^{2-\beta}}\right)^2}\sqrt[4]{xy}},$$

где m определена выше, C – константа, не зависящая от τ. В то же время, нетрудно показать, что

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{2rSx(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}=\lim_{\tau\to 0}\frac{2rSx(2-\beta)}{m-1}=\infty.$$

Тем не менее,

$$\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{2rSx(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}p(2y;4+2\nu,2x)\right)=\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{2rSx(2-\beta)}{m-1}p(2y;4+2\nu,2x)\right)=0.$$

Для вычисления третьей части предела воспользуемся тем, что $p(2x;2\nu,2y)\sim p(2y;4+2\nu,2x)$ при $\tau\to 0$. Тогда

$$\lim_{\tau\to 0}\left(-\frac{2rSEe^{-r\tau}x(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}p(2x;2\nu,2y)\right)=\lim_{\tau\to 0}\left(-\frac{2rSEe^{-r\tau}x(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}p(2y;4+2\nu,2x)\right)=0.$$

Собирая три слагаемых вместе, окончательно получаем:

$$\lim_{\tau\to 0}\Theta_C=-Er\begin{cases}0, S<E\\ 1, S>E\end{cases},$$

что полностью свопадает с классическим случаем модели Блэка-Шоулса.

7. $E\to\infty$.

Очевидно, что $\lim\limits_{E\to\infty}k=k=\text{const}, \lim\limits_{E\to\infty}x=x=\text{const}, \lim\limits_{E\to\infty}y=\infty$. Вычислим предел каждого из трех слагаемых в Θ_C. По аналогии со случаем $\tau\to 0$, имеем:

$$Q(2x;2\nu,2y)\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2y}\sqrt{x/y}-1}^{\infty}e^{-p^2/2}dp+O\left(\frac{1}{\sqrt{2y}}\right).$$

Тогда

$$-\lim_{E\to\infty}Ere^{-r\tau}Q(2y;2-2\nu,2x)=-\lim_{E\to\infty}Ere^{-r\tau}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2y}\sqrt{x/y}-1}^{\infty}e^{-p^2/2}dp\right)=$$

$$=-\lim_{E\to\infty}Ere^{-r\tau}\left(1-1+\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}}e^{-p^2/2}dp\right).$$

Асимптотически $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}}e^{-p^2/2}dp\sim-\frac{e^{-\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2y}\right)^2/2}}{\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2y}\right)}$ при $E\to\infty$, т.е.

$$-\lim_{E\to\infty} Ere^{-r\tau}\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}} e^{-p^2/2}dp\right) = re^{-r\tau}\lim_{E\to\infty} E\,\frac{e^{-\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2y}\right)^2/2}}{\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2y}\right)} = 0,$$

так как экспонента убывает быстрее, чем возрастает полином любой конечной степени.

Вычислим второй предел

$$\lim_{E\to\infty}\left(\frac{2rSx(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\,p(2y;4+2\nu,2x)\right),$$

в котором первый сомножитель не зависит от E. Тогда

$$p(2y;4+2\nu,2x) = \frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} I_{\nu+1}\left(\sqrt{4xy}\right) \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2} x^{-\frac{\nu+1}{2}-1/4}\, y^{\frac{\nu+1}{2}-1/4} \to 0 \text{ при } E\to\infty,$$

так как экспонента убывает быстрее, чем возрастает полином любой конечной степени.

Поэтому

$$\lim_{E\to\infty}\left(\frac{2rSx(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\,p(2y;4+2\nu,2x)\right) = 0.$$

Вычислим последний предел

$$\lim_{E\to\infty}\left(-\frac{2rSEe^{-r\tau}x(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\,p(2x;2\nu,2y)\right) = -\frac{2rSxe^{-r\tau}(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\lim_{E\to\infty}\left(Ep(2x;2\nu,2y)\right).$$

$$\lim_{E\to\infty}\left(Ep(2x;2\nu,2y)\right) = \frac{1}{2}\lim_{E\to\infty}\left(Ee^{-x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} I_{\nu-1}\left(\sqrt{4xy}\right)\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\lim_{E\to\infty}\left(Ee^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}\right) = 0.$$

Третий предел равен нулю. Собирая все пределы, получаем:

$$\lim_{E\to\infty}\Theta_C = 0.$$

8. $r\to\infty$.

Очевидно, что $\lim\limits_{r\to\infty} k = 0, \lim\limits_{r\to\infty} x = \infty, \lim\limits_{r\to\infty} y = 0$, $\lim\limits_{r\to\infty} xy = 0$. Используя две обычные замены (замены $z = 1+t$ и $t = \frac{p}{\sqrt{2y}}$), получаем, что при $r\to\infty$ функция

$Q(2x;2\nu,2y) = 2y\int_{\sqrt{x/y}}^{\infty} e^{-y\left(1+z^2\right)} z^{\nu} I_{\nu-1}(2yz)dz \sim$ (ряд Маклорена $I_{\nu-1}(2yz) \sim \frac{y^{\nu-1}z^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}$)~

$\sim \frac{2y^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\int_{\sqrt{x/y}}^{\infty} e^{-y\left(1+z^2\right)} z^{2\nu-1}dz =$($p = \sqrt{2y}z$)$= \frac{e^{-y}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\int_{\sqrt{2x}}^{\infty} e^{-p^2/2}p^{2\nu-1}dp \to 0$. Поэтому

$$-\lim_{r\to\infty} Ere^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu;2y)\right) = -\lim_{r\to\infty} Ere^{-r\tau} = 0,$$

так как экспонента убывает быстрее, чем возрастает полином первой степени.

Во втором пределе $p(2y;4+2\nu;2x) = \frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} I_{\nu+1}\left(\sqrt{4xy}\right)$. Так как $\lim\limits_{r\to\infty} xy = 0$, то

$I_{\nu+1}\left(\sqrt{4xy}\right) \sim \frac{(xy)^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma(\nu+2)}$ и $p(2y;4+2\nu,2x) \sim \frac{1}{2\Gamma(\nu+2)}e^{-x-y}y^{\nu+1} \to 0$. Поэтому

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{2rx(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}Sp(2y;4+2\nu,2x)\right) = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{rx(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\cdot\frac{S}{\Gamma(\nu+2)e^{x+y}y^{-\nu-1}}\right) = 0.$$

Наконец, в третьем пределе $p(2x;2\nu,2y)=\frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}\left(\sqrt{4xy}\right)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu)}e^{-x-y}x^{\nu-1}$.

Поэтому

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{2rx(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}Ep(2x;2\nu,2y)\right)=\lim_{r\to\infty}\left(\frac{r(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\cdot\frac{Ex^{\nu}}{\Gamma(\nu)e^{x+y}}\right)=0.$$

Окончательно,

$$\lim_{r\to\infty}\Theta_C=0.$$

9. $\sigma\to\infty.$

Очевидно, что $\lim_{\sigma\to\infty}k=0,\lim_{\sigma\to\infty}x=0,\lim_{\sigma\to\infty}y=0$. Тогда после двух стандартных замен u=2yt и $z=\sqrt{t}$ имеем:

$Q(2x;2\nu,2y)=2y\int_{\sqrt{x/y}}^{\infty}e^{-y(1+z^2)}z^{\nu}I_{\nu-1}(2yz)dz\sim$ (ряд Маклорена $I_{\nu-1}(2yz)\sim\frac{y^{\nu-1}z^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}$)~

$\sim\frac{2y^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\int_{\sqrt{x/y}}^{\infty}e^{-y(1+z^2)}z^{2\nu-1}dz$ =($p=\sqrt{2y}z$)= $\frac{e^{-y}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\int_{\sqrt{2x}}^{\infty}e^{-p^2/2}p^{2\nu-1}dp$ =(замена $p=\sqrt{2t}$)=

$$=\frac{e^{-y}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\int_{\sqrt{x/2}}^{\infty}e^{-t}2^{\nu-1}t^{\nu-1}dt=\frac{e^{-y}}{\Gamma(\nu)}\int_{\sqrt{x/2}}^{\infty}e^{-t}t^{\nu-1}dt\to1 \text{ при } \sigma\to\infty.$$

Значит,

$$-\lim_{\sigma\to\infty}Ere^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)=0.$$

Во втором пределе $p(2y;4+2\nu,2x)=\frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}I_{\nu+1}\left(\sqrt{4xy}\right)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu+2)}e^{-x-y}y^{\nu+1}$. Поэтому, как и в случае $r\to\infty$,

$$\lim_{\sigma\to\infty}\left(\frac{2rx(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}Sp(2y;4+2\nu,2x)\right)=\lim_{\sigma\to\infty}\left(\frac{rx(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\cdot\frac{Sy^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+2)e^{x+y}}\right)=0.$$

Наконец, в третьем пределе $p(2x;2\nu,2y)=\frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}\left(\sqrt{4xy}\right)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu)}e^{-x-y}x^{\nu-1}$.

Поэтому

$$\lim_{\sigma\to\infty}\left(\frac{2rx(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}Ep(2x;2\nu,2y)\right)=\lim_{\sigma\to\infty}\left(\frac{r(2-\beta)}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\cdot\frac{Ex^{\nu}}{\Gamma(\nu)e^{x+y}}\right)=0.$$

Окончательно,

$$\lim_{\sigma\to\infty}\Theta_C=0.$$

10. $T\to\infty$

Очевидно, что $\lim_{T\to\infty}k=0,\lim_{T\to\infty}x=C,\lim_{T\to\infty}y=0$, где C – некоторая константа, не зависящая от T. Так как $\lim_{T\to\infty}xy=0$, то асимптотическое поведение плотностей распределения будет таким же, как и в случае предела $\lim_{\sigma\to\infty}\Theta_C=0$ (п. 9):

$p(2y;4+2\nu,2x)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu+2)}e^{-x-y}y^{\nu+1}\to0$, $p(2x;2\nu,2y)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu)}e^{-x-y}x^{\nu-1}\to\text{const}$, а функция $Q(2x;2\nu,2y)\sim \frac{e^{-y}}{\Gamma(\nu)}\int\limits_{\sqrt{x/2}}^{\infty} e^{-t}t^{\nu-1}dt$ будет ограничена при $T\to\infty$: $Q(2x;2\nu,2y)<1$. Однако за счет поведения сомножителей в каждом слагаемом $\lim\limits_{T\to\infty}\Theta_C=0$, так как $e^{-r(T-t)}\to 0, e^{r(2-\beta)(T-t)}\to\infty$.

Окончательно, $\lim\limits_{T\to\infty}\Theta_C=0$.

По аналогии с предельным поведением Θ_C легко получить выражения при $\tau\to 0$, $E\to\infty$, $r\to\infty$, $\sigma\to\infty$ и $T\to\infty$ для *Vega*:

$$Vega_C=Vega_P=\frac{-4x}{\sigma_0}\left(Sp(2y;4+2\nu,2x)-Ee^{-r(T-t)}p(2x;2\nu,2y)\right),$$

так как с точностью до некоторого сомножителя это второе и третье слагаемое для Θ_C. Действительно,

11. $\tau\to 0$.

Очевидно, что $\lim\limits_{\tau\to 0}k=\lim\limits_{\tau\to 0}x=\lim\limits_{\tau\to 0}y=\infty$. Вычислим

$$\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{-4xS}{\sigma_0}p(2y;4+2\nu,2x)\right).$$

Заметим, что при $\tau\to 0$

$$p(2y;4+2\nu,2x)\sim e^{-x}e^{-y}e^{2\sqrt{x}\sqrt{y}}C\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}\sim\frac{C}{\sqrt[4]{xy}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2},$$

где C – константа, не зависящая от τ. Тогда

$$\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{-4xS}{\sigma_0}p(2y;4+2\nu,2x)\right)=\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{-4xSC}{\sigma_0\sqrt[4]{xy}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\right)=0.$$

Для вычисления второй части предела воспользуемся тем, что $p(2x;2\nu,2y)\sim p(2y;4+2\nu,2x)$ при $\tau\to 0$. Тогда по вычисленному ранее

$$\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{4Ee^{-r\tau}x}{\sigma_0}p(2x;2\nu,2y)\right)=\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{4Ee^{-r\tau}x}{\sigma_0}p(2y;4+2\nu,2x)\right)=0.$$

Окончательно получаем:

$$\lim_{\tau\to 0}Vega_C=\lim_{\tau\to 0}Vega_P=0,$$

что полностью свопадает с классическим случаем модели Блэка-Шоулса.

12. $E\to\infty$.

Очевидно, что $\lim\limits_{E\to\infty}k=k=\text{const}, \lim\limits_{E\to\infty}x=x=\text{const}, \lim\limits_{E\to\infty}y=\infty$. Вычислим предел каждого из двух слагаемых в $Vega_C$.

$$\lim_{E\to\infty}\left(\frac{-4xS}{\sigma_0}p(2y;4+2\nu,2x)\right),$$

в котором первый сомножитель не зависит от E. Тогда

$$p(2y;4+2\nu,2x)=\frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}I_{\nu+1}\left(\sqrt{4xy}\right)\sim\frac{1}{4\sqrt{\pi}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}\to 0 \text{ при } E\to\infty,$$

так как экспонента убывает быстрее, чем возрастает полином любой конечной степени. Поэтому

$$\lim_{E\to\infty}\left(\frac{-4xS}{\sigma_0}p(2y;4+2\nu,2x)\right)=0.$$

Вычислим второй предел

$$\lim_{E\to\infty}\left(\frac{4Ee^{-r\tau}x}{\sigma_0}p(2x;2\nu,2y)\right)=\frac{4xe^{-r\tau}}{\sigma_0}\lim_{E\to\infty}\left(Ep(2x;2\nu,2y)\right).$$

$$\lim_{E\to\infty}\left(Ep(2x;2\nu,2y)\right)=\frac{1}{2}\lim_{E\to\infty}\left(Ee^{-x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}\left(\sqrt{4xy}\right)\right)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\lim_{E\to\infty}\left(Ee^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}\right)=0.$$

Поэтому второй предел равен нулю. Собирая все пределы, получаем:

$$\lim_{E\to\infty}Vega_C=0.$$

13. $r\to\infty.$

Очевидно, что $\lim_{r\to\infty}k=0,\lim_{r\to\infty}x=\infty,\lim_{r\to\infty}y=0$. В первом пределе $p(2y;4+2\nu,2x)=\frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}I_{\nu+1}\left(\sqrt{4xy}\right)$. Так как $\lim_{r\to\infty}xy=0$, то $I_{\nu+1}\left(\sqrt{4xy}\right)\sim\frac{(xy)^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma(\nu+2)}$ и $p(2y;4+2\nu,2x)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu+2)}e^{-x-y}y^{\nu+1}\to 0$. Поэтому

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{-4xS}{\sigma_0}p(2y;4+2\nu,2x)\right)=\lim_{r\to\infty}\left(\frac{-2x}{\sigma_0}\cdot\frac{S}{\Gamma(\nu+2)e^{x+y}y^{-\nu-1}}\right)=0.$$

Во втором пределе $p(2x;2\nu,2y)=\frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}\left(\sqrt{4xy}\right)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu)}e^{-x-y}x^{\nu-1}$. Поэтому

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{4Ee^{-r\tau}x}{\sigma_0}p(2x;2\nu,2y)\right)=\lim_{r\to\infty}\left(\frac{2Ee^{-r\tau}}{\sigma_0}\cdot\frac{x^{\nu}}{\Gamma(\nu)e^{x+y}}\right)=0.$$

Окончательно,

$$\lim_{r\to\infty}Vega_C=0.$$

14. $\sigma\to\infty.$

Очевидно, что $\lim_{\sigma\to\infty}k=0,\lim_{\sigma\to\infty}x=0,\lim_{\sigma\to\infty}y=0$. В первом слагаемом $p(2y;4+2\nu,2x)=\frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}I_{\nu+1}\left(\sqrt{4xy}\right)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu+2)}e^{-x-y}y^{\nu+1}$. Поэтому, как и в случае $r\to\infty$, наблюдается то же асимптотичсекое поведение плотностей и

$$\lim_{\sigma\to\infty}\left(\frac{-4xS}{\sigma_0}p(2y;4+2\nu,2x)\right)=\lim_{\sigma\to\infty}\left(\frac{-2xS}{\sigma_0}\cdot\frac{1}{\Gamma(\nu+2)}e^{-x-y}y^{\nu+1}\right)=0.$$

Во втором пределе $p(2x;2\nu,2y)=\frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}\left(\sqrt{4xy}\right)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu)}e^{-x-y}x^{\nu-1}$. Поэтому

$$\lim_{\sigma\to\infty}\left(\frac{4Ee^{-r\tau}x}{\sigma_0}p(2x;2\nu,2y)\right)=\lim_{\sigma\to\infty}\left(\frac{2Ee^{-r\tau}}{\sigma_0}\cdot\frac{x^{\nu}}{\Gamma(\nu)e^{x+y}}\right)=0.$$

Окончательно,

$$\lim_{\sigma\to\infty}Vega_C=0.$$

15. $T\to\infty$.

Очевидно, что $\lim\limits_{T\to\infty} k=0, \lim\limits_{T\to\infty} x=C, \lim\limits_{T\to\infty} y=0$, где C – некоторая константа, не зависящая от T. Так как $\lim\limits_{T\to\infty} xy=0$, то асимптотическое поведение плотностей распределения будет таким же, как и в случае предела $\lim\limits_{\sigma\to\infty} Vega_C=0$ (п. 14):

$$p(2y;4+2\nu,2x)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu+2)}e^{-x-y}y^{\nu+1}\to 0,\ p(2x;2\nu,2y)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu)}e^{-x-y}x^{\nu-1}\to const.$$

Однако $\lim\limits_{T\to\infty}\left(\frac{-4xS}{\sigma_0}\frac{1}{2\Gamma(\nu+2)}e^{-x-y}y^{\nu+1}-Ee^{-r(T-t)}\frac{1}{2\Gamma(\nu)}e^{-x-y}x^{\nu-1}\right)=0$, т.е. $\lim\limits_{T\to\infty} Vega_C=0$.

Далее исследуем поведение коэффициента ρ, для которого, как известно, справедливы следующие равенства:

$$\rho_C=\frac{\partial C}{\partial r}=E\tau e^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)+2x\left(\frac{1}{r}-\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\right)\left(Sp(2y;4+2\nu,2x)-Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)\right),$$

$$\rho_P=\frac{\partial C}{\partial r}=-E\tau e^{-r\tau}Q(2x;2\nu,2y)+2x\left(\frac{1}{r}-\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\right)\left(Sp(2y;4+2\nu,2x)-Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)\right)$$

при $\tau\to 0$, $E\to\infty$, $r\to\infty$, $\sigma\to\infty$, $T\to\infty$.

16. $\tau\to 0$.

Очевидно, что $\lim\limits_{\tau\to 0} k=\lim\limits_{\tau\to 0} x=\lim\limits_{\tau\to 0} y=\infty$. Так как

$Q(2x;2\nu;2y)$=(замены u=2yt, $z=\sqrt{t}$) $=2y\int\limits_{\sqrt{x/y}}^{\infty}e^{-y(1+z^2)}z^{\nu}I_{\nu-1}(2yz)dz\sim 2y\int\limits_{\sqrt{x/y}}^{\infty}e^{-y(1+z^2)}z^{\nu}\frac{e^{2yz}}{\sqrt{4\pi yz}}dz$

$=\sqrt{\frac{y}{\pi}}\int\limits_{\sqrt{x/y}}^{\infty}e^{-y(z-1)^2}z^{\nu-1/2}dz$ =($z=1+t$) $=\sqrt{\frac{y}{\pi}}\int\limits_{\sqrt{x/y}-1}^{\infty}e^{-yt^2}(1+t)^{\nu-1/2}dt$ =($t=\frac{p}{\sqrt{2y}}$)=

$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2y}\sqrt{x/y}-1}^{\infty}e^{-p^2/2}dp+O\left(\frac{1}{\sqrt{2y}}\right)\to\begin{cases}1, S<E\\0, S>E\end{cases}$.

Поэтому в силу конечности предела $Q(2x;2\nu;2y)$ имеем:

$$\lim_{\tau\to 0}E\tau e^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)=0.$$

Вычислим второй предел

$$\lim_{\tau\to 0}\left(2x\left(\frac{1}{r}-\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\right)Sp(2y;4+2\nu,2x)\right).$$

Заметим, что при $\tau\to 0$ $\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\to\frac{1}{r}$. Кроме того,

$$p(2y;4+2\nu,2x)\sim\frac{C}{e^{k\left(\sqrt{mS^{2-\beta}}-\sqrt{E^{2-\beta}}\right)^2}\sqrt[4]{xy}}\to 0,$$

где C – константа, не зависящая от τ, m определена выше. Поэтому

$$\lim_{\tau\to 0}\left(2x\left(\frac{1}{r}-\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\right)Sp(2y;4+2\nu,2x)\right)=0.$$

Для вычисления третьей части предела воспользуемся тем, что $p(2x;2\nu,2y)\sim p(2y;4+2\nu,2x)$ при $\tau\to 0$. Тогда

$$\lim_{\tau\to 0}\left(2x\left(\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}-\frac{1}{r}\right)Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)\right)=0.$$

Собирая три слагаемых вместе, окончательно получаем:

$$\lim_{\tau\to 0}\rho_C = 0,$$

что полностью свопадает с классическим случаем модели Блэка-Шоулса.

17. $E\to\infty$.

Очевидно, что $\lim\limits_{E\to\infty} k = k = \text{const}, \lim\limits_{E\to\infty} x = x = \text{const}, \lim\limits_{E\to\infty} y = \infty$. Вычислим предел каждого из трех слагаемых в ρ_C. По аналогии со случаем $\tau\to 0$ (п. 16), имеем:

$$Q(2x;2\nu,2y)\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{\sqrt{2y}\left(\sqrt{x/y}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}dp = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}}^{\infty} e^{-p^2/2}dp \to 1.$$

Тогда

$\lim\limits_{E\to\infty} E\tau e^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right) = \lim\limits_{E\to\infty} E\tau e^{-r\tau}\left(1-1+\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}} e^{-p^2/2}dp\right) = -\lim\limits_{E\to\infty}\frac{E\tau e^{-r\tau}e^{-\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2y}\right)^2/2}}{\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2y}\right)} = 0$ в силу предельного поведения функции Лапласа.

Так как

$$p(2y;4+2\nu,2x)\sim\frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt[4]{xy}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}\to 0,$$

$$p(2x;2\nu,2y)\sim\frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt[4]{xy}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}\to 0,$$

то

$$\lim_{E\to\infty}\left(2x\left(\frac{1}{r}-\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\right)Sp(2y;4+2\nu,2x)\right) = 0,$$

$$\lim_{E\to\infty}\left(2x\left(\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}-\frac{1}{r}\right)Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)\right) = \frac{e^{-r\tau}}{2\sqrt{\pi}}\lim_{E\to\infty}\left(\frac{x}{\sqrt[4]{xy}}\left(\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}-\frac{1}{r}\right)Ee^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}\right) = 0.$$

Собирая все пределы, получаем:

$$\lim_{E\to\infty}\rho_C = 0.$$

18. $r\to\infty$.

Очевидно, что $\lim\limits_{r\to\infty} k = 0, \lim\limits_{r\to\infty} x = \infty, \lim\limits_{r\to\infty} y = 0$, $\lim\limits_{r\to\infty} xy = 0$. По аналогии с предыдущим, легко получить, что при $r\to\infty$ функция $Q(2x;2\nu,2y)\sim\frac{e^{-y}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\int_{\sqrt{2x}}^{\infty} e^{-p^2/2}p^{2\nu-1}dp\to 0$.

Поэтому

$$\lim_{r\to\infty} E\tau e^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right) = 0.$$

Далее, $p(2y;4+2\nu,2x)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu+2)}e^{-x-y}y^{\nu+1}\to 0$. Поэтому

$$\lim_{r\to\infty} 2x\left(\frac{1}{r}-\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\right)Sp(2y;4+2\nu,2x) = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\frac{xSe^{-x-y}y^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+2)} = 0.$$

Наконец, $p(2x;2\nu,2y)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu)}e^{-x-y}x^{\nu-1}$. Значит,

$$\lim_{r\to\infty}\left(2x\left(\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}-\frac{1}{r}\right)Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)\right) = -\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r\Gamma(\nu)}Ee^{-r\tau}e^{-x-y}x^{\nu} = 0.$$

Окончательно,

$$\lim_{r\to\infty}\rho_C=0.$$

19. $\sigma\to\infty$.

Очевидно, что $\lim_{\sigma\to\infty}k=0,\lim_{\sigma\to\infty}x=0,\lim_{\sigma\to\infty}y=0$. Тогда $Q(2x;2\nu,2y)\sim\frac{e^{-y}}{\Gamma(\nu)}\int_x^\infty e^{-t}t^{\nu-1}dt\to1$ и

$$\lim_{\sigma\to\infty}E\tau e^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)=0.$$

Во втором пределе $p(2y;4+2\nu,2x)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu+2)}e^{-x-y}y^{\nu+1}\to0$. Поэтому

$$\lim_{\sigma\to\infty}2x\left(\frac{1}{r}-\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\right)Sp(2y;4+2\nu,2x)=0.$$

Наконец, $p(2x;2\nu,2y)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu)}e^{-x-y}x^{\nu-1}$. Поэтому

$$\lim_{\sigma\to\infty}\left(2x\left(\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}-\frac{1}{r}\right)Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)\right)=0.$$

Окончательно,

$$\lim_{\sigma\to\infty}\rho_C=0.$$

20. $T\to\infty$

Очевидно, что $\lim_{T\to\infty}k=0,\lim_{T\to\infty}x=C,\lim_{T\to\infty}y=0$, где C – некоторая константа, не зависящая от T. Поэтому

$$Q(2x;2\nu,2y)\sim\frac{e^{-y}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\int_{\sqrt{2x}}^\infty e^{-p^2/2}p^{2\nu-1}dp\to\frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\int_{\sqrt{2C}}^\infty e^{-p^2/2}p^{2\nu-1}dp=\text{const}$$

т.е.

$$\lim_{T\to\infty}E\tau e^{-r(T-t)}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)=0$$

как ограниченное, умноженное на бесконечно малую. Далее,

$$p(2y;4+2\nu,2x)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu+2)}e^{-x-y}y^{\nu+1}\to0,\ p(2x;2\nu,2y)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu)}e^{-x-y}x^{\nu-1}\to\text{const}.$$

Значит,

$$\lim_{T\to\infty}2x\left(\frac{1}{r}-\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\right)Sp(2y;4+2\nu,2x)=0,$$

$$\lim_{T\to\infty}\left(2x\left(\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}-\frac{1}{r}\right)Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)\right)=0,$$

т.к. $\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{r}-\frac{(2-\beta)\tau}{e^{r(2-\beta)\tau}-1}\right)=\frac{1}{r}$.

Окончательно, $\lim_{T\to\infty}\rho_C=0$.

Наконец, исследуем поведение коэффициента Γ_C:

$$\Gamma_C=\frac{\partial^2C}{\partial S^2}=\frac{2x(2-\beta)^2}{S}\left(\frac{3-\beta}{2-\beta}-x\right)p(2y;4+2\nu,2x)+\frac{2x^2(2-\beta)^2}{S}p(2y;6+2\nu,2x)+$$
$$+\frac{2x^2(2-\beta)^2}{S^2}Ee^{-r(T-t)}p(2x;2\nu,2y)-\frac{2xy(2-\beta)^2}{S^2}Ee^{-r(T-t)}p(2x;2+2\nu,2y)=\Gamma_P=\frac{\partial^2P}{\partial S^2}$$

при $\tau\to0$, $E\to\infty$, $r\to\infty$, $\sigma\to\infty$, $T\to\infty$.

21. $\tau\to0$.

Очевидно, что $\lim\limits_{\tau\to 0} k = \lim\limits_{\tau\to 0} x = \lim\limits_{\tau\to 0} y = \infty$. Так как

$$p(2y;4+2\nu,2x) \sim \frac{C}{e^{k\left(\sqrt{mS^{2-\beta}}-\sqrt{E^{2-\beta}}\right)^2}\sqrt[4]{xy}} \to 0,$$

где C – константа, не зависящая от τ, m определена выше. Кроме того, $p(2y;4+2\nu,2x) \sim p(2x;2\nu,2y) \sim p(2y;6+2\nu,2x) \sim p(2x;2+2\nu,2y)$ при $\tau \to 0$.

Последовательно имеем (при плотностях стоят полиномы не выше второй степени от x и y):

$$\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{2x(2-\beta)^2}{S}\left(\frac{3-\beta}{2-\beta}-x\right)p(2y;4+2\nu,2x)\right) = \lim_{\tau\to 0}\left(\frac{2x(2-\beta)^2}{S}\left(\frac{3-\beta}{2-\beta}-x\right)\frac{C}{e^{k\left(\sqrt{S^{2-\beta}}-\sqrt{E^{2-\beta}}\right)^2}\sqrt[4]{xy}}\right) = 0,$$

$$\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{2x^2(2-\beta)^2}{S}p(2y;6+2\nu,2x)\right) = 0,$$

$$\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{2x^2(2-\beta)^2}{S^2}Ee^{-r(T-t)}p(2x;2\nu,2y)\right) = 0,$$

$$-\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{2xy(2-\beta)^2}{S^2}Ee^{-r(T-t)}p(2x;2+2\nu,2y)\right) = 0.$$

Собирая слагаемые вместе, получаем:

$$\lim_{\tau\to 0}\Gamma_C = 0,$$

что полностью совпадает с классическим случаем модели Блэка-Шоулса.

22. $E \to \infty$.

Очевидно, что $\lim\limits_{E\to\infty} k = k = \text{const}, \lim\limits_{E\to\infty} x = x = \text{const}, \lim\limits_{E\to\infty} y = \infty$. По аналогии со случаем $\tau \to 0$ (см. п. 21), имеем:

$$p(2y;4+2\nu,2x) \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt[4]{xy}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \to 0,$$

$$p(2y;6+2\nu,2x) \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt[4]{xy}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+2}{2}} \to 0,$$

$$p(2x;2\nu,2y) \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt[4]{xy}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} \to 0,$$

$$p(2x;2+2\nu,2y) \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt[4]{xy}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu}{2}} \to 0.$$

Так как в выражении для Γ_C только третье и четвертое слагаемое имеют сомножители, зависящие от E, то

$$\lim_{E\to\infty}\left(\frac{2x(2-\beta)^2}{S}\left(\frac{3-\beta}{2-\beta}-x\right)p(2y;4+2\nu,2x)\right) = 0,$$

$$\lim_{E\to\infty}\left(\frac{2x^2(2-\beta)^2}{S}p(2y;6+2\nu,2x)\right) = 0.$$

В силу экспоненциального роста знаменателя и полиномиального – числителя, имеем:

$$\lim_{E\to\infty}\left(\frac{2x^2(2-\beta)^2}{S^2}Ee^{-r(T-t)}p(2x;2\nu,2y)\right) = 0,$$

$$-\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{2xy(2-\beta)^2}{S^2}Ee^{-r(T-t)}p(2x;2+2\nu,2y)\right)=0.$$

Собирая все пределы, получаем:

$$\lim_{E\to\infty}\Gamma_C=0.$$

23. $r\to\infty$.

Очевидно, что $\lim\limits_{r\to\infty}k=0,\lim\limits_{r\to\infty}x=\infty,\lim\limits_{r\to\infty}y=0$, $\lim\limits_{r\to\infty}xy=0$. При $r\to\infty$

$$p(2y;4+2\nu,2x)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu+2)}e^{-x-y}y^{\nu+1}\to 0,$$

$$p(2y;6+2\nu,2x)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu+3)}e^{-x-y}y^{\nu+2}\to 0,$$

$$p(2x;2\nu,2y)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu)}e^{-x-y}x^{\nu-1}\to 0,$$

$$p(2x;2+2\nu,2y)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu+1)}e^{-x-y}x^{\nu}\to 0.$$

В силу того, что в выражении для Γ_C каждый сомножитель при функции соответствующей плотности является полиномом от x не выше второй степени, а плотности стремятся к нулю с экспоненциальной скоростью, то каждое слагаемое в Γ_C стремится к нулю и в целом

$$\lim_{r\to\infty}\Gamma_C=0,$$

что совпадает с классическим случаем Блэка-Шоулса.

24. $\sigma\to\infty$.

Очевидно, что $\lim\limits_{\sigma\to\infty}k=0,\lim\limits_{\sigma\to\infty}x=0,\lim\limits_{\sigma\to\infty}y=0$. Тогда все асимптотики, справедливые в п.23, верны и $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\Gamma_C=0$.

25. $T\to\infty$

Очевидно, что $\lim\limits_{T\to\infty}k=0,\lim\limits_{T\to\infty}x=C,\lim\limits_{T\to\infty}y=0$, где C – некоторая константа, не зависящая от T. Верна асимптотика п. 23 и

$$p(2y;4+2\nu,2x)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu+2)}e^{-x-y}y^{\nu+1}\to 0,$$

$$p(2y;6+2\nu,2x)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu+3)}e^{-x-y}y^{\nu+2}\to 0,$$

$$p(2x;2\nu,2y)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu)}e^{-x-y}x^{\nu-1}\to \mathrm{const},$$

$$p(2x;2+2\nu,2y)\sim\frac{1}{2\Gamma(\nu+1)}e^{-x-y}x^{\nu}\to \mathrm{const}.$$

Значит, в силу стремления сомножителей при плотностях к ненулевой постоянной, имеем:

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{2x(2-\beta)^2}{S}\left(\frac{3-\beta}{2-\beta}-x\right)p(2y;4+2\nu,2x)\right)=0,$$

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{2x^2(2-\beta)^2}{S}p(2y;6+2\nu,2x)\right)=0.$$

В оставшихся пределах $e^{-r(T-t)}\to 0$ и

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{2x^2(2-\beta)^2}{S^2}Ee^{-r(T-t)}p(2x;2\nu,2y)\right)=0,$$

$$-\lim_{T\to\infty}\left(\frac{2xy(2-\beta)^2}{S^2}Ee^{-r(T-t)}p(2x;2+2\nu,2y)\right)=0.$$

Окончательно, $\lim\limits_{T\to\infty}\Gamma_C=0$.

Пример: рассмотрим экзотический опцион – бинарный опцион покупателя и найдем его справедливую цену *BC* в рамках CEV модели. По определению бинарного опциона его держатель ничего не получает, если $S_T<E$, и получает сумму *E*, если $S_T\geq E$. Вероятность того, что в момент исполнения *T* цена базового актива $S_T\geq E$, в рамках подхода Блэка-Шоулса равна $\Phi(d_2)$. Значит, справедливая цена бинарного опциона покупателя есть:

$$BC=Ee^{-r\tau}\Phi(d_2),$$

где $\tau=T-t$, $d_2=\dfrac{\ln S-\ln E+(r-0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$.

Из построения бинарного опциона следует, что обычный опцион покупателя европейского типа эквивалентен короткой продаже (продаже взаймы) бинарного опциона по цене *BC*. Следовательно, для получения цены *BC* в рамках *CEV* модели достаточно взять второе слагаемое формулы цены опциона покупателя

$$BC=Ee^{-r\tau}Q(2y;2-2\nu,2x).$$

Сравнение цен *BC* (ось ординат), вычисленных в середине срока действия *T*/2 в рамках классической модели Блэка-Шоулса (Б.-Ш.) и CEV для бинарного опциона на индекс ММВБ в 2016-2017 гг., приведено на рис. 5., где учтены последние 50 торговых дней до исполнения опциона (ось абсцисс). В момент исполнения S_T=2048 руб.

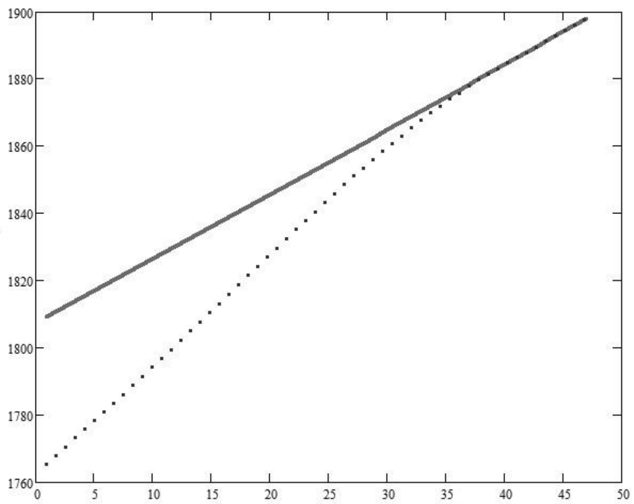

Рис. 5. Сравнение динамики цен, рассчитанных по модели Б.-Ш (пунктирная линия) и по CEV модели (сплошная линия) для бинарного опциона на индекс ММВБ. *E*=1900 руб, *T*=1 год, σ=15%, *r*=10%. $S_{T/2}$=2214 руб., S_T=2048 руб. Цены – ось ординат, время до исполнения – ось асбцисс.

Замечание: приведем без доказательства предельные значения греческих опциона продавца в рамках CEV модели, когда они имеют отличное от греческих опциона покупателя поведение:

1. $\tau\to 0$.

$$\lim_{\tau\to 0}\Delta_P=\begin{cases}-1, S<K\\0, S>K\end{cases};\ \lim_{\tau\to 0}\Theta_P=rK\begin{cases}1, S<K\\0, S>K\end{cases};\ \lim_{\tau\to 0}\rho_P=0.$$

2. $\sigma\to\infty$.

$$\lim_{\sigma\to\infty}\Delta_P=0;$$

$$\lim_{\sigma\to\infty}\Theta_P=Kre^{-r\tau}\lim_{\sigma\to\infty}\left(\frac{e^{-y}}{\Gamma(\nu)}\int_x^{\infty}e^{-t}t^{\nu-1}dt\right)+\frac{r(2-\beta)}{m-1}\lim_{\sigma\to\infty}\left(xS\frac{e^{-x-y}}{\Gamma(\nu+2)}y^{\nu+1}-Ke^{-r\tau}\frac{e^{-x-y}}{\Gamma(\nu)}x^{\nu}\right)=Kre^{-r\tau};$$

$$\lim_{\sigma\to\infty}\rho_P=-K\tau e^{-r\tau}\lim_{\sigma\to\infty}\left(\frac{e^{-y}}{\Gamma(\nu)}\int_x^{\infty}e^{-t}t^{\nu-1}dt\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{(2-\beta)\tau}{m-1}\right)\lim_{\sigma\to\infty}\left(xS\frac{e^{-x-y}}{\Gamma(\nu+2)}y^{\nu+1}-\right.$$

$$\left.-Ke^{-r\tau}\frac{e^{-x-y}}{\Gamma(\nu)}x^{\nu}\right)=-K\tau e^{-r\tau}.$$

3. $K\to\infty$.

$$\lim_{K\to\infty}\Delta_P=-1;$$

$$\lim_{K\to\infty}\Theta_P=re^{-r\tau}\lim_{K\to\infty}K\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}}^{\infty}e^{-p^2/2}dp\right)=\infty;$$

$$\lim_{K\to\infty}\rho_P=-\tau e^{-r\tau}\lim_{K\to\infty}K\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}}^{\infty}e^{-p^2/2}dp\right)=-\infty.$$

4. $r\to\infty$.

$$\lim_{r\to\infty}\Delta_P=0;$$

$$\lim_{r\to\infty}\Theta_P=K\lim_{r\to\infty}re^{-r\tau}\left(\frac{e^{-y}}{\Gamma(\nu)}\int_x^{\infty}e^{-t}t^{\nu-1}dt\right)+\lim_{r\to\infty}\frac{rx(2-\beta)}{m-1}\left(S\frac{e^{-x-y}}{\Gamma(\nu+2)}y^{\nu+1}-Ke^{-r\tau}\frac{e^{-x-y}}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}\right)=0;$$

$$\lim_{r\to\infty}\rho_P=-K\tau\lim_{r\to\infty}e^{-r\tau}\left(\frac{e^{-y}}{\Gamma(\nu)}\int_x^{\infty}e^{-t}t^{\nu-1}dt\right)+\lim_{r\to\infty}x\left(\frac{1}{r}-\frac{\tau(2-\beta)}{m-1}\right)\left(S\frac{e^{-x-y}y^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+2)}-Ke^{-r\tau}\frac{e^{-x-y}x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\right)=0.$$

5. $T\to\infty$.

$$\lim_{T\to\infty}\Delta_P=0;$$

$$\lim_{T\to\infty}\Theta_P=Kr\lim_{T\to\infty}e^{-r\tau}Q(2x;2\nu,2y)+r(2-\beta)\lim_{T\to\infty}\left(\frac{xSe^{-x-y}y^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+2)(m-1)}-\frac{x^{\nu}Ke^{-x-y}e^{-r\tau}}{(m-1)\Gamma(\nu)}\right)=0;$$

$$\lim_{T\to\infty}\rho_P=-K\lim_{T\to\infty}\tau e^{-r\tau}Q(2x;2\nu,2y)=0.$$

3. БИНОМИАЛЬНЫЙ РЫНОК. ДИСКРЕТНЫЙ СЛУЧАЙ ФОРМУЛЫ Б.-Ш. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ ЧАСТИЦЫ. ПРОЦЕСС ПУАССОНА

3.1. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ ЧАСТИЦЫ

Рассмотрим частицу, которая находится в некоторой точке $x=n$, $n\in Z$. Пусть она движется только на единицу вправо или влево. Пусть вероятность движения вправо равна p, вероятность движения влево равна $q=1-p$. Пусть частица движется в интервале

$[0,a],\ a>n, a\in Z$. Пусть при достижении границ интервала частица прекращает движение (т.е. имеют место поглощающие границы x=0 и x=a, см. подробнее п.2.1.2).

При выполнении вышеуказанных условий говорят, что частица совершает случайное блуждание. Если $p=q=\frac{1}{2}$, то блуждание называется симметричным. Если $p>q$, то говорят о том, что удары данной частицы слева другими частицами более вероятны. Если $p<q$, то говорят о том, что удары данной частицы справа другими частицами более вероятны.

Пусть q_n – вероятность того, что частица, начав движение из x=n, попадет в т. x=0 и будет поглощена этой границей. Пусть p_n – вероятность того, что частица, начав движение из x=n, попадет в т. x=a и будет поглощена этой границей. Тогда $q_0=1$, так как частица уже достигла x=0. Аналогично, $p_a=1$, так как частица уже достигла x=a. В силу того, что $q_n+p_n=1$ получаем, что $p_0=0$ и $q_a=0$.

В соответствии со сделанными обозначениями имеем:

$$q_n=pq_{n+1}+qq_{n-1},\ n=\overline{1,(a-1)}. \tag{27}$$

Действительно, частица может совершить движение влево с вероятностью p или движение вправо с вероятностью q. Попадая в точки x=n+1 и x=n–1, вероятность продолжить движение из них равна q_{n+1} и q_{n-1} соответственно. По формуле полной вероятности получаем (27).

Вспоминая о граничных условиях, имеем следующую краевую задачу:

$$q_n=pq_{n+1}+qq_{n-1},\ q_0=1,\ q_a=0,\ n=\overline{1,(a-1)}. \tag{27'}$$

Пусть $p\neq q$. Найдем частные решения (27'), для чего рассмотрим две последовательности $q_n=1$ и $q_n=\frac{q^n}{p^n}$. Подставляя их в (27), имеем:

a) $p\cdot 1+q\cdot 1=p+q=1=q_n$.

b) $p\cdot\frac{q^{n+1}}{p^{n+1}}+q\cdot\frac{q^{n-1}}{p^{n-1}}=\frac{q^{n+1}}{p^n}+\frac{q^n}{p^{n-1}}=\frac{p\cdot q^n+q^{n+1}}{p^n}=\frac{q^n(p+q)}{p^n}=\frac{q^n}{p^n}=q_n$.

Таким образом, $q_n=1$ и $q_n=\frac{q^n}{p^n}$ являются частными решениями (27). В силу линейности (27) относительно q_n, q_{n+1}, q_{n-1} линейная комбинация

$$q_n=A\cdot 1+B\cdot\frac{q^n}{p^n} \tag{28}$$

так же будет частным решением. В силу произвольности A,B оно будет общим.

Действительно, $p\left(A\cdot 1+B\cdot\frac{q^{n+1}}{p^{n+1}}\right)+q\left(A\cdot 1+B\cdot\frac{q^{n-1}}{p^{n-1}}\right)=A(p\cdot 1+q\cdot 1)+B\left(p\frac{q^{n+1}}{p^{n+1}}+q\frac{q^{n-1}}{p^{n-1}}\right)=$ (так как $q_n=1$ и $q_n=\frac{q^n}{p^n}$ являются частными решениями и (27) выполнено) $=A+B\cdot\frac{q^n}{p^n}=q_n$.

Найдем константы A, B из граничных условий. Для этого решим систему уравнений $q_0=A+B=1,\ q_a=A+B\frac{q^a}{p^a}=0$. Очевидно, что ее решение имеет вид:

$$B=\frac{p^a}{p^a-q^a},\ A=-\frac{q^a}{p^a-q^a}.$$

Подставляя его в (28), получаем решение (27'):

$$q_n = \frac{r^a - r^n}{r^a - 1}, \tag{29}$$

где $r = qp^{-1}$.

В случае $p = q = \frac{1}{2}$ выражение (29) не справедливо и превращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для разрешения неопределенности найдем значение предела при $p \to \frac{1}{2}$. Имеем:

$\lim\limits_{p\to 1/2} q_n =$ (добавим и вычтем единицу в (29)) = $\lim\limits_{p\to 1/2}\left[1 - \frac{1-r^n}{1-r^a}\right] = \lim\limits_{p\to 1/2}\left[1 - \frac{p^n - q^n}{p^n - q^a p^{n-a}}\right]$.

Вычислим отдельно $\lim\limits_{p\to 1/2}\left[\frac{p^n - q^n}{p^n - q^a p^{n-a}}\right]$. Так как имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$, то можно формально воспользоваться правилом Лопиталя по параметру *p*. Учтем, что $\left(q^n\right)'_p = \left[(1-p)^n\right]' = -nq^{n-1}$. Тогда

$\lim\limits_{p\to 1/2}\left[\frac{p^n - q^n}{p^n - q^a p^{n-a}}\right] = \lim\limits_{p\to 1/2}\frac{\left(p^n - q^n\right)'}{\left(p^n - q^a p^{n-a}\right)'} = \lim\limits_{p\to 1/2}\left[\frac{np^{n-1} + nq^{n-1}}{np^{n-1} + aq^{a-1}p^{n-a} - q^q(n-a)p^{n-a-1}}\right] =$ (подставляем вместо *p* и *q* их значения) = $\frac{n\left(2^{-1}\right)^{n-1} + n\left(2^{-1}\right)^{n-1}}{n\left(2^{-1}\right)^{n-1} + a\left(2^{-1}\right)^{a-1}\left(2^{-1}\right)^{n-a} - \left(2^{-1}\right)^q (n-a)\left(2^{-1}\right)^{n-a-1}} = \frac{2n}{n + a - (n-a)} = \frac{n}{a}$.

Поэтому

$$\lim_{p\to 1/2} q_n = 1 - \frac{n}{a}. \tag{29'}$$

По аналогии, для вероятности p_n того, что частица, начав движение из *x*=*n*, попадет в т. *x*=*a* и будет поглощена этой границей, также можно записать уравнение типа (27). Для этого в нем необходимо сделать замену $q_n = 1 - p_n$ и ввести новые вероятности перехода $\bar{p}$ и $\bar{q}$ на шаг влево и вправо соответственно: $p = 1 - \bar{p}$ или $\bar{p} = q$; $q = 1 - \bar{q}$ или $\bar{q} = p$. Тогда (27) приобретает вид:

$$p_n = \bar{p}p_{n+1} + \bar{q}p_{n-1},\ n = \overline{1,(a-1)}.$$

Кроме того, граничные условия должны быть следующими (по соображениям, приведенным выше): $p_a = 1,\ p_0 = 0$.

Получаем краевую задачу:

$$p_n = \bar{p}p_{n+1} + \bar{q}p_{n-1},\ p_0 = 0,\ p_a = 1,\ n = \overline{1,(a-1)}. \tag{27''}$$

Ее решение

$$p_n = \frac{r^n - 1}{r^a - 1},\ r = qp^{-1}.$$

Замечание: задачу случайного блуждания частицы можно переписать в терминах финансовой математики: пусть на рынке имеются две конкурирующие фирмы с капиталом *n* и (*a*-*n*) соответственно, причем *a*, *n* – целые числа. Пусть величина суммарного капитала фирм в целом не изменяется, а просто перераспределяется между ними: капитал одной может быть увеличен только за счет капитала другой. Пусть вероятность накопления одной условной единицы капитала первой фирмой есть *p*, второй – $\bar{p} = q$. Пусть вероятность потерять одну условную единицу капитала первой фирмой есть *q*, второй – $\bar{q} = p$.Обозначая через q_n вероятность того, что фирма с капиталом *n* в конце концов разорится (монополизация рынка второй фирмой), а через p_n – вероятность того, что разорится другая фирма, получаем задачу (27’), решение которой есть (29) – (29’).

3.2. ПРОЦЕССЫ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

Пусть $X \in N$ – некоторое подмножество целочисленных точек, пусть его элементы – $x_i = i$ – целочисленные точки. Пусть $p_{ij}(s,t)$ – вероятность перехода из точки x_i в момент *s* в точку x_j в момент *t*. По определению вероятности выполнены соотношения:

$$p_{ij}(s,t) > 0, \sum_{i,j \in X} p_{ij}(s,t) = 1, \ p_{ij}(s,s) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Формула Чепмена – Колмогорова (см. гл.2, п.2.1, 2)) будет иметь вид:

$$p_{ij}(s,t) = \sum_{k \in X} p_{ik}(s,u) p_{kj}(u,t), u \in [s,t]. \tag{30}$$

Перейдем к изучению стохастического процесса, в котором из состояния x_n можно перейти только в точки x_{n+1} и x_{n-1}, а из состояния 0 можно перейти только в состояние 1. Переход от x_n к x_{n+1} называется рождением, а от x_n к x_{n-1} – гибелью частицы (или распад). Данная модель не исключает и самозарождения (т.е. переход $0 \to 1$).

Обозначим через $a_{ij} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{p_{ij}(h)}{h}, i \neq j$ и $a_{ii} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{p_{ij}(h) - 1}{h}$, где $p_{ij}(h)$ – вероятность перехода из точки x_i в точку x_j за время $(t, t+h)$. Тогда вероятность перехода из точки x_i в точку x_j за один шаг равна

$$p_{ij}(h) = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}.$$

Это следует из определения марковского процесса или из (30) при числе слагаемых, равном единице (в этом случае (30) будет формулой условной вероятности).

По определению процесса следует, что $a_{i,i+1}$ и $a_{i,i-1}$ будут единственными коэффициентами, отличными от нуля (так как движение возможно лишь на шаг влево и вправо от x_n). Обозначим через $\lambda_i = a_{i,i+1}, \mu_i = a_{i,i-1}$. Тогда из разложения в ряд Тейлора $a_{i,i+1}, a_{i,i-1}$ в окрестности x_i получим:

$$p_{i,\,i+1}(t) = \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}} = \lambda_i t + o(t), \ p_{i,\,i-1}(t) = \frac{a_{i,i-1}}{a_{ii}} = \mu_i t + o(t).$$

Кроме того, $a_{ii} = -(\lambda_i + \mu_i)$.

Уравнение Колмогорова вперед (см. п.2.1) приобретет вид (в наших обозначениях):

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = a_{ii} p_{ij} + a_{i,i+1} p_{i+1,\,j} + a_{i,i-1} p_{i-1,\,j},$$

или

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = -(\lambda_i + \mu_i) p_{ij} + \lambda_i p_{i+1,\,j} + \mu_i p_{i-1,\,j}. \tag{31}$$

Кроме того, справедливы начальные условия: $\lambda_{-1} = 0, \mu_0 = 0$.

По аналогии, уравнение Колмогорова назад будет следующим:

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = a_{jj} p_{ij} + a_{j-1,j} p_{i,\,j-1} + a_{j+1,j} p_{i,\,j+1},$$

или

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = -(\lambda_j + \mu_j) p_{ij} + \lambda_{j-1} p_{i,\,j-1} + \mu_{j+1} p_{i,\,j+1}. \tag{32}$$

Начальные условия остаются теми же: $\lambda_{-1} = 0, \mu_0 = 0$.

Зафиксируем точку x_i (в формуле (32) индекс *i* не меняется) и обозначим $p_j(t) = p_{ij}(t)$.

Зададим начальное условие на $p_j(t)$: пусть $p_j(0) = p_0$ известно. Пусть, кроме того, $p_j(t)$ не зависят от времени и постоянны: $p_j(t) = p_j$. Для нахождения решения запишем (22) при $j = 0$. Тогда

$$-\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0,$$

откуда

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0.$$

Подставляя его в (32), записанном при $j = 1$, получим:

$$\mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) p_1 + -\lambda_0 p_0 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_1} p_0,$$

откуда

$$p_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_1 \mu_2} p_0.$$

Производя остальные вычисления по аналогии, окончательно имеем:

$$p_2 = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} p_0. \tag{33}$$

Последовательность p_n задает распределение вероятностей, если $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$, или $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{j-1} \lambda_i \left(\prod_{i=1}^{j} \mu_i \right)^{-1} \right) p_0 = 1$. Отсюда вытекает условие на p_0:

$$p_0 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{j-1} \lambda_i \left(\prod_{i=1}^{j} \mu_i \right)^{-1} \right) \right)^{-1}.$$

Подставляя его в (33), получаем окончательное решение задачи рождения – гибели.

3.3. ПРОЦЕСС ПУАССОНА

Определение: пуассоновским процессом $N_t = N(t, \omega)$, $t>0$, называют случайный процесс, для которого выполнены следующие аксиомы:

1) $N_0 = 0$;
2) для любых точек временного интервала $[0,T]$ $0 \le s < t < \infty$ приращение $\Delta N(t) = N_t - N_s$ имеет пуассоновское распределение со средним $\lambda(t-s)$: $P\{N_t = k\} = \frac{\lambda^k t^k}{k!} \exp(-\lambda t)$, $k \in Z$;
3) случайные величины N_{t_0}, $\Delta N(t_k), k = \overline{1,\infty}$ попарно независимы.

Докажем корректность данного определения, т.е. покажем, что оно непротиворечиво. Для этого определим вероятность наступления *k* событий за промежуток времени от 0 до *t*. Обозначим ее через $P_k(t)$. Докажем, что $P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$, где λ – некоторый параметр.

Действительно, рассмотрим для простоты временной интервал [0,1] и обозначим через *p* вероятность того, что за время 1 не наступит ни одно событие. Разобьем этот промежуток

на n равных непересекающихся частей $\Delta t_k, k=\overline{1,n}$, причем $1=\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k$. Тогда по определению вероятности независимых событий имеем:
$p=P_0(t)=P_0(\Delta t_1)P_0(\Delta t_2)...P_0(\Delta t_n)=\prod_{k=1}^{n}P(\Delta t_k)=\prod_{k=1}^{n}P_0\left(\frac{1}{n}\right)=$(так как интервалы разбиения равны между собой $1/n$)= $P_0\left(\frac{1}{n}\right)\prod_{k=1}^{n}1=\left[P_0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$.

Отсюда следует, что $P_0\left(\frac{1}{n}\right)=p^{1/n}$. Как следствие, $P_0\left(\frac{k}{n}\right)=P_0\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n}\right)=\prod_{i=1}^{k}P_0\left(\frac{1}{n}\right)=\prod_{i=1}^{k}p^{1/n}=p^{k/n}$.

Докажем, что в общем случае $P_0(t)=p^t$, t – произвольное неотрицательное число.

В силу сепарабельности множества рациональных чисел для произвольного действительного числа t и для произвольного n существует натуральное k, что $\frac{k-1}{n}\le t\le\frac{k}{n}$. Вследствие монотонного убывания функции $P_0\left(\frac{k}{n}\right)$, $\overline{k=1,n}$ (так как $p\le 1$ и с ростом k $p^{k/n}<p^{(k-1)/n}<...<p^{1/n}$) выполнено неравенство:

$$P_0\left(\frac{k-1}{n}\right)\ge P_0(t)\ge P_0\left(\frac{k}{n}\right),$$

или

$$p^{\frac{k-1}{n}}\ge P_0(t)\ge p^{\frac{k}{n}}.$$

Обозначим через $t=\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}$. Переходя к пределу в предыдущем неравенстве, по принципу милиционера получаем, что

$$p^t\ge P_0(t)\ge p^t,$$

т.е. $P_0(t)=p^t$ для любого t временного интервала.

Отметим, что полученная функция $P_0(t)=p^t$ является функцией вероятности, т.е. $0\le P_0(t)\le 1$. Имеем три взаимоисключающих случая:

a) $p=0$ b) $p=1$ c) $0<p<1$.

В случае a) $P_0(t)=0^t=0$, т.е. вероятность того, что хотя бы одно событие произойдет, равно единице. В случае b) $P_0(t)=1^t=1$ и события не наступают вовсе.

Остановимся подробнее на третьем случае $0<p<1$. В силу произвольности p можно подобрать такое λ, что $p=e^{-\lambda}$.

По определению вероятностного пространства, $P_0(t)+P_1(t)+P_{>1}(t)=1$. Так как по доказанному выше $P_0(t)=p^t=e^{-\lambda t}$, найдем разложение в ряд Маклорена функции $P_0(t)$. Имеем:

$$P_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k=1-\lambda t+\frac{\lambda^2 t^2}{2!}+o(t^2),$$

или

$$P_0(t)=1-\lambda t+o(t^2).$$

Кроме того,

$$P_1(t)=\lambda t+o(t).$$

Определим вероятность того, что за время $t+\Delta t$ событие наступит ровно k раз. События могут наступить в соответствии со следующей схемой:

1) за время t произойдет k событий, за Δt – ни одного;
2) за время t произойдет k-1 событие, за Δt – одно;
3) …

k+1) за время t произойдет 0 событий, за Δt – k.

По формуле полной вероятности

$$P_k(t+\Delta t)=\sum_{j=0}^{k}P_j(t)P_{k-j}(\Delta t).$$

Обозначим через $R_k=\sum_{j=0}^{k-2}P_j(t)P_{k-j}(\Delta t)$. Оценивая $P_j(t)$ сверху единицей, имеем:

$$R_k\le\sum_{j=0}^{k-2}P_{k-j}(\Delta t)=\sum_{s=2}^{k}P_s(\Delta t)<\sum_{s=2}^{\infty}P_s(\Delta t)=P_{>1}(\Delta t)=1-P_0(\Delta t)-P_1(\Delta t)=0(\Delta t).$$

Поэтому расписывая два слагаемых суммы $\sum_{j=0}^{k}P_j(t)P_{k-j}(\Delta t)$, начиная с конца, имеем:

$P_k(t+\Delta t)=P_k(t)P_0(\Delta t)+P_{k-1}(t)P_1(\Delta t)+R_k=$ (пользуемся оценками для R_k, а так же соотношениями для $P_0(t)$ и $P_1(t)$)$=(1-\lambda\Delta t)P_k(t)+\lambda\,\Delta t\,P_{k-1}(t)+0(\Delta t)$, откуда

$$P_k(t+\Delta t)-P_k(t)=-\lambda\Delta tP_k(t)+\lambda\Delta tP_{k-1}(t)+o(\Delta t),$$

или

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=-\lambda P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t)+o(\Delta t^2).$$

Учитывая, что предел правой части равенства при $\Delta t\to 0$ существует, существует предел левой части. Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dP_k}{dt}=-\lambda P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t),$$

где $P_k(t)$ – искомая функция, $k=\overline{1,\infty}$.

Зададим начальные условия. Так как $P_0(t)=1-\lambda t+0(t)$, то $P_0(0)=1$. Кроме того, $P_1(0)=0$, $P_{>1}(0)=1-P_0(0)-P_1(0)=0$, т.е. $P_k(0)=0, k>1$.

Для нахождения решения сделаем замену переменного $P_k=e^{-\lambda t}U_k(t)$, где $U_k(t)$ – новая переменная. Начальные условия перепишутся в виде:

$$U_0(0)=1, U_k(0)=0, k\ge 1.$$

В соответствии с тем, что $P_0(t)=p^t=e^{-\lambda t}$ получаем: $U_0(t)=1$.

В результате замены переменного $\frac{dP_k}{dt}=-\lambda e^{-\lambda}U_k(t)+e^{-\lambda}\frac{dU_k}{dt}$ уравнение приобретает вид:

$$\frac{dU_k}{dt}=\lambda U_{k-1}(t),\ k=\overline{1,\infty}.$$

Решим уравнение последовательно:

случай $k=1$ – $\frac{dU_1}{dt}=\lambda U_0(t)\Rightarrow U_1=\lambda t+C\Rightarrow C=0$ из краевых условий $\Rightarrow U_1=\lambda t$;

случай $k=2$ – $\frac{dU_2}{dt}=\lambda U_1(t)\Rightarrow U_2=\frac{\lambda^2t^2}{2!}+C_1\Rightarrow C_1=0$ из краевых условий $\Rightarrow U_2=\frac{\lambda^2t^2}{2!}$;

…

общий случай $-U_k=\frac{\lambda^k t^k}{k!}$.

Поэтому $P_k(t)=e^{-\lambda t}U_k(t)=\frac{\lambda^k t^k}{k!}e^{-\lambda t}$, т.е. используемое определение корректно.

Замечание: промежуток времени, прошедший между появлениями двух последовательных событий, является случайной величиной ξ. Т. к. событие $\xi>t$ эквивалентно тому, что за промежуток t событие не случится ни разу, то $P(\xi>t)=P_0(t)=e^{-\lambda t}$ или $P(\xi<t)=1-P(\xi>t)=1-e^{-\lambda t}$. Это равенство определяет функцию распределения случайной величины ξ.

3.4. БИНОМИАЛЬНЫЙ РЫНОК

Пусть на нашем финансовом рынке существует два типа активов: безрисковые (облигации) и рисковые (акции и т.п.). Обозначим через B_n цены облигаций, а через S_n– цены акций. Условимся, что $B_0=1$.

Далее, сопоставим ценам акций ценовые приращения $u_n=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}}$. Отметим, что u_n соответствует сложному проценту S_n за один день. Действительно, из равенства выше

$$S_{n-1}u_n=S_n-S_{n-1},$$

или

$$S_n=S_{n-1}(1+u_n). \tag{34}$$

Кроме того, пусть для цен B_n так же справедливо формула сложного процента с постоянной ставкой:

$$B_n=(1+r)^n B_0,\ n=1,2,3,\ldots$$

где r – безрисковая процентная ставка.

Предположим, что u_n являются независимыми, случайными и имеющими распределение Бернулли, т.е. принимают только два значения: a и b. Пусть вероятность $P\{u_n=b\}=p$, $P\{u_n=a\}=1-p=q$. Если общее число эмпирических данных равно N, то вероятностное пространство можно определить как N–мерное декартово произведение:

$$\Omega=\{a,b\}^N,$$

т.е. как пространство последовательностей длины N, причем на i–м месте может стоять или a, или b. Финансовый рынок, заданный на $\{\Omega,F_n,P\}$, называется биномиальным.

Зададим на вероятностном пространстве фильтрацию $\boldsymbol{F}$, полностью определяемую известными приращениями цен акций. Это означает, что любая случайная величина на $\{\Omega,F_n,P\}$, где F_n– некоторое подмножество фильтрации $\boldsymbol{F}$, зависит только от $u_1,u_2,\ldots,u_n$.

Пусть P – некоторая исходная вероятность, относительно которой рассматриваются случайные процессы B_n и S_n (или, что эквивалентно, известна функция распределения F). Найдем такую вероятность P^*(или функцию распределения F^*), относительно которой рисковый актив S_n в среднем близок к безрисковому B_n, т.е. S_n будет нейтральным к риску. Это означает, что выполнено следующее равенство:

$$E^*\left(\frac{S_n}{B_n}\right)=E^*\left(\frac{S_0}{B_0}\right)=\frac{S_0}{B_0}=S_0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{35}$$

где E^* – математическое ожидание относительно вероятностной меры P^*.

При n=1 имеем:

$$S_1 - S_0 = \text{(по (34))} = S_0 u_1,\ B_1 - B_0 = B_1 - 1 = r.$$

Поэтому дисконтированая цена составит

$$\frac{S_1}{B_1} = \frac{S_0(1+u_1)}{1+r}.$$

Следовательно, относительно риск – нейтральной вероятности имеем:

$E^*\left(\frac{S_1}{B_1}\right) = (S_0 \neq 0 - \text{число}) = \frac{S_0}{1+r} E^*(1+u_1) =$ (так как u_1 является бернулиевской СВ) $=$

$= \frac{S_0}{1+r}\left[(1+b)p^* + (1+a)q^*\right] = S_0$, причем последнее равенство справедливо так как выполнено (2), а $P\{u_1 = b\} = p^*$, $P\{u_1 = a\} = q^*$ и считаем мат. ожидание СВ напрямую.

Далее, сокращая на $S_0 \neq 0$, имеем:

$$\frac{1}{1+r}\left[(1+b)p^* + (1+a)q^*\right] = 1, \text{ или}$$

$$(1+b)p^* + (1+a)q^* = 1+r.$$

Вспоминая, что $q^* = 1 - p^*$, и раскрывая скобки, получаем:

$$p^*(b-a) = r - a,$$

т.е.

$$p^* = (r-a)(b-a)^{-1},$$

$$q^* = 1 - p^* = 1 - (r-a)(b-a)^{-1} = (b-r)(b-a)^{-1}. \qquad (36)$$

Полученное выражение не зависит от индекса n, т.е. (36) может быть применена для любой дисконтированной цены $\frac{S_n}{B_n}$. Кроме того, искомая риск–нейтральная вероятность P^* определяется однозначным образом через p^*, q^* посредством равенства (36).

Теорема 3.1: прогноз дисконтной цены $\frac{S_n}{B_n}$ на основе информации F_{n-1} и риск–нейтральной вероятности P^* при любом фиксированном n равен предыдущему значению этой цены $\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}$, или, что эквивалентно, $E^*\left(\frac{S_n}{B_n}\middle| F_{n-1}\right) = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}$, т.е. $\frac{S_n}{B_n}$ – мартингал.

Доказательство: воспользуемся свойством цен безрисковых активов:

$$B_n = (1+r)B_{n-1} = (1+r)^2 B_{n-2} = \ldots = (1+r)^n B_0.$$

Кроме того, выражение (34) можно записать в виде:

$$S_n = S_{n-1}(1+u_n) = S_{n-2}(1+u_n)(1+u_{n-1}) = \ldots = S_0(1+u_n)(1+u_{n-1})\cdot\ldots\cdot(1+u_1) = S_0\prod_{k=1}^{n}(1+u_k).$$

Тогда дисконтная цена может быть записана в виде:

$$\frac{S_n}{B_n} = \frac{S_0\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)}{(1+r)^n B_0}.$$

Как частный случай, имеем

$$\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}=\frac{S_0\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+u_k\right)}{\left(1+r\right)^{n-1}B_0}.$$

Следовательно, в силу независимости u_n и по свойствам математического ожидания получаем:

$E^*\left(\frac{S_n}{B_n}\middle|F_{n-1}\right)=\frac{S_0}{\left(1+r\right)^n}E^*\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+u_k\right)\middle|F_{n-1}\right)$=(так как все значения приращений при фильтрации F_{n-1} уже известны и являются константами. Неизвестно поведение лишь крайней СВ – u_n. Кроме того, по обозначениям выше имеем)=

$$=\frac{S_0}{\left(1+r\right)^n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+u_k\right)E^*\left(\left(1+u_n\right)\middle|F_{n-1}\right)=\frac{E^*\left(\left(1+u_n\right)\middle|F_{n-1}\right)}{\left(1+r\right)}\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}. \tag{37}$$

Вспомним, что $E^*\left(\left(1+u_n\right)\middle|F_{n-1}\right)$ = (так как u_n является бернулиевской СВ) = $\left(1+b\right)p^*+\left(1+a\right)q^*$. Поэтому $\frac{E^*\left(\left(1+u_n\right)\middle|F_{n-1}\right)}{\left(1+r\right)}=\frac{\left(1+b\right)p^*+\left(1+a\right)q^*}{\left(1+r\right)}=$(см. выше) = $\frac{1}{S_0}E^*\left(\frac{S_1}{B_1}\right)$= (по (35))= $\frac{1}{S_0}S_0=1$.

Окончательно в (37) получаем следующее выражение:

$$(37)=\frac{E^*\left(\left(1+u_n\right)\middle|F_{n-1}\right)}{\left(1+r\right)}\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}=\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\text{, ч.т.д.}$$

Замечание: мы показали, что $\frac{E^*\left(\left(1+u_n\right)\middle|F_{n-1}\right)}{\left(1+r\right)}=\frac{\left(1+b\right)p^*+\left(1+a\right)q^*}{\left(1+r\right)}=$ 1. Как следствие, $E^*\left(\left(1+u_n\right)\middle|F_{n-1}\right)=1+r$ или

$$E^*\left(u_n\middle|F_{n-1}\right)=r. \tag{38}$$

Последнее означает, что риск-нейтральное математическое ожидание ценовых приращений равно безрисковой процентной ставке.

Определение: пусть u_n – некоторая последовательность СВ, $\boldsymbol{F}$ – заданная фильтрация с подмножествами F_n. u_n называется мартингалом относительно F_s, *s*<*n*, если $E\left(u_n\middle|F_s\right)=u_s$.

В частности, при *s*=(*n*-1) $E\left(u_n\middle|F_{n-1}\right)=u_{n-1}$. Следовательно, теорема 3.1 показывает, что последовательность дисконтированных цен $\frac{S_n}{B_n}$ будет мартингалом относительно вероятностной меры P^*.

Рассмотрим β_n облигаций ценой B_n и γ_n акций ценой S_n. Составим из них портфель (стратегию) $\pi_n=\left(\beta_n;\gamma_n\right)$ с суммарным капиталом (стоимостью)

$$X_n^\pi=\beta_n B_n+\gamma_n S_n. \tag{39}$$

Определение: говорят, что на рынке имеется арбитражная возможность, если при нулевом начальном капитале возможно получение положительного дохода без несения дополнительного риска. Это означает, что существует портфель π, суммарный капитал которого удовлетворяет свойствам: $X_0^\pi=0; X_n^\pi>0;\ n\le N$ и $P\left\{X_N^\pi>0\right\}>0$.

Рынок, на котором не существует арбитражных возможностей, называется безарбитражным (совершенным).

Теорема 3.2: пусть X_n^π – некоторый стохастический капитал произвольного портфеля $\pi_n=\left(\beta_n;\gamma_n\right)$. Пусть ценовые приращения имеют распределение Бернулли, а $\beta_n=\beta$, $\gamma_n=\gamma$ –

не изменяющиеся во времени количества активов, т.е. $X_n^{\pi} = \beta B_n + \gamma S_n$. Тогда на рынке не существует арбитражных возможностей.

Доказательство: докажем, что дисконтированная стоимость портфеля $\frac{X_n^{\pi}}{B_n}$ является мартингалом относительно фильтрации $\boldsymbol{F}$ и вероятностной меры P^*. Имеем:

$$E^*\left(\frac{X_n^{\pi}}{B_n}\middle| F_{n-1}\right) = (\text{по } (39)) = E^*\left(\frac{\beta_n B_n + \gamma_n S_n}{B_n}\middle| F_{n-1}\right) = \beta_n + \gamma_n E^*\left(\frac{S_n}{B_n}\middle| F_{n-1}\right) = (\text{по теореме } 3.1) =$$

$$= \beta_n + \gamma_n \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} = (\text{так как } \beta_n = \beta,\ \gamma_n = \gamma) = \frac{\beta B_{n-1} + \gamma S_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{X_{n-1}^{\pi}}{B_{n-1}},$$ т.е. случайный процесс $\frac{X_n^{\pi}}{B_n}$ – мартингал.

Допустим противное, т.е. существует некоторая арбитражная стратегия π_n^1, реализующая арбитражную возможность на рынке. Тогда по определению $0 \le \frac{E\left(X_n^{\pi}\right)}{B_n} = E\left(\frac{X_n^{\pi}}{B_n}\right)$. По доказанному выше, $\frac{X_n^{\pi}}{B_n}$ – мартингал относительно произвольного портфеля π_n, а значит и относительно π_n^1:

$$E^*\left(\frac{X_n^{\pi_1}}{B_n}\right) = (\text{по } (35)) = E^*\left(\frac{X_0^{\pi_1}}{B_0}\right) = (\text{так как есть арбитражные возможности и } X_0^{\pi_1} = 0) = 0.$$

Известно, что на вероятностном пространстве вероятность P^* может быть записана через некоторую положительную СВ Z^*, при условии $E\left(Z^*\right) = 1$, причем для любого события A выполнено следующее равенство:

$$P^*(A) = E\left(Z^* I_A\right),$$

где I_A – индекс множества A. При этом для любой СВ X выполнено правило замены вероятности под знаком математического ожидания:

$$E^*(X) = E\left(Z^* X\right).$$

Воспользуемся этими фактами. Тогда

$$0 = X_0^{\pi_1} = \frac{X_0^{\pi_1}}{B_0} = E^*\left(\frac{X_n^{\pi_1}}{B_n}\right) = \frac{1}{B_n} E^*\left(X_n^{\pi_1}\right) = (\text{применяем замену}) = \frac{1}{B_n} E\left(Z^* X_n^{\pi_1}\right) \ge \frac{E^*\left(X_n^{\pi_1}\right)}{B_n} \cdot \min Z >$$

>0, так как Z^* положительна и минимум больше нуля, а $X_n^{\pi} > 0$ по определению арбитражной возможности. Получили противоречие, т.е. арбитражной особенности не существует, ч.т.д.

Лемма 3.3: пусть $M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k (u_k - r)$ – взвешенная сумма ценовых приращений u_k, имеющих распределение Бернулли, где M_0, φ_k, k=1, 2,…, n – некоторые действительные числа. Тогда M_n будет мартингалом относительно фильтрации $\boldsymbol{F}$ и вероятностной меры P^*.

Доказательство: действительно, $E^*\left(M_n \middle| F_{n-1}\right) = E^*\left(\left(M_0 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k (u_k - r)\right)\middle| F_{n-1}\right) =$ (так как все u_k детерминированы до номера k=n-1 включительно и по свойству математического ожидания)

$$= M_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k (u_k - r) + \varphi_n E^*\left((u_n - r)\middle| F_{n-1}\right) = (\text{по } (38)) = M_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k (u_k - r) = M_{n-1},$$ ч.т.д.

Замечание: можно показать, что все мартингалы на биномиальном рынке имеют представление $M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k (u_k - r)$, где φ_k, k=1, 2,…, n – предсказуемая последовательность.

Пусть f_N – функция выплаты в момент исполнения N. Тогда прогноз дисконтированной цены $E^*\left(\frac{f_N}{B_N}\middle| F_n\right)$ является мартингалом. Действительно, обозначая через $g_n = E^*\left(\frac{f_N}{B_N}\middle| F_n\right)$, имеем:

$E^*\left(g_{n+1} \middle| F_n\right) = E^*\left(E^*\left(\frac{f_N}{B_N}\middle| F_{n+1}\right)\middle| F_n\right) =$ (по свойству условной вероятности) $= E^*\left(\frac{f_N}{B_N}\middle| F_n\right) = g_n$,

ч.т.д.

Определение: ценой некоторого деривативa с функцией выплаты f_N назовем капитал $E^*\left(\frac{f_N}{B_N}\right)$.

Найдем цену $C_N(f) = E^*\left(\frac{f_N}{B_N}\right)$ опциона покупателя, для которого функция выплаты равна $f_N = \max\{S_N - E, 0\}$, где E – цена исполнения опционного контракта. Тогда

$$C_N(f) = E^*\left(\frac{f_N}{B_N}\right) = E^*\left(\frac{\max\{S_N - E, 0\}}{B_N}\right) = E^*\left(\frac{(S_N - E) I_{E \le S_N}}{(1+r)^N}\right). \tag{40}$$

Распишем $E^*\left((S_N - E) I_{E \le S_N}\right)$. Имеем:

$$E^*\left((S_N - E) I_{E \le S_N}\right) = \text{(по схеме Бернулли)} = \sum_{k=j}^{N} C_N^k \cdot \left(S_0 (1+b)^k (1+a)^{N-k} - E\right) \left(p^*\right)^k \left(q^*\right)^{N-k}, \tag{41}$$

где $p^* = \frac{r-a}{b-a}$, $j = \min\{k;\ S_k \ge E\} = \min\left\{k;\ S_0 (1+b)^k (1+a)^{N-k} \ge E\right\}$.

Легко получить, что $j = \left[\frac{\ln\left(S_0^{-1} K (1+a)^{-N}\right)}{\ln\left((1+b)(1+a)^{-1}\right)}\right] + 1$, где $[x]$ – целая часть числа x. Обозначим через $B(j, N, p) = \sum_{k=j}^{N} C_N^k \cdot p^k q^{N-k}$, $\bar{p} = \frac{1+b}{1+r} p^*$. Тогда второе слагаемое в (41) принимает вид:

$$-\sum_{k=j}^{N} C_N^k \cdot E \cdot \left(p^*\right)^k \left(q^*\right)^{N-k} = -E \cdot B\left(j, N, p^*\right).$$

В то же время, $\frac{1}{(1+r)^N} \sum_{k=j}^{N} C_N^k \cdot S_0 (1+b)^k (1+a)^{N-k} \left(p^*\right)^k \left(q^*\right)^{N-k} =$

$$= S_0 \sum_{k=j}^{N} C_N^k \left(\frac{1+b}{1+r} \cdot p^*\right)^k \left(\frac{1+a}{1+r} \cdot \left(1 - p^*\right)\right)^{N-k} = S_0 \sum_{k=j}^{N} C_N^k\, \bar{p}^k (1 - \bar{p})^{N-k} = S_0\, B(j, N, \bar{p}).$$

Собирая все в (7), окончательно имеем:

$$C_N(f) = E^*\left(\frac{(S_N - E) I_{E \le S_N}}{(1+r)^N}\right) = S_0\, B(j, N, \bar{p}) - \frac{E}{(1+r)^N} \cdot B\left(j, N, p^*\right). \tag{42}$$

Выражение (42) называется формулой **Кокса – Росса – Рубинштейна**. Она задает значение цены деривативa с функцией выплаты $f_N = \max\{S_N - E, 0\}$ в начальный момент времени t=0, когда цена базового актива равна S_0. Можно показать, что в произвольный момент времени $t=n$, $n<N$, цена $C_{N,n}(f)$ деривативa будет вычисляться по формуле:

$$C_{N,n}(f) = S_n\, B(j_n, N-n, \overline{p}) - \frac{E}{(1+r)^{N-n}} \cdot B(j_n, N-n, p^*),$$

где $j_n = \min\{k \ge n; S_k \ge E\}$.

Используя соотношение $\max\{E - S_N, 0\} = \max\{S_N - E, 0\} - (S_N - E)$ и зная цену опциона покупателя можно получить цену опциона продавца $P_N(f)$ с функцией выплаты $f_N = \max\{E - S_N, 0\}$. Действительно

$$P_N(f) = E^*\left(\frac{f_N}{B_N}\right) = E^*\left(\frac{\max\{E - S_N, 0\}}{B_N}\right) = E^*\left(\frac{\max\{S_N - E, 0\} - (S_N - E)}{B_N}\right) =$$

$= E^*\left(\dfrac{\max\{S_N - E, 0\}}{B_N}\right) - E^*\left(\dfrac{(S_N - E)}{B_N}\right) =$(так как первое слагаемое есть не что иное как (40))=

$= C_N(f) - E^*\left(\dfrac{S_N}{B_N}\right) + E^*\left(\dfrac{E}{B_N}\right) =$(по теореме 3.1 $\dfrac{S_N}{B_N}$ – мартингал и по формуле (35) $E^*\left(\dfrac{S_n}{B_n}\right) = S_0$) $= C_N(f) - S_0 + E^*\left(\dfrac{E}{B_N}\right) =$(так как $B_N = (1+r)^N$) =

$$= C_N(f) - S_0 + E^*\left(\frac{E}{(1+r)^N}\right) = C_N(f) - S_0 + E(1+r)^{-N}.$$

Окончательно,

$$P_N(f) = C_N(f) - S_0 + E(1+r)^{-N}. \tag{43}$$

Соотношение (43) называется соотношением *call – put* и помогает определить цену одного опциона через другой. Кроме того, иногда (43) называют паритетом цен покупателя и продавца.

Замечание: формулы (42), (43) при переходе к непрерывному времени при $n \to \infty$(по закону больших чисел Бернулли в пределе появится нормальное распределение) преобразуются в формулу Блэка – Шоулса вида:

$$C(f) = S_0\, F(d_1) - E\, e^{-r(T-t)} F(d_2),$$

$$P(t) = -S_0\, F(-d_1) + E\, e^{-r(T-t)} F(-d_2),$$

где $d_1 = \dfrac{\ln S_0 - \ln E + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sqrt{(T-t)}\,\sigma}$, $d_2 = \dfrac{\ln S_0 - \ln E + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sqrt{(T-t)}\,\sigma}$, $F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds$

.

Для произвольной функции выплаты f_N цена соответствующего финансового обязательства $C_N(f) = E^*\left(\dfrac{f_N}{B_N}\right)$ обладает следующими свойствами:

1) Она устраивает продавца опциона, ибо при правильном инвестировании всегда имеется возможность наряду с доходом $C_N(f)$ получить дополнительный доход или расплатиться в случае неудачи.
2) Она устраивает и покупателя опциона, так как он платит наименьшую величину, достаточную для хеджирования рисков продавца.

3) Следствие 1) – 2): цена контракта $C_N(f)$ справедливая, так как устраивает и продавца, и покупателя.
4) Если продавец опциона продает свою бумагу по цене V, превышающей справедливую $C_N(f)$, то он приобретает арбитражную возможность: хеджировать риск на сумму $C_N(f)$, а остаток V-$C_N(f)$ инвестировать с безрисковой процентной ставкой r.
5) Если продавец опциона продает свою бумагу по цене V меньшей справедливой $C_N(f)$, то уже покупатель приобретает доход $C_N(f)$- V.

БИНОМИАЛЬНЫЕ ДЕРЕВЬЯ

Биномиальные деревья являются удобным инструментом для организации вычисления справедливой стоимости деривативов. Для опционов европейского типа адекватность их применения подтверждается выведенной ранее формулой Кокса-Росса-Рубинштейна (42). Обоснование применения расчетов в случае других производных инструментов приведено в [22].

Вычислим справедливую цену f опциона европейского типа. Пусть начальная цена базового актива равна S_0, время жизни опциона есть T. Пусть n – число периодов, на которые мы разбиваем время действия опциона, т.е. одному периоду изменения цены будет соответствовать время T/n. За один период времени цена базового актива может повыситься с долей $u>1$ до S_0u с некоторой вероятностью p. С вероятностью (1-p) она может упасть до S_0d, $d<1$, причем $d=1/u$. Пусть для цены S_0u функция выплаты по опциону составит f_u, а для цены S_0d она будет равна f_d.

Схематичное поведение однопериодного биномиального дерева приведено на рис. 6.

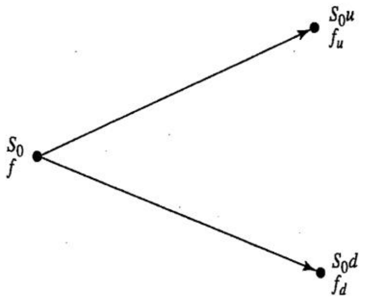

Рис. 6. Цена базового актива и значение функции выплаты для однопериодного биномиального дерева

Вычислим безрисковую $\Delta = \dfrac{\partial f}{\partial S}$, чтобы портфель из Δ купленных акций и проданного как покрытие опциона был безрисковым со ставкой r.

Если к концу первого периода цена акции выросла, то стоимость портфеля составит

$$S_0u\Delta\text{-}f_u.$$

Если к концу первого периода цена акции понизилась, то стоимость портфеля составит

$$S_0d\Delta\text{-}f_d.$$

Если портфель безрисковый, эти количества должны совпасть:

$$S_0u\Delta\text{-}f_u = S_0d\Delta\text{-}f_d.$$

Находим Δ:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}.$$

Так как портфель безрисковый, к концу первого периода получаемые денежные средства должны быть приведены к текущей стоимости со ставкой r, т.е. ее нужно дисконтировать на $e^{rT/n}$. Будущий доход в текущих ценах составит $(S_0u\Delta - f_u)e^{-rT/n}$.

Аналогично, для второго случая – $\left(S_0 d\Delta - f_d\right)e^{-rT/n}$ (но в дальнейшем он нам не понадобится). Стоимость формирования портфеля из Δ акций и одного проданного опциона есть $\left(S_0\Delta - f\right)$. Эти стоимости должны совпадать:

$$\left(S_0 u\Delta - f_u\right)e^{-rT/n} = \left(S_0\Delta - f\right),$$

откуда

$$f = S_0\Delta - \left(S_0 u\Delta - f_u\right)e^{-rT/n} = S_0\Delta\left(1 - ue^{-rT/n}\right) + f_u e^{-rT/n}.$$

Подставляя в найденное выражение $\Delta = \dfrac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}$ и упрощая, окончательно имеем:

$$f = e^{-rT/n}\left(pf_u + (1-p)f_d\right),$$

где $p = \dfrac{e^{rT/n} - d}{u - d}$.

Пример: зачастую параметр p задается самостоятельно. Это вероятность успеха в биномиальном распределении. Однако если все остальные характеристики известны, p можно и оценить. Например, если u=1,1, d=0,9, r=0,12, T=0,25, f_u =1, f_d =0. Тогда p=0,6523.

Найденное значение вероятности $p = \dfrac{e^{rT/n} - d}{u - d}$ можно использовать, чтобы найти цену базового актива в конце первого периода биномиального дерева. Действительно, пользуясь биномиальным распределением, имеем:

$$E\left(S_1\right) = pS_0 u + (1-p)S_0 d = pS_0(u - d) + S_0 d = S_0 e^{rT/n}.$$

По аналогии,

$$E\left(S_2\right) = pS_1 u + (1-p)S_1 d = S_0 e^{2rT/n},$$

$$\ldots$$

$$E\left(S_n\right) = S_0 e^{rT},$$

т.е. цена базового актива растет в среднем на величину безрисковой процентной ставки.

Использование будущей цены Sn позволяет найти цену любого опциона по формуле

$$C_n(fv) = E^*\left(\frac{fv_n}{e^{rT}}\right),$$

где fv_n – функция выплаты соответствующего опциона на n-ом периоде биномиального дерева. Для опциона покупателя европейского типа она совпадает с формулой (42) с p^*=p.

Замечание: чтобы связать параметры u и d с волатильностью σ цен базового актива, вычисленной в течение одного периода T/n дерева, используют следующие соотношения [22]:

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}},\ d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}}.$$

Можно показать [22], что с ростом n решение, полученное с помощью биномиального дерева, сходится к точному. При практических вычислениях n выбирают большим 30, потому что этого достаточно, чтобы смоделировать 2^{30} комбинаций цен базового актива или около 1 млрд шт.

4. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБРАБОТКИ ЭМПИРИЧЕСКИХ ДАННЫХ

4.1 ВВЕДЕНИЕ. ТРЕНДЫ

Рассмотрим временной ряд x_t вида

$$x_t = \tau_t + v_t + \varepsilon_t,$$

где τ_t – трендовая составляющая или медленное изменение временного ряда в некотором направлении, которое сохраняется в течение длительного промежутка времени, v_t – сезонная составляющая или изменения, которые происходят регулярно на ежегодной, ежемесячной, еженедельно и т.п. основе, например, выходные дни каждой недели или Новый год, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

С экономической точки зрения очень часто происходит так, что вместо аддитивного влияния тренда, сезонности и шума на значения временного ряда x_t оно мультипликативное:

$$x_t=\tau_t v_t exp(\varepsilon_t),$$

которое можно записать в аддитивном виде, прологарифмировав.

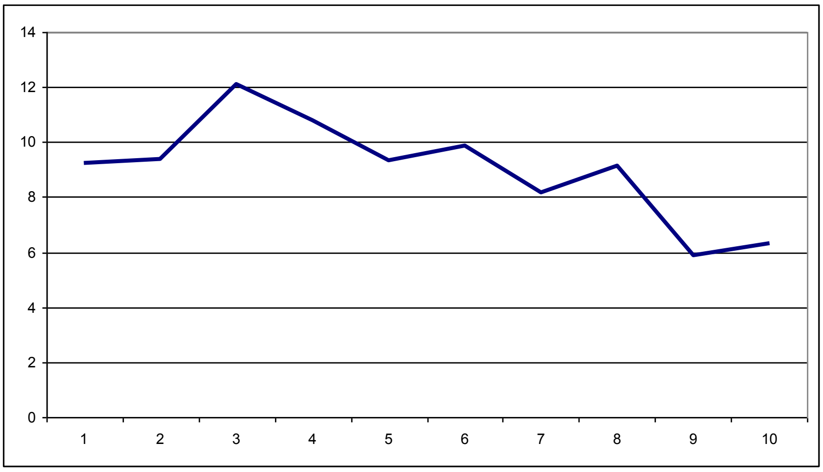

Рис. 7. Сезонность и тренд временного ряда

Существует три вида трендов:
1. Тренд среднего – временной ряд выглядит как колебания около медленно возрастающей или убывающей величины;
2. Тренд дисперсии – временной ряд имеет изменяющиеся во времени амплитуды колебаний (гетероскедастичность процесса);
3. Тренд автоковариации (автокорреляции) – временной ряд обладает изменчивостью корреляции между текущим и предшествующим значением ряда.

Тренды среднего бывают:
- полиномиальный тренд:

$$\tau_t=a_0+ a_1t+\ldots+ a_nt^n,$$

который при n=1 превращается в линейный тренд;
- экспоненциальный тренд:

$$\tau_t=\exp(a_0+ a_1t+\ldots+ a_nt^n),$$

- гармонический тренд

$$\tau_t=R \cos(\omega t+\varphi),$$

где R– амплитуда колебаний, ω – частота, φ – фаза колебаний.
- тренд, описываемый логистической функцией

$$\tau_t = \frac{k}{1+be^{-at}}.$$

Для оценки коэффициентов полиномиального или экспоненциального тренда нужно использовать обычный МНК после введения новой переменной $z_j = t^j$, j=1,2,…, n.

Гармонический тренд стоит использовать, если в структуре исходных данных отчетливо прослеживаются периодические колебания. Фиксируя ω или задавая ее оценку, гармонический тренд можно представить в виде $\tau_t=a \cos(\omega t)+ b\ sin(\omega t)$ и использовать для оценки неизвестных коэффициентов a, b МНК.

Замечание: можно показать, что наименьшая дисперсия ошибки регрессионной модели достигается на ортогональных многочленах. Заменяя систему функций $\{1, t,\ldots, t^n\}$ на такие многочлены, например, многочлены Чебышева, Эрмита, Лаггера, мы добиваемся наилучшей точности.

Далее, для моделирования сезонной составляющей можно использовать фиктивные переменные:

$$v_t=\lambda_1\delta_{1t}+ \lambda_2\delta_{2t}+\ldots+ \lambda_p\delta_{pt}, \qquad (*)$$

где δ_{it}–сезонные фиктивные переменные. $\delta_{jt}=1$ в сезон j и нуль в остальное время, p – общее число сезонов.

Замечание: в моменты времени s окончания j-го сезона и начала $(j+1)$–го необходимо учитывать фиктивные переменные в (*) более точно. Для этого требуется полагать $\delta_{j,s}=\delta_{j+1,s}=\frac{1}{2}$, т.е. сумма весов должна быть равна 1.

Отметим, что по построению $\delta_{1t}+\delta_{2t}+\ldots+\delta_{pt}=1$, т.е. слагаемые в (*) будут линейно-зависимыми. Значит, не найдется p линейно-независимых условий для оценивания неизвестных λ_1, $\lambda_2,\ldots\lambda_p$. Поэтому потребуем дополнительно выполнения условия нормировки вида

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_p=0,$$

что означает: сезонная компонента центрирована и влияние эффекта сезонности на уровень ряда x_t оказывается равным нулю.

Подставим условие нормировки $\lambda_1=-\lambda_2-\ldots-\lambda_p$ в (*):

$$v_t=(-\lambda_2-\ldots-\lambda_p)\delta_{1t}+ \lambda_2\delta_{2t}+\ldots+ \lambda_p\delta_{pt}= \lambda_2(\delta_{2t}–\delta_{1t})+ \lambda_3(\delta_{3t}–\delta_{1t})+\ldots+ \lambda_p(\delta_{pt}–\delta_{1t}).$$

В последнем выражении переменные, стоящие в скобках, будут уже линейно-независимыми. Получили обычную линейную регрессию с $(p-1)$ неизвестным коэффициентом. При этом j-е слагаемое $\lambda_j(\delta_{jt}–\delta_{1t})$ в v_t означает отклонение от основной динамики временного ряда на величину λ_j.

Пример: используем для оценки исходного временного ряда x_t полиномиальный тренд и сезонность вида (*):

$$x_t=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n+\lambda_1\delta_{1t}+\lambda_2\delta_{2t}+\ldots+\lambda_p\delta_{pt}+\varepsilon_t,$$

где $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_p=0$. Это линейная регрессия, для оценки $(n+p+1)$ неизвестного коэффициента нужно использовать МНК. Вектор неизвестных параметров есть $\Theta^T=\left(X^TX\right)^{-1}X^TY$, где X – матрица исходных данных, включая первый единичный столбец для определения постоянной a_0, Y – вектор-столбец значений x_t. Остальные элементы матрицы X задаются по следующим правилам:

1. При учете трендовой составляющей время задается как есть, т.е. $t=1, 2, \ldots, n$. Для учета квадратичного тренда $t^2=1, 4, \ldots, n^2$. Переходить к безразмерному времени не требуется;
2. для определения коэффициентов λ_j сезонной составляющей (*) нужно создать подматрицу Z, в которой для j-го сезона требуется выделить целый столбец. В этом столбце фиктивные переменные равны единице во все моменты времени, относящиеся к этому сезону, кроме пограничных. В моменты времени сшивки двух сезонов (окончания j-го и начала $(j+1)$-го сезонов), фиктивные переменные должны быть равны ½, чтобы сумма весов по строкам матрицы Z была равна 1;
3. полученную выше матрицу Z следует подвергнуть преобразованию и получить матрицу $\overline{Z}$: вычесть из j-го столбца Z первый ее столбец и оставить результат в $(j-1)$-м столбце $\overline{Z}$, $j>1$. Присоединить элементы матрицы $\overline{Z}$ к матрице, описывающей трендовую составляющую, справа. Это и будет матрица X исходных данных для оценки регрессионной модели.

После нахождения оценок коэффициентов Θ требуется вычислить $\lambda_1=-\lambda_2-\ldots-\lambda_p$, так как он не входит в число уже найденных параметров.

Например, пусть требуется оценить коэффициенты модели вида (линейный тренд и два сезона по времени):

$$x_t = a_0 + a_1 t + \lambda_1 \delta_{1t} + \lambda_2 \delta_{2t}.$$

Пусть t=1, 2, 3, 4 – наблюдаемые моменты времени. Пусть первый сезон длится с t=1 по t=2, второй – с t=2 по t=4. Тогда подматрица $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а $\overline{Z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда общая матрица исходных данных $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. При этом $\lambda_1 = -\lambda_2$.

СГЛАЖИВАНИЕ ВРЕМЕННОГО РЯДА

При построении тренда τ_t вместо оценивания его коэффициентов можно использовать метод скользящих средних, когда значения временного ряда x_t заменяются последовательностью вычисленных на перемещаемом отрезке средних его величин. Пусть (2m+1) – длина некоторого отрезка времени. Подберем полином

$$\tau_t = a_0 + a_1 t + \ldots + a_p t^p,\ p < m,$$

к группе первых (2m+1) членов ряда. Этот полином будем использовать в дальнейшем при определении значения тренда в точке t=(m+1), т.е. в середине выбранного отрезка. Далее временной отрезок сдвигается на единицу вправо, т.е. рассматриваются моменты 2, 3, …, (2m+2) и вычисления повторяются: находится значение τ_{m+2}. Проводим процедуру до тех пор, пока не будет достигнута последняя группа из (2m+1) точек.

Поиск коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_p$ полинома осуществляем с помощью МНК по первым (2m+1) точкам:

$$F = \sum_{t=-m}^{m} \left(x_t - a_0 - a_1 t - \ldots - a_p t^p \right)^2,$$

причем начало расчетов сдвинуто в точку t=m. Дифференцирование F по параметрам $a_0, a_1, \ldots, a_p$ приводит к СЛАУ из (p+1) уравнения вида:

$$a_0 \sum_{t=-m}^{m} t^j + a_1 \sum_{t=-m}^{m} t^{j+1} + \ldots + a_p \sum_{t=-m}^{m} t^{j+p} = \sum_{t=-m}^{m} x_t t^j,\ j=0, 1, \ldots, p. \qquad (*)$$

Заметим, что в этом равенстве все суммы с нечетными степенями j равны нулю (в силу симметрии относительно начала суммирования и из-за наличия нечетных индексов):

$$\sum_{t=-m}^{m} t^j = 0.$$

Кроме того, полином, проходящий через (2m+1) точку, используется только для вычисления значения в точке t=m, или в новых обозначениях индекса суммирования, в точке t=0. Поставляя t=0 в $\tau_t = a_0 + a_1 t + \ldots + a_p t^p$, получаем значение a_0. Система (*) разбивается на две подсистемы: в первой участвуют только коэффициенты с четными индексами $a_0, a_2, \ldots$, а во второй – только с нечетными $a_1, a_2, \ldots$. Решение (*) относительно a_0 зависит от численных значений $\sum_{t=-m}^{m} t^j = 0$ и линейных функций типа $\sum_{t=-m}^{m} x_t t^j$. В итоге, $a_0 = \sum_{t=-m}^{m} x_t \beta_t$ – некоторое среднее арифметическое с весами β_t, зависящими от m и p. Найденное выражение для a_0 применяется в дальнейшем для всех последующих временных отрезков скольжения без пересчета β_t, так как процедура определения значений тренда в середине нового отрезка эквивалентна нахождению значения $\sum_{t=-m}^{m} x_t \beta_t$ в новой точке середины t [23].

Пример: пусть временной ряд задан пятью точками и m=p=2. Система (*) будет расписана в виде:

$$\begin{cases} \sum_{t=-2}^{2} a_0 + a_1 \sum_{t=-2}^{2} t + a_2 \sum_{t=-2}^{2} t^2 = \sum_{t=-2}^{2} x_t, \\ a_0 \sum_{t=-2}^{2} t + a_1 \sum_{t=-2}^{2} t^2 + a_2 \sum_{t=-2}^{2} t^3 = \sum_{t=-2}^{2} x_t t, \\ a_0 \sum_{t=-2}^{2} t^2 + a_1 \sum_{t=-2}^{2} t^3 + a_2 \sum_{t=-2}^{2} t^4 = \sum_{t=-2}^{2} x_t t^2. \end{cases}$$

Вычисляя суммы, получаем:

$$\begin{cases} 5a_0 + 10a_2 = \sum_{t=-2}^{2} x_t, \\ 10a_1 = \sum_{t=-2}^{2} x_t t, \\ 10a_0 + 34a_2 = \sum_{t=-2}^{2} x_t t^2. \end{cases}$$

или, например,

$$a_0 = \frac{1}{35}\left(17 \sum_{t=-2}^{2} x_t - 5 \sum_{t=-2}^{2} x_t t^2\right) = \frac{1}{35}\left(-3x_{-2} + 12x_{-1} + 17x_0 + 12x_1 - 3x_2\right).$$

Найденные значения коэффициентов a_0, a_1, a_2 окончательно определяют значения тренда $\tau_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ во всех оставшихся точках t=m+1, t=m+2, …, t=n. Запись вида, например,

$$a_0 = \frac{1}{35}\left(-3x_{-2} + 12x_{-1} + 17x_0 + 12x_1 - 3x_2\right)$$

все время понимается относительно новой середины временного отрезка, например, t=(m+1), t=(m+2) и т.д.

Для облегчения практических расчетов приведем ниже таблицу весов β_t в зависимости от степени полиномов и ширины отрезков скольжения (по данным [23]). Результаты представлены в виде векторов.

Таблица

Некоторые рассчитанные значения весовых коэффициентов [23]

Длина отрезка скольже-ния		Степени полинома	
$2m+1$	m	$p=2, p=3$	$p=4, p=5$
5	2	$\frac{1}{35}(-3, 12, 17, 12, -3)$	
7	3	$\frac{1}{21}(-2, 3, 6, 7, 6, 3, -2)$	$\frac{1}{231}(5, -30, 75, 131, 75, -30, 5)$
9	4	$\frac{1}{231}(-21, 14, 39, 54, 59, 54, 39, 14, -21)$	$\frac{1}{429}(15, -55, 30, 135, 179, 135, 30, -55, 15)$

4.1.1 СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ АНАЛИЗЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Определение: временной ряд x_t называется слабо стационарным, если математическое ожидание и дисперсия не зависят от сдвига временного аргумента:

$$\mu = E(x_t) = E(x_{t+p}),\ \sigma^2 = D(x_t) = D(x_{t+p}) \quad \forall p = 1, 2, \ldots$$

Определение: автоковариацией k-го порядка временного ряда x_t называется число

$$\gamma_k = E((x_t - Ex_t)(x_{t+k} - Ex_{t+k})).$$

Определение: выборочной автоковариацией k-го порядка временного ряда x_t называется число

$$c_k = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}).$$

Определение: автокорреляцией k-го порядка временного ряда x_t называется число

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}.$$

Определение: выборочной автокорреляцией k-го порядка временного ряда x_t называется число

$$r_k = \frac{c_k}{c_0}.$$

Известно, что выборочные автокорреляции имеют нормальное асимптотическое распределение. При большом количестве наблюдений $E(r_k) = \rho_k$. Дисперсия имеет вид (Бартлетт):

$$D(r_k) \approx \frac{1}{T}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\rho_j^2 + \rho_{j-k}\rho_{j+k} - 4\rho_k\rho_j\rho_{j+k} + 2\rho_k^2\rho_j^2\right),$$

а ковариация двух автокорреляций есть

$$\operatorname{cov}(r_k, r_l) \approx \frac{1}{T}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\rho_{j+k}\rho_{j+l} + \rho_{j-k}\rho_{j+l} - 2\rho_k\rho_j\rho_{j+l} - 2\rho_l\rho_j\rho_{j+k} + 2\rho_k\rho_l\rho_j^2\right).$$

Здесь под автокорреляциями с отрицательными индексами стоит понимать автокорреляции в «дальнем прошлом», а с большими положительными – в «дальнем будущем». Заметим так же, что для процессов без памяти (например, для марковских процессов или для винеровского процесса) все $\rho_k = 0$, если k>0, и $D(r_k) \approx \frac{T-k}{T(T+2)}$, а $\operatorname{cov}(r_k, r_l) = 0$.

СЛУЧАЙНОСТЬ ДАННЫХ

Используем несколько выборочных автокорреляций $r_1, r_2, \ldots r_m$, $m<T$, для доказательства гипотезы о случайности значений исходного временного ряда x_t. Рассмотрим Q-статистику **Льюнга-Бокса** в предположении о нормальности распределения значений x_t:

$$Q(r) = \sum_{k=1}^{m} \frac{r_k^2}{D(r_k)} = T(T+2)\sum_{k=1}^{m} \frac{r_k^2}{T-k} \sim \chi_\alpha^2(m).$$

Было показано, что статистический критерий работает даже в условиях отсутствия нормального закона распределения для исходного временного ряда (выполнена ЦПТ, т.е. дисперсия $D(x_t) < \infty$). Нулевая гипотеза состоит в том, что ряд x_t является винеровским процессом, т.е. процессом с независимыми приращениями и нулевым средним. Если значение статистики $Q(r)$ больше критического (табличного) значения функции распределения при заданном уровне значимости и числе степеней свободы, то признается наличие ненулевых автокорреляций до порядка m включительно.

Для проверки случайности можно использовать и другие критерии, например, непараметрический **критерий Спирмена**. Если ряд x_t случайный, то распределение отдельного наблюдения не зависит от того, на каком месте он в этом ряде стоит. Если упорядочить значения x_t, например, по возрастанию или по убыванию, получив новый ряд y_t, и сравнить полученные значения с исходной последовательностью, вычислив корреляцию между значениями рядов

$$r = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t\, y_t}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T} x_t^2 \sum_{t=1}^{T} y_t^2}},$$

или корреляцию между порядком следования элементов в старом и новом ряде (скажем, t и $p=\theta_t$):

$$r = \frac{\sum_{t=1}^{T} t\,\theta_t}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T} t^2 \sum_{t=1}^{T} \theta_t^2}}$$

Можно показать, что для чисто случайных процессов r имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $1/(T$-1). Поэтому для проверки гипотезы о случайности значение r нужно проверять с квантилями нормального распределения уровня α и (1- α).

Замечание: при малых объемах выборки вместо r используют статистику, распределенную по Стьюденту:

$$\gamma = r\sqrt{\frac{T-2}{1-r^2}} \sim t_\alpha(T-2).$$

Гипотеза о случайности отвергается, если (в случае двухсторонней гипотезы) $|\gamma| > t_{1-\alpha/2}(T-2)$.

СТАЦИОНАРНОСТЬ ВРЕМЕННОГО РЯДА

Автокорреляции удобны и для проверки временного ряда на стационарность. Конкретный вид статистической гипотезы зависит от типа эконометрической модели, поэтому он будет приведен позднее при рассмотрении того или иного алгоритма. В целом можно заметить, что для выявления стационарности нужно вычислять автокорреляции до некоторого порядка и заметить, что коррелограмма быстро убывает после нескольких первых значений (первое значение может быть любым). Если же автокорреляция первого порядка близка к единице, а коррелограмма медленно убывает по экспоненте, то это свидетельствует о нестационарности x_t.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ

Пусть для временного ряда $x_t=\tau_t+\nu_t+\varepsilon_t$ вычислены автокорреляции до k-го порядка включительно. Проверим статистическую гипотезу о величине первой автокорреляции ρ_1, вычисляя статистику Дарбина-Уотсона (**DW-test**):

$$\gamma = \frac{\sum_{t=2}^{T}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2},$$

e_t – погрешность модели (разность между наблюдаемым и модельным значением). Значения статистики γ лежат в интервале [0,4]. Распределение статистики известно и имеет два критических значения: d_l и d_u, их значения приведены в таблицах. Выдвигаем нулевую гипотезу H_0: $\rho_1=0$, где ρ_1 - первая автокорреляция (остальные автокорреляции статистически не проверяются). Нулевая гипотеза о нулевой автокорреляции подтверждается, если $d_u<\gamma<4-d_u$. H_0 отклоняется в пользу альтернативы о наличии положительной автокорреляции, если $\gamma<d_l$. H_0 отклоняется в пользу альтернативы о наличии отрицательной автокорреляции, если $4-d_l<\gamma$. Зона неопределенности критерия, когда нельзя ни принять основную гипотезу, ни принять альтернативную, состоит из двух интервалов, описываемых неравенствами: $d_l<\gamma<d_u$ и $4-d_u<\gamma<4-d_l$.

4.2. ЛИНЕЙНАЯ И НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИИ

Регрессионный анализ – это статистический метод исследования функциональной связи случайной величины y от переменных $x_i,\ i=\overline{1,n}$, рассматриваемых как неслучайные (известные) многомерные случайные величины с произвольной функцией распределения.

Задачей регрессионного анализа является построение зависимости изучаемой случайной величины y от факторов x по результатам наблюдения:

$$y = f(x,\theta) + \xi, \tag{43.1}$$

где θ – неизвестные параметры, ξ– случайные ошибки или остатки, $y_i = y(x_i) = f(x_i,\theta) + \xi(x_i)$ – независимые наблюдения, $i=\overline{1,n}$.

Регрессионные модели бывают линейными и нелинейными. В линейной регрессионной модели функция $f(x,\theta)$ линейна по параметрам. Уравнение линейной регрессии записывается следующим образом:

$$\hat{y} = f(x,\hat{\theta}) = \hat{\theta}^T\varphi(x), \tag{43.2}$$

где $\varphi^T(x) = (\varphi_1(x) \dots \varphi_m(x))$– известные функции, $m<n$, $\hat{\theta}$ – оценка параметров регрессии.

Будем рассматривать линейные оценки истинных параметров. Можно найти оценки $\hat{\theta}$, которые являются состоятельными, несмещенными и обладают наименьшими дисперсиями среди множества всех линейных несмещенных оценок. Такие оценки называются наилучшими линейными оценками, и в случае независимых и распределенных с одинаковыми дисперсиями случайными ошибками ξ вычисляются по формуле:

$$\hat{\theta} = I^{-1}Z,$$

где матрица I размерности mxm равна (умножаем вектор-столбец на вектор-строку размерности 1xm)

$$I = \sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\,\varphi^T(x_i),$$

матрица Z размерности mx1 равна (столбец)

$$Z = \sum_{i=1}^{n} y_i\varphi(x_i).$$

Средний квадрат ошибки прогноза равен

$$D(\hat{y}) = \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2,$$
где m – число оцениваемых параметров.

Ковариационная матрица ошибок оценок $\hat{\theta}$ равна
$$A(\hat{\theta}) = D(\hat{y})I^{-1}.$$

Ширина коридора ошибок в данном случае определяется по формуле:
$$O(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\sqrt{d(x)} \quad ,$$
где α – уровень значимости, а $d(x) = D(\hat{y})\varphi^T(x)A(\hat{\theta})\varphi(x)$.

Для оценивания точности регрессионной модели используют коэффициент детерминации. Коэффициентом детерминации называется число:
$$K_d = 1 - D(\xi)D(y)^{-1}.$$

Коэффициент детерминации определяет наличие функциональной связи вида (43.2). Если $K_d = 0$, то $D(\xi) = D(y)$, то есть неучтенные ошибки будут определяющими. Следовательно, линейная связь между $x_1 \dots x_n$ и y отсутствует. Если $K_d = 1$, то $D(\xi) = 0$, то вектор y однозначно определяется переменными$x_1 \dots x_n$. Если $0{,}01 \le K_d \le 0{,}09$, то связь между $x_1 \dots x_n$ и y недостаточно подтвержденная. Если $0{,}1 \le K_d \le 0{,}49$, то говорят о наличии средней связи. При $K_d \ge 0{,}5$, применение линейной регрессии обосновано и связь сильная.

Статистическое оценивание значимости регрессионной модели и ее параметров

После построения модели линейной регрессии необходимо провести статистическое оценивание значимости полученной модели. В случае нормального распределения ошибок наблюдений оценивание значимости линейной регрессионной модели можно проводить по F-критерию Фишера. Необходимо вычислить статистику

$$F_{\text{набл}} = \frac{n-m-1}{m+1}(\theta^T\varphi(x))^T(\theta^T\varphi(x))[(y - (\theta^T\varphi(x)))^T(y - \theta^T\varphi(x))]^{-1},$$
где m - число компонент вектора $\hat{y}$. Теоретическую статистику определяют по таблицам при заданном уровне значимости и числе степеней свободы $\nu_1 = n - m - 1, \nu_2 = m + 1$. Надежность регрессионной модели подтверждается, если значение наблюдаемой статистики превышает значение теоретической статистики.

Статистическое оценивание надежности коэффициентов регрессии $\hat{\theta}$ производится с помощью t-критерия Стьюдента. Наблюдаемая статистика вычисляется по формуле:
$$t_{\text{набл},i} = \hat{\theta}_i\left[\sqrt{\frac{\left(y-\theta^T\varphi(x)\right)^T(y-\theta^T\varphi(x))c_{ii}}{n-m-1}}\right]^{-1},$$
где c_{ii} - диагональные элементы матрицы I^{-1}, n – число данных, m – число параметров.

Значение наблюдаемой статистики сравнивают с теоретическим значением t-критерия Стьюдента при заданном уровне значимости и числе степеней свободы $\nu = n - m - 1$. Значимость коэффициента $\hat{\theta}_i$ подтверждается, если выполняется неравенство
$$|t_{\text{набл},i}| < t_{\text{теор}}.$$

Статистическое оценивание коэффициента детерминации проводится с помощью F-критерию Фишера. Вычисляют статистику Снедекора:
$$FS_{\text{набл}} = \frac{n-m}{m-1}K_d[1 - K_d]^{-1}$$

Теоретическую статистику определяют по таблицам при заданном уровне значимости и числе степеней свободы $\nu_1 = n - m$, $\nu_2 = m - 1$. Значимость коэффициента детерминации подтверждается, если значение наблюдаемой статистики превышает значение теоретической статистики.

Нелинейные регрессионные модели

В силу многообразия и сложности экономических процессов многие экономические зависимости не являются линейными по своей сути, поэтому их моделирование с помощью линейных моделей затруднительно.

Рассмотрим модель (43.2) при условии нелинейной связи $f(x,\theta)$. Требуется найти значения параметров, которые давали бы минимум суммы квадратов отклонений регрессионной модели от наблюдений

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - f_i(x_i,\theta)]^2 \to min.$$

Для нахождения минимума среднего квадрата приравняем к нулю первые частные производные функции $S(\theta)$ по параметрам θ.

Так как функция $S(\theta)$ в общем случае не имеет единственного минимума,' то выбирают начальное приближение для вектора параметров θ и приближаются к оптимальному вектору по шагам:

$$\theta \approx \theta^{k+1} = \theta^k + \Delta\theta,$$

где k - номер итерации, $\Delta\theta$- шаг.

На каждом шаге итерации линеаризуют модель с помощью приближения рядом Тейлора относительно параметров θ^k:

$$f(x,\theta) \approx f(x,\theta^k) + \sum_j \frac{\partial f(x,\theta^k)}{\partial\theta_j} \cdot \left(\theta_j - {\theta_j}^k\right) \approx f(x,\theta^k) + \sum_j J_j \cdot \Delta\theta,$$

где J – матрица Якоби, а регрессионные остатки определены как:

$$r_i = \Delta y_i - \sum_{j=1}^{n} J_{ij} \cdot \Delta\theta;\ \Delta y_i = y_i - f(x_i,\theta^k\ ).$$

Преобразуя, получаем систему из n линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} J_{ij} \cdot J_{is} \cdot \Delta\theta = \sum_{i=1}^{m} J_{ij} \cdot \Delta y_i,\ j = 1,n.$$

Для нахождения оптимальных параметров нелинейных регрессионных моделей также используют метод сопряженных градиентов, метод Ньютона, простой итерации и др.

Расчет ошибки регрессионного прогноза

Пусть даны три случайные величины x, y и z. Для них построены прогнозные модели $\hat{x} = \widehat{\theta 1}^T \varphi(x) + \varepsilon_1, \hat{y} = \widehat{\theta 2}^T \varphi(y) + \varepsilon_2,$ и $\hat{z} = A\hat{x} + B\hat{y}$, где A, B −известные коэффициенты, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ − ошибки оценки коэффициентов моделей $\hat{x}, \hat{y}$ соответственно. Тогда ошибка модели $\hat{z}$ будет рассчитываться следующим образом:

$D(\hat{z}) = E(z - \hat{z})^2 = A^2\, E(x - \hat{x})^2 + B^2\, E(y - \hat{y})^2 + 2AB\, E(x - \hat{x})(y - \hat{y}) = A^2\, E\Big(\big(\widehat{\theta 1} -$

θ1T φx2 +B2Eθ2−θ2T φy2 +2AB EφxTθ1−θ1 θ2−θ2T φy=A2 EφxTθ1−θ1θ1−θ1T φx+B2 EφyTθ2−θ2θ2−θ2T φy++2AB EφxTθ1−θ1θ2−θ2T φy=A2φxTσ12φxTφx−1φx++B2φyTσ22(φyTφy)−1φy++2AB φxT φxT φx−1 φxTEε1ε2φyφyTφy−1φy

Вместо σ1 можно использовать несмещенную оценку $\widehat{\sigma 1}$, вместо σ2 – оценку $\widehat{\sigma 2}$, рассчитанную по формуле

$$\widehat{(\sigma 1)} = \frac{1}{n-m1}\widehat{\sum_{J=1}^{n}}(x_J - \widehat{x_J})^2;$$

$$\widehat{\sigma 2} = \frac{1}{(n-m2)}\sum_{j=1}^{n}(y_j - \widehat{y_J})^2.$$

Оценкой для ковариации $E(\varepsilon_1\varepsilon_2)$ будет являться выборочный коэффициент ковариации:

$$\widehat{E(\varepsilon_1\varepsilon_2)} = \frac{1}{n-m1-m2}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \widehat{x_J})(y_j - \widehat{y_J})$$

Если ε_1 и ε_2 независимы, то выборочный коэффициент ковариации будет равен нулю и дисперсия будет рассчитываться по следующей формуле:

$$D(\hat{z}) = A^2\varphi(x)^T\sigma 1^2\left(\varphi(x)^T\varphi(x)\right)^{-1}\varphi(x) + B^2\varphi(y)^T\sigma 2^2(\varphi(y)^T\varphi(y))^{-1}\varphi(y)$$

4.3 АВТОРЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ *AR*(*p*)

Рассмотрим математическую модель, которая позволяет обработать эмпирические данные (например, котировки акций и т.п.) и оценить их будущее значение. Предлагаемая авторегрессионная модель позволяет получить оценку временного ряда h_n, используя знания о его предыдущих состояниях $h_{n-1}, h_{n-2}, ..., h_{n-p}$.

Пусть ε_n – нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и дисперсией σ_ε^2. Рассмотрим авторегрессионную модель *AR*(*p*) порядка *p*:

$$h_n = a_0 + a_1h_{n-1} + a_2h_{n-2} + ... + a_ph_{n-p} + \sigma\varepsilon_n, \quad (44)$$

где $a_0, a_1, ..., a_p, \sigma$ – некоторые коэффициенты.

Введем в рассмотрение оператор сдвига $Lh_n = h_{n-1}$. С его помощью (44) переписывается в виде

$$h_n = a_0 + a_1Lh_n + a_2L^2h_n + ... + a_pL^ph_n + \sigma\varepsilon_n,$$

или

$$\left(I - a_1L - a_2L^2 - ... - a_pL^p\right)h_n = a_0 + \sigma\varepsilon_n, \quad (45)$$

где I – единичный оператор: $Ih_n = h_n$.

Для полного описания эволюции процесса h_n необходимо задать начальные условия $h_{1-p}, h_{2-p}, h_{3-p}, ..., h_{(p-1)-p}, h_0$. Положим, что все они равны нулю: в дальнейшем будет показано, что асимптотическое поведение h_n при $n \to \infty$ не зависит от вида начальных условий.

Рассмотрим простейший случай ***p*=1**. Модель (44) будет переписана в виде

$$h_n = a_0 + a_1h_{n-1} + \sigma\varepsilon_n,\ n>0, \quad (46)$$

h_0 равно первому значению заданного временного ряда.

Этот случай является особенным, т.к. модель (46) учитывает влияние предыдущего момента времени и не учитывает влияние от $h_{n-2}, ..., h_{n-p}$, что напоминает марковские процессы. Более детальное исследование вопроса о том, так ли это, будет проведено далее.

Потребуем, чтобы h_0 не зависело от ε_n. Тогда

$$h_1 = a_0 + a_1h_0 + \sigma\varepsilon_1,$$

$$h_2 = a_0 + a_1h_1 + \sigma\varepsilon_2 = a_0 + a_1(a_0 + a_1h_0 + \sigma\varepsilon_1) + \sigma\varepsilon_2 = a_0(1 + a_1) + a_1^2h_0 + \sigma(a_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2),\ \ldots,$$

$$h_n = a_0\left(1 + a_1 + a_1^2 + ... + a_1^{n-1}\right) + a_1^nh_0 + \sigma\left(a_1\varepsilon_{n-1} + a_1^2\varepsilon_{n-2} + ... + a_1^{n-1}\varepsilon_1 + \varepsilon_n\right) \quad (47)$$

Заметим, что в (47) наиболее важную роль играет параметр a_1, который входит в равенство в степени *n*, *н*ачальное условие h_0 встречается только в первой степени.

С ростом *n* влияние h_0 на h_n будет изменяться в зависимости от значения a_1. Имеет место три случая: а) $|a_1|<1$, b) $|a_1|>1$, c) $|a_1|=1$.

Найдем математическое ожидание, дисперсию и автоковариацию h_n. По (47) имеем:

$$Eh_n = a_0\left(1+a_1+a_1^2+\ldots+a_1^{n-1}\right)+a_1^n Eh_0+0+\ldots+0 = a_0\left(1+a_1+a_1^2+\ldots+a_1^{n-1}\right)+a_1^n Eh_0,$$

$$Dh_n = \sigma^2\left(1+a_1^2+a_1^4+\ldots+a_1^{2(n-1)}\right)+a_1^{2n}Dh_0.$$

Наконец, автоковариация

$$\operatorname{cov}(h_n,h_{n-k}) = E(h_n h_{n-k}) - Eh_n\,Eh_{n-k} = a_1^{2(n-k)}Dh_0+\sigma^2 a_1^k\left(1+a_1^2+a_1^4+\ldots+a_1^{2(n-k-1)}\right),$$ если $n\ge k+1$.

Вернемся к рассмотрению трех случаев изменения a_1.

Так как $(1-a_1)\left(1+a_1+a_1^2+\ldots+a_1^{n-1}\right)=1-a_1^n$, то согласно полученным формулам для математического ожидания при $|a_1|<1$, $Eh_0<\infty$, $n\to\infty$ имеем:

$$Eh_n = a_0\left(1+a_1+a_1^2+\ldots+a_1^{n-1}\right)+a_1^n Eh_0 = a_1^n Eh_0 + a_0\frac{1-a_1^n}{1-a_1},$$

$$\lim_{n\to\infty} Eh_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_1^n Eh_0\right)+\lim_{n\to\infty}\left(a_0\frac{1-a_1^n}{1-a_1}\right)=\frac{a_0}{1-a_1}.$$

Аналогично, если $Dh_0<\infty$, то

$$Dh_n = a_1^{2n}Dh_0+\frac{\sigma^2\left(1-a_1^{2n}\right)}{1-a_1^2},$$

$$\lim_{n\to\infty} Dh_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_1^{2n}Dh_0\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma^2\left(1-a_1^{2n}\right)}{1-a_1^2}\right)=\frac{\sigma^2}{1-a_1^2}.$$

Наконец, $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{cov}(h_n,h_{n-k})=\dfrac{\sigma^2 a_1^k}{1-a_1^2}$.

Таким образом, последовательность h_n при $n\to\infty$ и $|a_1|<1$ становится стационарной последовательностью. В частности, если положить, что начальное условие $h_0\sim N\left(\dfrac{a_0}{1-a_1},\dfrac{\sigma^2}{1-a_1^2}\right)$, то по доказанному выше h_n так же будет иметь нормальное распределение с параметрами $Eh_n=\dfrac{a_0}{1-a_1}$, $Dh_n=\dfrac{\sigma^2}{1-a_1^2}$. Такое свойство определяет стационарность h_n, так как с ростом *n* не меняются параметры распределения и функция распределения.

Так как автокорреляция $corr(h_n,h_{n+k})=\dfrac{\operatorname{cov}(h_n,h_{n+k})}{\sqrt{Dh_n}\sqrt{Dh_{n+k}}}\to \left(\dfrac{\sigma^2 a_1^k}{1-a_1^2}\right)\left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{1-a_1^2}}\right)^{-1}\left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{1-a_1^2}}\right)^{-1}=a_1^k$ при $n\to\infty$, то с ростом *k* автокорреляция стремится к нулю со скоростью геометрической прогрессии.

Случай $|a_1|>1$ соответствует случаю экспоненциального роста *n*.

Рассмотрим третий случай, когда $|a_1|=1$. Сравнивая (46) с (27) (см. п. 3.1 гл. 2), видно, что имеет место классическое случайное блуждание частицы. Если, например, $a_1=1$, то из (36) последовательной подстановкой получаем

$$h_n = a_0 n + h_0 + \sigma(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n)$$

и $Eh_n = a_0 n + Eh_0$.

Кроме того, $Dh_n = \sigma^2 n \to \infty$ при $n \to \infty$.

В операторном виде исходная задача (46) записывается как $(I - a_1 L)h_n = a_0 + \sigma\varepsilon_n$. Для нахождения решения обратим оператор $(I - a_1 L)$, где I – единичный оператор, L – оператор сдвига.

Рассмотрим вспомогательное соотношение:

$$\left(I + a_1 L + a_1^2 L^2 + \ldots + a_1^k L^k\right)\left(I - a_1 L\right) = \left(I - a_1 L + a_1 L - a_1^2 L^2 + a_1^2 L^2 + \ldots + a_1^k L^k - a_1^{k+1} L^{k+1}\right) = \left(I - a_1^{k+1} L^{k+1}\right).$$

Уравнение (46) можно переписать в виде $(I - a_1 L)h_n = a_0 + \sigma\varepsilon_n$. Применим к этому равенству слева оператор $Z = \left(I + a_1 L + a_1^2 L^2 + \ldots + a_1^k L^k\right)$: $Z(I - a_1 L)h_n = Z(a_0 + \sigma\varepsilon_n)$. По доказанному выше, $Z(I - a_1 L)h_n = \left(I - a_1^{k+1} L^{k+1}\right)h_n$. Поэтому

$$\left(I - a_1^{k+1} L^{k+1}\right)h_n = Z(a_0 + \sigma\varepsilon_n).$$

Выражая h_n, имеем:

$$h_n = a_1^{k+1} L^{k+1} h_n + Z(a_0 + \sigma\varepsilon_n).$$

Пусть k=n-1. Тогда

$$h_n = a_1^n L^n h_n + Z(a_0 + \sigma\varepsilon_n).$$

Заменяя $(I - a_1 L)h_n = a_0 + \sigma\varepsilon_n$, получаем

$$h_n = a_1^n L^n h_n + Z(I - a_1 L)h_n,$$

или

$$h_n = a_1^n h_0 + \left(I + a_1 L + a_1^2 L^2 + \ldots + a_1^{n-1} L^{n-1}\right)\left(I - a_1 L\right)h_n. \tag{48}$$

Данное выражение позволяет найти искомое решение. Действительно, при достаточно больших первое слагаемое в (48) будет стремиться к нулю и

$$h_n \approx \left(I + a_1 L + a_1^2 L^2 + \ldots + a_1^{n-1} L^{n-1}\right)\left(I - a_1 L\right)h_n. \tag{48'}$$

Поэтому далее обозначим через $\omega_n = a_0 + \sigma\varepsilon_n$ и рассмотрим последовательность

$$\bar{h}_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j \omega_{n-j}. \tag{49}$$

Докажем, что $\bar{h}_n$ является решением уравнения (46), записанного в операторном виде:

$$(I - a_1 L)\bar{h}_n = \omega_n.$$

Действительно, предполагая сходимость ряда в (49), имеем:

$$(I - a_1 L)\bar{h}_n = \bar{h}_n - a_1 \bar{h}_{n-1} = \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j \omega_{n-j} - a_1 \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j \omega_{n-j-1} = \omega_n + a_1\omega_{n-1} + a_1^2\omega_{n-2} + \ldots + a_1^k \omega_{n-k} + \ldots -$$

$$- a_1\omega_{n-1} - a_1^2\omega_{n-2} - \ldots - a_1^k\omega_{n-k} - \ldots = \omega_n.$$

Теорема 4.1. Пусть $Eh_0^2 < \infty$, $|a_1| < 1$. Тогда ряд $\bar{h}_n$, определяемый (49), сходится к h_n, задаваемому с помощью (48'), в среднеквадратичном:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\bar{h}_n - h_n\right)^2 = 0.$$

Кроме того, $\bar{h}_n$ является единственным решением задачи (46).

Доказательство:

Ранее мы показали, что $\bar{h}_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j \omega_{n-j}$ является решением (46). Действительно,

$$(I - a_1 L)\bar{h}_n = \bar{h}_n - a_1 \bar{h}_{n-1} = \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j \omega_{n-j} - a_1 \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j \omega_{n-j-1} = \omega_n + a_1\omega_{n-1} + a_1^2\omega_{n-2} + \ldots + a_1^k \omega_{n-k} + \ldots -$$

$$- a_1\omega_{n-1} - a_1^2\omega_{n-2} - \ldots - a_1^k\omega_{n-k} - \ldots = \omega_n.$$

Докажем теперь единственность решения. Предположим противное – пусть существует другой стационарный процесс $\bar{h}_n$, удовлетворяющий (46) в операторной форме $(I-a_1L)\bar{h}_n=\omega_n$.

Ранее было показано, что

$\bar{h}_n = a_1^{k+1}L^{k+1}\bar{h}_n + Z(a_0+\sigma\varepsilon_n) = a_1^{k+1}\bar{h}_{n-(k+1)} + (I+a_1L+a_1^2L^2+...+a_1^kL^k)\omega_n =$(раскрывая скобки в последнем слагаемом)$= a_1^{k+1}\bar{h}_{n-(k+1)}+\omega_n+a_1\omega_{n-1}+...+a_1^k\omega_{n-k} = a_1^{k+1}\bar{h}_{n-(k+1)}+\sum_{j=0}^{k}a_1^j\omega_{n-j}$.

Тогда

$E(h_n-\bar{h}_n)^2 = E\left(\sum_{j=0}^{k}a_1^j\omega_{n-j}+a_1^{k+1}\bar{h}_{n-(k+1)}-\sum_{j=0}^{\infty}a_1^j\omega_{n-j}\right)^2 = E\left(a_1^{k+1}\bar{h}_{n-(k+1)}-\sum_{j=k+1}^{\infty}a_1^j\omega_{n-j}\right)^2 =$ (можно пренебречь остаточным членом сходящегося ряда)$= E\left(a_1^{k+1}\bar{h}_{n-(k+1)}\right)^2 = a_1^{2(k+1)}E\left(\bar{h}_{n-(k+1)}\right)^2 =$(по стационарности $\bar{h}_n$) $= a_1^{2k+2}E\bar{h}_0^2$, которая стремится к нулю с ростом *k* и *n*:

$$\lim_{k\to\infty}E\left(\bar{h}_n^k-h_n\right)^2=0.$$

Это означает, что $\bar{h}_n$ сходится к h_n в среднеквадратичном, ряд $\bar{h}_n$ сходится в среднеквадратичном и $\bar{h}_n=h_n$ в среднеквадратичном смысле. Противоречие последнего доказывает единственность решения уравнения (46), ч.т.д.

Замечание: выражение (49) показывает, что решение модели авторегрессии является бесконечной суммой нормально распределенных шумов, взятых в различные моменты времени. Фактически это означает, что h_n может быть записан в виде бесконечного скользящего среднего *MA*(∞).

Рассмотрим случай ***p*=2**. В этом случае модель (44) будет переписана в виде

$$h_n = a_0 + a_1h_{n-1} + a_2h_{n-2} + \sigma\varepsilon_n,\ n>1,$$

h_0, h_1 известны по исходным данным,
или в операторной форме:

$$(I-a_1L-a_2L^2)h_n = a_0+\sigma\varepsilon_n = \omega_n. \qquad (50)$$

Алгоритм нахождения решения задачи (50) полностью повторяет одномерный случай с той лишь разницей, что добавляется отыскание разложения оператора $(I-a_1L-a_2L^2)$ на множители: $(I-a_1L-a_2L^2)=(I-\lambda_1L)(I-\lambda_2L)$, где λ_1,λ_2 – неизвестные константы.

Пользуясь свойствами оператора сдвига и раскрывая скобки, имеем:

$$(I-\lambda_1L)(I-\lambda_2L) = I-(\lambda_1+\lambda_2)L+\lambda_1\lambda_2L^2 = (I-a_1L-a_2L^2).$$

Сравнивая коэффициенты, получаем систему

$$\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)=a_1,\\ \lambda_1\lambda_2=-a_2.\end{cases}$$

Используя теорему Виета, заключаем, что λ_1,λ_2 являются корнями квадратного уравнения $\lambda^2-a_1\lambda-a_2=0$, т.е. $\lambda_{1,2}=0.5\left(a_1\pm\sqrt{a_1^2+4a_2}\right)$.

С учетом найденных ранее λ_1,λ_2 выражение (40) перепишется в виде:

$$(I-\lambda_1L)(I-\lambda_2L)h_n=\omega_n.$$

Заметим, что при *p*=1 было найдено разложение обратного оператора $(I-a_1L)^{-1}$ (см. (48')). Предположим, что обратные операторы $(I-\lambda_1L)^{-1}, (I-\lambda_2L)^{-1}$ существуют. Тогда

$$h_n=(I-\lambda_2L)^{-1}(I-\lambda_1L)^{-1}\omega_n.$$

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Методом неопределенных коэффициентов находим разложение $(I-\lambda_2 L)^{-1}(I-\lambda_1 L)^{-1}$ в сумму простых дробей:

$$(I-\lambda_2 L)^{-1}(I-\lambda_1 L)^{-1} = (\lambda_1-\lambda_2)^{-1}\left(\lambda_1(I-\lambda_1 L)^{-1} - \lambda_2(I-\lambda_2 L)^{-1}\right).$$

Поэтому

$$h_n = (I-\lambda_2 L)^{-1}(I-\lambda_1 L)^{-1}\omega_n = (\lambda_1-\lambda_2)^{-1}\left(\lambda_1(I-\lambda_1 L)^{-1} - \lambda_2(I-\lambda_2 L)^{-1}\right)\omega_n. \quad (51)$$

Предположим, что $|\lambda_i| < 1$, i=1,2. Используя геометрическую прогрессию, запишем операторное разложение для $(I-\lambda_i L)^{-1}$:

$$(I-\lambda_i L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_i^k L^k, \; L^0 = I,$$

и подставляя его в (51), окончательно имеем:

$$h_n = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_1^k L^k \omega_n - \frac{\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_2^k L^k \omega_n = \text{(по определению оператора сдвига)}=$$

$$= \frac{\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_1^k \omega_{n-k} - \frac{\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_2^k \omega_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k\right)\omega_{n-k}, \; C_i = \frac{\lambda_i}{(\lambda_1-\lambda_2)}, i=1,2.$$

Единственность решения доказывается по аналогии со случаем p=1.

Замечание: в общем случае оценку коэффициентов модели $AR(p\text{-}1)$ (например, при p=2 из двух уравнений системы получаем оценки коэффициентов модели $AR(1)$: a_0, a_1) легче всего проводить с помощью рекуррентных формул Юла-Уокера [21, с. 438]:

$$\begin{cases} \rho_1 = \varphi_1 + \varphi_2\rho_1 + \ldots + \varphi_p\rho_{p-1}, \\ \rho_2 = \varphi_1\rho_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_p\rho_{p-2}, \\ \quad \ldots \\ \rho_p = \varphi_1\rho_{p-1} + \varphi_2\rho_{p-2} + \ldots + \varphi_p. \end{cases}$$

где $\rho_j = r_j$ – выборочные автокорреляции процесса, $\varphi_j = a_{j-1}$– неизвестные коэффициенты модели, j=1, 2,…, p.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА НЕСТАЦИОНАРНОСТИ МОДЕЛИ *AR*(*P*)

Для проверки статистической гипотезы о нестационарности ряда значений модели (44) используется критерий Дики-Фулера (**Dickey-Fuller test, ADF**). Нулевая гипотеза H_0 состоит в том, что ряд x_t нестационарен, а оператор сдвига L в (45) имеет единственный единичный корень a_1=1 при альтернативной гипотезе, что ряд стационарен и $|a_1| < 1$:

$$H_0: a_1=1; \; H_1: |a_1| < 1.$$

При построении статистического критерия дополнительно предполагается, что шумы $\sigma\Delta W_n = \varepsilon_n$ в (44) **некоррелированы и в силу нормальности независимы**: без выполнения этого условия критерий работать не будет. Для проверки некоррелированности шумов нужно использовать критерий Дарбина-Уотсона (DW-test), см. п. 4.1.

Критическая статистика: $\gamma = \dfrac{a_1 - 1}{s}$ [18], где $s = \sqrt{\dfrac{c_{11}}{n-1}}$, c_{11} – диагональный элемент обратной матрицы ковариации $\left(X^T X\right)^{-1}$модели (44), X – центрированные столбцы данных правой части в (44).

Критические точки статистики приведены в табл.1.

Таблица 1

Критические точки $t_{кр}$ распределения Дики-Фулера

Уровень доверия, α	Размер выборки, *n*			
	n=25	n=50	n=100	∞
AR(*p*) без константы				
0,01	-2,66	-2,62	-2,60	-2,58
0,025	-2,26	-2,25	-2,24	-2,23
0,05	-1,95	-1,95	-1,95	-1,95
AR(*p*) с дополнительным линейным трендом ($\mu_0+\mu_1 t$)				
0,01	-4,38	-4,15	-4,04	-3,96
0,025	-3,95	-3,80	-3,69	-3,66
0,05	-3,60	-3,50	-3,45	-3,41

Нулевая гипотеза H_0 принимается, если $t_{кр}<\gamma$. В противном случае принимается альтернативная гипотеза (при $\gamma< t_{кр}$).

Замечание: очень часто до проверки H_0 порядок авторегрессии *p* неизвестен. Для его нахождения прибегают к одной из следующих процедур:

1. Выбрать относительно большое значение *p* и, проверяя значимость гипотезы H_0, последовательно уменьшать *p* на единицу. Остановиться при первой статистически неподтвержденной H_0 (т.е. при переходе модели от нестационарной к стационарной).
2. При различных значениях *p* использовать информационный **критерий Акаике**

$$AIC = \frac{2p}{T} + \ln\left(\frac{\sum_{j=1}^{T} e_j^2}{T}\right),$$

где $e_j = \left(h_j - \overline{h}_j\right)$ – погрешность модели (остатки), выбирая ту модель, у которой AIC меньше.

3. При каждом выбранном *p* проверять некоррелированность шумов, для чего использовать критерий Дарбина-Уотсона. Если гипотеза H_0 статистически значима, нужно увеличить *p* и повторить процедуру.

4.4 АВТОРЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ СО СКОЛЬЗЯЩИМ СРЕДНИМ *ARMA*(*p,q*)

Обобщим модель (44), добавив к ней нормально распределенные ошибки наблюдений $\varepsilon_{n-q},...,\varepsilon_{n-1}$, с нулевым средним и дисперсиями σ_ε^2, которые вносят так называемую скользящую среднюю ошибку, и убрав константу:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + ... + a_p x_{n-p} + \varepsilon_n - \theta_1 \varepsilon_{n-1} - ... - \theta_q \varepsilon_{n-q},\ n>p, \qquad (44.1)$$

Как и модель (45), ее можно записать через оператор сдвига L

$$\left(I - a_1L - a_2L^2 - ... - a_pL^p\right)x_n = \left(I - \theta_1L - \theta_2L^2 - ... - \theta_qL^q\right)\varepsilon_n,$$

или более компактно

$$\varphi(L)x_n = \theta(L)\varepsilon_n, \tag{45.1}$$

где $\varphi(L) = \left(I - a_1L - a_2L^2 - ... - a_pL^p\right), \theta(L) = \left(I - \theta_1L - \theta_2L^2 - ... - \theta_qL^q\right)$.

Прежде, чем оценивать коэффициенты модели (45.1), рассчитаем автокорреляции и автоковариации модели. Для этого умножим обе части (44.1) на x_{t-k}, k>0, и возьмем математическое ожидание в получившемся равенстве:

$$E(x_{n-k}x_n) = a_1E(x_{n-k}x_{n-1}) + ... + a_pE(x_{n-k}x_{n-p}) + E(x_{n-k}\varepsilon_n) - \theta_1E(x_{n-k}\varepsilon_{n-1}) - ... - \theta_qE(x_{n-k}\varepsilon_{n-q}),$$

Обозначим через $\delta_s = E(x_n\varepsilon_{n-s})$. Если процесс x_t стационарен, то δ_s не будут зависеть от величины n (т.е. можно вычитать из первого индекса второй): $\delta_{s-k} = E(x_{n-k}\varepsilon_{n-s})$. Поэтому с учетом обозначенных через γ_k автоковариаций последнее выражение можно переписать в виде:

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + ... + a_p\gamma_{k-p} + \delta_{-k} - \theta_1\delta_{1-k} - ... - \theta_q\delta_{q-k}. \tag{*}$$

Так как значения ряда x_{t-k} зависят только от ошибок (импульсов), которые произошли до момента (t-k), и не зависят от остальных шумов, то $\delta_{j-k} = E(x_{n-k}\varepsilon_{n-j}) = E(x_{n-k})E(\varepsilon_{n-j}) = 0$, $j<k$, по условию выбора шума. Для нахождения остальных коэффициентов δ_j, j=0, 1,…, q, умножим поочередно выражение (44.1) на $\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, ..., \varepsilon_{n-q}$ и возьмем математическое ожидание. Последовательно имеем:

$$\delta_0 = E(\varepsilon_n^2) = \sigma_\varepsilon^2,$$

$\delta_1 = a_1E(x_{n-1}\varepsilon_{n-1}) - \theta_1E(\varepsilon_{n-1}^2) =$ (см выше, по независимости δ_1 от n из-за нестационарности, а тж $E(x_n\varepsilon_n) = E(x_{n-1}\varepsilon_{n-1}) = E(x_{n-2}\varepsilon_{n-2}) = ... = E(x_{n-p}\varepsilon_{n-p}) = \delta_0$)=

$$= a_1\delta_0 - \theta_1\sigma_\varepsilon^2,$$

$\delta_2 = a_1\delta_1 + a_2\delta_0 - \theta_2\sigma_\varepsilon^2, \ldots,\ \delta_s = a_1\delta_{s-1} + a_2\delta_{s-2} + ... + a_s\delta_0 - \theta_s\sigma_\varepsilon^2$, s=1, 2, …, p.

В случае, когда в исходной модели (44.1) $p<q$, есть еще некоторые коэффициенты δ_s, $s>p$ (внимательно, добавлены слагаемые):

$$\delta_s = a_1\delta_{s-1} + a_2\delta_{s-2} + ... + a_p\delta_{s-p} - \theta_s\sigma_\varepsilon^2.$$

Вычисляя все $\delta_s = E(x_n\varepsilon_{n-s})$, из равенства (*) находим все автоковариации γ_k, k=0,1…, p, принимая во внимание тот факт, что $\gamma_k=\gamma_{-k}$. Далее, можно рассчитать автокорреляции:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}.$$

Эти значения легко вычислить, если в (*) $q<k$. Действительно, тогда $\delta_j = 0$, j=q,…k, и

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + ... + a_p\gamma_{k-p},$$

Поделив его на γ_0, выделяем при каждом слагаемом автокорреляцию соответствующего порядка:

$$\rho_k = a_1\rho_{k-1} + ... + a_p\rho_{k-p}.$$

решение которого совпадает с решением характеристического уравнения $\varphi(L) = 0$, т.е. поведение $ARMA(p,q)$ – процесса (44.1) определяется значениями характеристических корней. По аналогии с $AR(p)$–процессом, $ARMA(p,q)$ будет стационарным, если первые m его автокорреляций остатков модели равны нулю. Для проверки гипотезы используют статистику **Бокса - Пирса**:

$$\gamma = n\sum_{k=1}^{m} r_k^2 \sim \chi_\alpha^2(m - p - q),$$

где n – число данных, p, q – параметры модели, r_1, r_2,…r_m – выборочные автокорреляции между эмпирическими и теоретическими значениями модели:

$$r_k = \frac{\sum_{j=k+1}^{n} e_j e_{j-k}}{\sum_{j=1}^{n} e_j^2},\ e_n = \left(x_n - \bar{x}_n\right),\ k=1, 2,\ldots, m.$$

Для этой статистики нулевая гипотеза о равенстве нулю первых m автокорреляций остатков подтверждается, если при заданном уровне значимости $\gamma < \chi^2_\alpha(m-p-q)$.

Наряду со статистикой Бокса-Пирса можно использовать и упоминавшуюся ранее статистику Льюнга-Бокса. Для $ARMA(p,q)$ – процесса она имеет вид:

$$\gamma = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{r_k^2}{n-k} \sim \chi^2_\alpha(m-p-q).$$

Нулевая гипотеза о равенстве нулю первых m автокорреляций ошибок подтверждается, если при заданном уровне значимости $\gamma < \chi^2_\alpha(m-p-q)$.

Замечание: если статистические гипотезы отклоняются, нужно дополнительно проверить, не связано ли это с неправильно выбранными параметрами p и q модели.

Пример: рассмотрим процесс $ARMA(1,1)$:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \varepsilon_n - \theta_1 \varepsilon_{n-1},$$

или в операторном виде

$$\left(I - a_1 L\right)x_n = \left(I - \theta_1 L\right)\varepsilon_n,$$

или в характеристическом виде

$$\left(I - \lambda_1 L\right)x_n = \left(I - \lambda_2 L\right)\varepsilon_n$$

с очевидными характеристическими корнями $\lambda_1 = a_1, \lambda_2 = \theta_1$ для левой и правой части соответственно. Поэтому $ARMA(1,1)$–процесс будет стационарным, если $|a_1|<1$, $|\theta_1|\neq 1$. Автоковариация

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + \delta_{-k} - \theta_1\delta_{1-k},$$

которое **при k=0** есть $\gamma_0 = a_1\gamma_{-1} + \delta_0 - \theta_1\delta_1$. Кроме того, $\delta_0 = \sigma^2_\varepsilon$, $\delta_1 = a_1\delta_0 - \theta_1\sigma^2_\varepsilon = \left(a_1 - \theta_1\right)\sigma^2_\varepsilon$. Значит,

$$\gamma_0 = a_1\gamma_{-1} + \delta_0 - \theta_1\delta_1 = (\text{тк } \gamma_1=\gamma_{-1}) = a_1\gamma_1 + \sigma^2_\varepsilon - \theta_1\left(a_1 - \theta_1\right)\sigma^2_\varepsilon.$$

При k=1

$\gamma_1 = a_1\gamma_0 + \delta_{-1} - \theta_1\delta_0$ =(как значения ряда x_t зависят только от ошибок (импульсов), которые произошли до момента t и не зависят от остальных шумов, т.е. $\delta_{-1} = 0$) $= a_1\gamma_0 - \theta_1\sigma^2_\varepsilon$.

При k>1 имеем: $\gamma_k = a_1\gamma_{k-1}$. Получили систему из двух уравнений:

$$\gamma_0 = a_1\gamma_1 + \sigma^2_\varepsilon - \theta_1\left(a_1 - \theta_1\right)\sigma^2_\varepsilon,$$

$$\gamma_1 = a_1\gamma_0 - \theta_1\sigma^2_\varepsilon,$$

решение которой есть $\gamma_0 = \dfrac{1 - 2a_1\theta_1 + \theta_1^2}{1 - a_1^2}\sigma^2_\varepsilon$, $\gamma_1 = \dfrac{\left(a_1 - \theta_1\right)\left(1 - a_1\theta_1\right)}{1 - a_1^2}\sigma^2_\varepsilon$.

Поэтому автокорреляции есть $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = \dfrac{\left(a_1 - \theta_1\right)\left(1 - a_1\theta_1\right)}{1 - 2a_1\theta_1 + \theta_1^2}\sigma^2_\varepsilon$, $\rho_k = a_1\rho_{k-1} = a_1^{k-1}\rho_1$, k>1.

ОЦЕНИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛИ *ARMA*(*p*,*q*)

Заметим, что один и тот же временной ряд может быть описан моделью $ARMA(p,q)$ с различными значениями параметров p, q, например, из-за того, что корни характеристических уравнений $\varphi(L) = 0$ и $\theta(L) = 0$ могут совпадать. Поэтому при практических вычислениях требуется выбрать порядки модели, оценить ее параметры, провести статистическое оценивание правильности модели в целом.

Если $E(x_n)=\mu$, то математическое ожидание нужно вводить в модель в качестве параметра, потому что если процесс x_n стационарен, то из (44.1) $E(x_n)=\dfrac{const}{1-a_1-...-a_p}=\mu$ и эту константу можно использовать в авторегрессионной модели:

$$\varphi(L)x_n = const + \theta(L)\varepsilon_n .$$

В целом, вместо этого удобнее рассмотреть вспомогательный временной ряд ω_n с нулевым математическим ожиданием, который будет удовлетворять (44.1), а затем перейти к исходному ряду с помощью преобразования: $x_n=\mu+\omega_n$. В качестве ω_n так же можно использовать центрированные значения x_n: $\omega_n = x_n - \bar{x}$.

Проведем оценивание коэффициентов *ARMA*(*p*,*q*) методом моментов. Перейдем к центрированным значениям исходного временного ряда x_n. Далее, нам нужно оценить первые *p* параметров (шумовые слагаемые пока не разделяем на составляющие, считая их одним шумом). Как и при вычислении автоковариаций, будем умножать (44.1) последовательно на $x_{n-q-1}, ..., x_{n-q-p}$ и вычислять математические ожидания от обоих частей равенства. Имеем:

$$\begin{gathered}
\gamma_{q+1} = a_1\gamma_q + a_2\gamma_{q-1} + ... + a_p\gamma_{q-p+1}, \\
\gamma_{q+2} = a_1\gamma_{q+1} + a_2\gamma_q + ... + a_p\gamma_{q-p+2}, \\
\cdots \\
\gamma_{q+p} = a_1\gamma_{q+p-1} + a_2\gamma_{q+p-2} + ... + a_p\gamma_q .
\end{gathered}$$

Для нахождения решения системы относительно неизвестных $a_1,...,a_p$ вместо теоретических значений автоковариации γ_k будем использовать их выборочные аналоги:

$$c_k = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k}(x_t-\bar{x})(x_{t+k}-\bar{x}).$$

Найдя оценки $a_1,...,a_p$, перейдем к процессу $y_n = x_n - a_1x_{n-1} - a_2x_{n-2} - ... - a_px_{n-p}$, для которого рассчитаем первые *q* выборочные автокорреляции. Их используем для вычисления оценок параметров $\theta_1,...,\theta_q$. Действительно, в соответствии с (44.1) фактически

$$y_n = x_n - a_1x_{n-1} - a_2x_{n-2} - ... - a_px_{n-p} = \varepsilon_n - \theta_1\varepsilon_{n-1} - ... - \theta_q\varepsilon_{n-q}$$

– процесс скользящего среднего. Его автокорреляции можно сравнить с выборочными аналогами:

$$\rho_k = \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + ... + \theta_{q-k}\theta_q}{1+\theta_1^2 + ... + \theta_q^2} \approx r_k = \frac{c_k}{c_0},\ k=1,2,\ \dots,\ q\ ,$$

где r_k – выборочные автокорреляции. Эта система нелинейна относительно неизвестных $\theta_1,...,\theta_q$ и ее нужно решать численным методом повышенной точности, например, методом Ньютона.

Замечание: Очень часто на практике влияние нормально распределенных шумов на *ARMA*(*p*,*q*)–процесс ограничено случаем *q*=1.

Пример: рассмотрим процесс *ARMA*(*p*,1) при *q*=1:

$$x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + ... + a_px_{n-p} + \varepsilon_n - \theta_1\varepsilon_{n-1},$$

Допустим, мы определили все коэффициенты $a_1,...,a_p$. Для нахождения параметра θ_1 по известному значению автокорреляции нам будет нужно решить единственное уравнение

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} = r_1.$$

Дробь $\frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$ принимает максимальное по модулю значение, равное ½, при $\theta_1 = \pm 1$. Действительных корней нет, если $\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} > \frac{1}{2}$. При $\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} < \frac{1}{2}$ получаем два действительных корня $\theta_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1}$ уравнения $\frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} = r_1$, где r_1–первая выборочная автокорреляция. Один из этих корней больше единицы по модулю, второй – меньше. Последний мы и выбираем в качестве оценки коэффициента θ_1 в *ARMA*(*p*,1)-процессе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРЯДКА МОДЕЛИ *ARMA*(*p*,*q*)

Для определения порядков модели *p* и *q* необходимо вычислить достаточное количество выборочных автокорреляций r_k и построить коррелограмму. Первым признаком стационарности общего *ARMA*(*p*,*q*)–процесса является быстрое убывание r_k с ростом *k*. Для выявления порядка авторегрессии *p* (если *q*=0) можно дополнительно использовать и значения выборочных частных автокорреляций, так как известно [21], что теоретические частные автокорреляции равны нулю, начиная с лага *p*. Выбирая поэтому в качестве *p* порядок последней достаточно большой по модулю выборочной частной автокорреляции, мы с большой точностью находим требуемую величину лага.

Аналогично, для определения порядка *q* (если *p*=0) для скользящего среднего можно использовать выборочные автокорреляции, потому что его теоретические автокорреляции становятся равными нулю, начиная с лага *q*.

В случае общего *ARMA*(*p*,*q*)–процесса, когда оба коэффициента не равны нулю, такой подход не приносит успеха. В этом случае можно отслеживать только скорость убывания r_k с ростом *k*. Кроме того, хороший результат дает информационный критерий Акаике

$$AIC = \frac{2(p+q)}{T} + \ln\left(\frac{\sum_{n=1}^{T} e_n^2}{T}\right),$$

где $e_j = (x_j - \bar{x}_j)$-погрешность модели, $\bar{x}_j$ – исторические значения временного ряда.

Перебор значений *p* и *q* останавливается для той модели, у которой AIC меньше.

Вместе с использованием численных процедур оправдана дополнительная проверка статистических гипотез относительно некоррелированности и гомоскедастичности (стационарности) погрешностей e_n, рассмотренных ранее.

4.5. ОБОБЩЕННАЯ АВТОРЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ УСЛОВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ *GARCH(p,q)*

Прогнозирование волатильности рисковых активов играет важную роль при построении и расчете математических моделей финансовой математики. Оно применяется в теории ценообразования опционов, используется при разработке прибыльных стратегий размещения портфелей ценных бумаг различного вида и типа. Кроме того, оценивание уровня будущей волатильности находит все большее приложение в определении предельного уровня риска (Value–at–Risk, VAR).

Первоначальные исследования волатильности были связаны с предположением о нормальности дневных приращений цен акций. Однако в дальнейшем было показано, что такое предположение не обосновано, так как приращения не имеют нормального распределения. У эмпирической функции плотности распределения, построенной на основе исторических данных (рис. 8), существует ненулевой эксцесс (kurtosis) и асимметрия (skew). Кроме того, присутствует вытянутость функции плотности в ε–окрестности точки математического ожидания, а так же наблюдаются так называемые «толстые хвосты» (fat–tails), когда вероятность значительных изменений ценовых приращений выше, чем для нормального распределения. Математически это означает, что случайный процесс является негауссовым, немарковским с долговременной корреляцией между данными.

Для изучения распределений таких случайных процессов и прогнозирования будущего уровня их волатильности было предложено большое количество моделей. Наиболее изученной является модель Блэка – Шоулса (Black–Scholes) (см. п.2.2) для опционов. Она базируется на формуле Блэка – Шоулса расчета равновесной цены опционов покупателя и продавца. Фиксируя в ней различные цены исполнения *E* (strike prices) и сроки окончания действия контрактов *T* (times to maturity), получают так называемую «предполагаемую волатильность» (implied volatility), которую сравнивают с эмпирическими оценками σ по историческим данным. Данная модель позволяет построить новое распределение (implied–распределение) приращений временного ряда, которое уже будет иметь более толстые хвосты (рис. 8) по сравнению с нормальным распределением и, как следствие, дает возможность рассчитать волатильность более точно. Тем не менее, хвосты остаются достаточно «тонкими» по сравнению с распределениями данных реальных финансовых рынков, что недопустимо.

В связи с вышесказанным в настоящее время получили развитие другие подходы, например, процесс прогнозирования волатильности с помощью метода GARCH(p,q), позволяющий проводить анализ коррелированных и высокочастотных данных. Метод основан на предположении авторегрессионой зависимости вида

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{n-j}^2 \tag{52}$$

где $\alpha_0 > 0, \alpha_i > 0, \beta_j > 0$ – коэффициенты модели, подлежащие оценке, $\alpha_0 + \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 1$, $u_n = \dfrac{h_n - h_{n-1}}{h_n}$ – относительные приращения значений временного ряда h_n или логарифмические приращения $u_n = \ln \dfrac{h_n}{h_{n-1}}$, σ_n – волатильность, $n = 1,2,...$.

При построении метода является существенным предположение о виде распределения u_n. В зависимости от него различают: GARCH(*p*,*q*) с нормальным распределением $u_n \sim N\left(0, \sigma_*^2\right)$, экспоненциальный GARCH (или EGARCH) с *t*–распределением Стьюдента, APARCH с асимметричным *t*–распределением Стьюдента и др. (например, NARCH, MARCH, HARCH и т.п.).

Для простоты изложения рассмотрим (42) с *p*=1 и *q*=1. Тогда модель будет иметь вид:

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2, \tag{53}$$

где $\gamma > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ – коэффициенты модели, подлежащие оценке, $V > 0$ – долговременное среднее отклонение в структуре данных, $\gamma + \alpha + \beta = 1$, $u_n = \dfrac{h_n - h_{n-1}}{h_n}$ – относительные приращения значений временного ряда h_n, σ_n – волатильность, $n = 1,2,...$.

Предположим произвольность распределения дневных приращений $u_n = (h_n - h_{n-1})h_n^{-1}$, h_n – цена некоторого актива в n–ый день торгов. Так как $\gamma = 1 - \alpha - \beta$, то (43) можно представить в виде

$$\sigma_n^2 - V = \alpha\left(u_{n-1}^2 - V\right) + \beta\left(\sigma_{n-1}^2 - V\right). \qquad (54)$$

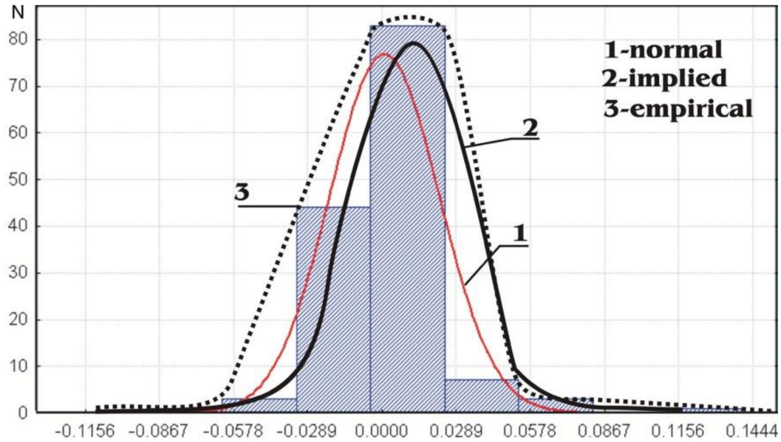

Рис. 8. Эмпирическая плотность распределения для опциона покупателя (call option) на фьючерсный контракт на акции РАО ЕЭС РТС с котировками в рублях (код ES7000F5, торги проходили с 01 декабря 2004 по 05 июля 2005 года, всего 143 котировки) в сравнении с другими плотностями (1 – нормальная плотность с a=10^{-3}, σ=4,5×10^{-4}; 2 – implied – плотность; 3 – эмпирическая плотность с a=10^{-3}, σ=4,5×10^{-4}), N – число наблюдений, попавших в соответствующий интервал.

Записывая (44) в будущий момент времени (n+k), получаем, что

$$\sigma_{n+k}^2 - V = \alpha\left(u_{n+k-1}^2 - V\right) + \beta\left(\sigma_{n+k-1}^2 - V\right).$$

Оценим дневную волатильность σ_n по последним k наблюдениям:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(u_{n-i} - \bar{u}\right)^2,$$

где $\bar{u} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} u_{n-i}$ – выборочное среднее, k – лаг (задержка) временного ряда.

Учитывая, что математическое ожидание $E\left(u_n^2\right) = \sigma_n^2$, имеем:

$$E\left(\sigma_{n+k}^2 - V\right) = (\alpha + \beta)E\left(\sigma_{n+k-1}^2 - V\right).$$

Так как $E\left(\sigma_{n+k-1}^2 - V\right) = (\alpha+\beta)E\left(\sigma_{n+k-2}^2 - V\right)$, $E\left(\sigma_{n+k-2}^2 - V\right) = (\alpha+\beta)E\left(\sigma_{n+k-3}^2 - V\right)$, …, $E\left(\sigma_{n+1}^2 - V\right) = (\alpha+\beta)E\left(\sigma_n^2 - V\right)$, то $E\left(\sigma_{n+k}^2 - V\right) = (\alpha+\beta)E\left(\sigma_{n+k-1}^2 - V\right) = (\alpha+\beta)^2 E\left(\sigma_{n+k-2}^2 - V\right) = \ldots = (\alpha+\beta)^k E\left(\sigma_n^2 - V\right)$, или

$$E\left(\sigma_{n+k}^2\right) = V + (\alpha+\beta)^k E\left(\sigma_n^2 - V\right). \qquad (55)$$

Равенство (55) определяет условие устойчивости GARCH (1,1). Действительно, если $\alpha + \beta < 1$, то последнее слагаемое вносит все меньший вклад в математическое ожидание и с ростом лага k стремится к V:

$$\lim_{k\to\infty} E\left(\sigma_{n+k}^2\right) = V. \qquad (56)$$

Если же $\alpha + \beta \geq 1$, то $E\left(\sigma_n^2\right) \to \infty$ и случайный процесс σ_n^2 будет в среднем стремительно возрастать, что свидетельствует о его неустойчивости.

Исходя из (56) можно сделать вывод, что V характеризует уровень возврата временного ряда к прежнему состоянию с коэффициентом возврата γ.

Перейдем к определению параметров модели (53). Наиболее общим способом их оценки является нахождение максимума функции правдоподобия

$$L=\prod_{i=1}^{m} f_i \,,$$

или логарифмической функции правдоподобия

$$\ln L=\sum_{i=1}^{m}\ln f_i \,, \tag{57}$$

где f_i – функции плотности распределения наблюдений, m – число наблюдений. Например, если предположить, что имеет место нормальное распределение приращений u_i с математическим ожиданием a и дисперсией σ_i^2, то

$$f_i=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\exp\left(-\frac{(u_i-a)^2}{2\sigma_i^2}\right).$$

В случае относительных приращений цен акций математическое ожидание $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$. Легко показать, что задача определения максимума выражения (57) совпадает с нахождением максимума функции (это **метод квазимаксимального правдоподобия**, если закон распределения u_i неизвестен или отличен от нормального)

$$L_m=\sum_{i=1}^{m}\left(-\ln\sigma_i^2-\frac{u_i^2}{\sigma_i^2}\right). \tag{58}$$

Поиск максимума (58) осуществляется в соответствии с выполнением необходимого условия существования экстремума функции трех переменных:

$$\frac{\partial L_m}{\partial\omega}=0,\ \ \frac{\partial L_m}{\partial\alpha}=0,\ \ \frac{\partial L_m}{\partial\beta}=0, \tag{59}$$

где $\omega=\gamma V$ (**памятка**: нужно посчитать все частные производные по параметрам от (58) и получить реккурентные соотношения).

Например, $\displaystyle\frac{\partial L_m}{\partial\omega}=\sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{1}{\sigma_i^2}\frac{\partial\sigma_i^2}{\partial\omega}+\frac{u_i^2}{\sigma_i^4}\frac{\partial\sigma_i^2}{\partial\omega}\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{1}{\sigma_i^2}+\frac{u_i^2}{\sigma_i^4}\right)\frac{\partial\sigma_i^2}{\partial\omega}=0$, или

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\sigma_i^2}\left(\frac{u_i^2}{\sigma_i^2}-1\right)\frac{\partial\sigma_i^2}{\partial\omega}=0\,,$$

где $\sigma_i^2=\omega+\alpha u_{i-1}^2+\beta\sigma_{i-1}^2$, $\displaystyle\frac{\partial\sigma_i^2}{\partial\omega}=1+\beta\frac{\partial\sigma_{i-1}^2}{\partial\omega}$, $\sigma_0^2=const$, $\displaystyle\frac{\partial\sigma_0^2}{\partial\omega}=0$.

Решение нелинейной системы (59) в предположении единственности экстремума в некоторой расчетной области может проводиться любым быстросходящимся численным методом: методом Ньютона, методом наискорейшего спуска, сопряженных градиентов и т.п. Однако стоит помнить, что эти методы могут расходиться, так как поверхность графика функции L_m в окрестности максимума достаточно плоская и точек локального экстремума больше одной.

Заметим, что в произвольном случае найти оценки параметров ω,α,β из (59) достаточно сложно. Поэтому приведем **простой алгоритм** нахождения ω,α,β. Для этого вспомним, что $\lim\limits_{k\to\infty}E\left(\sigma_{n+k}^2\right)=V$, т.е. V – это средняя наблюдаемая однодневная дисперсия за период T:

$$V=\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T}\sigma_{n-j}^{2}.$$

Это значит, что V легко оценить, если знать выборочные дневные дисперсии σ_{n-j}^{2}. Так как $\omega=\gamma V$, а $\gamma=1-\alpha-\beta$, то $\omega=(1-\alpha-\beta)V$ и вместо системы из трех уравнений в (59) достаточно решить систему из двух уравнений относительно неизвестных α, β. Далее, учтем, что $0<\alpha<1; 0<\beta<1; 0<\alpha+\beta<1$: можно перебирать значения α, β с некоторым шагом $\alpha=i/100, \beta=j/100,\ 0<\alpha+\beta<1,\ i, j=\overline{1,99}$ и вычислять L_m в (58), выбирая среди всей полученной совокупности его значений максимальное и фиксируя, таким образом, некоторые оптимальные α_s, β_k, а значит, и $\gamma=1-\alpha_s-\beta_k$.

После оценивания коэффициентов ω, α, β и подстановки их в (53) остается провести статистическое исследование надежности предложенного метода GARCH(1,1) при прогнозировании волатильности. Так как модель (53) является автокорреляционной, то в качестве теста надежности естественно потребовать уменьшения автокорреляции γ_k с фиксированным лагом k после применения метода:

$$\gamma_k=corr(u_i,u_{i+k})=E\left[(u_i-\overline{u_i})(u_{i+k}-\overline{u_{i+k}})\right]\left[\sqrt{Du_i}\sqrt{Du_{i+k}}\right]^{-1},\ i=\overline{1,(n-k)}.$$

Вычисление γ_k следует проводить для значений рядов u_n^2 и u_n^2/σ_n^2 соответственно до и после применения GARCH(1,1).

Известно, что гипотеза H_0 об уменьшении автокорреляции в структуре данных проверяется с помощью статистики Льюнга-Бокса:

$$\bar{\gamma}=n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\gamma_k^2}{n-k},$$

где m – максимальное значение лага, заданное исследователем.

Гипотеза H_0 принимается, если $\bar{\gamma}<\chi_{1-a}^{2}(m-1-1)$, где p=1, q=1, a – уровень значимости критерия, и отвергается в противном случае. Соответственно, GARCH(1,1), определяемый выражением (53) с коэффициентами, удовлетворяющими (59), является статистически надежным с уровнем значимости a, если $\bar{\gamma}<\chi_{1-a}^{2}(m-1-1)$.

4.5. МНОГОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ОБОБЩЕННОЙ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ УСЛОВНОЙ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТИ

Пусть $\{u_t\}$–многомерный ряд логарифмических доходностей, $u_t=(u_{1t},u_{2t},...,u_{Kt})^T$, рассчитанных для некоторой совокупности цен активов $y_t=(y_{1t},y_{2t},...,y_{Kt})^T$:

$$u_{it}=\ln(y_{it})-\ln(y_{i,t-1}),\ t=1,...,T,\ i=1,...,K,$$

где K – общее число ценных бумаг портфеля.

Предполагая условную гетероскедастичность многомерного временного ряда $\{u_t\}$, $t=1,...,T$, допустим, что его условные математические ожидания равны нулю

$$E(u_{it}|F_{t-1})=0,\ i=1,...,K,$$

а условные дисперсии в фиксированный момент времени t определяются как

$$D(u_t|F_{t-1})=H_t,$$

где $H_t = \left(-h_{ijt}-\right)$ – симметричная положительно определенная ковариационная матрица $K\times K$, состоящая из дисперсий $h_{iit} = \sigma_{it}^2$, $i = 1,...,K$, и ковариаций $h_{ijt} = \sigma_{ijt}$, $1 \le i < j \le K$; $\overline{F} = \left(F_n\right)_{n\ge 0}$ – фильтрация, определенная σ-подалгебрами F_n такими, что $\Theta = \left(\theta_1,...,\theta_N\right)$, если $m \le n$. Кроме того, предположим, что u_t являются условно–гауссово распределенными многомерными случайными величинами:

$$u_t = H_t^{1/2}\overline{\varepsilon}_t ,$$

где $H_t^{1/2}$ – разложение Холесского для H_t, вектор - столбец $\overline{\varepsilon}_t \sim N\left(0, I_K\right)$, I_K – единичная матрица порядка K.

Пусть дисперсии σ_{it}^2, $i = 1,...,K$, удовлетворяют авторегрессионной зависимости, описывающей одномерный GARCH(1,1)–процесс [12] при каждом фиксированном i:

$$\sigma_{it}^2 = \omega_i + \alpha_i\sigma_{i,t-1}^2 + \beta_i u_{i,t-1}^2 , \tag{60}$$

где $\sigma_{i,0}^2 = const$, $u_{i,0} = const$, $\omega_i \ge 0, \alpha_i \ge 0, \beta_i \ge 0$ – некоторые параметры, $\alpha_i + \beta_i < 1$, $t = 1, 2,...,T$.

После нахождения волатильностей σ_{it}^2 внедиагональные элементы σ_{ijt} матрицы ковариаций H_t могут быть определены из равенств вида:

$$\sigma_{ijt} = \rho_{ijt}\sigma_{it}\sigma_{jt} , \ 1 \le i < j \le K , \tag{61}$$

где ρ_{ijt} – коэффициенты положительно определенной матрицы корреляций Γ_t, участвующей в разложении $H_t = D_t\,\Gamma_t\,D_t$, D_t – диагональная матрица с элементами σ_{it} на главной диагонали.

Подлежащие детерминации неизвестные параметры в выражениях (60)–(61) объединим в общий вектор $\Theta = \left(\theta_1,...,\theta_N\right)$ размерности $N = 3K + TK\left(K-1\right)/2$:

$$\Theta = \left(\omega_1, \alpha_1, \beta_1,...,\omega_K, \alpha_K, \beta_K, \rho_{12t}, \rho_{13t},...,\rho_{1KT}, \rho_{23T},...,\rho_{K-1,KT}\right).$$

В силу предположения о выполнении нормального закона распределения для логарифмических доходностей u_t оценивание θ_i, $i = \overline{1,N}$ проведем методом максимального правдоподобия с функциями условных плотностей нормального закона распределения $f_t = \left(2\pi\right)^{-K/2}\det^{-1/2}\left(H_t\right)\exp\left(-\dfrac{1}{2}u_t^T H_t^{-1} u_t\right)$, вычисленных в T векторах наблюдений $u_1, u_2,..., u_T$, и составим логарифмическую функцию правдоподобия:

$$l \equiv l\left(\Theta\right) = \sum_{t=1}^{T} l_t = \sum_{t=1}^{T} \ln f_t , \tag{62}$$

где $l_t = -\frac{K}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln(\det H_t) - \frac{1}{2}u_t^T H_t^{-1} u_t$.

Отбрасывая постоянный член $\left(-\frac{K}{2}\ln 2\pi\right)$ и учитывая, что $H_t = D_t\,\Gamma_t\,D_t$, в выражении (62) окончательно имеем:

$$l_t = -\frac{1}{2}\ln\left|D_t\Gamma_t D_t\right| - \frac{1}{2}u_t^T D_t^{-1}\Gamma_t^{-1}D_t^{-1}u_t =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\Gamma_t\right| - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K}\ln\sigma_{jt}^2 - \frac{1}{2}u_t^T D_t^{-1}\Gamma_t^{-1}D_t^{-1}u_t,\ t = 1,...,T. \tag{63}$$

В общем случае, когда u_t удовлетворяет произвольному вероятностному закону, для получения устойчивых оценок вектора параметров $\overline{\Theta}$ использование метода максимального правдоподобия с функцией l_t, взятой в виде (63), корректно вследствие выполнения асимптотического соотношения:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\overline{\Theta}_n - \Theta\right) = \overline{Y} \sim N\left(0, J_\Theta^{-1}(\Theta)\right), \tag{64}$$

где $J_\Theta(\Theta)$ – информационная матрица Фишера, состоящая из элементов $J_{ij}(\Theta) = E\left(\frac{\partial l(\Theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial l(\Theta)}{\partial\theta_j}\right),\ i, j = \overline{1, N}$.

Отметим, что даже при малом количестве значений многомерного временного ряда u_t, $1 \le t \le T$, число оцениваемых коэффициентов θ_i, $i, = \overline{1, N}$, в DCC–GARCH(1,1) будет велико. Кроме того, найденные методом максимального правдоподобия оценки корреляционных $\overline{\Gamma}_t$, а значит и ковариационных $\overline{H}_t = \overline{D}_t\,\overline{\Gamma}_t\,\overline{D}_t$, $t = 1,...,T$, матриц не обязательно будут положительно определенными. Поэтому модифицируем DCC–MGARCH(1,1) и предположим, что для изменяющихся во времени элементов корреляционной матрицы ρ_{ijt} справедливо следующее соотношение:

$$\rho_{ijt} = \rho_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_{i,t-1}\varepsilon_{j,t-1},\ 1 \le i < j \le K,\ 1 \le t \le T, \tag{65}$$

где $\varepsilon_{i,t} = u_{i,t}\sigma_{it}^{-1}$ – стандартизированные остатки (шумы), $\varepsilon_t = D_t^{-1}H_t^{1/2}\overline{\varepsilon}_t$, ρ_{ij} – элементы некоторой фиксированной матрицы корреляции $\Gamma = \Gamma_s$ в момент времени *t*=*s*.

Согласно (65) матрицы Γ_t, $1 \le t \le T$, слабо меняются с течением *t* и могут быть заменены на сумму постоянной корреляционной матрицы Γ с некоторым белым шумом. Как следствие, размерность вектора Θ существенно снижается и составляет $N = K^2 + 2K$:

$$\Theta = \left(\omega_1, \alpha_1, \beta_1, ..., \omega_K, \alpha_K, \beta_K, \rho_{12}, \rho_{13}, ..., \rho_{1K}, \rho_{23}, ..., \rho_{K-1,K}, \delta_{12}, \delta_{13}, ..., \delta_{K-1,K}\right). \tag{66}$$

Получим условия, при которых возмущенная ковариационная матрица $\overline{H}_t = D_t \overline{\Gamma}_t D_t$, где $\overline{\Gamma}_t$ – матрица с элементами $\rho_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_{i,t-1}\varepsilon_{j,t-1}$, будет положительно определенной. Сформулируем и докажем теорему 1.

Теорема 4.2: Пусть $\Delta = (-\delta_{ij} -)$, $\delta_{ii} = 0$, $i, j = 1,..,K$, – полуопределенная матрица коэффициентов с нулевой главной диагональю, $\varepsilon = diag(\varepsilon_{1,t-1},...,\varepsilon_{K,t-1})$ – диагональная матрица возмущений с элементами одного знака. Тогда $\overline{H}_t$ положительно определена.

Доказательство:

Очевидно, что $\overline{H}_t = D_t \overline{\Gamma}_t D_t = D_t(\Gamma + \varepsilon\Delta\varepsilon)D_t = D_t \Gamma D_t + D_t \varepsilon\Delta\varepsilon D_t = H_t + A_t$, где H_t – исходная невозмущенная положительно определенная матрица ковариаций, $A_t = D_t \varepsilon\Delta\varepsilon D_t = (\varepsilon D_t)^T \Delta (D_t \varepsilon)^T = \varepsilon D_t \Delta D_t \varepsilon$ – шум. Рассмотрим подробнее матрицу A_t.

1) Пусть $\varepsilon = diag(\varepsilon_{1,t-1},...,\varepsilon_{K,t-1})$ составлена из положительных стандартизированных остатков. Тогда εD_t положительно определена, т.е. A_t, как произведение положительно определенных и полуопределенной матриц, будет положительно полуопределенной.
2) Пусть $\varepsilon = diag(\varepsilon_{1,t-1},...,\varepsilon_{K,t-1})$ составлена из отрицательных стандартизированных остатков. Тогда εD_t отрицательно определена, а $(-\varepsilon D_t)$ будет положительно определенной. Следовательно, $A_t = -(-\varepsilon D_t)\Delta(-(-\varepsilon D_t)) = (-\varepsilon D_t)\Delta(-\varepsilon D_t)$ тоже будет положительно определенной по доказанному выше первому случаю.

Таким образом, в условиях теоремы A_t всегда положительно полуопределена. Докажем, что $\overline{H}_t = H_t + A_t$ положительно определена. Действительно, по определению, для любого вектора $V \in R^K$, $V \neq 0$, имеем:

$$V^T \overline{H}_t V = V^T (H_t + A_t) V = V^T H_t V + V^T A_t V .$$

Так как $V^T H_t V > 0$, $V^T A_t V \geq 0$, то $V^T \overline{H}_t V > 0$, что доказывает теорему 4.2.

Замечание: если матрица ε составлена из остатков разных знаков, то A_t будет неопределенной матрицей и доказать положительную определенность $\overline{H}_t$ не удается.

Отметим, что в выражении (65) при $\delta_{ij} = 0$, $1 \leq i < j \leq K$, алгоритм DCC–MGARCH(1,1) превращается в известный метод CCC–MGARCH(1,1). Неоспоримыми преимуществом последнего алгоритма является использование единственной, постоянной по времени корреляционной матрицы Γ при моделировании значений H_t:

$$H_t = D_t \, \Gamma \, D_t ,$$

что не только приводит к сокращению числа оцениваемых параметров в векторе Θ, но и существенно облегчает процедуру расчетов. Действительно, в случае условной нормальности случайных величин $u_t \sim N(0, H_t | F_{t-1})$ оценка максимального правдоподобия $\overline{\Gamma}$ для Γ всегда вычисляется как выборочное среднее стандартизированных остатков:

$$\overline{\Gamma} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} D_t^{-1} u_t u_t^T D_t^{-1} \ , \tag{67}$$

причем $\overline{\Gamma}$ почти наверное положительно определена. Далее, (67) позволяет упростить выражения (62)–(63) и записать (62) в виде (при условии, что постоянные члены отброшены):

$$l = -\sum_{t=1}^{T} \ln |D_t| - \frac{T}{2} \ln \left(\sum_{t=1}^{T} D_t^{-1} u_t \, u_t^T D_t^{-1} \right).$$

Поэтому число оцениваемых методом максимального правдоподобия коэффициентов сокращается до $N = 3K$:

$$\Theta = (\omega_1, \alpha_1, \beta_1, ..., \omega_K, \alpha_K, \beta_K).$$

Для проверки справедливости равенств $\delta_{ij} = 0$, $1 \le i < j \le K$, выдвинем статистическую гипотезу $\overline{H}_0 : \delta_{ij} = 0$, $1 \le i < j \le K$, о постоянстве матриц корреляций в разложении $H_t = D_t \, \Gamma_t \, D_t$, имеющую $Q = 0.5(K^2 - K)$ независимых ограничений. Пусть имеет место альтернативная гипотеза $\overline{H}_1 : \delta_{ij} \ne 0$, $1 \le i < j \le K$.

Приведем без доказательства формулы вычисления производной функции правдоподобия:

$$\frac{\partial l(\Theta)}{\partial \omega_i} = \sum_{t=1}^{T} \frac{(d_{it}\varepsilon_{it} - 1)}{2\sigma_{it}^2} \cdot \frac{\partial \sigma_{it}^2}{\partial \omega_i}, \ 1 \le i \le K,$$

$$\frac{\partial l(\Theta)}{\partial \alpha_i} = \sum_{t=1}^{T} \frac{(d_{it}\varepsilon_{it} - 1)}{2\sigma_{it}^2} \cdot \frac{\partial \sigma_{it}^2}{\partial \alpha_i}, \ 1 \le i \le K,$$

$$\frac{\partial l(\Theta)}{\partial \beta_i} = \sum_{t=1}^{T} \frac{(d_{it}\varepsilon_{it} - 1)}{2\sigma_{it}^2} \cdot \frac{\partial \sigma_{it}^2}{\partial \beta_i}, \ 1 \le i \le K,$$

$$\frac{\partial l(\Theta)}{\partial \rho_{ij}} = \sum_{t=1}^{T} \left(d_{it} \, d_{jt} - \rho_t^{ij}\right), \ 1 \le i < j \le K,$$

$$\frac{\partial l(\Theta)}{\partial \delta_{ij}} = \sum_{t=1}^{T} \left(d_{it} \, d_{jt} - \rho_t^{ij}\right) \varepsilon_{i,t-1} \varepsilon_{j,t-1} \ , \ 1 \le i < j \le K.$$

где $d_t = (d_{1t}, d_{2t}, ..., d_{Kt})^T = \Gamma_t^{-1} D_t^{-1} u_t$, d_{it} – i-ая компонента вектора d_t, ρ_t^{ij} – элементы обратной матрицы Γ_t^{-1}, $\varepsilon_t = D_t^{-1} u_t$, $\varepsilon_0 = 0$.

5. МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

5.1 ФОРВАРДНАЯ ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА

Определение: Вероятности P и Q называются *эквивалентными*, если существует стохастический процесс $\gamma_t=\gamma(\omega, t)$, что для каждого A из борелевского множества $G=2^\Omega$

$$P(A)=\int_A \gamma_T\, dQ .$$

Замечание: после непосредственного дифференцирования $P(A)=\int_A \gamma_T\, dQ$ получаем, что

$$dP=\gamma_T dQ .$$

Можно показать, что γ_t является мартингалом относительно F_n и вероятности P (**без доказательства**), т.е.

$$\gamma_t = E_P\left(\gamma_T | F_n\right),\ t<T.$$

Лемма: пусть X_t – адаптивный процесс относительно фильтрации F_n, т.е. для любого $t<n$ процесс X_t интегрируем в $L_1(0,T)$. Пусть γ_t – процесс, для которого вероятности P и Q будут эквивалентными. Тогда выполнено равенство

$$E_P\left(X_t\right)=E_Q\left(X_t\gamma_T\right).$$

Доказательство: $E_P\left(X_t\right)=$(по определению)$=\int_{\Re} X_t dP=$(по определению эквивалентности вероятности $dP=\gamma_T dQ$) $=\int_{\Re} X_t\gamma_T dQ = E_Q\left(X_t\gamma_T\right)$, ч.т.д.

Теорема (Гирсанова): Вероятность P^* является *риск-нейтральной*, если существует процесс $\gamma(t)$, что для каждого A, принадлежащего борелевскому множеству G, выполнено

$$P^*(A)=\int_A M(\omega,T)dP ,$$

где $\gamma_t = M(\omega,t)=\exp\left(\int_0^t c_t dW-\frac{1}{2}\int_0^t c_t^2 dt\right)$, c_t–произвольный интегрируемый с квадратом стохастический процесс. Кроме того $\overline{W}=W-\gamma_t$ - винеровский процесс относительно P^*.

Замечание: *M(ω,t)* называется *стохастическим дисконтирующим фактором*.

Теорема 1 (о существовании риск-нейтральной вероятности процесса Ито):

Пусть

$$dS=\alpha S dt+\sigma S dW$$

- процесс Ито. Тогда существует риск-нейтральная вероятность P^*, относительно которой решение этого дифференциального уравнения есть

$$S(t)=S_0\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\overline{W}\right],$$

$\overline{W}$ - винеровский процесс относительно P^*.

Доказательство:

Воспользуемся теоремой Гирсанова и найдем процесс *γ(t)*, чтобы $P^*(A)=\int\limits_A M(\omega,t)dP$ или $\dfrac{dP^*}{dP}=\exp\left(\int\limits_0^T \gamma dW-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^T \gamma^2 ds\right)$. Тогда $W=\overline{W}+\gamma_t$, где $\overline{W}$ - винеровский процесс относительно P^*, а W – винеровский процесс относительно P.

Имеем:

$$dW=d\overline{W}+\gamma_t dt$$

- дифференцируем по стохастической части, которой нет в γ_t.

Исходное дифференциальное уравнение:

$$dS=\alpha Sdt+\sigma SdW=\alpha Sdt+\sigma S(\overline{W}+\gamma)=\alpha Sdt+\sigma S(d\overline{W}+\gamma dt)$$

Выбирая $\gamma=\dfrac{r-\alpha}{\sigma}$ - *цена риска* – показатель Шарпа, получаем:

$$dS=\alpha Sdt+\sigma S(d\overline{W}+\frac{r-\alpha}{\sigma}dt)=\alpha Sdt+\sigma Sd\overline{W}+(r-\alpha)Sdt=rSdt+\sigma Sdt$$

Получили новое дифференциальное уравнение относительно риск-нейтральной вероятности P^*, так как в случае $\sigma=0$ и $dS=rS_0dt$ определяет риск-нейтральную эволюцию капитала: $S=S_0\exp\left(\int_o^t r_s\,ds\right)$ или капитал, получаемый инвестированием в безрисковый актив под безрисковую процентную ставку. Значит, нашли $\gamma=\dfrac{r-\alpha}{\sigma}$, которая определяет P^*. Найдем решение исходного ДУ $dS=\alpha Sdt+\sigma SdW$ относительно P^*.

Известно общее решение относительно P:

$$S(t)=S_0e^{\left(\alpha-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+W\,t}.$$

Так как $dS=\alpha Sdt+\sigma SdW$ преобразуются в уравнение $dS=rSdt+\sigma Sd\overline{W}$, эквивалентное исходному относительно риск-нейтральной вероятности, то $\dfrac{dS}{S}=rdt+\sigma d\overline{W}$ или расписывая *d(ln S)*, получим:

$$S(t)=S_0e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\overline{W}},$$

чтд.

В доказанной теореме процентная ставка является постоянной. Перейдем к рассмотрению процентной ставки стохастического процесса. Пусть $r = r(W,t)$.

Определение: Пусть $P(t,T)$ – цена бескупонной облигации в момент $t<T$, t – время погашения. *Мгновенной форвардной процентной ставкой* назовем функцию

$f(t,T)=-\dfrac{\partial}{\partial T}P(t,T)$ или, что-то же самое, $P(t,T)=\exp\left(-\int\limits_t^T f(t,s)ds\right)$, T = const.

Определение: *Безрисковой процентной ставкой* назовем $r(t) = r_t = f(t,t)$.

Замечание: Если B_t – цена облигации в момент t, B_0 – её номинальная стоимость, то $dB_t=B_tr_tdt$, откуда $B_t=B_0\exp\left(\int\limits_0^t r_s ds\right)$. Если $r_s=r(s)=r$ – постоянная ставка, то $B_t=B_0e^{rt}$ - непрерывно начисляемый процент.

Пусть форвардная процентная ставка является процессом Ито, т.е представима в виде $df=\alpha fdt+\sigma fdW$. Интегрируя,

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)dW_S.$$

Так как $r_t = f(t,t)$, то $r_t = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)dW_S$. Следовательно, так

как $B_t = B_0 \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$, то $B_t = B_0 \exp\left(\int_0^t f(0,p)dp + \int_0^t\int_0^p \alpha(s,p)dsdp + \int_0^t\int_0^p \sigma(s,p)dW_S dp\right)$.

Меняя пределы интегрирования по теореме Фубини, получим:

$$B_t = B_0 \exp\left(\int_0^t f(0,p)dp + \int_0^t\int_S^t \alpha(s,p)dpds + \int_0^t\int_S^t \sigma(s,p)dpdW_S\right). \qquad (1)$$

Кроме того, так как $P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right)$, подставляя выражение $f(t,T)$ и применяя теорему Фубини, аналогично получаем:

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(0,s)ds - \int_0^t\int_t^T \alpha(s,u)duds - \int_0^t\int_t^T \sigma(s,u)dudW_S\right). \qquad (2)$$

Обозначим для простоты написания:

$$\alpha'(t,T) = \int_t^T \alpha(t,s)ds, \sigma'(t,T) = \int_t^T \sigma(t,s)ds.$$

Теорема 2 (без доказательства): Если уравнение

$$-\alpha'(t,T) + \frac{1}{2}[\sigma'(t,T)]^2 = \sigma'(t,T)\gamma_t \qquad (3)$$

имеет единственное решение γ_t, то существует риск – нейтральная вероятность P^* для дисконтированной цены

$$\frac{P(t,T)}{B(t)} = \frac{(2)}{(1)}$$

Кроме того, замена переменного вида

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\sigma'(t,T) \qquad (4)$$

не меняет вероятность P^*.

Используем теорему 2. Пусть $\overline{W}$ - винеровский процесс относительно риск – нейтральной вероятности P^*. Тогда, так как

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T) + \int_0^t \sigma(s,T)d\overline{W}_S,$$

пользуясь заменой (4) имеем:

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma(s,T)\sigma'(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)d\overline{W}_S,$$

или дифференцируя по t, имеем:

$$df = \sigma(t,T)\sigma'(t,T)dt + \sigma(t,T)d\overline{W}_t$$

Определим цену $P(t,T)$ относительно риск – нейтральной вероятности P^*.

Рассмотрим

$$\ln P(t,T) = -\int_t^T f(0,s)ds - \int_0^t\int_t^T \alpha(s,u)duds - \int_0^t\int_t^T \sigma(s,u)dudW_S = -\int_t^T f(0,s)ds - \int_0^t \alpha'(s,T)ds -$$

$-\int_0^t \sigma'(s,T)dW_S =$(воспользуемся свойством интегралов $\int_t^T = \int_0^T - \int_0^t$ для α' и σ') =

$$= -\int_0^T f(0,u)du - \int_0^t \alpha'(s,T)ds - \int_0^t \sigma'(s,T)dW_S + \int_0^t f(0,u)du + \int_0^t \alpha'(s,t)ds + \int_0^t \sigma'(s,t)dW_S\ .$$

Полагая в (1) начальный капитал B_0=1, видим, что последние три слагаемые и есть ln B_t. Тогда

$$\ln P(t,T) = \ln B_t - \int_0^T f(0,u)du - \int_0^t \alpha'(s,T)ds - \int_0^t \sigma'(s,T)dW_S. \tag{5}$$

В то время, $B_t = B_0 \exp\left(\int_0^t r_S ds\right)$, то есть $\ln B_t = \int_0^t r_S ds$ при условии $B_0 \equiv 1$. Вдобавок, мы видим из (5): $\ln P(0,T) = \ln B_0 - \int_0^T f(0,u)du = -\int_0^T f(0,u)du$.

Допустим, что из уравнения (3) мы нашли γ_t. Перейдем от текущей вероятности P к P^*: $dW_t = d\overline{W}_t + \gamma_t dt$.

Тогда в (5) имеем:

$\ln P(t,T) = \int_0^t r_S ds +$(**так как** $-\int_0^T f\, du = \ln\text{P}(0,\text{T})$**)** +

$$+\ln P(0,T) - \int_0^T \alpha'(s,T)ds - \int_0^t \sigma'(s,T)(d\overline{W}_t + \gamma_t dt) = \text{ (пользуясь (3))=}$$

$$= \ln P(0,T) - \frac{1}{2}\int_0^t [\sigma'(s,T)]^2 ds - \int_0^t \sigma'(s,T)d\overline{W}_t + \int_0^t r_S ds. \tag{6}$$

Ранее мы получили, что относительно риск – нейтральной вероятности

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma(s,T)\sigma'(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)d\overline{W}\ ,$$

или, меняя T на t, имеем

$$f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \sigma(s,t)\sigma'(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)d\overline{W}_t.$$

Так как r_t=$f(t,t)$, то из последнего

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \sigma(s,t)\sigma'(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)d\overline{W}_S. \tag{7}$$

Интегрируя обе части уравнения (6) по промежутку [0,t], имеем:

$$\int_0^t r_S ds = \int_0^t f(0,u)du + \frac{1}{2}\int_0^t [\sigma'(s,t)]^2 ds + \int_0^t \sigma'(s,t)d\overline{W}_t$$

Подставим последнее равенство в (6):

$$\ln P(t,T) = \ln P(0,T) - \frac{1}{2}\int_0^t [\sigma'(s,t)]^2 ds - \int_0^t \sigma'(s,t)d\overline{W} + \int_0^t f(0,u)du + \frac{1}{2}\int_0^t [\sigma'(s,t)]^2 ds + \int_0^t \sigma'(s,t)\overline{W}\ \text{-}$$

искомая цена $P(t,T)$ относительно риск – нейтральной вероятности.

Кроме того, из (6) $P(t,T)=P(0,T)\exp\left(\int_0^t r_S ds-\frac{1}{2}\int_0^t[\sigma'(s,T)]^2 ds-\int_0^t\sigma'(s,T)d\overline{W}\right)$.

Дифференцируя его по формуле Ито получим:

$$dP(t,T)=P(0,T)\cdot r_t dt-P(t,T)\sigma'(t,T)d\overline{W}_t$$

– дифференциальное уравнение для цены бескупонной облигации в момент времени t.

5.2. ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ОБЛИГАЦИЙ КРЕДИТНОГО РИСКА. МОДЕЛЬ МЕРТОНА.

Пусть некоторая фирма занимает у банка сумму, которая обеспечена ликвидными активами (или акциями) фирмы на сумму V (стоимость фирмы в терминах быстрой ликвидности). Пусть K – сумма, которую нужно вернуть кредитору в момент времени T, $K<V$. Банк, желая минимизировать риск дефолта предприятия и невозврата кредита, выпускает дефолтные облигации, обеспечением которых являются активы фирмы на сумму V. Все дефолтные облигации продаются банку – страховщику выпуском опциона покупателя: страховщик предполагает падение стоимости облигаций в случае дефолта и продает опцион покупателя банку на всю сумму облигаций. Это эквивалентно тому, что владелец предприятия выпускает облигации, продает их банку и продает опцион продавца на весь объем эмиссии держателям облигаций, чтобы компенсировать падение стоимости облигаций в случае дефолта. Если акции фирмы падают в цене и их стоимость меньше V, то страховщик или банк исполняют опцион и продают акции (облигации) по цене, которая была на момент предоставления кредита (она выше текущей, если стоимость фирмы падает). Таким образом, мы имеем дело с корпоративными облигациями на сумму дефолта K и опционом продавца с ценой исполнения K в момент T. В нашем случае, V – переменная стоимость компании. Тогда функция выплаты по опциону составит $\varphi(T)=K-\max(K-V,0)\equiv\min(V,K)$.

Пусть стоимость фирмы является стохастическим дифференциальным процессом Ито $dV=rVdt+\sigma Vd\overline{W}$ относительно риск–нейтральной вероятности P^*, или $dV=\mu Vdt+\sigma VdW$ относительно произвольной вероятности P. В данной формуле r – безрисковая процентная ставка, σ – волатильность.

Заметим, что сам актив V не продается и не покупается на бирже. Торгуется только производная от V бумага – акции (облигации) компании.

Мертон показал, что цена фирмы V не зависит от неприятия риска инвесторами, поэтому мы можем предположить, не умоляя общности, риск – нейтральность вероятности. Это приведет нас к рассмотрению формулы Блэка – Шоулса для опциона с функцией выплаты $f(T) = max\{K – V, 0\}$.

Действительно, покажем, что цена дефолтной облигаций будет найдена по формуле Блэка – Шоулса. Рассмотрим модель со стороны заемщика (частной компании).

Обозначим

- через $P^d(t,T)$ - стоимость дефолтных облигаций со сроком исполнения T, $t<T$;
- через $P(t, T)$, как и ранее, - стоимость бескупонных облигаций со сроком исполнения Т;
- $p(t)$ – стоимость опциона продавца на стоимость компании V.

Тогда $P^d(t,T)=P(t,T)-p(t)$ (продали облигации=взяли кредит, купили опцион продавца на эти облигации в качестве обеспечения), причем

$p(t)=-V\cdot\Phi(-d_1)+P(T,T)\exp(-r(T-t))\Phi(-d_2)$ (по формуле Блэка – Шоулса),

где $P(T,T)$ – цена исполнения опциона или E,

V – цена базового актива или стоимость компании,

$$d_1=\left[\ln\frac{V}{P(T,T)}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]\cdot(\sigma\sqrt{T-t})^{-1},\ d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}.$$

Нам известна эволюция *P(T, T)*:

$$P(T,T) = P(t,T)\exp\big(r(T-t)\big),$$

откуда $P(t,T) = P(T,T)\exp(-r(T-t))$.

Кроме того, известно, что $\Phi(-d_i) = 1 - \Phi(d_i)$. Поэтому

$$P^d(t,T) = P(t,T) + V\Phi(-d_1) - P(t,T)\Phi(-d_2) =$$
$$= P(t,T)(1-\Phi(-d_2)) + V\Phi(-d_1) = P(t,T)\Phi(d_2) + V\Phi(-d_1).$$

Пусть $\Gamma = \dfrac{V}{P(t,T)}$ - это дисконтированная стоимость фирмы или отношение $\dfrac{\textit{капитализация}}{\textit{долг}}$.

Цена дефолтной облигации есть

$$P^d(t,T) = P(t,T)\Phi(d_2) + P(t,T)\cdot\Gamma\cdot\Phi(-d_1), \tag{8}$$

причем $d_1 = \left[\ln\dfrac{V}{P(T,T)} + (r + \dfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right]\cdot(\sigma\sqrt{T-t})^{-1} =$ (так как $P(T,T) = P(t,T)\exp\big(r(T-t)\big)$)=

$$= \left\{\ln\left[\frac{V}{P(t,T)}\exp(-r(T-t))\right] + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right\}(\sigma\sqrt{T-t})^{-1} =$$

$$= \left\{\ln\Gamma - r(T-t) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right\}(\sigma\sqrt{T-t})^{-1} = \frac{\ln\Gamma + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Сравнивая (1) с формулой Блэка – Шоулса для опциона продавца, видим, что Γ можно считать базовым активом опциона на дефолтные облигации. Кроме того, Γ можно рассматривать как показатель расстояния до дефолта: чем больше соотношение $\dfrac{\textit{капитализация}}{\textit{долг}}$, тем меньше вероятность наступления дефолта, тем больше расстояние до дефолта.

Формула (1) дает так же величину спрэда (разницы доходностей) дефолтных и обыкновенных бескупонных облигаций. Действительно, $\dfrac{P^d(t,T)}{P(t,T)} = \Phi(d_2) + \Gamma\Phi(-d_1)$.

Выбирая в качестве *P(t,T)* банковский депозит под безрисковую процентную ставку *r*, то есть $P(t,T) = \exp(-r(T-t))$, а в качестве $P^d(t,T) = \exp(-r_d(T-t))$, где r_d – процентная ставка по кредиту, получаем частный случай: $\exp(-r_d(T-t) + r(T-t)) = \Phi(d_2) + \Gamma\Phi(-d_1)$, или, логарифмируя,

$$(r - r_d)(T-t) = \ln\big[\Phi(d_2) + \Gamma\Phi(-d_1)\big],$$

откуда

$$r_d - r = -\frac{\ln[\Phi(d_2) + \Gamma\Phi(-d_1)]}{T-t} \tag{9}$$

5.3. ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ КРЕДИТНОГО РИСКА С РИСКОМ ДЕФОЛТА ОДНОЙ ИЗ СТОРОН С ПОСТОЯННОЙ СУММОЙ ДОЛГА

Пусть X(T) – обещанная к выплате сумма долга, выплачиваемая по опциону европейского типа в момент *T*. Если фирма – должник остается платежеспособной до момента *T* включительно, то она выплачивает держателю опциона сумму *X*(*T*). Если в момент *t*<*T* наступает дефолт по платежам, то держатель опциона получает только часть от обещанного количества *X*(*T*). В этом случае размер выплаты зависит от текущей стоимости активов и обязательств. Пусть, как и ранее, *V*(*t*) – стоимость активов заемщика. Кроме того, пусть $D(t)$ – стоимость обязательств фирмы. Тогда в случае банкротства фирма выплачивает банку следующую часть $X(T)$:

$$X^d(T) = X(T)\frac{V(T)}{D(T)}.$$

Дробь $\frac{V(T)}{D(T)}$ называют скоростью восстановления активов фирмы, или соотношением единицы активов на единицу долга. Чем ближе оно к нулю, тем быстрее фирма станет банкротом.

Обозначим $\delta(T) = \frac{V(T)}{D(T)}$. Тогда сумма дефолтной выплаты X^d по опциону кредитного риска может быть представлена в общем виде как:

$$X^d(T) = X(T)I_{\tau>T} + \delta(T)X(T)I_{\tau\le T}, \tag{9a}$$

где $I_{\tau\le T} = \begin{cases} 1, \tau \le T \\ 0, \tau > T \end{cases}$ - индексное множество, τ - момент дефолта.

Из (9а) видно, что при банкротстве в момент $\tau>T$ банк получает $X(T)$ (момент банкротства не влияет в этом случае на размер выплаты, долг выплачивается полностью), а при $\tau\le T$ выплачивается пропорциональная часть долга $\delta(T)X(T)$.

Заметим, что в случае $\delta(T)>1$, или при $V(T)>D(T)$, долг $X(T)$ будет полностью погашен, даже если наступит дефолт по обязательствам. Если $V(T)<D(T)$, то долг оплачивается с коэффициентом пропорциональности $\delta(T)$. Поэтому равенство (9а) эквивалентно следующему выражению:

$$X^d(T) = X(T)I_{V(T)\ge D(T)} + f(T)X(T)I_{V(T)<D(T)}$$

Мы знаем, что цена опциона европейского типа $C(t)$ с функцией выплаты $f(T)$ находится по формуле:

$$C(t) = B_t E^*\left(\frac{f(T)}{B_T}\middle| F_T\right),$$

где E^* - риск–нейтральное математическое ожидание, $B_t=B_0e^{rT}\equiv 1$ – цена облигации с безрисковой процентной ставкой (единица капитала), F_t – фильтрация.

В нашем случае выплата $f(T)=X^d(T)$, поэтому

$$X^d(T) = B_t E^*\left(\frac{X(T)I_{V(T)\ge D(T)} + \delta(T)X(T)I_{V(T)<D(T)}}{\exp(rT)}\middle| F_T\right) \tag{10}$$

Пусть далее сумма долга является постоянной величиной: $D(T)=D$. Пусть $\delta(T) = \frac{V_t}{D}$. Тогда справедлива следующая теорема 5.1.

Теорема 5.1 (о цене опциона покупателя кредитного риска или незащищенного опциона при постоянной сумме долга D):

Пусть $X(T)$ – цена незащищенного опциона с функцией выплаты $X_T=(S_T - E)^+$ и выплачиваемой в действительности суммой $X_T= \delta(T)(S_T - E)^+$. Тогда в случае цена дефортного опциона есть:

$$X_t = S_t\Phi(a_1,a_2,\rho) - e^{-r(T-t)}E\Phi(b_1,b_2,\rho) + \delta(t)\big[\exp((r+\sigma_1\sigma_2\rho)(T-t))S_t\Phi(C_1,C_2,-\rho) -$$
$$- E\Phi(d_1,d_2,-\rho)\ \big],$$

где $\delta(T) = \frac{V_t}{D}$, D-размер долга, E – цена исполнения опциона,

$V_t = V_0 \exp\left[(r - \frac{\sigma_2^2}{2})t + \sigma_2 W_2(t)\right]$, $S_t = S_0 \exp\left[(r - \frac{\sigma_1^2}{2})t + \sigma_1 W_1(t)\right]$, $\rho = corr(W_1, W_2)$,

$a_1 = \dfrac{\ln\frac{S_t}{E} + (r + \frac{1}{2}\sigma_1^2)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}$, $a_2 = \dfrac{\ln\delta(T) + (r - \frac{1}{2}\sigma_2^2 + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}}$,

$b_1 = a_1 - \sigma_1\sqrt{T-t}$; $b_2 = a_2 - \rho\sigma_1\sqrt{T-t}$; $c_1 = a_1 + \rho\sigma_2\sqrt{T-t}$; $c_2 = -a_2 - \rho\sigma_1\sqrt{T-t}$,

$d_1 = a_1 + (\rho\sigma_2 + \sigma_1)\sqrt{T-t}$; $d_2 = -a_2 + (\rho\sigma_1 + \sigma_2)\sqrt{T-t}$,

$\Phi(x_1, x_2, \rho) = \int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dz_1 dz_2$ - двумерная функция распределения нормальной СВ.

Доказательство: цена опциона может быть переписана как

$$X_t = B_t E^*\left(\left.\frac{(S_T - E)^+ I_{V(T)\ge D} + \delta(t)(S_T - E)^+ I_{V(T)<D}}{B_T}\right| F_t\right),$$

где F_t – фильтрация. Знаем, что $B_t E^*\left(\left.\frac{1}{B_T}\right| F_t\right) = e^{-r(T-t)}$, т.к. $B_t = e^{rt}$. Тогда X_t может быть выражена в виде суммы:

$$X_t = E_1 - E_2 + E_3 - E_4,$$

где

$E_1 = B_t E^*\left(\left.\frac{S_T I_{S_T>E} I_{V(T)\ge D}}{B_T}\right| F_t\right)$, $E_2 = B_t E^*\left(\left.\frac{E I_{S_T>E} I_{V(T)\ge D}}{B_T}\right| F_t\right)$, $E_3 = B_t E^*\left(\left.\frac{S_T \delta_T I_{S_T>E} I_{V(T)<D}}{B_T}\right| F_t\right)$,

$E_4 = B_t E^*\left(\left.\frac{E\,\delta_T I_{S_T>E} I_{V(T)<D}}{B_T}\right| F_t\right)$, $(S_T - E)^+ = (S_T - E) I_{S>E}$. Каждое слагаемое вычислим отдельно.

Вычисление E_1.

$E_1 = B_t E^*\left(\left.\frac{S_T I_{S_T>E} I_{V(T)\ge D}}{B_T}\right| F_t\right) =$ (подставляем выражение для риск-нейтральной цены базового актива $S_T = S_t \exp\left[-\frac{\sigma_1^2}{2}(T-t) + \sigma_1 \Delta W\right]$ при r=0, где $\Delta W = W_T - W_t \sim N(0, (T-t))$ и учтем сокращение дисконтирования) $= E^*\left(S_t \exp\left[-\frac{\sigma_1^2}{2}(T-t) + \sigma_1\Delta W\right] I_{S_T>E} I_{V(T)\ge D} \,\middle|\, F_t\right)$.

Заметим, что СВ $z = \frac{\Delta W}{\sqrt{T-t}} \sim N(0,1)$ – стандартная нормальная СВ, что помогает выразить E_1 через функцию двумерного нормального стандартного распределения:

$$E_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_t \exp\left[-\frac{\sigma_1^2}{2}(T-t) + \sigma_1 z_1\sqrt{T-t}\right] I_{S_T>E} I_{V(T)\ge D} \exp\left(-\frac{(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dz_1 dz_2.$$

Легко проверить, что выполнено следующее тождество для любых действительных чисел a, b, c (аналог выделения полного квадрата):

$$\left(-\frac{(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2)}{2(1-\rho^2)} + a z_1 + b z_2 + c\right) = -\frac{(z_1 - a - \rho b)^2 - 2\rho(z_1 - a - \rho b)(z_2 - b - \rho a) + (z_2 - b - \rho a)^2}{2(1-\rho^2)} +$$

$+\frac{1}{2}a^2+\rho ab+\frac{1}{2}b^2+c$. Поэтому с его помощью выражение для E_1 может быть записано как:

$$E_1=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_t\, I_{S_T>E}I_{V(T)\geq D}\exp\left(-\frac{(v_1^2-2\rho v_1v_2+v_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right)dz_1dz_2,$$

где $v_1=z_1-\sigma_1\sqrt{T-t}$, $v_2=z_2-\rho\sigma_1\sqrt{T-t}$, или через двумерную функцию стандартного нормального распределения, $\Phi(X_1,X_2,\rho)$ с $X_1=\sigma_1\sqrt{T-t}$, $X_2=\rho\sigma_1\sqrt{T-t}$.

Введем в рассмотрение эквивалентную для dQ вероятностную риск-нейтральную меру по теореме Гирсанова: $d\dot{Q}=\exp\left(\gamma W_T-\sigma^2\frac{T}{2}\right)dQ$ с некоторыми векторами $\gamma=(\sigma_1,\rho\sigma_2)$ и $W=(W_1,W_2)$. По этой же теореме существует эквивалентное преобразование винеровского процесса вида $\dot{W}_t=W_t-\gamma t$ по мере $d\dot{Q}$. Тогда относительно этой меры $z=\frac{\Delta W}{\sqrt{T-t}}=\frac{W_T-W_t}{\sqrt{T-t}}=$(подставляем $\dot{W}_t=W_t-\gamma t$)$=\frac{\dot{W}_T-\dot{W}_t+\gamma(T-t)}{\sqrt{T-t}}=\dot{z}+\gamma\sqrt{T-t}$, где $\dot{z}$ – новая стандартная нормальная СВ относительно меры $d\dot{Q}$. Вспоминая выражение для E_1

$$E_1=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_t\, I_{S_T>E}I_{V(T)\geq D}\exp\left(-\frac{(v_1^2-2\rho v_1v_2+v_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right)dz_1dz_2,$$

видим, что $v_1=\dot{z}_1, v_2=\dot{z}_2$, т.е. E_1 вычислено относительно новой риск-нейтральной меры $d\dot{Q}$.

Найдем риск-нейтральные математические ожидания каждой индикаторной функции относительно меры $d\dot{Q}$. Имеем (подставляя выражение для эволюции S_T):

$$E^*_{\dot{Q}}(I_{S_T>E})=\dot{Q}(S_T>K)=P_{\dot{Q}}\left(S_t\exp\left[\left(r+\frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t)+\sigma_1\left(\Delta\dot{W}+\sigma_1(T-t)\right)\right]>E\right),$$

где $\Delta\dot{W}=\dot{W}_T-\dot{W}_t$ - преобразованный винеровский процесс, P – вероятностная мера (вероятность), E – цена исполнения.

Далее, логарифмируя неравенство под знаком вероятности, получаем:

$$E^*_{\dot{Q}}(I_{S_T>E})=P_{\dot{Q}}\left(\sigma_1\Delta\dot{W}>\ln E-\ln S_t-\left(r+\frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t)\right)=\text{(по обозначениям для } \dot{z}_1=\frac{\Delta\dot{W}_1}{\sqrt{T-t}}\text{)}=$$

$$=P_{\dot{Q}}\left(\dot{z}_1<\frac{\ln S_t-\ln E+\left(r+\frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}\right).$$

Аналогично, (**здесь все верно!**)

$$E^*_{\dot{Q}}(I_{V(T)\geq D})=P_{\dot{Q}}(V(T)>D)=P_{\dot{Q}}\left(V_t\exp\left[\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)+\sigma_2\left(\Delta\dot{W}+\rho\sigma_1(T-t)\right)\right]>D\right)=$$

$$=P_{\dot{Q}}\left(\sigma_2\Delta\dot{W}>\ln D-\ln V_t-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)\right)=P_{\dot{Q}}\left(\dot{z}_2<\frac{\ln V_t-\ln D+\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}}\right),$$

так как $\dot{z}_2 = \dfrac{\Delta \dot{W}_2}{\sqrt{T-t}}$.

Далее, вычислим следующий интеграл (переменные внутри интеграла без точек) в зависимости от трех произвольных параметров a_1, a_2, ρ с участием функции плотности двумерного нормального распределения $f(z_1, z_2, \rho)$:

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_{z_1 \ge a_1} I_{z_2 \ge a_2} f(z_1, z_2, \rho) dz_1 dz_2 = \int\limits_{a_1}^{\infty}\int\limits_{a_2}^{\infty} f(z_1, z_2, \rho) dz_1 dz_2 =$ (по свойствам двумерной функции

плотности распределения) $= \int\limits_{a_1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{-a_2} f(z_1, z_2, -\rho) dz_2 dz_1 = \int\limits_{-\infty}^{-a_1}\int\limits_{-\infty}^{-a_2} f(z_1, z_2, \rho) dz_2 dz_1 = \Phi(a_1, a_2, \rho)$. (*)

Окончательно имеем, вспоминая, что нам нужно было вычислить интеграл $E_1 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_t I_{S_T > E} I_{V(T) \ge D} \exp\left(-\dfrac{(v_1^2 - 2\rho v_1 v_2 + v_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dz_1 dz_2$, и учитывая все ранее найденные соотношения:

$$E_1 = S_t \Phi(a_1, a_2, \rho),$$

где $a_1 = \dfrac{\ln\dfrac{S_t}{E} + (r + \dfrac{1}{2}\sigma_1^2)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}$, $a_2 = \dfrac{\ln\delta(T) + (r - \dfrac{1}{2}\sigma_2^2 + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}}$ берутся из правых частей вычисленных ранее $E^*_{\dot{Q}}(I_{S_T > E})$ и $E^*_{\dot{Q}}(I_{V(T) \ge D})$ соответственно.

Вычислим теперь E_2, используя ту же идею, что и при нахождении E_1.

Вычисление E_2.

$$E_2 = B_t E^*\left(\frac{E I_{S_T > E} I_{V(T) \ge D}}{B_T} \middle| F_t\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E\, e^{-r(T-t)} I_{S_T > E} I_{V(T) \ge D} \exp\left(-\frac{(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dz_1 dz_2.$$

Так как $E\, e^{-r(T-t)}$ – константа, то последний интеграл сводится к интегралу типа (*). Значит,

$$E_2 = E\, e^{-r(T-t)} \Phi(b_1, b_2, \rho),$$

где b_1, b_2 – неизвестные пока значения параметров, которые зависят от математических ожиданий индикаторных функций $E^*(I_{S_T > E})$ и $E^*(I_{V(T) \ge D})$ без перехода к эквивалентным вероятностям. Вычисляем относительно меры Q:

$$E^*_Q(I_{S_T > E}) = P_Q\left(S_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_1 \Delta W\right] > E\right) = P_Q\left(z_1 < \frac{\ln S_t - \ln E + \left(r - \dfrac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}\right).$$

Поэтому $b_1 = \dfrac{\ln S_t - \ln E + \left(r - \dfrac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}$. Далее, в полном соответствии с вычислением $E^*_{\dot{Q}}(I_{V(T) \ge D})$ для слагаемого E_1, имеем

$$E^*_Q(I_{V(T) \ge D}) = P_Q(V(T) > D) = P_Q\left(V_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_2(\Delta W + \rho\sigma_1(T-t))\right] > D\right) =$$

$$= P_Q\left(\sigma_2\Delta W > \ln D - \ln V_t - \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)\right) = P_Q\left(z_2 < \frac{\ln V_t - \ln D + \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}}\right),$$

т.е. $b_2 = \dfrac{\ln V_t - \ln D + \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}}$, что завершает определение всех составляющих $E_2 = E\, e^{-r(T-t)}\Phi(b_1, b_2, \rho)$. Кроме того, можно заметить, что $b_1 = a_1 - \sigma_1\sqrt{T-t};\ b_2 = a_2 - \rho\sigma_1\sqrt{T-t}$.

Вычисление E_3.

Вычисление E_3 будет немного сложнее, чем вычисление E_2.

$$E_3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_t \exp\left[-\frac{\sigma_1^2}{2}(T-t) + \sigma_1 z_1\sqrt{T-t}\right]\delta_T I_{S_T > E} I_{V(T)>D} \exp\left(-\frac{(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dz_1 dz_2 .$$

Выделим, как и ранее, полный квадрат и введем новые переменные $v_1 = z_1 - \sigma_1\sqrt{T-t} - \rho\sigma_2\sqrt{T-t}$, $v_2 = z_2 - \sigma_2\sqrt{T-t} - \rho\sigma_1\sqrt{T-t}$, чтобы записать E_3 в компактном виде:

$$E_3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_t\, \delta_T I_{S_T > E} I_{V(T)<D} \exp\left(-\frac{(v_1^2 - 2\rho v_1 v_2 + v_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dz_1 dz_2 ,$$

Для того, чтобы преобразовать функцию плотности некоторого нормального распределения, участвующую при определении интеграла выше, к плотности двумерного стандартного нормального распределения, необходимо перейти к эквивалентной мере $d\dot{Q}$ по теореме Гирсанова только по первой координате вектора γ (вторую оставляем неизменной) с $\gamma_1 = \sigma_1 + \rho\sigma_2$:

$$d\dot{Q} = \exp\left(\gamma W_T - \sigma^2 \frac{T}{2}\right) dQ ,$$

а также к новому винеровскому процессу $\dot{W}_t = W_t - \gamma t$ (здесь запись в векторном виде) и к новой вектор-переменной $z = \dot{z} + \gamma\sqrt{T-t}$, как и в случае вычисления E_1. Тогда

$$E_3 = e^{r(T-t)} S_t \delta_T e^{\rho\sigma_1\sigma_2(T-t)}\Phi(c_1, c_2, -\rho)$$

с некоторыми неизвестными пока постоянными c_1, c_2, которые находятся из значений математических ожиданий индикаторных функций.

Заметим, что знак минус при корреляции в фукнции $\Phi(c_1, c_2, -\rho)$ связан с отрицательным направлением в неравенстве индикаторной функции $I_{V(T)<D}$ и со свойством функции нормального распределения.

$$E^*_{\dot{Q}}\left(I_{S_T > E}\right) = \dot{Q}(S_T > K) = P_{\dot{Q}}\left(S_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_1\left(\Delta\dot{W} + (\sigma_1 + \rho\sigma_2)(T-t)\right)\right] > E\right) =$$

$$= P_{\dot{Q}}\left(\sigma_1\Delta\dot{W} > \ln E - \ln S_t - \left(r + \frac{\sigma_1^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)\right) = P_{\dot{Q}}\left(\dot{z}_1 < \frac{\ln S_t - \ln E + \left(r + \frac{\sigma_1^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}\right).$$

И второе математическое ожидание

$$E_{\dot Q}^{*}\left(I_{V(T)<D}\right)=P_{\dot Q}\left(V(T)<D\right)=P_{\dot Q}\left(V_t\exp\left[\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)+\sigma_2\left(\Delta\dot W+(\sigma_2+\rho\sigma_1)(T-t)\right)\right]<D\right)=$$

$$=P_{\dot Q}\left(\sigma_2\Delta\dot W<\ln D-\ln V_t-\left(r+\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)\right)=P_{\dot Q}\left(\dot z_2<-\frac{\ln V_t-\ln D+\left(r+\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}}\right).$$

Таким образом, получили, что в выражении для E_3 константы c_1,c_2 определяются как

$$c_1=\frac{\ln S_t-\ln E+\left(r+\frac{\sigma_1^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}=a_1+\rho\sigma_2\sqrt{T-t}\,,$$

$$c_2=-\frac{\ln V_t-\ln D+\left(r+\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}}=-a_2-\rho\sigma_1\sqrt{T-t}\,.$$

Вычислим, наконец, E_4.

Вычисление E_4.

$$E_4=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E\delta_T\exp\left[-\frac{\sigma_2^2}{2}(T-t)+\sigma_2 z_2\sqrt{T-t}\right]I_{S_T>E}I_{V(T)<D}\exp\left(-\frac{(z_1^2-2\rho z_1z_2+z_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right)dz_1dz_2\,.$$

Как и при вычислении E_1, перейдем к эквивалентной вероятностной мере с $\gamma_1=\rho\sigma_2$ и $\gamma_2=\sigma_2$ и к новой переменной $z=\dot z+\gamma\sqrt{T-t}$. Тогда

$$E_{\dot Q}^{*}\left(I_{S_T>E}\right)=P_{\dot Q}\left(S_t\exp\left[\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t)+\sigma_1\left(\Delta\dot W+\rho\sigma_2(T-t)\right)\right]>E\right)=$$

$$=P_{\dot Q}\left(\dot z_1<\frac{\ln S_t-\ln E+\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}\right).$$

$$E_{\dot Q}^{*}\left(I_{V(T)<D}\right)=P_{\dot Q}\left(V_t\exp\left[\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)+\sigma_2\left(\Delta\dot W+\sigma_2(T-t)\right)\right]<D\right)=$$

$$=P_{\dot Q}\left(\dot z_2<-\frac{\ln V_t-\ln D+\left(r+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}}\right).$$

Окончательно,

$$E_4=E\,\delta_T\Phi(d_1,d_2,-\rho)$$

с параметрами d_1,d_2 как в формулировке теоремы. **Теорема доказана полностью.**

Выведем **уравнение Б.-Ш.** для рассмотренного выше случая риска дефолта одной из сторон с **постоянной суммой долга** *D*.

Очевидно, что $X^d(t)\equiv F(S,V,t)$, то есть выплата в случае дефолта является функцией переменных *S,V, t*. Пусть *S, V* – процессы Ито:

$$dS=a_1Sdt+\sigma_1SdW_1;dV=a_2Vdt+\sigma_2VdW_2;\rho=corr(W_1,W_2).$$

Применим двумерную формулу Ито к $X^d(t) \equiv F(S,V,t)$. Имеем:

$dF = \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} dV^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} dSdV + \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dS^2 \right\}$. Так как $dV^2 = \sigma_2^2 V^2 dt; dS^2 = \sigma_1^2 S^2 dt; dVdS = \sigma_1\sigma_2\, SV\rho dt$, то окончательно имеем:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\sigma_2^2 V^2 dt + 2\rho\sigma_1\sigma_2 SV \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} dt + \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma_1^2 S^2 dt \right\} \qquad (11)$$

Составим хеджирующий портфель, чтобы избавиться от стохастической части в (11). Пусть H – хеджирующий портфель, $H=F-\Delta_1 V-\Delta_2 S$, или, как при Δ - хеджировании, заменяя Δ_1 и Δ_2 соответствующими значениями производных, получаем $dH = dF - \frac{\partial F}{\partial V} dV - \frac{\partial F}{\partial S} dS$.

Тогда $dF = dH + \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial S} dS$, подставляя которое в (11), имеем:

$$dH = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\sigma_2^2 V^2 dt + 2\rho\sigma_1\sigma_2 SV \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} dt + \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma_1^2 S^2 dt \right\}. \qquad (12)$$

Изменения в хеджирующем портфеле зависят теперь только от dt, он безрисковый и, как альтернатива, его можно инвестировать под ставку r. Тогда $dH = rHdt$, или так как $H = F - \frac{\partial F}{\partial V}V - \frac{\partial F}{\partial S}S; dH = r(F - \frac{\partial F}{\partial V}V - \frac{\partial F}{\partial S}S)dt$. Поэтому в (12):

$$\left(rF - rV\frac{\partial F}{\partial V} - rS\frac{\partial F}{\partial S} \right)dt = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\sigma_2^2 V^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 SV\frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma_1^2 S^2 \right)dt.$$

Окончательно,

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\sigma_2^2 V^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 SV\frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma_1^2 S^2 - rF + rV\frac{\partial F}{\partial V} + rS\frac{\partial F}{\partial S} = 0 \qquad (13)$$

Это ***двумерное*** уравнение Блэка – Шоулса для опциона покупателя кредитного риска с **постоянной** суммой долга, где $F = X^d(t)$, которое с точностью до обозначений совпадает с уравнением для стохастической волатильности.

Замечание: При δ(t)≡1 для каждого t€[0,T] весь долг обеспечен суммой активов V_t. Поэтому цена незащищенного опциона $X^d(t)$ будет равна цене опциона без кредитного риска, то есть обычного опциона покупателя. Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить δ=1 в формулировку теоремы 5.1 о цене опциона кредитного риска. При δ=1 формула расчета цены превращается в формулу Блэка – Шоулса.

5.4. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОБЯЗАТЕЛЬСТВА

Усложним рассматриваемую модель: в прошлом параграфе мы предполагали сумму долга неизменной. Предположим теперь, что долг т.ж. является стохастическим процессом, удовлетворяющим уравнению Ито: $dD_t = a_3 D_t dt + \sigma_3 D_t dW_3$. Напомню, что того же типа уравнения были и для S,V: $dS = a_1 S dt + \sigma_1 S dW_1; dV = a_2 V dt + \sigma_2 V dW_2$.

Пусть винеровские процессы коррелируют и имеют матрицу ковариаций

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{13}\sigma_2\sigma_3 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}; \rho_{ij} = corr(W_i, W_j).$$

Найдем соотношение для скорости восстановления активов $f_t = \frac{V_t}{D_t}$. Используем для этого формулу интегрирования по частям: $d(UV) = dU \cdot V + U \cdot dV + dUdV$.

Пусть всюду далее $\rho_{23} = \rho = corr(W_2, W_3)$ для простоты.

$$d\delta_t = d\left(\frac{V_t}{D_t}\right) = d\left(V_t \cdot \frac{1}{D_t}\right) = dV_t \cdot \frac{1}{D_t} + V_t d\left(\frac{1}{D_t}\right) + dV_t d\left(\frac{1}{D_t}\right).$$

Заметим, что (по формуле Ито)

$$d\left(\frac{1}{D_t}\right) = -\frac{1}{D_t^2} dD_t + \frac{1}{2}\frac{2}{D_t^3} dD_t^2 = -\frac{1}{D_t^2} dD_t + \frac{1}{D_t^3}\sigma_3^2 D_t^2 dt = -\frac{1}{D_t^2} dD_t + \frac{\sigma_3^2}{D_t} dt$$

Тогда,

$$dV_t d\left(\frac{1}{D_t}\right) = \left[-\frac{1}{D_t}(a_3 D_t dt + \sigma_3 D_t dW_3) + \frac{\sigma_3^2}{D_t} dt\right](a_2 V dt + \sigma_2 V dW_2) = -\sigma_3\sigma_2 V_t dW_2 dW_3 = -\sigma_3\sigma_2 V_t \rho dt,$$

потому что остаются только коэффициенты при dW_3, dW_2.

Поэтому

$$d\delta_t = dV_t \frac{1}{D_t} - \frac{V_t}{D_t} dD_t + \frac{\sigma_3^2 V_t}{D_t} dt - \sigma_3\sigma_2 V_t \rho dt = a_2 \frac{V_t}{D_t} dt + \frac{\sigma_2 V_t}{D_t} dW_2 - \frac{V_t}{D_t}(a_3 D_t dt + \sigma_3 D_t dW_3) - \sigma_3\sigma_2 V_t \rho dt$$

или вспоминая, что $\delta_t = \dfrac{V_t}{D_t}$, получаем:

$$d\delta_t = a_2\delta_t dt + \sigma_2\delta_t dW_2 - a_3 V_t dt - V_t\sigma_3 dW_3 - \sigma_3\sigma_2 V_t \rho dt$$

Разделим все на δ_t (представим хитрым способом)

$$\frac{d\delta_t}{\delta_t} = \frac{a_2 V_t dt + \sigma_2 V_t dW_2}{V_t} - a_3 D_t dt - \sigma_3 D_t dW_3 - \sigma_3\sigma_2 D_t \rho dt = \frac{dV_t}{V_t} - \frac{dD_t}{D_t} + \left(\frac{dD_t}{D_t}\right)^2 - \frac{dV_t dD_t}{V_t D_t}$$

Перепишем, чтобы обозначить

$$\frac{d\delta_t}{\delta_t} = \frac{dV_t}{V_t} - \frac{dD_t}{D_t} + \left(\frac{dD_t}{D_t}\right)^2 - \frac{dV_t dD_t}{V_t D_t} \tag{14}$$

Перейдем к риск – нейтральной вероятности. Мы знаем, что в этом случае $dV_t = rV_t dt + \sigma_2 V_t d\overline{W}_2$, $dD_t = rD_t dt + \sigma_3 V_t d\overline{W}_3$. Поэтому (14) преобразуется к виду:

$$\frac{d\delta_t}{\delta_t} = rdt + \sigma_2 d\overline{W}_2 - rdt - \sigma_3 d\overline{W}_3 + (rdt + \sigma_3 d\overline{W}_3)^2 - (rdt + \sigma_2 d\overline{W}_2)(rdt + \sigma_3 d\overline{W}_3) =$$

$$= \sigma_2 d\overline{W}_2 - \sigma_3 d\overline{W}_3 + \sigma_3^2 dt - \sigma_2\sigma_3\rho dt.$$

Обозначим через $\sigma_\delta W_\delta \equiv \sigma_2\overline{W}_2 - \sigma_3\overline{W}_3$, причем

$$D(\sigma_\delta w_\delta) = E(\sigma_2\overline{W}_2 - \sigma_3\overline{W}_3)^2 = \sigma_2^2 E(\overline{W}_2^2) + \sigma_3^2 E(\overline{W}_3^2) - 2\sigma_2\sigma_3\rho t,$$

так как

$$D(W_\delta) = t; D(\overline{W}_2) = D(\overline{W}_3) = t, E(\overline{W}_2\overline{W}_3) = \rho t,$$

то $\sigma_\delta^2 = \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_3\rho$.

Уравнение перепишется в виде $\dfrac{d\delta_t}{\delta_t} = \sigma_\delta dW_\delta + (\sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3\rho)dt$, то есть получили обычное дифференциальное уравнение типа Ито. Мы знаем его решение (если σ_2, σ_3 - константы):

$$\delta_t = \delta_0 \exp\left(\frac{1}{2}(\sigma_3^2 - \sigma_2^2)t + \sigma_\delta w_\delta\right) \equiv \frac{V_t}{D_t}; V_t = V_0 \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_2^2 t + \sigma_2 W_2\right); D_t = D_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_3^2 t + \sigma_3 W_3\right) -$$

цена незащищенного опциона со стохастической стоимостью долга.

Ранее мы получили формулу (10) для цены незащищенного опциона, когда долг был детерминирован. Сформулируем без доказательства теорему 5.2 – аналог теоремы 5.1, что была выше.

Теорема 5.2 (о цене опциона кредитного риска со стохастической суммой долга): Если X_t – цена опциона покупателя с номинальной функцией выплаты
$X_T = (S_T\text{-}E)^+$ и действительной выплачиваемой суммой $X_T = \delta_t(S_T\text{-}E)^+$, где $\delta_T = V_T/D_T$, причем $dD_t = a_3 D_t dt + \sigma_3 D_t dW_3$, то в случае банкротства

$$X_t = S_t\Phi(a_1, a_2, \rho) - E\exp(-r(T-t))\,\Phi(b_1, b_2, \rho) + S_t\delta_t \exp\left[(\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 - \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2)(T-t)\right]\times$$
$$\times\,\Phi(c_1, c_2, -\rho) - \exp\left[(-r + \sigma_3^2 - \rho_{23}\sigma_2\sigma_3)(T-t)\right]E\,\delta_t\,\Phi(d_1, d_2, -\rho)$$

где

$$a_1 = \frac{\ln\dfrac{S_t}{E} + \left(r + \dfrac{1}{2}\sigma_1^2\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}},\; a_2 = \frac{\ln\delta_t - \dfrac{1}{2}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\Theta)(T-t)}{\sigma_\delta\sqrt{T-t}},$$

$$b_1 = a_1 - \sigma_1\sqrt{T-t};\; b_2 = \frac{\ln\delta_t - \dfrac{1}{2}(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)(T-t)}{\sigma_\delta\sqrt{T-t}};$$

$$c_1 = \frac{\ln\dfrac{S_t}{E} + \left(r + \dfrac{1}{2}\sigma_1^2 + \Theta\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}};\; c_2 = -\frac{\ln f_t - \left(\dfrac{3}{2}\sigma_3^2 + \dfrac{1}{2}\sigma_2^2 + \Theta - 2\rho_{23}\sigma_2\sigma_3\right)(T-t)}{\sigma_\delta\sqrt{T-t}};$$

$$d_1 = c_1 - \sigma_1\sqrt{T-t};\; d_2 = -c_2 - \frac{\Theta}{\sigma_\delta}\sqrt{T-t};\; \rho = \frac{1}{\sigma_\delta}(\rho_{12}\sigma_2 - \rho_{13}\sigma_3);$$

$$\sigma_\delta = \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\rho_{23}\sigma_2\sigma_3};\; \Theta = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - \rho_{13}\sigma_1\sigma_3;$$

$$\Phi(x_1, x_2, \rho) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2)}{2(1-\rho^2)}\right)dz_1 dz_2\,.$$

(сравни с теоремой 5.1)

Замечание: При $\delta_t \equiv 1$ получаем частный случай, сформулированный в теореме 1 выше; при D_t, стремящимся к бесконечности, то есть δ_t стремится к нулю, тогда банкротство произойдет с вероятностью 1, исчезают 2 последних слагаемых формулы (8) и получается обычная формула Блэка – Шоулса.

УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Рассмотрим приложение теории случайных процессов к решению задач индивидуального задания №1 (см. приложение 1).

Задача 1. Изобразить график случайной функции $Y(t)=\sin\big(S(t)\cdot t\big)$, $t\in[0,\,2\pi]$, $S(t)$ – случайная величина, распределенная нормально с параметрами $a=0$, $\sigma^2=1$.

Решение: случайная величина $S(t)$ характеризует частоту случайных колебаний функции $Y(t)=\sin\big(S(t)\cdot t\big)$. В каждый фиксированный момент времени $S(t)$ также фиксирована и распределена по нормальному закону. Поэтому $Y(t)=\sin\big(S(t)\cdot t\big)$ – не что иное, как совокупность сшитых непрерывным образом кривых вида $Y_k(t)=\sin(kt)$, k – случайное число.

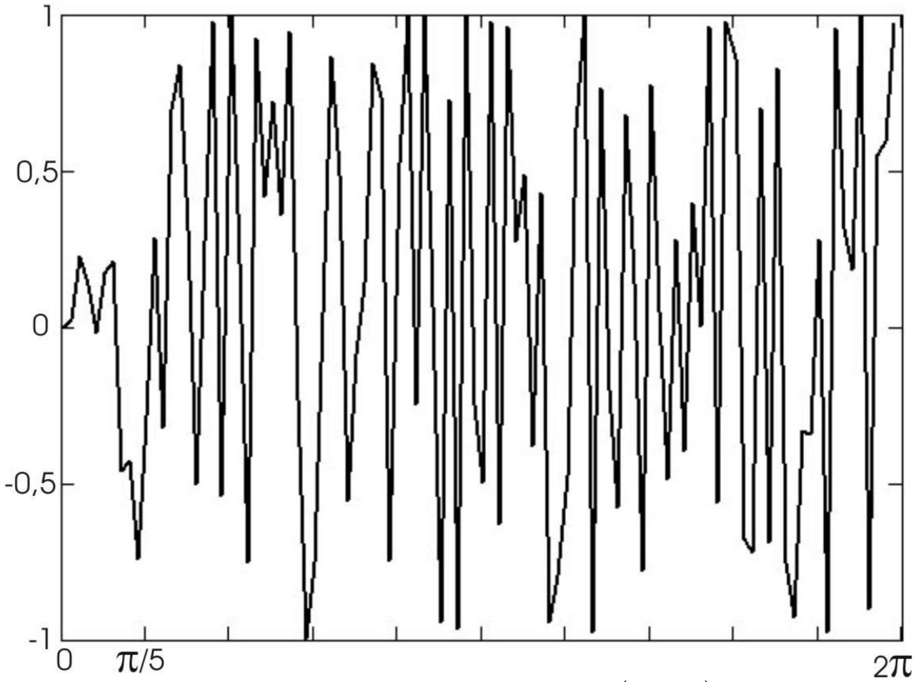

Рис. 9. Стохастический процесс $Y(t)=\sin\big(S(t)\cdot t\big)$, $t\in[0,\,2\pi]$.

График получившейся кривой приведен на рис. 9.

Задача 2. Изобразить график случайной функции $Y(t)=\exp\big(-S^2(t)\cdot t\big)$, $t\in[0,\infty]$, $S(t)$ – случайная величина, распределенная нормально с параметрами $a=1$, $\sigma^2=4$.

Решение: по аналогии с примером 1, получаем решение, изображенное на рис. 10.

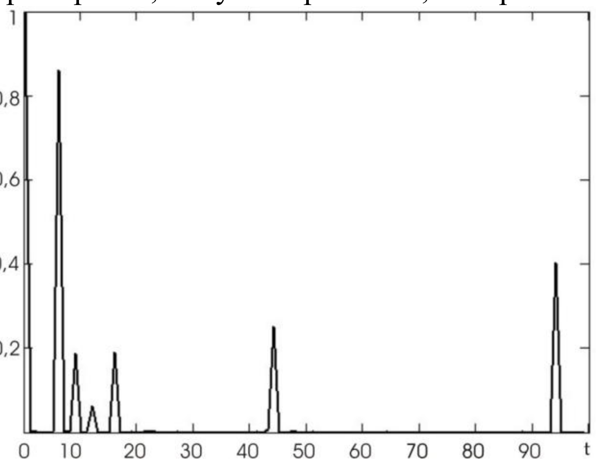

Рис. 10. Стохастический процесс $Y(t)=\exp\big(-S^2(t)\cdot t\big)$, $t\in[0,100]$.

Задача 3. Найти предел в среднеквадратичном $X(t)=\lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, если последовательность распределена нормально $X_n(t)\sim N\left(0,\frac{t}{n}\right)$.

Решение: по определению, необходимо найти такой процесс $X(t)$, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n(t)-X(t))^2=0$. Раскроем скобки: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[EX_n^2-2E(X_nX)+E(X^2)\right]\overset{?}{=}0$. Предполагая существование всех трех пределов, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} EX_n^2-2\lim_{n\to\infty} E(X_nX)+\lim_{n\to\infty} E(X^2)\overset{?}{=}0. \qquad (1)$$

Вычислим каждый предел отдельно.

$\lim\limits_{n\to\infty} EX_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\exp\left(-\frac{x^2n^2}{2t^2}\right)dx\right]=$(по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла) $=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\left[x^2\exp\left(-\frac{x^2n^2}{2t^2}\right)\right]dx=0$. Заметим, что можно напрямую вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\exp\left(-\frac{x^2n^2}{2t^2}\right)dx=\frac{t}{\sqrt{2\pi n^3}}$, что так же приводит к равенству $\lim\limits_{n\to\infty} EX_n^2=0$.

Предположим, что предельный процесс является нулевым:

$$X(t)=0.$$

В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_nX)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} E(X^2)=0$. Тогда равенство (1) превращается в верное тождество и $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)=X(t)=0$ в среднеквадратичном.

Задача 4. Найти предел в среднеквадратичном $X(t)=\lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, если $X_n(t)=\frac{\sin nt}{nt}$, причем $X_n(t)$ распределена равномерно на интервале [0,1].

Решение: по аналогии с предыдущим примером, необходимо доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} EX_n^2-2\lim_{n\to\infty} E(X_nX)+\lim_{n\to\infty} E(X^2)\overset{?}{=}0.$$

Вычислим каждый предел отдельно.

Так как для достаточно больших n $\sin nt<nt^2$ (кроме точки нуль), то

$$P(X_n<t)=F_n(t)\ =\int\limits_{X_n<t} f(x)dx\ =\int\limits_{\frac{\sin nt}{nt}<t} f(x)dx\ =\int\limits_{\sin nt<nt^2} f(x)dx,$$

где $f(t)$ – плотность равномерной функции распределения.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t)\ =\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=F(t)$, т.е. предельный стохастический процесс $X(t)=\lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$ также будет иметь равномерное распределение, однако параметры распределения пока неизвестны. Тем не менее, $\lim\limits_{n\to\infty} EX_n(t)=E(X)=0.5$.

Окончательно, $\lim\limits_{n\to\infty} EX_n^2-2\lim\limits_{n\to\infty} E(X_nX)+\lim\limits_{n\to\infty} E(X^2)=1/3-2\lim\limits_{n\to\infty} E(X_nX)+\lim\limits_{n\to\infty} E(X^2)$.

Имеем два возможных варианта соотношений между X_n, X.

1) X_n, X независимы, т.е. $E(X_n X) = EX_n\, EX = 1/4$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n(t) - X(t))^2 =$ $1/3 - 1/2 + \lim\limits_{n\to\infty} E(X^2) \neq 0$, т.е. последовательность X_n расходится (расстояние между X_n, X постоянно и не равно нулю), если только $\lim\limits_{n\to\infty} E(X^2) \neq 1/6$. Следовательно, если в качестве предельного процесса взять равномерно распределенный на [0,1] случайный процесс с параметрами $E(X) = 0.5$ и $E(X^2) = 1/6$, независимый с X_n, то $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n(t) - X(t))^2 = 0$.
2) X_n, X зависимы. Допустим, что X_n сходится в среднеквадратичном. Тогда X_n сходится и по распределению, т.е. $E\left(\lim\limits_{n\to\infty} X_n X\right) = E(X^2)$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n(t) - X(t))^2 =$ $1/3 - E(X^2)$. Последнее выражение равно нулю, если $E(X^2) = 1/3$. Следовательно, если в качестве предельного процесса взять равномерно распределенный на [0,1] случайный процесс с параметрами $E(X) = 0.5$ и $E(X^2) = 1/3$, зависимый с X_n, то $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n(t) - X(t))^2 = 0$.

Задача 5. Пользуясь формулой Ито, доказать формулу интегрирования по частям

$$d(UV) = U\,dV + V\,dU + dU\,dV.$$

Решение: применим формулу Ито для функции $F = UV$:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial U} dU + \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial U^2}(dU)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial V^2}(dV)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial U \partial V} dUdV\right] = UdV + VdU + dUdV,$$

ч.т.д.

Задача 6. Найти решение дифференциального уравнения $dS = r\,dt + \sigma S dW,\ S(0) = S_0$, $S_0 -$ некоторая случайная величина.

Решение: Согласно технике решения дифференциальных уравнений, приведенной в п. 1.4.2., выберем интегрирующий множитель в виде $F = \exp\left(-\sigma W + t\sigma^2/2\right)$. Найдем $d(FS)$ по формуле интегрирования по частям (задача 5): $d(FS) = FdS + S\,dF + dS\,dF$. По формуле Ито

$$dF = \frac{\partial F}{\partial W} dW + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial W^2} dt = -\sigma F dW + \frac{\sigma^2}{2} F\,dt + \frac{\sigma^2 F}{2} dt = -\sigma F dW + \sigma^2 F\,dt,$$

$$dF\,dS = dF(r\,dt + \sigma S dW) = -\sigma^2 SFdt.$$

Подставляем найденные выражения в формулу для $d(FS)$:

$d(FS) = -\sigma SFdW + \sigma^2 SFdt + Frdt + \sigma SFdW - \sigma^2 SFdt = Frdt$. Таким образом, исходное уравнение сведено к уравнению вида

$$d(FS) = Frdt,$$

которое является уравнением в полных дифференциалах и его решение находится непосредственным интегрированием по промежутку $[0,t]$:

$$(FS)\big|_0^t = \int_0^t Frdt,\ F = \exp\left(-\sigma W + t\sigma^2/2\right).$$

Учитывая, что $F(0) = \exp(0) = 1$, получаем окончательный ответ:

$$S(t) = \frac{1}{F}\left(S_0 + r\int_0^t Fdt\right).$$

Задача 7. пусть $a, b -$ некоторые фиксированные числа. Найти решение уравнения: $dS = \dfrac{b - S}{1 - t} dt + dW$ (броуновский мостик), $S(0) = S_0 = a = const$, $t \in [0,1)$.

Решение: некоторые уравнения, в отличие от задачи 6, где применен интегрирующий множитель, можно решать соответствующей заменой переменного. В данном случае сделаем замену $F = \frac{b-S}{1-t}$. По формуле Ито вычислим dF:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dS^2 = -\frac{dS}{1-t} + \frac{b-S}{(1-t)^2} dt .$$

Вспоминая обозначения для F и учитывая, что по условию задачи $dS = Fdt + dW$, имеем:

$$dF = -\frac{Fdt + dW}{1-t} + \frac{b-S}{(1-t)^2} dt ,$$

или

$$dF = -\frac{dW}{1-t} .$$

Интегрируем по промежутку $[0,t]$, делаем обратную замену переменного и получаем окончательный ответ:

$$S(t) = S(0) + (1-t)\int_0^t \frac{dW}{1-s} ds .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курс теории случайных процессов: Учебное пособие / А. Д. Вентцель.—2-е изд., доп.—М.: Наука; Физматлит, 1996.—398 с.
2. Случайные процессы: Учебник для вузов / И. К. Волков, С. М. Зуев, Г. М. Цветкова.—М.: Изд-во МГТУ, 1999.—448 с.
3. Курс теории вероятностей: Учебник для вузов / В. П. Чистяков.—5-е изд.—М.: Агар, 2000.—255 с.
4. Теория стохастических систем: Учебное пособие / В. С. Пугачев, И. Н. Синицын.—М.: Логос, 2000.—1000 с.
5. Теория вероятностей и случайных процессов: Учебное пособие / В. Н. Тутубалин.—М.: Изд-во МГУ, 1992.—400 с.
6. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: Учебное пособие для вузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров.—2-е изд., стер.—М.: Высшая школа, 2000.—383 с.
7. Курс статистического моделирования: Учебное пособие для вузов / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов.—М.: Наука, 1976.—319 с.
8. Феллер, Вильям. Введение в теорию вероятностей и её приложения: Пер. с англ.: В 2 т. / В. Феллер.—М.: Мир, 1984- Т. 1.—1984.—527 с.
9. Феллер, Вильям. Введение в теорию вероятностей и её приложения: Пер. с англ.: В 2 т. / В. Феллер.—М.: Мир, 1984- Т. 2.—1984.—751 с.
10. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров.—М.: Наука, 1991.—384 с.
11. Стратонович Р. Л. Теория информации.—М.: Советское радио, 1975.—423 с.
12. Курс теории случайных процессов: Учебное пособие для университетов / А. Д. Вентцель. — М.: Наука: Физматлит, 1975.—319 с.
13. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы: Пер. с англ. / С. Ватанабэ, Н. Икэда.—М.: Наука, 1986.—445 с.
14. Прикладные задачи теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров.—М.: Радио и связь, 1983.—416 с.
15. Гихман И.И. Теория случайных процессов: В 3 т. / И. И. Гихман, А. В. Скороход.—М.: Наука, 1971.
16. Стохастические уравнения глазами физика: Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения / В. И. Кляцкин.—М.: Физматлит, 2001.—528 с.
17. Колебания, волны, структуры / Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко.—М.: Физматлит, 2001.—496 с.
18. Прикладная статистика: Основы эконометрики: Учебник: В 2-х т.—М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001/ С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян.—2001.—656 с.
19. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
20. P. Wilmott, Derivatives. The theory and practice of financial engineering, New York, John Wiley & Sons, 1999.
21. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов прогноз. М: Мир, 1974.
22. Hull J. Options, Futures, and Other Derivatives. New Jersey: Prentice-Hall, Saddle River, 2009. 7th edition. 815 p.
23. Суслов В.И., Ибрагимов Н.М., Талышева Л.П., Цыплаков А.А. Эконометрия. Новосибирск, изд-во СО РАН, 2005, 744 с.
24. Schroder M. Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula// Journal of Finance, 1989, Vol. 44, No. 1, pp. 211-219.
25. Larguinho M., Dias J.C., Braumann C.A. On the computation of option prices and Greeks under the CEV model// Quantitative Finance, 2013, V. 13, Issue 6, p. 907–917.

ИДЗ №1

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ВАРИАНТ №1

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. Доказать, что последовательность случайных процессов $w_n = \xi_0 t + \sum\limits_{s=1}^{n} \sum\limits_{m=2^{s-1}}^{2^s-1} \xi_m \sqrt{2} \frac{\sin(\pi m t)}{m\pi}$ сходится в среднеквадратичном к винеровскому процессу $W(t)$, если известно, что ξ_n~$N(0,1)$.

b. $w_n = \xi_0 t + \sum\limits_{s=1}^{n} \xi_s \frac{\sin(\pi s t)}{s\pi}$, ξ_n распределены равномерно на $[0,1]$.

2. Непрерывен ли процесс $X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, где $X_n(t) = \sin^n\left(\frac{t - 5\pi\xi_n}{\sqrt{n}}\right)$, $t \in (0,1]$, где ξ_n распределены равномерно на $[0,1]$? Дифференцируем ли он?

3. a. Пусть $S(t)$ – процесс Орнштейна – Уленбека, удовлетворяющий уравнению $dS = \mu S\,dt + \sigma dW$, $S(0) = S_0$, μ, σ – некоторые числа. Найти ковариационную функцию, используя для вычисления математическое ожидание и дисперсию (см. лекции).

   b. Найти решение стохастического дифференциального уравнения Бесселя: $dS = \frac{a-1}{2S} dt + dW$, $S(0) = S_0$, S_0 – некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица.

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = \mu S\,dt + \sigma S dW$:

a. $F = \exp\left(t^2 S + t\right)$

b. $F = \ln\left(t^2 S + t\right)$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. $Y(t) = \int\limits_0^t e^W dW(s)$ b. (по определению) $Y(t) = \int\limits_0^t \left(s^2 + 1\right) dW(s)$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = \eta + \xi$, если $\eta \sim N(0,t)$, $\xi \sim N(0, t-5)$. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №2

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. Доказать, что последовательность случайных процессов $w_n = \sum_{s=1}^{n} \xi_s \sqrt{2} \frac{\sin(\pi(s+0.5)t)}{(s+0.5)\pi t}$ сходится в среднеквадратичном к винеровскому процессу $W(t)$, если известно, что ξ_n ~$N(0,1)$.

b. $w_n = \sum_{s=1}^{n} \xi_s \frac{\sin(\pi s t)}{s^2}$, ξ_n имеют распределение Вейбулла с параметрами $\lambda = 10^{-3}$ и $k = 10$.

2. Непрерывен ли процесс $X(t) = \lim_{n\to\infty} X_n(t)$, где $X_n(t) = \left(\frac{t-\xi_n}{n}\right)^n$, $t \in (0,1]$, где ξ_n имеют распределение Вейбулла с параметрами $\lambda = 10^{-1}$ и $k = 2$? Дифференцируем ли он?

3. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. $dS = \mu S\, dW, S(0) = S_0$, μ – некоторое число, S_0– некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица.

b. $dS = \frac{1}{2} S\, dt + (S+t)dW$, $S(0) = S_0$, S_0– некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица.

Примечание: использовать формулу Ито.

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = \mu S\, dt + \sigma dW$:

a. $F = \cos^{2/3}(tS)$

b. $F = \sin(t^2 S)$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы интегрирования по частям $\int_0^t f(s)dW(s) = fW\big|_0^t - \int_0^t W(s)\, df(s)$ найти $Y(t) = \int_0^t s^3 dW(s)$

b. (по определению) $Y(t) = \int_0^t \ln(s+1)\, dW(s)$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = 3\eta - 2\xi$, если $\eta \sim N(0,t)$, $\xi \sim N(0,1)$. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №3

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. Доказать, что последовательность случайных процессов $X_n(t,\omega) = x_n(t)\ \forall \omega \in \Omega$, где $x_n(t) = \begin{cases} nt/2, & t \in [0;2/n] \\ nt-1, & t \in [2/n;1/n] \\ 0, & t > 1/n \end{cases}$ сходится в среднеквадратичном к дельта–функции $\delta(t)$.

b. $w_n = \sum\limits_{s=1}^{n} \xi_s \dfrac{\cos(\pi s t)}{s\pi}$, ξ_n имеют распределение Максвелла с параметром $\sigma = 2$.

2. Непрерывен ли процесс $X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, где $X_n(t) = \sqrt[n]{\left(\dfrac{t\xi_n}{n}\right)}$, $t \in (0,1]$, ξ_n имеют распределение Максвелла с параметром $\sigma = 1$? Дифференцируем ли он?

3. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. $dS = -\dfrac{S}{1+t}dt + \dfrac{1}{1+t}dW$, $S(0) = S_0$. Использовать замену $Z = -S(1+t)$.

b. $dS = -\dfrac{1}{2}S^{-1}\,dt + \sqrt{1-S^2}\,dW$, $S(0) = a = const \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, причем время выбирается из условия, что $t < \inf\left\{s > 0, W(s) \notin \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]\right\}$. Использовать замену $Z = \sqrt{1-S^2}$.

Примечание: использовать формулу Ито.

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = \mu\, dt + \sigma S dW$:

a. $F = \cos^{2/3}(tS) + \sin^{2/3}(t+S)$

b. $F = \ln\left(t^2 S + \sqrt{t^2 + S + 1}\right)$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(s) = \int\limits_0^s \cos W\, dW(t)$

b. (по определению) $Y(s) = \int\limits_0^s tW\, dW(t)$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = \eta\xi$, если $\eta \sim N(0,t)$, а ξ распределена равномерно на интервале [0,*t*], где *t* - время. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №4

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. $X_n(t) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} t W^2(t_k)}$, где t_k – некоторые точки разбиения интервала [a,b], $W(t)$ – винеровский процесс. Будет ли предельный процесс $\lim_{n\to\infty} X_n(t) = X(t)$ винеровским?

b. Найти математическое ожидание и дисперсию процесса $X(t) = \lim_{n\to\infty} X_n(t)$, определенного выше.

2. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. $dS = e^t \left(Wdt + dW\right)$, $S(0) = S_0$ – некоторая случайная величина.

b. (система) $dS_1 = -\frac{1}{2} S_1 dt - \frac{aS_1}{b} dW$, $dS_2 = -\frac{1}{2} S_2 dt + \frac{bS_2}{a} dW$.

3. Непрерывен ли процесс $S(t)$, являющийся решением уравнения 2.a на интервале $t \in [0,1]$? Дифференцируем ли он?

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = \mu S dt + \sigma S dW$:

a. $F = \cos^{3/2}(t+S) + \sin^{3/2}(t+S)$

b. $F = \ln\left(tS + \sqrt{t^2 - S}\right)$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(s) = \int_0^s \sin W \, dW(t)$

b. (по определению) $Y(s) = \int_0^s t W^2 \, dW(t)$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = \eta - \xi$, если $\eta \sim N(0,t)$, а ξ распределена равномерно на интервале [0,t], где t - время. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №5

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. $X_n(t) = \begin{cases} (t - t_i)W_i + (t_{i+1} - t)W_{i+1}, & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ 0, & t \notin [t_i, t_{i+1}] \end{cases}$, где $t_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ – точки разбиения отрезка $[a,b]$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Будет ли предельный процесс $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(t) = X(t)$ винеровским?

b. Найти математическое ожидание и дисперсию процесса $X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, определенного выше.

2. Непрерывен ли процесс $X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, где $X_n(t) = \dfrac{\exp(\xi_n)}{n}$, $t \in (0,1]$, ξ_n распределены нормально с нулевым средним и дисперсией единица? Дифференцируем ли он?

3. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. $dS = r\,dt + \alpha S\,dW$, $S(0) = S_0$ – некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица.

b. Пусть $S(t)$ – средне–возвратный процесс Орнштейна –Уленбека, удовлетворяющий уравнению $dS = (\mu + S)dt + \sigma dW$, $S(0) = S_0$, μ, σ – некоторые числа. Найти $S(t)$. Воспользоваться способом решения уравнения Орнштейна –Уленбека (см. лекции).

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = \mu\dfrac{1}{S-t}dt + \sigma S dW$:

a. $F = \cos^3(t+S) + \sin^2(t+S)$

b. $F = \ln\left(S - \sqrt{t^2 - S}\right)$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(s) = \int\limits_0^s \sin(2W + t)\,dW(t)$

b. (по определению) $Y(s) = \int\limits_0^s \left(tW^2 + t^2W\right)dW(t)$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = 2\eta + \xi$, если η распределена равномерно на интервале $[0,2t]$, а ξ распределена равномерно на интервале $[0,t]$, где t - время. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №6

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. $X_n(t) = \exp\left(-\dfrac{t(n+1)}{n}\right) W\left(e^{2t}\right)$, $W(t)$ – винеровский процесс. Будет ли предельный процесс $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(t) = X(t)$ винеровским?

b. Найти математическое ожидание и дисперсию процесса $X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, определенного выше.

2. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. Пусть $S(t)$ – средне–возвратный процесс Орнштейна –Уленбека, удовлетворяющий уравнению $dS = (\mu + S)dt + \sigma dW$, $S(0) = S_0$, μ, σ – некоторые числа. Найти $S(t)$. Воспользоваться способом решения уравнения Орнштейна –Уленбека (см. лекции).

b. Найти математическое ожидание и дисперсию средне–возвратного процесса Орнштейна –Уленбека (см. 3.a)

3. Непрерывен ли процесс $S(t)$, являющийся решением уравнения 3.a на промежутке $t \in (0,\infty)$? Дифференцируем ли он на этом промежутке?

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = Sdt - \sigma dW$:

a. $F = arctg^{3/2}\left(t + \sqrt[3]{S^2 + S + 1}\right) + artctg^{3/2}\left(t + \sqrt[3]{S^2 + S + 1}\right)$

b. $F = S^S$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t) = \int\limits_0^t sW\, d\left(e^s W\right)$

b. (по определению) $Y(t) = \int\limits_0^t W\, d(sW)$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = \eta + \xi$, если η имеет показательное распределение с $\lambda = t$, а ξ распределена равномерно на интервале $[0,t]$, где t - время. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №7

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. $X_n(t,k) = \begin{cases} \lambda^k t^k (k!)^{-1} (1 - nt\lambda)^{\sin(\lambda^{-1} n^{-1} t^{-1})\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$ причем k фиксировано, $k = 0, 1, 2\ldots$ Будет ли предельный процесс $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(t,k) = X(t,k)$ винеровским?

b. Найти математическое ожидание и дисперсию процесса $X(t,k) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t,k)$, определенного в задании 2.

2. Будет ли стохастический процесс, определенный в задании 2, непрерывным, дифференцируемым на $t \in [0,1]$?
3. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. $dS = \frac{1}{S} dt + \alpha S\, dW$, $S(0) = S_0 > 0-$ некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица, α – константа.

b. $dS = \frac{1}{S^2} dt + \alpha S\, dW$, $S(0) = S_0 > 0-$ некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица, α – константа. Будет ли решение непрерывным в любой момент времени *t*.

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = \sigma S dW$:

a. $F = \ln\left(t + \sqrt[3]{S^2 + S + 1}\right) + \exp^{3/2}\left(t + \sqrt[3]{S^2 + S + 1}\right)$

b. $F = \left(S + t^2 + t\right)^S$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t) = \int_0^t sW\, d(sW)$

b. (по определению) $Y(t) = \int_0^t s^2 W\, dW(s)$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = \eta - \xi$, если η имеет показательное распределение с $\lambda = t$, а ξ распределена нормально с нулевым средним и дисперсией *t*, где *t* - время. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №8

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. $X_n(t,k) = \begin{cases} t^k (k!)^{-1} (1-nt)^{\sin(n^{-1}t^{-1})t}, & t>0, \\ 0, & t=0, \end{cases}$ причем k фиксировано, $k = 0, 1, 2 \dots$.

b. $X_n(t) = \cos\left(-\frac{t(n+1)}{n}\right) W(\ln(t+1)),\ t>0.$

2. Броуновский мостик: пусть $a, b-$ некоторые фиксированные числа. Найти решение уравнения: $dS = \frac{b-S}{1-t} dt + dW$, $S_0 = a = const$, $t \in [0,1)$.

3. Выполнить следующее задание:

a. Показать, что для решения уравнения 3 справедливо равенство: $\lim\limits_{t\to 1} S(t) = b$ в среднеквадратичном.

b. $dS = \frac{1}{S^\beta} dt + \alpha S\, dW$, $S(0) = S_0 > 0 -$ некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица, α, β – константы. Будет ли решение непрерывным в любой момент времени t?

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = dt + \sigma S dW$:

a. $F = \ln\left(t + \sqrt[3]{S^2+S+1}\right) + \exp^{3/2}\left(t + \sqrt[3]{S^2+S+1}\right)$

b. $F = (S+t)^S$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t) = \int\limits_0^t \ln s\ d\left(sW^2\right)$

b. (по определению) $Y(t) = \int\limits_0^t \left(W^2+1\right) dW$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = \eta + 2\xi$, если η имеет распределение Коши с $\lambda = t$, $\mu = 0$, а ξ распределена нормально с нулевым средним и дисперсией t, где t - время. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №9

1. Выполнить следующие задания:

a. Пусть стохастический процесс определен формулой $X(t,k)=\sum_{s=1}^{k}\left[\frac{\exp(-\lambda t)\lambda^s t^s}{s!}\right]$, $X(t,0)=0$, $k=0,1,2\ldots$ Показать, что процесс будет иметь независимые приращения по *k*.

b. Найти предел в среднеквадратичном при $n\to\infty$:

$$X_n(t)=\int_0^t \frac{n\sin\left(s/n\right)}{s}dW(s).$$

2. Будет ли процесс $X(t)=\lim_{n\to\infty}X_n(t)$, где $X_n(t)=\int_0^t \frac{n\sin\left(s/n\right)}{s}dW(s)$, непрерывным на $t\in[0,1]$? Дифференцируемым?

3. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. $dS=dt+\alpha S\,dW$, $S(0)=S_0>0-$ некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица, α – константа.

b. Докажите формулу дифференцирования по частям: пусть $dS_i=\mu_i S_i dt+\sigma S_i dW$, $i=1,2$ – два стохастических процесса. Тогда $d(S_1S_2)=S_1dS_2+S_2dS_1+dS_1dS_2$.

4. Сделать замену переменного в процессе $dS=\frac{1}{S^2}dt+\alpha S\,dW$:

a. $F=\ln\left(S^3+t\right)$

b. $F=(S+t)^{\cos^2 S}$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t)=\int_0^t W^n\ d\left(s+W^2\right)$

b. (по определению) $Y(t)=\int_0^t \left(W^2 s\right)dW$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi=2\eta+3\xi$, если η имеет распределение Лапласа с математическим ожиданием нуль и дисперсией 2, а ξ распределена нормально с нулевым средним и дисперсией 4*t*, где *t* - время. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №10

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. $X_n(t) = \int\limits_0^t \exp\left(-s^2 \big/ n\right) dW(s)$.

b. $X_n(t) = \int\limits_1^t \ln\left(s^2 \big/ n\right) W(s)\, dW(s)$.

2. Будет ли процесс $X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, где $X_n(t) = \int\limits_0^t \frac{s^2}{n^2+1} W(s)\, dW(s)$, непрерывным на $t \in [0,1]$? Дифференцируемым?

3. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. $dS = \left(c + \frac{1}{2}\alpha^2\right) S dt + \alpha S\, dW$, $S(0) = S_0 > 0$ – некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица, α – константа.

c. $dS = \frac{1}{3}\sqrt[3]{S} dt + \sqrt[3]{S^2}\, dW$, $S(0) = const > 0$, $t>0$. Попробовать замену $Z = S^{-1/3}$. Будет ли решение непрерывным в любой момент времени t?

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = \ln S\, dt + \sigma e^S dW$:

a. $F = t\, 2^S$

b. $F = \ln\left(S + t + |\sqrt[3]{t}\right)^{S+t}$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t) = \int\limits_0^t W^n \, d\left(s/W\right)$

b. (по определению) $Y(t) = \int\limits_0^t e^W dW$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = \xi^3$, если ξ распределена нормально с нулевым средним и дисперсией t, где t - время. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №11

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. $X_n(t) = \int\limits_0^t \frac{arctg\left(ns^2+1\right)}{ns} dW(s)$.

b. $X_n(t) = \int\limits_0^t \left(\sin\left(\sqrt{ns+1}\right) - \sin\left(\sqrt{ns}\right)\right) dW(s)$.

2. Будет ли процесс $X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, где $X_n(t) = \int\limits_0^t \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{\left(1-\sqrt{n}\right)s/(1-n)} dW(s)$, непрерывным на $t \in [0,1]$? Дифференцируемым?

3. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. $dS = S^2 dt$, $S(0) = 1$, $t \in [0,1)$.

b. $dS = 3\sqrt[3]{S^2} dt$, $S(0) = 0$. Будет ли решение единственным?

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = \mu S\, dt + \sigma S dW$:

a. $F = S^{\mu} + \mu^{S} + t$

b. $F = arctg(t \cos S)$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t) = \int\limits_0^t W^n\ d\left(W/s\right)$

b. (по определению) $Y(t) = \int\limits_0^t We^{w}\, dW$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = \eta^2 + \xi^2$ (использовать вывод ФР Хи–квадрат), если η и ξ распределены нормально с нулевым средним и дисперсией *t*, где *t* - время. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №12

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. $X_n(t) = \int_0^t \left(\frac{n+2}{2n-1} \right)^{s^2 n^2} dW(s).$

b. $X_n(t) = \int_0^t \left(\frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + n + 1} \right)^{sn^3/(1-n)} dW(s).$

2. Будет ли процесс $X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, где $X_n(t) = \int_0^t \sin^n\left(\frac{2\pi n}{3n+1} \right) dW(s)$, непрерывным на $t \in [0,1]$? Дифференцируемым?

3. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. (процесс Орнштейна–Уленбека) $dS = \sigma(t) S\, dt + dW$, $S(0) = 0$, $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$
(использовать лекции). Сравнить полученное решение с решением уравнения $dS = \sigma(t) dt$. Будет ли решение последнего уравнения единственным?

b. $dS = \frac{1}{S^2} dt$, $S(0) = 1$. Будет ли решение единственным, непрерывным?

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = \frac{1}{S^{\ln t}} dt + \sigma\, dW$, $t>0$:

a. $F = S^{\mu} + \mu^{S} + t$

b. $F = sh(t^2 \cos S)$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t) = \int_0^t W^2\, d\left(e^{sW}\right)$

b. (по определению) $Y(t) = \int_0^t ch\, W\, dW$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = \eta\xi$, если η и ξ распределены нормально с нулевым средним и дисперсией t, где t - время. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №13

(повышенной сложности)

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. (*Бакстер*) Пусть имеется отрезок $[0,t]$ и его разбиение вида $t_m^{(n)} = tm2^{-n}$, $m = 0, 2^n$. Доказать, что в среднеквадратичном $\sum_{m=0}^{2^n-1}\left(W\left(t_{m+1}^{(n)}\right) - W\left(t_m^{(n)}\right)\right)^2 \to t$, где $W(t)$ – винеровский процесс.

2. Дифференцируем ли случайный процесс вида $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi n^2 t\right)}{n^2}$ для любого t?

3. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. $dS = \frac{1}{S^{\beta}}dt + \alpha S\, dW$, $S(0) = S_0 > 0$ – некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица, α, β – константы. Будет ли решение непрерывным в любой момент времени t?

b. $dS = -\frac{1}{2}S^{-1}\, dt + \sqrt{1-S^2}\, dW$, $S(0) = a = const \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, причем время выбирается из условия, что $t < \inf\left\{s > 0, W(s) \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$. *Примечание*: Попробовать замену $Z = \sqrt{1-S^2}$.

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = \frac{1}{S^{\gamma}}dt + \sigma S dW$:

a. $F = S^{\ln\left(S + t\cos S\right)}$

b. $F = \Gamma\left(tS\right)$, где $\Gamma\left(S\right)$ – гамма–функция.

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t) = \int_0^t W^n\, d\left(e^{sW}\right)$, n – произвольное.

b. (по определению) $Y(t) = \int_0^t \cos W\, dW$

ВАРИАНТ №14

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. (*Бакстер*) Пусть имеется отрезок $[0,t]$ и его разбиение вида $t_m^{(n)} = tmn^{-1}, m = 0, n$. Доказать, что в среднеквадратичном $\sum_{m=0}^{2^n-1}\left(W\left(t_{m+1}^{(n)}\right) - W\left(t_m^{(n)}\right)\right)^2 \to t$, где $W(t)$ – винеровский процесс.

2. Непрерывен ли случайный процесс вида $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi n^2 t\right)}{n^2}$, $t \in [0,1]$?

3. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. (броуновское движение) $dS = \mu dt + \sigma dW$, $S(0) = S_0 > 0$– случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица, μ, σ– константы.

b. (процесс Кокса для краткосрочной процентной ставки) $dS = (r - \mu S)dt + \sigma\sqrt{S}dW$, $S(0) = 0$, r, μ, σ – некоторые константы. Попробовать замену $Z = \ln(r - \mu S)$. Исследовать поведение решения в случае $r >> 1$, $\frac{2r}{\sigma^2}$.

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = S\,dt + \sigma dW$:

a. $F = \ln^3(S + t\cos S)$

b. $F = \exp\left[\log_2 t \sin S\right]$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t) = \int_0^t W\, d\left(W^3\right)$.

b. (по определению) $Y(t) = \int_0^t sh\, W\, dW$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = \ln \xi$, если ξ распределена нормально с нулевым средним и дисперсией 4*t*, где *t* - время. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №15

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. $X_n(t) = \int_0^t \left(\frac{n+s}{n-s}\right)^n dW(s)$.

b. $X_n(t) = \int_0^t \left(\sin\left(\frac{s}{n}\right) - \cos\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n dW(s)$.

2. Будет ли процесс $X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, где $X_n(t) = \int_0^t \sin^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) dW(s)$, $t \in [0,1]$, непрерывным? Дифференцируемым?

3. Выполнить следующие задания:

a. Доказать формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^t f(s) dW(s) = fW\Big|_0^t - \int_0^t W(s)\, df(s),$$

b. Найти решение стохастического дифференциального уравнения Бесселя: $dS = \frac{a-1}{S} dt + dW$, $S(0) = S_0$, S_0 – некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица. Попробовать замену $Z = S^2$.

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = S\,dt + \sigma\, dW$:

a. $F = \ln^3(S + t\cos S)$

b. $F = \exp[\log_2 t \sin S]$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t) = \int_0^t W^2\, d(W^2)$.

b. (по определению) $Y(t) = \int_0^t sh(tW) dW$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = \ln(\eta\xi)$, если η имеет равномерное распределение на интервале [0,1], а ξ распределена нормально с нулевым средним и дисперсией *t*, где *t* - время. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №16

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. $X_n(t) = \int\limits_0^t \left(n\left(\ln(n+s) - \ln n\right)\right) dW(s)$.

b. $X_n(t) = \int\limits_1^t \left(\sin\ln(ns+1) - \sin\ln ns\right) dW(s)$.

2. Будет ли процесс $X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, где $X_n(t) = \int\limits_0^t \cos^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) dW(s)$, $t \in [0,1]$, непрерывным? Дифференцируемым?

3. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. $dS = (\mu + t) S\, dW, S(0) = S_0$, μ=10, S_0 – некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица.

c. $dS = S\,dt + \left(S + t^2\right) dW$, $S(0) = S_0$, S_0 – некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица.

Примечание: использовать формулу Ито.

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = dt + \sigma S^2 dW$:

a. $F = \ln(ch\,t \cos S)$

b. $F = \sin\left(S^2 \ln t\right) + \cos\left(t^2\right)$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t) = \int\limits_0^t (W + s)\, d\left(W^2\right)$.

b. (по определению) $Y(t) = \int\limits_0^t sh\,(W + s)\, dW$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = \exp\left(\xi^2\right)$, если ξ распределена нормально с нулевым средним и дисперсией 1. Изобразить распределение на рисунке.

ВАРИАНТ №17

1. Доказать, что процесс $X_k(t)=\sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{\sin(\pi n^2 t)}{n^2}$ сходится к винеровскому процессу.
2. Непрерывен ли процесс $X(t)=\lim\limits_{k\to\infty}X_k(t)$, где $X_k(t)=\sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{\cos(\pi n^2 t)}{n^2}$ на $t\in[0,1]$? Является ли он дифференцируемым?
3. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. $dS=e^t(Wdt+dW)$, $S(0)=S_0$ – некоторая случайная величина.

b. (система) $dS_1=\dfrac{1}{2}S_1dt+\dfrac{aS_1}{b}dW$, $dS_2=\dfrac{1}{2}S_2dt-\dfrac{bS_2}{a}dW$.

4. Сделать замену переменного в процессе $dS=\ln S\,dt+\sigma SdW$:

a. $F=\exp(sh(t\cos S))$

b. $F=\sin(th\,S\,cth\,t)+\cos(th\,S\,cth\,t)$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t)=\int\limits_0^t (W-s)^3\,d(W^2)$.

b. (по определению) $Y(t)=\int\limits_0^t ch\,(W-s)\,dW$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi=\ln(\eta\xi)$, если η и ξ распределены нормально с нулевым средним и дисперсией *t*, где *t* - время. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №18

1. Выполнить следующее задание:

a. Доказать, что $X_n(t)=2^{-n|W(t)|}$ сходится к $X(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\delta(t-k)=\begin{cases}1, & t\in N\\ 0, & t\notin N\end{cases}$ при $n\to\infty$.

b. Доказать, что $X_n(t)=n^{-n|W(t)|}$ сходится к $X(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\delta(t-k)=\begin{cases}1, & t\in N\\ 0, & t\notin N\end{cases}$ при $n\to\infty$.

2. Будет ли процесс $X(t)=\lim\limits_{n\to\infty}X_n(t)$, где $X_n(t)=\int\limits_0^t\cos^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)dW(s)$, $t\in(0,1]$, непрерывным? Дифференцируемым?

3. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:

a. $dS=\frac{1}{S}dt-S\,dW$, $S(0)=S_0>0-$ некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица.

b. $dS=S^2\,dt+\alpha S\,dW$, $S(0)=S_0>0-$ некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица, α – константа. Будет ли решение непрерывным в любой момент времени *t*.

4. Сделать замену переменного в процессе $dS=S\,dt+\sigma S dW$:

a. $F=\exp\left(sh\left(t\cos S\right)\right)$

b. $F=\sin\left(shS\,ch\,t\right)+\cos\left(chS\,sh\,t\right)$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t)=\int\limits_0^t(W-s)^4\,d\left(W^3\right)$.

b. (по определению) $Y(t)=\int\limits_0^t\exp\,(W-s)\,dW$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi=\ln(\eta)$, если η имеет равномерное распределение на интервале [0,t], где *t* - время. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ВАРИАНТ №19

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. $X_n(t) = \frac{1}{n} \sin n\xi_n t$, ξ_n – последовательность нормально распределенных случайных величин со средним нуль и дисперсией единица, $t \in [0,1]$.

b. $X_n(t) = \frac{1}{n^2} \exp\left(-\xi_n^2 t\right)$, ξ_n – последовательность нормально распределенных случайных величин со средним нуль и дисперсией единица, $t \in [0,4]$.

2. Будет ли процесс $X(t) = \lim\limits_{n \to \infty} X_n(t)$, где $X_n(t) = \frac{\sin 5n - \sin 3n}{n^2 t} \exp\left(-\xi_n t\right)$, $t \in (0,1]$, ξ_n распределены нормально с нулевым средним и дисперсией единица, непрерывным? Дифференцируемым?

3. Найти решение:

a. $dS = e^W dt + S\,dW$, $S(0) = S_0$ – некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица.

b. Пусть $S(t)$ – средне–возвратный процесс Орнштейна –Уленбека, удовлетворяющий уравнению $dS = (\mu + S)dt + \sigma dW$, $S(0) = S_0$, μ, σ – некоторые числа. Найти $S(t)$. Воспользоваться способом решения уравнения Орнштейна –Уленбека (см. лекции).

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = sh S\,dt + \sigma ch S\,dW$:

a. $F = \exp\left(t^2 S + \ln S\right)$

b. $F = th\left(t\sqrt{S}\right)$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t) = \int\limits_0^t (sh 2W)\, d\left(W^2 + W\right)$.

b. (по определению) $Y(t) = \int\limits_0^t \sqrt{W}\, dW$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = \ln(\eta)$, если η имеет распределение Лапласа с математическим ожиданием нуль и дисперсией 2. Изобразить распределение на рисунке.

ВАРИАНТ №20

1. Найти предел в среднеквадратичном при $n \to \infty$:

a. $X_n(t) = \int\limits_0^t \left(\frac{n-s}{n+s} \right)^n dW(s).$

b. $X_n(t) = \int\limits_0^t \left(\cos\left(\frac{s}{n} \right) - \sin\left(\frac{s}{n} \right) \right)^n dW(s).$

2. Будет ли процесс $X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, где $X_n(t) = \sin^n \left(\frac{\xi_n + 1}{n} \right)$, $t \in (0,1]$, $t \in (0,1]$, ξ_n распределены нормально с нулевым средним и дисперсией единица, непрерывным? Дифференцируемым?

3. Найти решение:

a. $dS = \frac{1}{S^3} dt + \alpha S\, dW$, $S(0) = S_0 > 0-$ некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица, α – константа. Будет ли решение непрерывным в любой момент времени *t*.

b. $dS = -S\, dW$, $S(0) = S_0 > 0-$ некоторая случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица, α – константа.

4. Сделать замену переменного в процессе $dS = \ln S\, dt + \sigma ch S\, dW$:

a. $F = \exp\left(t^2 S\right)$

b. $F = \ln\left(S^2 + \sqrt{S^2 + t^2} \right)$

5. Вычислить интеграл Ито:

a. с помощью формулы Ито найти $Y(t) = \int\limits_0^t \left(sh^2 W + ch^2 W \right) dW$.

b. (по определению) $Y(t) = \int\limits_0^t \sqrt{W^2 + 1}\, dW$

6. Найти аналитическое представление для функции распределения СВ $\phi = \ln(\eta)$-*t*, если η имеет распределение Коши с имеет распределение Коши с λ=*t*, μ=0. Изобразить распределение на рисунке в фиксированный момент времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ТАБЛИЦА ФУНКЦИИ СТАНДАРТНОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\Phi(z)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	05596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,6948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6301	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7167	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7464	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,9707	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	09370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9723	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9783	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9830	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9868	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9898	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9922	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9941	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9956	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9967	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9982	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ТАБЛИЦА ДВУХСТОРОННИХ КВАНТИЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА

Число степеней свободы	α		
	0,1	0,05	0,01
1	6,314	12,706	63,657
2	2,920	4,303	9,925
3	2,353	3,182	5,841
4	2,132	2,776	4,604
5	2,015	2,571	4,032
6	1,943	2,447	3,707
7	1,895	2,365	3,449
8	1,860	2,306	3,355
9	1,833	2,262	3,250
10	1,812	2,228	3,169
11	1,796	2,201	3,106
12	1,782	2,179	3,055
13	1,771	2,160	3,012
14	1,761	2,145	2,977
15	1,753	2,131	2,947
16	1,746	2,120	2,921
17	1,740	2,110	2,898
18	1,734	2,101	2,878
19	1,729	2,093	2,861
20	1,725	2,086	2,845
25	1,708	2,060	2,878
30	1,697	2,042	2,750
40	1,684	2,021	2,704
50	1,676	2,009	2,678
100	1,660	1,984	2,626
200	1,652	1,972	2,601
∞	1,645	1,960	2,576

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ТАБЛИЦА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАРБИНА-УОТСОНА ДЛЯ α=0,05

	n=1		n=2		n=3		n=4		n=5	
T	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u
6	0,610	1,400	–	–	–	–	–	–	–	–
7	0,700	1,356	0,467	1,896	–	–	–	–	–	–
8	0,763	1,332	0,559	1,777	0,368	2,287	–	–	–	–
9	0,824	1,320	0,624	1,699	0,455	2,128	0,296	2,588	–	–
10	0,879	1,320	0,697	1,641	0,525	2,016	0,376	2,814	0,243	2,822
11	0,927	1,324	0,758	1,604	0,595	1,928	0,444	2,283	0,316	2,645
12	0,971	1,331	0,812	1,579	0,658	1,864	0,512	2,177	0,379	2,506
13	1,010	1,340	0,861	1,562	0,715	1,816	0,574	2,094	0,445	2,390
14	1,045	1,350	0,905	1,551	0,767	1,779	0,632	2,030	0,505	2,296
15	1,077	1,361	0,946	1,543	0,814	1,750	0,685	1,977	0,562	2,220
16	1,106	1,371	0,982	1,539	0,857	1,728	0,734	1,935	0,615	2,157
17	1,133	1,381	1,015	1,536	0,897	1,710	0,779	1,900	0,664	2,104
18	1,158	1,391	1,046	1,535	0,933	1,696	0,820	1,872	0,710	2,060
19	1,180	1,401	1,074	1,536	0,967	1,685	0,859	1,848	0,752	2,023
20	1,201	1,411	1,100	1,537	0,998	1,676	0,894	1,828	0,792	1,991
21	1,221	1,420	1,125	1,538	1,026	1,669	0,927	1,812	0,824	1,964
22	1,239	1,429	1,147	1,541	1,053	1,664	0,958	1,797	0,863	1,940
23	1,257	1,437	1,168	1,543	1,078	1,660	0,986	1,785	0,895	1,920
24	1,273	1,446	1,188	1,546	1,101	1,656	1,013	1,775	0,925	1,902
25	1,288	1,454	1,206	1,550	1,123	1,654	1,038	1,767	0,953	1,886
30	1,352	1,489	1,284	1,567	1,214	1,650	1,143	1,739	1,071	1,833
40	1,442	1,544	1,391	1,600	1,338	1,659	1,285	1,721	1,230	1,786
50	1,503	1,585	1,452	1,628	1,421	1,674	1,378	1,721	1,335	1,771
60	1,549	1,616	1,514	1,652	1,480	1,689	1,444	1,727	1,408	1,767
70	1,583	1,641	1,554	1,672	1,525	1,703	1,494	1,735	1,464	1,768
80	1,611	1,662	1,586	1,688	1,560	1,715	1,534	1,743	1,507	1,772
90	1,635	1,679	1,612	1,703	1,589	1,726	1,568	1,751	1,542	1,776
100	1,654	1,694	1,634	1,715	1,613	1,736	1,592	1,758	1,571	1,780
150	1,720	1,746	1,706	1,760	1,693	1,774	1,679	1,789	1,665	1,802

Окончание приложения 4

T	n=6		n=7		n=8		n=9		n=10	
	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u
6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
11	0,203	3,005	–	–	–	–	–	–	–	–
12	0,268	2,832	0,171	3,149	–	–	–	–	–	–
13	0,328	2,692	0,230	2,985	0,147	3,266	–	–	–	–
14	0,389	2,572	0,286	2,848	0,200	3,111	0,127	3,360	–	–
15	0,447	2,472	0,343	2,727	0,251	2,979	0,175	3,216	0,111	3,438
16	0,502	2,388	0,398	2,624	0,304	2,860	0,222	3,090	0,155	3,304
17	0,554	2,318	0,451	2,537	0,356	2,757	0,272	2,975	0,198	3,184
18	0,603	2,257	0,502	2,461	0,407	2,667	0,321	2,873	0,244	3,073
19	0,649	2,206	0,549	2,396	0,456	2,589	0,369	2,783	0,290	2,974
20	0,692	2,162	0,595	2,339	0,502	2,521	0,416	2,704	0,336	2,885
21	0,732	2,124	0,637	2,290	0,547	2,460	0,461	2,633	0,380	2,806
22	0,769	2,090	0,677	2,246	0,588	2,407	0,504	2,571	0,424	2,734
23	0,804	2,061	0,715	2,208	0,628	2,360	0,545	2,514	0,465	2,670
24	0,837	2,035	0,751	2,174	0,666	2,318	0,584	2,464	0,506	2,613
25	0,868	2,012	0,784	2,144	0,702	2,280	0,621	2,419	0,544	2,560
30	0,998	1,931	0,926	2,034	0,854	2,141	0,782	2,251	0,712	2,363
40	1,175	1,854	1,120	1,924	1,064	1,997	1,008	2,072	0,945	2,149
50	1,219	1,822	1,246	1,875	1,201	1,930	1,156	1,986	1,110	2,044
60	1,372	1,808	1,335	1,850	1,298	1,894	1,260	1,939	1,222	1,984
70	1,433	1,802	1,401	1,837	1,369	1,873	1,337	1,910	1,305	1,948
80	1,480	1,801	1,428	1,831	1,425	1,861	1,397	1,893	1,369	1,925
90	1,518	1,801	1,494	1,827	1,469	1,854	1,445	1,881	1,420	1,909
100	1,550	1,803	1,528	1,826	1,506	1,850	1,484	1,874	1,462	1,898
150	1,651	1,817	1,637	1,832	1,622	1,847	1,608	1,862	1,594	1,877
200	1,707	1,831	1,697	1,841	1,686	1,852	1,675	1,863	1,665	1,874

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

ТАБЛИЦА КРИТЕРИЯ ФИШЕРА ДЛЯ α=0,05

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	162	200	216	225	230	234	237	239	241	242
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,26	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,69	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,38	2,24
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93
200	3,92	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83

ν_1 – число степеней свободы числителя, ν_2 – число степеней свободы знаменателя.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

КВАНТИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\chi^2(\nu)$

ν / α	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	0,000 04	0,00016	0,0009	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,010	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	0,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	2887	31,53	34,81	37,16
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	63,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,8	106,6	112,3	116,3
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	118,50	124,3	129,6	135,8	140,2
120	83,85	86,92	91,58	95,70	100,62	140,2	146,5	152,2	159,0	163,6

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

ТАБЛИЦА СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

$\int_0^t W_t\, dt = 0$	$\int_0^t e^{W_t}\, dt \approx 1{,}65t$
$\int_0^t W_t^2\, dt = t$	$\int_0^t W_t e^{W_t}\, dt \approx 1{,}65t$
$\int_0^t tW_t\, dt = 0$	$\int_0^t W_t^2 e^{W_t}\, dt \approx 3{,}25t$
$\int_0^t tW_t^2 dt = \frac{t^2}{2}$	$\int_0^t W_t^3 e^{W_t}\, dt \approx 6{,}53t$
$\int_0^t W_t^3\, dt = 0$	$\int_0^t \cos(W_t) dt \approx 0{,}6t$
$\int_0^t tW_t^3 dt = 0$	$\int_0^t \sin(W_t) dt = 0$
$\int_0^t t^2 W_t^3 dt = 0$	$\int_0^t W_t \sin(W_t) dt = \int_0^t \cos(W_t) dt$
$\int_0^t W_t^4\, dt = 3t$	$\int_0^t W_t \cos(W_t) dt = 0$
$\int_0^t tW_t^4 dt = \frac{3}{2}t^2$	$\int_0^t W_t^2 \cos(W_t) dt = 0$
$\int_0^t t^2 W_t^4 dt = t^3$	$\int_0^t W_t^2 \sin(W_t) dt = 0$
$\int_0^t t^3 W_t^4 dt = \frac{3}{4}t^3$	$\int_0^t \cos^2(W_t) dt \approx 0{,}57t$
$\int_0^t W_t^5\, dt = 0$	$\int_0^t \sin^2(W_t) dt \approx 0{,}43t$
$\int_0^t W_t^6\, dt = 15t$	$\int_0^t \sin^3(W_t) dt = 0$
$\int_0^t tW_t^6 dt = 7t^2$	$\int_0^t \cos^3(W_t) dt \approx 0{,}46t$