Министерство образования Российской Федерации
Томский политехнический университет
Томский государственный университет
Московский институт электроники и математики

В. Г. Багров, В. В. Белов,
В. Н. Задорожный, А. Ю. Трифонов

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Специальные функции
Уравнения математической физики

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов инженерно-физических специальностей высших учебных заведений

Томск 2002

УДК 581
М341
Багров В. Г., Белов В. В., Задорожный В. Н., Трифонов А. Ю. Методы математической физики. III. Специальные функции. — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 352 с.

Настоящее методическое пособие посвящено изложению теории специальных функций, а также методов решения интегральных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка. Оно содержит теоретический материал в объеме, предусмотренном ныне действующей программой курса высшей математики для инженерно-физических и физических специальностей университетов. Теоретический курс дополнен индивидуальными заданиями (30 вариантов) для самостоятельного решения по разделам «Специальные и обобщенные функции» и «Уравнения математической физики» курса «Высшая математика и математическая физика».

Пособие предназначено для студентов и аспирантов физических и инженерно-физических специальностей.

Рецензенты: академик РАН, профессор В.П. Маслов
кафедра математики физического факультета
Московского государственного университета

ISBN 5-89503-145-5

ЧАСТЬ III

Специальные функции

Данный раздел курса посвящен изучению свойств специальных функций, возникающих при решении задач математической физики. Даже для сравнительно простых физических задач, допускающих точные аналитические решения, эти решения зачастую не могут быть выражены через элементарные функции. Отсюда следует, что специальные функции являются основной базой конструирования решений задач математической физики, причем сама эта база непрерывно расширяется при изучении новых, не исследовавшихся ранее физических и математических проблем. Авторы ставят здесь три основные учебные задачи. Первая – ознакомить с наиболее употребительными конкретными специальными функциями (функции Бесселя, ортогональные классическими полиномами и т.п.). Вторая – на основе изучения различных свойств конкретных функций выработать представление об общих методах и приемах, пригодных для исследования свойств специальных функций, не рассмотренных в данном курсе. Третья – путем подбора задач сформировать практические навыки использования общих методов в конкретных случаях. Эти цели и определяют содержание данного раздела.

ГЛАВА 1

Задача Штурма–Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений

В узком смысле под специальными функциями понимаются функции, которые появляются при решении уравнений с частными производными, например, методом разделения переменных. В частности, при использовании метода разделения переменных в цилиндрических и сферических координатах мы приходим к цилиндрическим и сферическим функциям.

Одна из характерных особенностей этих функций состоит в том, что они, как правило, являются решением уравнения

$$\frac{d}{dt}\Big[k(t)\frac{dy}{dt}\Big] - q(t)y = 0$$

с особыми точками, т.е. коэффициент $k(t)$ обращается в нуль в одной или нескольких точках промежутка изменения переменной t. Решение таких уравнений имеет ряд специфических свойств, часть из которых мы и рассмотрим в этой главе.

В более широком смысле под специальными функциями математической физики понимается совокупность отдельных классов неэлементарных функций, возникающих при решении как теоретических, так и прикладных задач в самых различных разделах математики, физики и техники.

1. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t), \tag{1.1}$$

где $p(t), q(t)$ – функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$. Из курса высшей математики известно, что общее решение уравнения (1.1) имеет вид

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \tilde{x}(t), \tag{1.2}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — определенные на $]a, b[$ и линейно независимые на этом интервале решения уравнения (1.1) при $f(t) = 0$, а $\tilde{x}(t)$ — любое определенное на $]a, b[$ частное решение уравнения (1.1).

Чтобы из общего решения (1.2) уравнения (1.1) выделить какое-либо конкретное решение, нужно задать дополнительные условия. В разделе «Дифференциальные уравнения» курса математического анализа решалась задача Коши: в некоторой точке $t_0 \in]a, b[$ задавалось значение самой неизвестной функции и ее первой производной

$$x(t_0) = x_0, \qquad x'(t_0) = x_0'. \tag{1.3}$$

При этом отмечалось, что существует одно и только одно решение задачи (1.1), (1.3). Однако зачастую в конкретных физических задачах требуется из всего множества решений (1.2) выбрать решения, удовлетворяющие на концах отрезка $[a, b]$ следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = x_a, \\ &\beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = x_b, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где α_1, α_2, β_1, β_2, x_a, x_b – постоянные числа, причем в парах α_1 и α_2, β_1 и β_2 хотя бы одно из чисел должно быть отличным от нуля (т.е. $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ и $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$). В этих задачах значение искомой функции задается не в одной, а в двух точках, ограничивающих отрезок, на котором требуется определить решение.

Примером может служить задача о движении материальной точки массой m под действием заданной силы $F(t, x, x')$, в которой часто требуется найти закон движения, если в начальный момент $t = t_0$ точка находилась в положении x_0, а в момент $t = t_1$ должна попасть в точку $x = x_1$. Задача сводится к интегрированию уравнения Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, x')$$

с краевыми условиями $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Заметим, что эта задача, вообще говоря, не имеет единственного решения. Если речь идет о баллистической задаче, то в одну и ту же точку тело может попасть по навесной и по настильной траекториям и, более того, при очень больших начальных скоростях — после однократного или многократного облета земного шара.

$\Diamond$ Если известно общее решение дифференциального уравнения, для решения краевой задачи надо определить произвольные постоянные, содержащиеся в общем решении, из граничных условий. При этом, конечно, не всегда существует действительное решение, а если оно существует, то не обязательно единственно.

Пример 1.1. Найти решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = 0 \qquad \text{при} \qquad y(0) = 0, \quad y(t_1) = y_1.$$

Решение. Исходное уравнение является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение такого уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Из первого граничного условия следует, что $C_1 = 0$. Тогда $y(t) = C_2 \sin t$. Если $t_1 \neq \pi n$, то из второго граничного условия находим

$$y_1 = y(t_1) = C_2 \sin t_1, \qquad \text{т.е.} \qquad C_2 = \frac{y_1}{\sin t_1}.$$

Следовательно, в этом случае существует единственное решение краевой задачи

$$y(t) = \frac{y_1}{\sin t_1} \sin t.$$

Если $t_1 = \pi n$ и $y_1 = 0$, то все кривые пучка $y = C_2 \sin t$ являются решениями краевой задачи.

При $t_1 = \pi n$ и $y_1 \neq 0$ решений задачи не существует.

Применительно к проблемам математической физики нас в основном будут интересовать однородные краевые задачи, т.е. нахождение решений однородных линейных уравнений при однородных краевых условиях.

♦ Краевые условия называются однородными, если из того, что функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ удовлетворяют этим условиям, следует, что любая линейная комбинация этих функций $x(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k x_k(t)$ также им удовлетворяет.

◊ Условия (1.4) будут однородны, если $x_a = x_b = 0$.

◊ В дальнейшем нас не будет интересовать случай тривиальных (т.е. тождественно равных нулю) решений.

♦ Самосопряженным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)x'(t)] - q(t)x(t) = f(t). \tag{1.5}$$

Функции $f(t)$ и $q(t)$ предполагаются непрерывными на отрезке $[a, b]$, а $\varphi(t)$ — непрерывной вместе со своей производной.

Утверждение 1.1. *Уравнение* (1.1) *может быть приведено к самосопряженному виду.*

Введем функцию

$$\varphi(t) = \exp\Big[\int\limits_0^t p(\tau)d\tau\Big]$$

и заметим, что $\varphi'(t) = p(t)\varphi(t)$ и, следовательно,

$$\varphi(t)x''(t) + p(t)\varphi(t)x'(t) = \frac{d}{dt}[\varphi(t)x'(t)].$$

Умножим (1.1) на $\varphi(t)$ и получим

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)x'(t)] - \tilde{q}(t)x(t) = \tilde{f}(t), \tag{1.6}$$

где $\tilde{q}(t) = \varphi(t)q(t)$, $\tilde{f}(t) = f(t)\varphi(t)$. Таким образом, уравнение (1.1) приведено к самосопряженному виду.

Пример 1.2. Привести к самосопряженному виду уравнение

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \Big(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\Big)x = 0, \qquad x = x(t).$$

Решение. Домножим левую и правую части уравнения на функцию

$$\varphi(t) = \exp\bigg(\int\limits_1^t \frac{d\tau}{\tau}\bigg) = t,$$

тогда

$$tx'' + x' + \Big(t - \frac{\nu^2}{t}\Big)x = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}[tx'] + \Big(t - \frac{\nu^2}{t}\Big)x = 0.$$

Пример 1.3. Найти решение краевой задачи

$$x'' - x = 2t, \quad x = x(t), \qquad x(0) = 0, \quad x(1) = -1. \tag{1.7}$$

Решение. 1. Найдем общее решение однородного уравнения

$$x'' - x = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0,$$

следовательно, $k = \pm 1$, и общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{x}(t) = \widetilde{C}_1 e^t + \widetilde{C}_2 e^{-t} = C_1 \operatorname{ch} t + C_2 \operatorname{sh} t.$$

Частным решением неоднородного уравнения будет функция

$$\tilde{x}(t) = -2t.$$

В результате для общего решения уравнения (1.7) получим

$$x(t) = C_1 \operatorname{ch} t + C_2 \operatorname{sh} t - 2t. \tag{1.8}$$

2. Выберем константы C_1 и C_2 из граничных условий. Подставив (1.8) в (1.7)

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \operatorname{ch} 1 + C_2 \operatorname{sh} 1 - 2 = -1, \end{cases}$$

получим

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = \frac{1}{\operatorname{sh} 1}.$$

Окончательно запишем

$$x(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} 1} - 2t.$$

2. Задача Штурма–Лиувилля

Важным случаем однородных краевых задач являются так называемые задачи на собственные значения.

Типичной задачей на собственные значения для линейного дифференциального уравнения является задача Штурма–Лиувилля. Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)x'(t)] - q(t)x(t) + \lambda\rho(t)x(t) = 0 \tag{2.1}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} \alpha_1 x'(a) + \alpha_2 x(a) = 0, \qquad \beta_1 x'(b) + \beta_2 x(b) = 0; \\ |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \qquad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Функции $\varphi'(t)$, $q(t)$, $\rho(t)$ будем предполагать непрерывными на отрезке $[a, b]$. В дальнейшем будем считать $\varphi(t) > 0$, $\rho(t) > 0$, $q(t) \geqslant 0$. Число λ — параметр уравнения, а α_1, α_2, β_1, β_2 — заданные постоянные.

♦ Задачу об определении значений параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения $x_\lambda(t)$ уравнения (2.1), удовлетворяющие граничным условиям (2.2), называют задачей Штурма–Лиувилля. Значения параметра λ, при которых существуют решения задачи Штурма–Лиувилля (2.1), (2.2), называют собственными числами, или собственными значениями, а отвечающие им решения $x_\lambda(t)$ — собственными функциями этой задачи. Граничные условия (2.2) называются граничными условиями Штурма.

♦ Совокупность всех собственных значений задачи Штурма–Лиувилля называется спектром.

Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля обладают рядом замечательных свойств, которые широко используются при решении краевых задач не только для обыкновенных дифференциальных уравнений, но и для уравнений в частных производных.

Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля

Свойство 1. Существуют последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}$, $n=\overline{1,\infty}$, и соответствующая им последовательность собственных функций $\{x_n(t)\}$, $n=\overline{1,\infty}$, задачи Штурма–Лиувилля (2.1), (2.2), причем все собственные значения можно пронумеровать в порядке возрастания их абсолютного значения

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \ldots \tag{2.3}$$

Доказательство будет приведено позднее в разд. «Характеристические числа и собственные функции» гл. «Интегральные уравнения» части IV (см. утверждение 59.2, а также, например, [32], стр. 338).

Свойство 2. Каждому собственному значению соответствует с точностью до постоянного множителя только одна собственная функция.

Доказательство. Пусть собственному числу λ соответствуют две собственных функции $x(t)$, $y(t)$. Тогда из (2.1) следует, что

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)x'(t)] - q(t)x(t) + \lambda\rho(t)x(t) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)y'(t)] - q(t)y(t) + \lambda\rho(t)y(t) = 0.$$

Умножим первое уравнение на $y(t)$, а второе — на $x(t)$ и вычтем из первого второе:

$$y(t)\frac{d}{dt}[\varphi(t)x'(t)] - x(t)\frac{d}{dt}[\varphi(t)y'(t)] +$$
$$+x'(t)\varphi(t)y'(t) - x'(t)\varphi(t)y'(t) = 0.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}[y(t)\varphi(t)x'(t) - x(t)\varphi(t)y'(t)] = 0,$$

что дает

$$\varphi(t)[y(t)x'(t) - x(t)y'(t)] = \text{const}, \quad t \in [a, b]. \tag{2.4}$$

Из граничных условий (2.1) следует, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0, \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \end{aligned}$$

причем по условию $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} x(a) & x'(a) \\ y(a) & y'(a) \end{vmatrix} = x(a)y'(a) - y(a)x'(a) = 0,$$

а так как правая часть (2.4) не зависит от t, а левая часть в точке a обращается в нуль, то стоящая в правой части константа равна нулю. В итоге вронскиан

$$W[x(t), y(t)] = y(t)x'(t) - x(t)y'(t) = \begin{vmatrix} y(t) & x(t) \\ y'(t) & x'(t) \end{vmatrix} = 0$$

для $t \in [a, b]$, т.е. функции $x(t)$ и $y(t)$ линейно зависимы и, следовательно, $x(t) = Cy(t)$, что и требовалось доказать.

♦ Функции $x(t)$ и $y(t)$, определенные и интегрируемые на интервале $]a, b[$, называются ортогональными на этом интервале с весом $\rho(t)$, если

$$\langle x(t)|y(t)\rangle_\rho = \int\limits_a^b x(t)y(t)\rho(t)dt = 0, \tag{2.5}$$

где $\rho(t) > 0$ определена и интегрируема на $]a, b[$.

♦ Число, сопоставляемое каждой паре вещественных функций $x(t)$ и $y(t)$ по правилу (2.5), называется скалярным произведением функций $x(t)$ и $y(t)$ с весом $\rho(t) > 0$ на интервале $]a, b[$.

♦ Величина

$$\|x\| = \|x(t)\| = \sqrt{\langle x(t)|x(t)\rangle_\rho} \tag{2.6}$$

называется нормой функции $x(t)$.

Свойство 3. Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля, соответствующие различным собственным числам, попарно ортогональны на интервале $]a, b[$ с весом $\rho(t)$.

Доказательство. Пусть функции $x_k(t)$ и $x_l(t)$ — собственные функции, соответствующие собственным числам λ_k и λ_l ($k \neq l$). Тогда должно выполняться

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)x'_k(t)] - q(t)x_k(t) = -\lambda_k\rho(t)x_k(t),$$
$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)x'_l(t)] - q(t)x_l(t) = -\lambda_l\rho(t)x_l(t).$$

Домножим первое уравнение на $x_l(t)$, а второе — на $x_k(t)$ и после вычитания получим

$$\begin{gathered} x_l(t)\frac{d}{dt}[\varphi(t)x'_k(t)] - x_k(t)\frac{d}{dt}[\varphi(t)x'_l(t)] + \\ \varphi(t)x'_l(t)x'_k(t) - \varphi(t)x'_l(t)x'_k(t) = \\ = (\lambda_l - \lambda_k)\rho(t)x_k(t)x_l(t) \end{gathered}$$

или

$$\frac{d}{dt}\{\varphi(t)[x_l(t)x'_k(t) - x_k(t)x'_l(t)]\} = (\lambda_l - \lambda_k)\rho(t)x_k(t)x_l(t).$$

Проинтегрируем последнее соотношение по dt в пределах от a до b и учтем соотношения

$$x_l(a)x'_k(a) - x_k(a)x'_l(a) = x_l(b)x'_k(b) - x_k(b)x'_l(b) = 0,$$

которые вытекают из условия существования нетривиальных решений следующих систем алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_k(a) + \alpha_2 x'_k(a) = 0, \\ \alpha_1 x_l(a) + \alpha_2 x'_l(a) = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \beta_1 x_k(b) + \beta_2 x'_k(b) = 0, \\ \beta_1 x_l(b) + \beta_2 x'_l(b) = 0. \end{cases}$$

В результате получим, что

$$(\lambda_l - \lambda_k)\int\limits_a^b \rho(t)x_k(t)x_l(t)dt = 0.$$

Но так как $\lambda_l \neq \lambda_k$, свойство 3 доказано.

$\Diamond$ Из свойства 2 следует, что собственные функции определены с точностью до постоянной. Часто эту константу находят из условия равенства нормы функции $x_k(t)$ единице:

$$\|x_k(t)\|^2 = \int\limits_a^b \rho(t)x_k^2(t)dt = 1, \qquad k = \overline{1,\infty}. \tag{2.7}$$

Условие (2.7) называется условием нормировки.

$\blacklozenge$ Система функций $\{x_k(t)\}$, $k = \overline{1,\infty}$, называется ортогональной на интервале $]a,b[$ с весом $\rho(t)$, если для любых $k,l = \overline{1,\infty}$ справедливо $\langle x_k(t)|x_l(t)\rangle_\rho = 0$, $k \neq l$.

$\blacklozenge$ Ортогональная на интервале $]a,b[$ система функций $\{x_k(t)\}$, $k = \overline{1,\infty}$, называется ортонормированной с весом $\rho(t)$, если $\|x_k(t)\| = 1$, $k = \overline{1,\infty}$.

Ортогональная на интервале $]a,b[$ система функций $\{x_k(t)\}$, $k = \overline{1,\infty}$, порождает ортонормированную с весом $\rho(t) = 1$ систему функций $\{u_n(t)\}$, где

$$u_n(t) = \frac{\sqrt{\rho(t)}x_n(t)}{\|x_n(t)\|}. \tag{2.8}$$

В результате условие полноты (см. разд. «Дельта-функция и ортонормированные системы» части II) для ортогональной системы функций с весом $\rho(t)$ примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k(t)x_k(\tau)}{\|x_k(t)\|^2}\rho(\tau) = \delta(t-\tau), \tag{2.9}$$

где $\delta(t-\tau)$ — дельта-функция Дирака.

Свойство 4. Теорема разложения В.А. Стеклова. Если функция $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a,b]$ и удовлетворяет граничным условиям (2.2), то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на $[a,b]$ ряд по собственным функциям $x_k(t)$ задачи Штурма–Лиувилля (2.1), (2.2)

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k x_k(t), \tag{2.10}$$

где

$$C_k = \frac{\langle f(t)|x_k(t)\rangle_\rho}{\|x_k(t)\|^2} = \frac{\int\limits_a^b f(t)x_k(t)\rho(t)dt}{\int\limits_a^b x_k^2(t)\rho(t)dt}. \tag{2.11}$$

Ряд (2.10) называется рядом Фурье функции $f(t)$ по ортогональной системе функций $\{x_k(t)\}$, а коэффициенты (2.11) — коэффициентами Фурье функции $f(t)$.

Доказательство будет приведено позднее в разд. «Теорема Гильберта–Шмидта и ее следствия» гл. «Интегральные уравнения» части IV (см. доказательство теоремы 60.3, а также, например, [32], стр. 339).

Пример 2.1. Показать, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (2.1), (2.2) удовлетворяет условию полноты (2.9) на отрезке $[a, b]$ в классе дважды непрерывно дифференцируемых на этом отрезке функций, если для них справедливы граничные условия (2.2).

Решение. Рассмотрим соотношение (2.10), где функция $f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Стеклова. С учетом (2.11) получим

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k x_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) \int\limits_a^b \frac{f(\tau)x_k(\tau)\rho(\tau)}{\|x_k\|^2} d\tau.$$

Изменим порядок суммирования и интегрирования. Это возможно, так как ряд (2.10) сходится равномерно. Тогда

$$f(t) = \int\limits_a^b f(\tau) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k(\tau)x_k(t)}{\|x_k\|^2} \rho(\tau) \right\} d\tau = \int\limits_a^b f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau.$$

Здесь мы воспользовались определением дельта-функции Дирака. Таким образом, условие полноты выполняется.

Пример 2.2. Найти собственные значения и ортонормированные собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y = y(x), \qquad y(0) = y(l) = 0, \qquad l > 0.$$

и записать условие ортогональности собственных функций.

Решение. 1. Пусть $\lambda = 0$, тогда

$$y(x) = C_1 x + C_2,$$

и краевым условиям удовлетворяет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$.

2. Пусть $\lambda < 0$, тогда общее решение уравнения $y'' + \lambda y = 0$ есть функция

$$y(x) = C_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}}.$$

Из краевых условий находим $C_1 = C_2 = 0$, т.е. существует только тривиальное решение.

3. Пусть $\lambda > 0$. Тогда общее решение уравнения $y'' + \lambda y = 0$ имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin x\sqrt{\lambda} + C_2 \cos x\sqrt{\lambda}.$$

Подставив это выражение в краевые условия, из первого получим $C_2 = 0$, а из второго

$$C_1 \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0.$$

Таким образом, данная краевая задача имеет нетривиальное решение, если

$$l\sqrt{\lambda} = \pi n \quad \text{и} \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Этим значениям соответствуют собственные функции

$$y_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad n = \overline{1, \infty}.$$

4. Запишем условие ортогональности. Для этого вычислим интеграл

$$I = \int\limits_0^l y_k(x) y_n(x) \rho(x) dx.$$

В нашем случае $\rho(x) = 1$, поскольку исходное уравнение в самосопряженной форме (2.1) имеет вид $y'' - \lambda y = 0$. Тогда

$$I = \int\limits_0^l C_k \sin\frac{\pi n x}{l} C_n \sin\frac{\pi n x}{l} dx = \delta_{kn} C_k^2 \int\limits_0^l \sin^2\frac{\pi n x}{l} dx = \delta_{kn} C_k^2 \frac{l}{2}.$$

Окончательно получим

$$I = \int\limits_0^l y_k(x) y_n(x) dx = \frac{l C_k^2}{2} \delta_{kn}.$$

Если положить $C_k = \sqrt{2/l}$, то система функций $y_n(x)$ будет ортонормированной.

5. Рассмотрим возможную физическую интерпретацию задачи. Пусть, например, однородный упругий стержень, расположенный вдоль оси Ox, сжимается вдоль нее силой P, причем торцы стержня, расположенные в точках $x = 0$ и $x = l$, удерживаются на оси, но могут свободно вращаться вокруг точек закрепления (рис. 1).

Если обозначить через y поперечное отклонение точек стержня от его исходного (прямолинейного) положения, то оказывается, что функция $y(x)$ с достаточной точностью удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y''(x) + \frac{P}{EJ} y(x) = 0$$

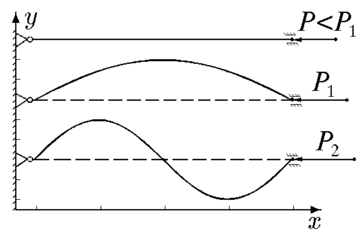

Рис. 1

и граничным условиям

$$y(0) = y(l) = 0,$$

где E — модуль Юнга и J — так называемый «момент инерции» характеризуют материал и поперечное сечение стержня [30].

Естественно, что при малых значениях P прямолинейная форма стержня устойчива. Однако существует критическое значение P_1 силы P такое, что при $P > P_1$ прямолинейная форма стержня становится неустойчивой и стержень изгибается. Критические значения P_n, при которых стержень принимает устойчивые криволинейные формы, как раз и задается выражением для собственных значений λ_n

$$\frac{P_n}{EJ} = -\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

или

$$P_n = EJ\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \qquad n = \overline{1, \infty}.$$

При этом собственные функции определяют с точностью до множителя (амплитуды) соответствующие равновесные состояния стержня (см. рис. 1).

Легко увидеть, что изменение направления силы (ее знака в уравнении) на противоположное (растяжение) приводит к тому, что равновесным состоянием является только прямая $y(x) = 0$, в полном соответствии со знаком собственных значений λ_n.

Наиболее простое решение при $n = 1$ было найдено еще Эйлером в 1757 г. Отметим, однако, что уравнение $y'' = \lambda y$ описывает малые отклонения, а анализ более точного уравнения, справедливого при любых отклонениях (оно оказывается нелинейным), показывает, что с ростом P_n максимальное отклонение участков стержня в равновесном состоянии от прямой $y(x) = 0$ быстро возрастает и стержень разрушается.

Рассмотренная физическая интерпретация математического решения не единственна. Аналогичные задачи возникают при нахождении собственных колебаний струн, стержней и др.

♢ Одним из главных источников задач на собственные значения являются смешанные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. Если такая смешанная задача допускает разделение переменных, то ей может быть поставлена в соответствие <спектральная> задача на собственные значения (2.1) (см. разд. «Разделение переменных в уравнении Лапласа», «Разделение переменных в уравнении Гельмгольца», «Метод Фурье для уравнения теплопроводности», «Метод Фурье для волнового уравнения» части IV).

В заключение мы рассмотрим ряд примеров, в которых проследим влияние вида граничных условий и коэффициентов уравнения на решение задачи Штурма–Лиувилля.

Пример 2.3. Решить задачу Штурма–Лиувилля

$$x'' - \lambda x = 0, \qquad x = x(t), \qquad x'(1) = x'(3) = 0, \tag{2.12}$$

написать условие ортогональности для собственных функций задачи и ортонормировать эти функции.

Решение. 1. Найдем общее решение уравнения (2.12). Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - \lambda = 0.$$

Следовательно, $k = \pm\sqrt{\lambda}$ и в зависимости от характера значений λ для общего решения получим

а) $\lambda > 0 \quad x(t) = \widetilde{C}_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + \widetilde{C}_2 e^{-\sqrt{\lambda}t} = C_1 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}t + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}t;$

б) $\lambda = 0 \quad x(t) = C_1 + C_2 t;$

в) $\lambda < 0 \quad x(t) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}t + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}t.$

2. Рассмотрим случай $\lambda > 0$. Тогда

$$x'(t) = \sqrt{\lambda}(C_1 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}t + C_2 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}t),$$

и для определения постоянных C_1, C_2 и λ из граничных условий получим

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(C_1 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda} + C_2 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}) = 0, \\ \sqrt{\lambda}(C_1 \operatorname{sh} 3\sqrt{\lambda} + C_2 \operatorname{ch} 3\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим

$$C_1 = -C_2 \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}}.$$

Подставив это выражение во второе уравнение, получим

$$\frac{C_2}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}}\big(- \operatorname{ch}\sqrt{\lambda} \operatorname{sh} 3\sqrt{\lambda} + \operatorname{sh}\sqrt{\lambda} \operatorname{ch} 3\sqrt{\lambda}\big) = 0.$$

С учетом соотношения $\operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \pm \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \operatorname{sh}(a \pm b)$ найдем

$$C_2 \operatorname{sh}(2\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Следовательно, $C_2 = 0$ или $\sqrt{\lambda} = 0$. Последнее невозможно, так как $\lambda > 0$. Таким образом, при $\lambda > 0$ $C_1 = C_2 = 0$ и нетривиальных решений нет.

3. Рассмотрим случай $\lambda = 0$. Из граничных условий найдем $C_2 = 0$. Постоянная C_1 из этих условий не определяется. Для удобства переобозначим $C_1 = C_0$. Следовательно, при $\lambda = 0$

$$x(t) = C_0. \tag{2.13}$$

4. Рассмотрим случай $\lambda < 0$. Аналогично случаю 2 получим

$$x'(t) = \sqrt{-\lambda}(-C_1 \sin\sqrt{-\lambda}t + C_2 \cos\sqrt{-\lambda}t)$$

и
$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}(-C_1 \sin\sqrt{-\lambda} + C_2 \cos\sqrt{-\lambda}) = 0, \\ \sqrt{-\lambda}(C_1 \sin 3\sqrt{-\lambda} + C_2 \cos 3\sqrt{-\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $\sin 3\sqrt{-\lambda}$, второе – на $-\sin\sqrt{-\lambda}$ и сложим полученные выражения. Тогда

$$\sqrt{-\lambda}(\cos\sqrt{-\lambda}\sin 3\sqrt{-\lambda} - \sin\sqrt{-\lambda}\cos 3\sqrt{-\lambda})C_2 = 0$$

или
$$\sqrt{-\lambda}C_2 \sin 2\sqrt{-\lambda} = 0.$$

Нетривиальные решения задачи Штурма–Лиувилля существуют, если

$$2\sqrt{-\lambda} = \pi k \quad \text{и} \quad -C_1 \sin\frac{\pi k}{2} + C_2 \cos\frac{\pi k}{2} = 0, \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Обозначив

$$C_1 = C_k \cos\frac{\pi k}{2}, \qquad C_2 = C_k \sin\frac{\pi k}{2},$$

окончательно получим

$$\begin{gathered} \lambda_k = -\Big(\frac{\pi k}{2}\Big)^2, \\ x_k(t) = C_k\Big(\cos\frac{\pi k}{2}\cos\frac{\pi k t}{2} + \sin\frac{\pi k}{2}\sin\frac{\pi k t}{2}\Big) = \\ = C_k \cos\frac{\pi k}{2}(t-1), \quad k = \overline{1,\infty}. \end{gathered} \tag{2.14}$$

5. Объединив (2.13) и (2.14), для $k = \overline{0,\infty}$ получим

$$\lambda_k = -\Big(\frac{\pi k}{2}\Big)^2, \quad x_k(t) = C_k(1+\delta_{k0})\cos\frac{\pi k}{2}(t-1). \tag{2.15}$$

6. Выпишем условие ортогональности. Уравнение (2.12) записано в самосопряженной форме с $\rho(t) = 1$. Следовательно, функции (2.15) должны быть ортогональны относительно скалярного произведения

$$\langle x_k(t), x_l(t)\rangle = \int\limits_1^3 x_k(t)x_l(t)dt.$$

С учетом интегралов

$$\int_1^3 \cos\frac{\pi k}{2}(t-1)dt = 0, \qquad \int_1^3 dt = 2,$$

$$\int_1^3 \cos\frac{\pi k}{2}(t-1)\cos\frac{\pi l}{2}(t-1)dt = \delta_{kl}, \quad k,l=\overline{1,\infty},$$

получим искомое соотношение ортогональности собственных функций (2.15)

$$\int_1^3 x_k(t)x_l(t)dt = C_k^2(1+\delta_{k0})\delta_{kl}, \qquad k,l=\overline{0,\infty}.$$

7. Ортонормированные собственные функции получаются из (2.15) делением на норму собственной функции (на корень квадратный из коэффиицента при δ_{kl} в последнем соотношении:

$$x_k(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{k0}}}\cos\frac{\pi k}{2}(t-1).$$

Пример 2.4. Решить задачу Штурма–Лиувилля

$$t^2x'' + \frac{1}{4}x - \lambda x = 0, \qquad x(1)=0, \quad x(e^2)=0. \tag{2.16}$$

Написать условие ортогональности собственных функций задачи и ортонормировать эти функции.

Решение. 1. Уравнение (2.16) — уравнение Эйлера, и его решение ищем в виде

$$x(t) = t^\mu. \tag{2.17}$$

Подставив (2.17) в (2.16), получим

$$t^2\mu(\mu-1)t^{\mu-2} + \frac{1}{4}t^\mu - \lambda t^\mu = 0$$

или

$$\mu^2 - \mu + \frac{1}{4} - \lambda = 0.$$

Следовательно,

$$\mu = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\lambda}.$$

Если $\lambda \geqslant 0$, то существуют два линейно независимых решения уравнения (2.16) и его общее решение имеет вид

$$x(t) = C_1 t^{\sqrt{\lambda}+1/2} + C_2 t^{-\sqrt{\lambda}+1/2}, \qquad \lambda > 0. \tag{2.18}$$

Если $\lambda < 0$, то формула (2.17) дает два комплексных решения уравнения (2.16). Поскольку уравнение (2.16) линейное, то действительные и мнимые части его комплексных решений — также решения уравнения (2.16). Следовательно, функции

$$x_1(t) = \mathrm{Re}\; t^{i\sqrt{-\lambda}+1/2} = \sqrt{t}\cos(\sqrt{-\lambda}\ln t),$$
$$x_2(t) = \mathrm{Im}\; t^{i\sqrt{-\lambda}+1/2} = \sqrt{t}\sin(\sqrt{-\lambda}\ln t)$$

являются решениями уравнения (2.16). Функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ линейно независимы, поэтому общее решение уравнения (2.16) имеет вид

$$x(t) = \sqrt{t}[C_1\cos(\sqrt{-\lambda}\ln t) + C_2\sin(\sqrt{-\lambda}\ln t)], \quad \lambda < 0. \tag{2.19}$$

Если $\lambda = 0$, то формула (2.17) определяет только одно решение уравнения

$$t^2 x'' + \frac{1}{4}x = 0 \tag{2.20}$$

— функцию $x_1(t) = \sqrt{t}$.

Чтобы отыскать общее решение уравнения (2.20), проведем замену $x(t) = \sqrt{t}y(t)$, в результате которой для функции $y(t)$ приходим к уравнению вида

$$(ty')' = 0, \tag{2.21}$$

откуда

$$y(t) = C_1 + C_2 \ln t$$

и, следовательно, общее решение уравнения (2.16) при $\lambda = 0$ имеет вид

$$x(t) = \sqrt{t}(C_1 + C_2\ln t), \qquad \lambda = 0. \tag{2.22}$$

2. Рассмотрим случай $\lambda > 0$. Подставив (2.18) в граничные условия, получим

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{2(\sqrt{\lambda}+1/2)} + C_2 e^{2(-\sqrt{\lambda}+1/2)} = 0. \end{cases}$$

Исключив с помощью первого уравнения C_1 из второго, получим

$$C_2 \operatorname{sh} 2\sqrt{\lambda} = 0,$$

откуда при положительных λ находим, что $C_2 = 0$ и при $\lambda > 0$ краевым условиям удовлетворяет только тривиальное решение $x(t) \equiv 0$.

3. Пусть $\lambda = 0$. Из краевых условий для функции (2.22) получим

$$C_1 = 0, \qquad C_1 e + 2C_2 e = 0.$$

Следовательно, $\lambda = 0$ не является собственным значением.

4. При $\lambda < 0$ из краевых условий получим

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 e \cos 2\sqrt{-\lambda} + C_2 e \sin 2\sqrt{-\lambda} = 0. \end{cases}$$

В результате

$$C_2 \sin 2\sqrt{-\lambda} = 0.$$

Таким образом, данная краевая задача имеет ненулевые решения, если $2\sqrt{-\lambda} = \pi k$, т.е.

$$\lambda = \lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2, \qquad k = \overline{1, \infty}.$$

Эти значения λ являются собственными. Соответствующие им собственные функции имеют вид

$$x_k(t) = C_k \sqrt{t} \sin\left(\frac{\pi k}{2} \ln t\right), \qquad k = \overline{1, \infty}. \tag{2.23}$$

5. Выпишем условие ортогональности собственных функций. Представим уравнение (2.16) в самосопряженной форме

$$x'' + \frac{1}{4t^2} x - \lambda \frac{1}{t^2} x = 0.$$

Следовательно, $\rho(t) = 1/t^2$, и функции (2.23) ортогональны относительно скалярного произведения

$$\langle x(t) | y(t) \rangle_\rho = \int\limits_1^{e^2} x(t) y(t) \frac{dt}{t^2}.$$

С учетом результатов примера 2.2 получим

$$\int\limits_1^{e^2} x_k(t)x_l(t)\frac{dt}{t^2} = \int\limits_1^{e^2} C_kC_l \sin\Big(\frac{\pi k}{2}\ln t\Big)\sin\Big(\frac{\pi l}{2}\ln t\Big)d(\ln t) = \\ = \frac{1}{2}C_k^2\delta_{kl}, \qquad k,l=\overline{1,\infty}.$$

6. Ортонормированные собственные функции имеют вид

$$x_k(t) = \sqrt{2t}\sin\Big(\frac{\pi k}{2}\ln t\Big), \qquad k=\overline{1,\infty}.$$

Отметим, что задача (2.16) заменой переменной $t = e^\tau$ сводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau} + \Big(\frac{1}{4}-\lambda\Big)x = 0$$

с граничными условиями

$$x(0) = x(2) = 0.$$

Пример 2.5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

$$x'' + 2\operatorname{th} t x' + \lambda x = 0, \qquad x = x(t), \qquad x(0) = x(l) = 0, \tag{2.24}$$

записать условие ортогональности для собственных функций задачи и ортонормировать эти функции.

Решение. 1. С учетом соотношений

$$(x\operatorname{ch} t)' = x'\operatorname{ch} t + x\operatorname{sh} t,$$
$$(x\operatorname{ch} t)'' = x''\operatorname{ch} t + 2x'\operatorname{sh} t + x\operatorname{ch} t = (x'' + 2\operatorname{th} t x' + x)\operatorname{ch} t$$

уравнение (2.24) можно представить в виде

$$\frac{1}{\operatorname{ch} t}[(x\operatorname{ch} t)'' + (\lambda-1)(x\operatorname{ch} t)] = 0.$$

Следовательно, положив $x(t) = z(t)/(\operatorname{ch} t)$, для функции $z = z(t)$ получим задачу Штурма–Лиувилля

$$z'' + (\lambda-1)z = 0, \quad z(0) = z(l) = 0,$$

решение которой приведено в примере 2.2. Возвратившись к исходной функции $x(t)$, для собственных значений и собственных функций задачи (2.24) получим

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 + 1, \qquad x_k(t) = \frac{C_k}{\operatorname{ch} t} \sin\frac{\pi k}{l} t, \quad k = \overline{1, \infty}. \quad (2.25)$$

2. Выпишем условие ортогональности функций (2.25). Для этого представим уравнение (2.24) в самосопряженной форме. Согласно теореме 1.1, домножим уравнение (2.24) на функцию

$$\varphi(t) = \exp\left(\int\limits_0^t 2 \operatorname{th} t\, dt\right) = \exp\left(2 \ln \operatorname{ch} t\Big|_0^t\right) = \operatorname{ch}^2 t.$$

Получим

$$\operatorname{ch}^2 t\, x'' + 2 \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t\, x' + \lambda \operatorname{ch}^2 t\, x = 0$$

или

$$(x' \operatorname{ch}^2 t)' + \lambda \operatorname{ch}^2 t\, x = 0.$$

Следовательно, $\rho(t) = \operatorname{ch}^2 t$, и условие ортогональности имеет вид

$$\langle x_k(t) | x_m(t) \rangle_\rho = \int\limits_0^l x_k(t) x_m(t) \operatorname{ch}^2 t\, dt = \frac{l}{2} C_k^2 \delta_{km}, \quad k, m = \overline{1, \infty}.$$

3. Ортонормированные собственные функции имеют вид

$$x_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{1}{\operatorname{ch} t} \sin\frac{\pi k}{l} t, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Пример 2.6. Решить задачу Штурма–Лиувилля

$$y'' + \tilde{\alpha} y' + \tilde{\lambda} y = 0, \qquad y = y(t), \qquad y(a) = y'(b) = 0, \quad (2.26)$$

где $b - a = l$, $l > 0$, $\tilde{\alpha} = 2\alpha/l$, $\tilde{\lambda} = \lambda/(l^2)$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи.

Решение. Сделаем замену переменных $t = x + a$. Тогда задача (2.26) преобразуется в задачу

$$y'' + \frac{2\alpha}{l} y' + \frac{\lambda}{l^2} y = 0, \quad y = y(x), \qquad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0. \quad (2.27)$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + \frac{2\alpha}{l}k + \frac{\lambda}{l^2} = 0.$$

Тогда

$$k_{1,2} = -\frac{\alpha}{l} \pm \frac{1}{l}\sqrt{\alpha^2 - \lambda}.$$

1. Пусть $\alpha^2 - \lambda = -\mu^2$. Тогда $\lambda = \alpha^2 + \mu^2$, и общее решение уравнения (2.27) запишется в виде

$$y(x) = e^{-\alpha x/l}\Big(C_1 \cos\frac{\mu}{l}x + C_2 \sin\frac{\mu}{l}x\Big).$$

Из первого граничного условия $y(0) = C_1 = 0$. Следовательно,

$$y(x) = C_2 e^{-\alpha x/l}\sin\frac{\mu}{l}x$$

и

$$y'(x) = C_2 e^{-\alpha x/l}\Big[-\frac{\alpha}{l}\sin\frac{\mu}{l}x + \frac{\mu}{l}\cos\frac{\mu}{l}x\Big].$$

Из второго граничного условия найдем

$$y'(l) = \frac{C_2}{l}e^{-\alpha}[\mu\cos\mu - \alpha\sin\mu] = 0.$$

Нетривиальные решения существуют, если

$$\mu\cos\mu - \alpha\sin\mu = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{\mu}{\alpha}. \tag{2.28}$$

Пусть $\mu = \mu_k$, $k = \overline{1,\infty}$, — положительные корни уравнения (2.28) (см. рис. 2). Тогда $\lambda_k = \alpha^2 + \mu_k^2$ и

$$y_k(x) = e^{-\alpha x/l}\sin\frac{\mu_k}{l}x, \qquad k = \overline{1,\infty}. \tag{2.29}$$

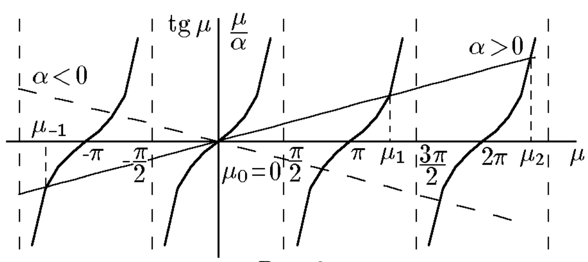

Рис. 2

Запишем уравнение (2.27) в самосопряженной форме

$$(e^{2\alpha x/l}y')' + \frac{\lambda}{l^2}e^{2\alpha x/l}y = 0.$$

Следовательно, $\rho(x) = e^{2\alpha x/l}$. Тогда условие ортогональности имеет вид

$$\langle y_k(x)|y_l(x)\rangle_\rho = \int\limits_0^l \exp\Bigl(\frac{2\alpha}{l}x\Bigr)y_k(x)y_l(x)dx = \|y_k\|^2\delta_{kl}. \quad (2.30)$$

а) Ортогональность

$$\begin{gathered}
I_{k,n} = \langle y_k(x)|y_n(x)\rangle_\rho = \\
= \int\limits_0^l e^{2\alpha x/l}e^{-\alpha x/l}\sin\Bigl(\frac{\mu_k}{l}x\Bigr)e^{-\alpha x/l}\sin\Bigl(\frac{\mu_n}{l}x\Bigr)dx = \\
= \int\limits_0^l \sin\frac{\mu_k}{l}x\sin\frac{\mu_n}{l}x\,dx = \int\limits_0^l \frac{1}{2}\Bigl(\cos\frac{\mu_k-\mu_n}{l}x - \cos\frac{\mu_k+\mu_n}{l}x\Bigr)dx = \\
= \frac{l}{2}\Bigl[\frac{1}{\mu_k-\mu_n}\sin\frac{\mu_k-\mu_n}{l}x - \frac{1}{\mu_k+\mu_n}\sin\frac{\mu_k+\mu_n}{l}x\Bigr]\Big|_0^l = \\
= \frac{l}{2}\frac{(\mu_k+\mu_n)\sin(\mu_k-\mu_n) - (\mu_k-\mu_n)\sin(\mu_k+\mu_n)}{(\mu_k^2-\mu_n^2)} = \\
= \frac{l}{\mu_k^2-\mu_n^2}[-\mu_k\sin\mu_n\cos\mu_k + \mu_n\sin\mu_k\cos\mu_n] = \\
= \frac{l\cos\mu_k\cos\mu_n}{\mu_k^2-\mu_n^2}[-\mu_k\operatorname{tg}\mu_n + \mu_n\operatorname{tg}\mu_k] = \\
= \frac{l\cos\mu_k\cos\mu_n}{\mu_k^2-\mu_n^2}\Bigl[-\mu_k\frac{\mu_n}{\alpha} + \mu_n\frac{\mu_k}{\alpha}\Bigr] = 0, \quad k \neq n.
\end{gathered}$$

Здесь мы воспользовались формулой (2.28).

б) Норма

$$I_{k,k} = \|y_k\|^2 = \int_0^l \sin^2 \frac{\mu_k}{l} x\, dx = \int_0^l \frac{1}{2}\Big(1 - \cos\frac{2\mu_k}{l}x\Big)dx =$$
$$= \frac{l}{2} - \frac{l}{4\mu_k}\sin\frac{2\mu_k}{l}x\Big|_0^l = \frac{l}{2} - \frac{l}{4\mu_k}\sin 2\mu_k =$$
$$= \frac{l}{2}\Big(1 - \frac{\sin\mu_k\cos\mu_k}{\mu_k}\Big) = \frac{l}{2}\Big(1 - \frac{\sin\mu_k\cos\mu_k}{\alpha\,\mathrm{tg}\,\mu_k}\Big) =$$
$$= \frac{l}{2}\Big(1 - \frac{\cos^2\mu_k}{\alpha}\Big) = \frac{l}{2}\Big[1 - \frac{1}{\alpha(1+\mathrm{tg}^2\,\mu_k)}\Big] =$$
$$= \frac{l}{2}\Big(1 - \frac{\alpha}{\alpha^2+\mu_k^2}\Big) = \frac{l}{2}\,\frac{\alpha^2+\mu_k^2-\alpha}{\alpha^2+\mu_k^2}.$$

2. Пусть $\alpha^2 - \lambda = 0$, $\lambda = \alpha^2$. Тогда общее решение уравнения (2.27) имеет вид

$$y(x) = e^{-\alpha x/l}(C_1 + C_2 x).$$

Из первого граничного условия $y(0) = C_1 = 0$, откуда

$$y(x) = C_2 e^{-\alpha x/l} x$$

и

$$y'(x) = C_2 e^{-\alpha x/l}\Big(-\frac{\alpha}{l}x + 1\Big).$$

Из второго граничного условия найдем

$$y'(l) = C_2 e^{-\alpha}(1-\alpha) = 0.$$

Нетривиальные решения существуют, если $1 - \alpha = 0$, т.е. существует одно нетривиальное решение

$$y_0(x) = e^{-x/l}x \tag{2.31}$$

при $\alpha = 1$ с $\lambda_0 = 1$.

а) Ортогональность

$$I_{0,k} = \langle y_0(x)|y_k(x)\big|_{\alpha=1}\rangle =$$
$$= \int_0^l e^{2x/l}e^{-x/l}xe^{-x/l}\sin\frac{\mu_k}{l}x\,dx = \int_0^l x\sin\frac{\mu_k}{l}x\,dx.$$

Проинтегрируем по частям:

$$I_{0,k} = -\frac{xl}{\mu_k}\cos\frac{\mu_k x}{l}\Big|_0^l + \frac{l}{\mu_k}\int\limits_0^l \cos\frac{\mu_k x}{l}dx =$$
$$= -\frac{l^2}{\mu_k}\cos\mu_k + \frac{l^2}{\mu_k^2}\sin\frac{\mu_k x}{l}\Big|_0^l =$$
$$= -\frac{l^2}{\mu_k}\cos\mu_k + \frac{l^2}{\mu_k^2}\sin\mu_k = \frac{l^2\cos\mu_k}{\mu_k^2}\Big[\mu_k - \operatorname{tg}\mu_k\Big] = 0.$$

б) Норма

$$I_{0,0} = \|y_0\| = \int\limits_0^l x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \frac{l^3}{3}.$$

3. Пусть $\alpha^2 - \lambda = \mu^2$, $\lambda = \alpha^2 - \mu^2$. Тогда общее решение уравнения (2.27) имеет вид

$$y(x) = e^{-\alpha x/l}\Big(C_1 \operatorname{ch}\frac{\mu}{l}x + C_2 \operatorname{sh}\frac{\mu}{l}x\Big).$$

Из первого граничного условия $y(0) = C_1 = 0$. Следовательно,

$$y(x) = C_2 e^{-\alpha x/l}\operatorname{sh}\frac{\mu}{l}x$$

и

$$y'(x) = C_2 e^{-\alpha x/l}\Big(-\frac{\alpha}{l}\operatorname{sh}\frac{\mu}{l}x + \frac{\mu}{l}\operatorname{ch}\frac{\mu}{l}x\Big).$$

Из второго граничного условия имеем

$$y'(0) = \frac{1}{l}C_2 e^{-\alpha}[\mu\operatorname{ch}\mu - \alpha\operatorname{sh}\mu] = 0.$$

Нетривиальные решения существуют в виде

$$y_\mu(x) = C_2 e^{-\alpha x/l}\operatorname{sh}\frac{\mu}{l}x, \qquad (2.32)$$

если

$$\mu\operatorname{ch}\mu - \alpha\operatorname{sh}\mu = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{th}\mu = \frac{\mu}{\alpha}.$$

Из рис. 3 видно, что решение этого уравнения существует для $\alpha > 1$.

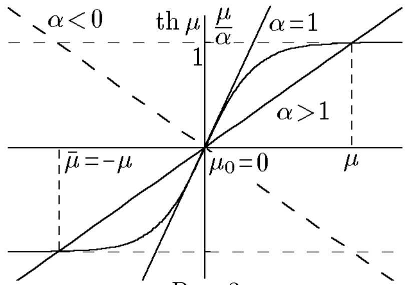

Рис. 3

а) Ортогональность. Проверим ортогональность функций (2.32) с функциями (2.29):

$$\langle y_\mu(x)|y_k(x)\rangle_\rho = \int\limits_0^l \operatorname{sh}\frac{\mu}{l}x\sin\frac{\mu_k}{l}x\,dx =$$

$$= \frac{l^2}{\mu+\mu_k^2}\Big[\frac{\mu}{l}\operatorname{ch}\frac{\mu}{l}x\sin\frac{\mu_k}{l}x - \frac{\mu_k}{l}\operatorname{sh}\frac{\mu}{l}x\cos\frac{\mu_k}{l}x\Big]\Big|_0^l =$$

$$= \frac{l}{\mu^2+\mu_k^2}[\mu\operatorname{ch}\mu\sin\mu_k - \mu_k\operatorname{sh}\mu\sin\mu_k] =$$

$$= \frac{l\operatorname{ch}\mu\cos\mu_k}{\mu^2+\mu_k^2}[\mu\operatorname{tg}\mu_k - \mu_k\operatorname{th}\mu] =$$

$$= \frac{l\operatorname{ch}\mu\cos\mu_k}{\mu^2+\mu_k^2}\Big(\mu\frac{\mu_k}{\alpha} - \mu_k\frac{\mu}{\alpha}\Big) = 0.$$

б) Норма

$$\|y_\mu\|^2 = \int\limits_0^l \operatorname{sh}^2\frac{\mu}{l}x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l\Big(\operatorname{ch}\frac{2\mu x}{l}-1\Big)dx =$$

$$= \frac{l}{2}\Big(\frac{1}{2\mu}\operatorname{sh}\frac{2\mu x}{l}\Big|_0^l - 1\Big) = \frac{l}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh}\mu\operatorname{ch}\mu}{\alpha\operatorname{th}\mu}-1\Big) =$$

$$= \frac{l}{2}\Big(\frac{\operatorname{ch}^2\mu}{\alpha}-1\Big) = \frac{l}{2}\Big[\frac{1}{\alpha(1-\operatorname{th}^2\mu)}-1\Big] =$$

$$= \frac{l}{2}\Big[\frac{1}{\alpha(1-\mu^2/\alpha^2)}-1\Big] = \frac{l}{2}\Big(\frac{\alpha}{\alpha^2-\mu^2}-1\Big) = \frac{l}{2}\,\frac{\alpha-\alpha^2+\mu^2}{\alpha^2-\mu^2}.$$

Таким образом, решение задачи Штурма–Лиувилля (2.27) при разных значениях величины α имеет разную структуру:

$$1)\ \alpha=1,\ \ y_k(t)=e^{-x/l}\begin{cases}\sin\dfrac{\mu_k x}{l}, & \lambda_k=1+\mu_k^2,\quad k=\overline{1,\infty},\\ x, & \lambda_0=1;\end{cases}$$

$$2)\ \alpha<1,\quad y_k(t)=e^{-\alpha x/l}\sin\frac{\mu_k x}{l},\quad \lambda_k=\alpha^2+\mu_k^2,\quad k=\overline{1,\infty};$$

$$3)\ \alpha>1,\ \ y_k(t)=e^{-\alpha x/l}\begin{cases}\sin\dfrac{\mu_k x}{l}, & \lambda_k=\alpha^2+\mu_k^2,\ k=\overline{1,\infty},\\ \operatorname{sh}\dfrac{\mu x}{l}, & \lambda_0=\alpha^2-\mu^2,\end{cases}$$

где μ_k – положительные корни уравнения (2.28), $x=t-a$, а μ – положительный корень уравнения $\operatorname{th}\mu=\mu/\alpha$.

Отметим, что при $\alpha=0$ уравнение (2.28) вырождается в уравнение вида $\operatorname{tg}\mu=\infty$ с решениями $\mu_k=\pi(k+1/2)$, $k=\overline{1,\infty}$. В этом случае

$$y_k(t)=\sin\frac{\pi x(2k+1)}{2},\qquad \lambda_k=\frac{\pi^2}{4}(2k+1)^2,\quad k=\overline{1,\infty}.$$

$\Diamond$ Все утверждения этого параграфа сделаны в предположении, что $\varphi(t)>0$ при $t\in[a,b]$. Однако они останутся справедливыми, если $\varphi(a)=0$ и(или) $\varphi(b)=0$, а $\varphi(t)$ представима в виде $\varphi(t)=(t-a)\psi(t)$ и $\psi(a)\neq0$ и(или) $\varphi(t)=(t-b)\psi(t)$ и $\psi(b)\neq0$. Тогда на соответствующей границе необходимо поставить условие

$$\Big|\lim_{t\to a+0}x(t)\Big|<\infty\qquad \text{и(или)}\qquad \Big|\lim_{t\to b-0}x(t)\Big|<\infty. \tag{2.33}$$

Условие (2.33) можно заменить условием квадратичной интегрируемости функции $x(t)$ на интервале $]a,b[$. Утверждения останутся справедливыми и для неограниченных интервалов, т.е. $a=-\infty$ и(или) $b=\infty$. Задачи, для которых справедливы все вышеприведенные утверждения, называются сингулярными. Более подробно см. задачу Штурма–Лиувилля для уравнений Бесселя, Лежандра, Лагерра и т.д.

Пример 2.7. Решить задачу Штурма–Лиувилля

$$y'' + \frac{2}{t}y' + \lambda y = 0, \quad y = y(t), \qquad 0 < t < l, \tag{2.34}$$
$$|\lim_{t\to 0} y(t)| < \infty, \qquad y(l) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности собственных функций задачи и ортонормировать эти функции.

Решение. Сделаем в уравнении (2.34) замену

$$y(t) = \frac{z(t)}{t}. \tag{2.35}$$

Тогда

$$y' = \frac{z'}{t} - \frac{z}{t^2}, \qquad y'' = \frac{z''}{t} - 2\frac{z'}{t^2} + 2\frac{z}{t^3}.$$

Подставив эти выражения в (2.34), получим

$$\Big[\frac{z''}{t} - 2\frac{z'}{t^2} + 2\frac{z}{t^3}\Big] + \frac{2}{t}\Big[\frac{z'}{t} - \frac{z}{t^2}\Big] + \lambda\frac{z}{t} = 0;$$
$$\Big|\lim_{t\to 0}\frac{z(t)}{t}\Big| < \infty, \qquad \frac{z(l)}{l} = 0.$$

В результате для определения функции $z = z(t)$ получим следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$z'' + \lambda z = 0, \qquad z(0) = z(l) = 0, \quad 0 < t < l,$$

решение которой получено в примере 2.2

$$\lambda_n = \Big(\frac{\pi n}{l}\Big)^2, \qquad z_n(t) = C_n \sin\frac{\pi n}{l}t, \quad n = \overline{1,\infty} \tag{2.36}$$

с соотношением ортогональности

$$\int\limits_0^l z_n(t)z_k(t)dt = C_n^2\frac{l}{2}\delta_{kn}, \qquad k, n = \overline{1,\infty}. \tag{2.37}$$

Из (2.36) и (2.37) получим с учетом (2.35) решение исходной задачи

$$\lambda_n = \Big(\frac{\pi n}{l}\Big)^2, \qquad y_n(t) = \frac{C_n}{t}\sin\frac{\pi n}{l}t,$$

а соотношение ортогональности запишется в виде

$$\int_0^l t^2 y_n(t) y_k(t) dt = C_n^2 \frac{l}{2} \delta_{nk}, \quad n,k = \overline{1,\infty}.$$

Ортонормированные собственные функции примут вид

$$y_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{1}{t} \sin \frac{\pi n}{l} t.$$

Математическая постановка большинства физических задач содержит граничные условиям Штурма (2.2). Существует, однако, важный класс граничных условий — так называемые периодические граничные условия

$$y(t+l) = y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad l > 0,$$

или в эквивалентной форме

$$y(a) - y(b) = 0, \quad y'(a) - y'(b) = 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b = a + l.$$

Основное отличие периодических граничных условий (название понятно из их явного вида) от граничных условий Штурма (2.2) заключается в том, что для уравнения второго порядка одному собственному значению λ_n могут соответствовать две линейно независимые собственные функции.

Пример 2.8. Найти собственные значения и собственные функции задачи

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(l), \quad y'(0) = y'(l).$$

Решение. Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x},$$

подстановка которого в граничные условия приводит к системе

$$\begin{aligned} C_1(e^{\sqrt{-\lambda} l} - 1) + C_2(e^{-\sqrt{-\lambda} l} - 1) = 0, \\ C_1(e^{\sqrt{-\lambda} l} - 1) - C_2(e^{-\sqrt{-\lambda} l} - 1) = 0. \end{aligned}$$

Система будет иметь нетривиальные решения, если ее определитель равен нулю. В этом случае приходим к уравнению

$$(e^{\sqrt{-\lambda} l} - 1)(e^{-\sqrt{-\lambda} l} - 1) = 0,$$

откуда

$$\sqrt{-\lambda}l = 2n\pi i, \qquad n = \overline{0, \infty},$$

и, соответственно,

$$\lambda_n = \Big(\frac{2n\pi}{l}\Big)^2.$$

Таким образом, всем собственным значениям λ_n с $n > 0$ соответствуют две собственные функции: $\sin(2\pi nx/l)$, $\cos(2\pi nx/l)$, а собственному значению $\lambda_0 = 0$ — единственная: $\cos 0 = 1$.

$\Diamond$ Остальные свойства задачи с периодическими граничными условиями совпадают со свойствами задачи с граничными условиями Штурма (2.1).

ГЛАВА 2

Цилиндрические функции

3. Функции Бесселя первого рода

Рассмотрим уравнение

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \operatorname{Re}\nu \geqslant 0. \tag{3.1}$$

♦ Уравнение (3.1) называется уравнением Бесселя индекса ν, а его решения, не равные тождественно нулю, называются цилиндрическими функциями.

◊ Такие функции возникают при решении методом разделения переменных уравнений в частных производных, содержащих оператор Лапласа, в цилиндрической системе координат. Поэтому они и называются цилиндрическими.

Теорема 3.1. *Существует частное решение уравнения* (3.1), *задаваемое равномерно сходящимся рядом*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)C_0}{k!\Gamma(\nu+1+k)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu}, \qquad C_0 \neq 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Частное решение уравнения мы будем искать в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\sigma}, \tag{3.3}$$

где σ — некоторое число, а C_k – некоторые подлежащие определению постоянные, причем $C_0 \not\equiv 0$. Тогда

$$\begin{aligned} xy'(x) &= C_0\sigma x^\sigma + C_1(\sigma+1)x^{\sigma+1} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k(k+\sigma)x^{k+\sigma}, \\ x^2y''(x) &= C_0\sigma(\sigma-1)x^\sigma + C_1(\sigma+1)\sigma x^{\sigma+1} + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} c_k(k+\sigma)(k+\sigma-1)x^{k+\sigma}, \\ x^2y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\sigma+2} = \sum_{k=2}^{\infty} C_{k-2}x^{k+\sigma}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

В последнем равенстве мы сделали замену $n+2=k$. Подставим (3.2) и (3.3) в уравнение (3.1) и получим

$$\begin{gathered}[\sigma(\sigma-1)+\sigma-\nu^2]x^\sigma C_0+\\ +[\sigma(\sigma+1)+(\sigma+1)-\nu^2]x^{\sigma+1}C_1+\\ +x^\sigma\sum_{k=2}^{\infty}\{[(k+\sigma)(k+\sigma-1)+(k+\sigma)-\nu^2]C_k+C_{k-2}\}x^k=0.\end{gathered}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{array}{ll} C_0[\sigma^2-\nu^2]=0 & x^\sigma, \\ C_1[(\sigma+1)^2-\nu^2]=0, & x^{\sigma+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \\ C_k[(k+\sigma)^2-\nu^2]+C_{k-2}=0, & x^{\sigma+k}, \quad k>2. \end{array}$$

Так как $C_0\neq 0$, то из первого уравнения находим $\sigma=\pm\nu$.

1. Пусть $\sigma=\nu$, тогда из второго равенства находим $C_1=0$ и

$$C_k=-\frac{C_{k-2}}{(k+\nu)^2-\nu^2}=-\frac{C_{k-2}}{k(2\nu+k)}.$$

Следовательно, для нечетного k $(k=2l+1)$

$$C_{2l+1}=0,$$

а для четного k $(k=2l)$

$$C_{2l}=-\frac{C_{2(l-1)}}{2^2(\nu+l)l},$$

т.е.

$$\begin{aligned} &C_2=-\frac{C_0}{2^2(\nu+1)1};\\ &C_4=\frac{C_0}{2^4 2!(\nu+1)(\nu+2)};\\ &\vdots\\ &C_{2l}=(-1)^l\frac{C_0}{2^{2l}l!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+l)}.\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться (например, используя признак Даламбера), что ряд (3.3) сходится равномерно на любом промежутке $[0, a]$ и, следовательно, функция $y(x)$ (3.3) является решением уравнения Бесселя для любого C_0.

С учетом соотношений

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \quad l! = \Gamma(l+1),$$
$$\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+l)} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(l+\nu+1)}$$

получим

$$C_{2l} = \frac{(-1)^l\Gamma(\nu+1)C_0}{2^{2l}\Gamma(l+\nu+1)\Gamma(l+1)},$$

и решением уравнения (3.1) будет ряд

$$y(x) = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{\Gamma(\nu+1)2^\nu C_0}{l!\Gamma(l+\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{\nu+2l}, \tag{3.5}$$

что и требовалось доказать.

◊ Удобно в качестве C_0 взять число

$$C_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}.$$

♦ Функция

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu} \tag{3.6}$$

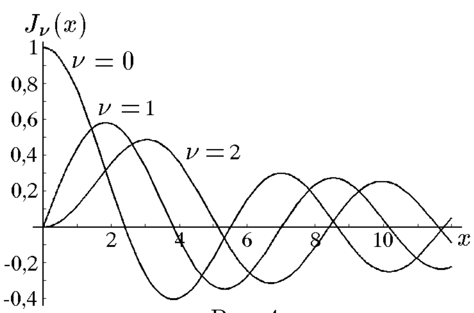

Рис. 4

называется функцией Бесселя первого рода (см. рис. 4). Здесь комплексное число ν – индекс функции Бесселя, а x – независимая переменная.

$\Diamond$ Поскольку уравнение (3.1) не меняется при замене ν на $-\nu$, то функция $J_{-\nu}(x)$ также является решением уравнения (3.1).

Следствие 3.1.1. *Справедливо соотношение*

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{3.7}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+1-n)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k-n}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\Gamma(k+1-n)} = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant k < n, \\ \dfrac{1}{(k-n)!} & k \geqslant n. \end{cases}$$

Тогда

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(k-n)!} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k-n}.$$

Положив $k = l + n$, с учетом (3.6) получим

$$J_{-n}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+n} \frac{1}{l!(l+n)!} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2l+n} = (-1)^n J_n(x), \tag{3.8}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 3.1.2. *Справедливо соотношение*

$$J_{-n}(-x) = J_n(x). \tag{3.9}$$

Доказательство. Из соотношения (3.8) следует

$$J_{-n}(-x) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+n} \frac{1}{l!(l+n)!} \Big(\frac{-x}{2}\Big)^{2l+n} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{3l+2n} \frac{1}{l!(l+n)!} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2l+n} = J_n(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3.2. *Если ν не является целым числом, то функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы.*

Доказательство. Выпишем уравнения Бесселя для функций J_ν и $J_{-\nu}$:

$$\frac{d}{dx}[xJ'_\nu(x)] + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(x) = 0,$$
$$\frac{d}{dx}[xJ'_{-\nu}(x)] + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)J_{-\nu}(x) = 0.$$

Первое из уравнений умножим на $J_{-\nu}(x)$, второе — на $J_\nu(x)$ и вычтем его из первого. Получим

$$\begin{aligned}
J_{-\nu}(x)&\frac{d}{dx}[xJ'_\nu(x)] - J_\nu(x)\frac{d}{dx}[xJ'_{-\nu}(x)] + \\
&+xJ'_{-\nu}(x)J'_\nu(x) - xJ'_\nu(x)J'_{-\nu}(x) = \\
&= \frac{d}{dx}\{x[J_{-\nu}(x)J'_\nu(x) - J_\nu(x)J'_{-\nu}(x)]\} = \\
&= -\frac{d}{dx}\{xW[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)]\} = 0,
\end{aligned}$$

где $W[J_\nu, J_{-\nu}]$ — определитель Вронского функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$. Следовательно,

$$xW[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = C.$$

Отсюда в пределе $x \to 0$ можно определить константу C:

$$\begin{aligned}
C &= \lim_{x\to 0} xW[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = \\
&= \lim_{x\to 0}[xJ_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - xJ_{-\nu}(x)J'_\nu(x)].
\end{aligned}$$

С учетом определения функции Бесселя (3.6) и соотношения

$$xJ'_\nu(x) = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{2l+\nu}{l!\Gamma(\nu+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu}$$

находим

$$\begin{aligned}
C = \lim_{x\to 0}\Bigg\{&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}(2l-\nu)}{k!\Gamma(\nu+k+1)l!\Gamma(-\nu+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2l} - \\
&-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}(2l+\nu)}{l!\Gamma(-\nu+k+1)k!\Gamma(\nu+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2l}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Отличны от нуля только слагаемые с $k = l = 0$, поэтому

$$C = \frac{-\nu}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)} - \frac{\nu}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(1+\nu)} = \\ = -\frac{2\nu}{\nu\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} = \frac{-2}{\pi}\sin\pi\nu.$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin\pi\nu}.$$

Таким образом,

$$C = -\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu$$

а

$$W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = -\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu. \tag{3.10}$$

Из (3.10), в частности, вытекает, что $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы при нецелом ν, что и требовалось доказать.

Следствие. Если $\nu \neq n$, то общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x). \tag{3.11}$$

Доказательство непосредственно следует из того, что функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы (см. уравнение (3.10)) и являются решениями линейного дифференциального уравнения второго порядка (3.1).

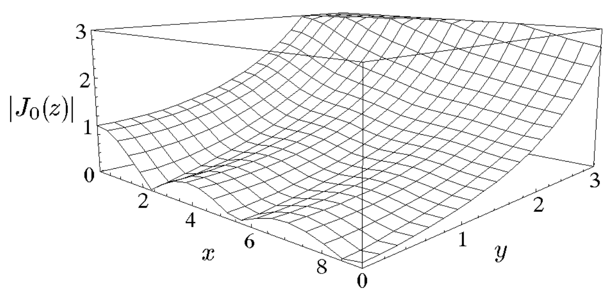

Рис. 5

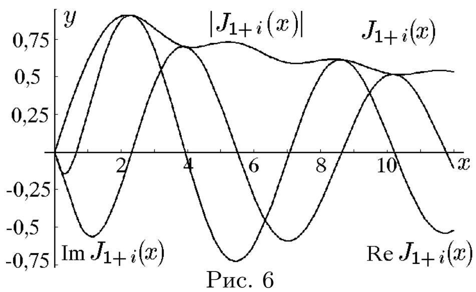

Рис. 6

$\Diamond$ Заметим, что функции Бесселя (3.6) определены не только для вещественных аргументов и индексов, но и для комплексных. Так, например, на рис. 5 изображен модуль функции Бесселя нулевого индекса от комплексного аргумента z, а на рис. 6 приведены графики действительной и мнимой частей, а также модуля функции Бесселя $J_{1+i}(x)$ комплексного индекса.

Пример 3.1. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \frac{y'}{x} + \Big(1 - \frac{1}{9x^2}\Big)y = 0.$$

Решение. Данное уравнение запишем в виде

$$x^2y'' + xy' + \Big(x^2 - \frac{1}{9}\Big)y = 0.$$

Оно является уравнением Бесселя с $\nu = 1/3$. Поэтому его общее решение есть

$$y(x) = C_1J_{1/3}(x) + C_2J_{-1/3}(x).$$

Пример 3.2. Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' + xy' + 4(x^4 - 2)y = 0. \qquad (3.12)$$

Решение. Сделаем в уравнении (3.12) замену переменных $x^2 = \tau$, $x = \sqrt{\tau}$. Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\tau}{dx}\frac{dy}{d\tau} = 2x\frac{dx}{d\tau} = 2\sqrt{\tau}\frac{dy}{d\tau},$$
$$y'' = 2\sqrt{\tau}\frac{d}{d\tau}y' = \sqrt{\tau}\frac{d}{d\tau}\sqrt{\tau}\frac{dy}{d\tau} = 2\frac{dy}{d\tau} + 4\tau\frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (3.12), получим

$$\tau\Big(2\frac{dy}{d\tau}+4\tau\frac{d^2y}{d\tau^2}\Big)+2\sqrt{\tau}\sqrt{\tau}\frac{dy}{d\tau}+4(\tau^2-2)y=0$$

или

$$\tau^2\frac{d^2y}{d\tau^2}+\tau\frac{dy}{d\tau}+(\tau^2-2)y=0.$$

Это уравнение Бесселя с индексом $\nu=\sqrt{2}$. Его общее решение имеет вид

$$y(\tau)=C_1J_{\sqrt{2}}(\tau)+C_2J_{-\sqrt{2}}(\tau).$$

Возвратившись к исходным переменным, получим

$$y(x)=C_1J_{\sqrt{2}}(x^2)+C_2J_{-\sqrt{2}}(x^2).$$

Пример 3.3. * Получить дифференциальное уравнение для функции

$$f(x)=J_\mu(x)J_\nu(x). \tag{3.13}$$

Решение. Введем вспомогательные функции

$$\begin{gathered}\psi(x)=J'_\mu(x)J'_\nu(x),\\ \varphi(x)=\mu^2J_\mu(x)J'_\nu(x)+\nu^2J_\nu(x)J'_\mu(x).\end{gathered} \tag{3.14}$$

Продифференцируем $f(x)$ дважды

$$f'(x)=J'_\mu(x)J_\nu(x)+J_\mu(x)J'_\nu(x); \tag{3.15}$$

$$f''(x)=J''_\mu(x)J_\nu(x)+J_\mu(x)J''_\nu(x)+2J'_\mu(x)J'_\nu(x). \tag{3.16}$$

Если учесть, что для функций Бесселя имеет место уравнение (3.1)

$$J''_\mu(x)=\Big(\frac{\mu^2}{x^2}-1\Big)J_\mu(x)-\frac{1}{x}J'_\mu(x), \tag{3.17}$$

то (3.16) перепишется в виде

$$\begin{gathered}f''(x)=\Big(\frac{\mu^2}{x^2}-1\Big)J_\mu(x)J_\nu(x)-\frac{1}{x}J'_\mu(x)J_\nu(x)+\\ +\Big(\frac{\nu^2}{x^2}-1\Big)J_\mu(x)J_\nu(x)-\frac{1}{x}J'_\nu(x)J_\mu(x)+2J'_\mu(x)J'_\nu(x).\end{gathered} \tag{3.18}$$

Принимая во внимание (3.13) и (3.14), из (3.18) запишем

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2x}f'(x)+\Big(1-\frac{\mu^2+\nu^2}{2x^2}\Big)f(x). \tag{3.19}$$

Продифференцировав (3.19), получим

$$\psi'(x) = \frac{1}{2}f'''(x) + \frac{1}{2x}f''(x) + \\ +\Big(1 - \frac{\mu^2+\nu^2+1}{2x^2}\Big)f'(x) + \frac{\mu^2+\nu^2}{x^3}f(x). \qquad (3.20)$$

Но из (3.14) следует

$$\psi'(x) = J''_\mu(x)J'_\nu(x) + J'_\mu(x)J''_\nu(x) = \\ = \Big(\frac{\mu^2}{x^2} - 1\Big)J_\mu(x)J'_\nu(x) + \Big(\frac{\nu^2}{x^2} - 1\Big)J_\nu(x)J'_\mu(x) - \frac{2}{x}J'_\mu(x)J'_\nu(x),$$

что приводит к соотношению

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^2}\varphi(x) - f'(x) - \frac{2}{x}\psi(x). \qquad (3.21)$$

С помощью (3.19) и (3.20) отсюда найдем

$$2x\varphi(x) = x^3f'''(x) + 3x^2f''(x) + \\ +[4x^3 + x(1-\mu^2-\nu^2)]f'(x) + 4x^2f(x). \qquad (3.22)$$

Исходя из определения функции $\varphi(x)$ (3.14), получим

$$\varphi'(x) = \nu^2J'_\nu J'_\mu + \mu^2J'_\mu J'_\nu + \nu^2J_\nu J''_\mu + \mu^2J_\mu J''_\nu = \\ = (\mu^2+\nu^2)J'_\mu J'_\nu + \nu^2\Big(\frac{\mu^2}{x^2} - 1\Big)J_\mu J_\nu - \frac{\nu^2}{x}J_\nu J'_\mu + \\ +\mu^2\Big(\frac{\nu^2}{x^2} - 1\Big)J_\mu J_\nu - \frac{\mu^2}{x}J_\mu J'_\nu = \\ = -\frac{\varphi(x)}{x} + (\mu^2+\nu^2)\psi(x) + \Big(\frac{2\mu^2\nu^2}{x^2} - \mu^2 - \nu^2\Big)f(x)$$

или

$$x\varphi'(x) + \varphi(x) = (\mu^2+\nu^2)x\psi(x) + \Big[\frac{2\mu^2\nu^2}{x^2} - \mu^2 - \nu^2\Big]xf(x). \qquad (3.23)$$

Воспользовавшись соотношением (3.19), из (3.23) найдем

$$2[x\varphi(x)]' = (\mu^2+\nu^2)[xf''(x) + f'(x)] - \frac{(\mu^2-\nu^2)^2}{x}f(x). \qquad (3.24)$$

Если мы теперь продифференцируем (3.22), то должны получить (3.23), что и приводит к следующему дифференциальному уравнению для функции $f = f(x)$:

$$f^{(4)} + \frac{6}{x}f''' + \Big(4 + \frac{7-2\mu^2-2\nu^2}{x^2}\Big)f'' + \\ +\Big[\frac{(\mu^2+\nu^2)^2}{x^4} + \frac{8}{x^2}\Big]f = 0. \qquad (3.25)$$

Если $\mu = \nu$ [т.е. $f(x) = J^2_\nu(x)$], то уравнение (3.25) можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\big[x^3f''' + 3x^2f'' + (4x^2 + 1 - 4\nu^2)xf' + 4x^2f\big] = 0. \tag{3.26}$$

Выражение в квадратных скобках в (3.26) – постоянная, но поскольку при $x \to 0$ оно обращается в нуль (при $\operatorname{Re}\nu > 0$ это очевидно), то оно равно нулю для всех x. Тогда функция $f(x) = J_\nu^2(x)$ удовлетворяет уравнению

$$f''' + \frac{3}{x}f'' + \Big(4 + \frac{1-4\nu^2}{x^2}\Big)f' + \frac{4}{x}f = 0. \tag{3.27}$$

Пример 3.4. * Найти разложение функции $f(x)$ (3.13) в ряд Тейлора по степеням x.

Решение. Из разложения (3.6) функции $J_\nu(x)$ в ряд следует, что ряд для $f(x)$ должен иметь вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\Big(\frac{x}{2}\Big)^{\mu+\nu+2k}, \tag{3.28}$$

причем для коэффициента C_0 из (3.6) получим

$$C_0 = \frac{1}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1+\nu)}. \tag{3.29}$$

Подставив это разложение в (3.25), найдем рекуррентную формулу для коэффициентов C_k

$$\begin{gathered}(\mu+\nu+k)(\mu+k)(\nu+k)kC_k = \\ = -(\mu+\nu+2k)(\mu+\nu+2k-1)C_{k-1},\end{gathered} \tag{3.30}$$

из которой легко найти ($A = \mathrm{const}$)

$$C_k = \frac{(-1)^k\Gamma(\mu+\nu+2k+1)A}{\Gamma(\mu+\nu+k+1)\Gamma(\mu+k+1)\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(k+1)}. \tag{3.31}$$

Сравнив с (3.29) при $k = 0$, имеем $A = 1$ и окончательно находим

$$\begin{aligned}f(x) &= J_\mu(x)J_\nu(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\mu+\nu+2k+1)}{k!\Gamma(\mu+\nu+k+1)\Gamma(\mu+k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{\mu+\nu+2k}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Нетрудно показать, что ряд (3.32) сходится во всей комплексной плоскости.

Пример 3.5. Доказать формулу Неймана

$$I = \int_0^{\pi/2} J_{\mu+\nu}(2x\cos\varphi)\cos[(\mu-\nu)\varphi]\,d\varphi = \frac{\pi}{2}J_\mu(x)J_\nu(x), \tag{3.33}$$

$$\operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1.$$

Решение. Используя для левой части определение функции Бесселя (3.6) и свойства гамма-функции (см. пример I.40.10), получим

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\mu+\nu+2k}}{k!\Gamma(\mu+\nu+k+1)} \int_0^{\pi/2} \cos^{\mu+\nu+2k}\varphi \cos([\mu-\nu]\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\Gamma(\mu+\nu+2k+1)}{k!\Gamma(\mu+\nu+k+1)\Gamma(\mu+k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{\mu+\nu+2k}.$$

Сравнив это разложение с (3.32), убеждаемся в справедливости соотношения (3.33).

4. Функции Бесселя второго рода

Как выяснено в предыдущем разделе, при целых $\nu = n$ частные решения уравнения Бесселя (3.1)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{4.1}$$

не являются линейно независимыми, так как

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

т.е. в этом случае найдено только одно частное решение уравнения (4.1).

Рассмотрим уравнения Бесселя с нецелыми ν. Его общее решение имеет вид (см. рис. 7)

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

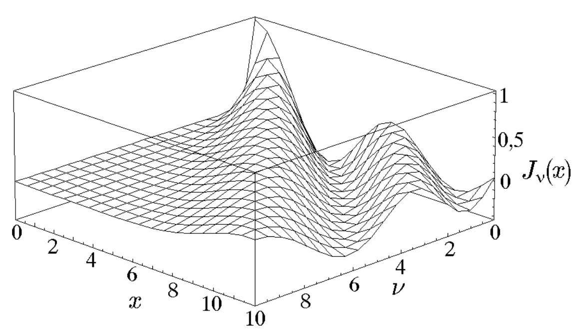

Рис. 7

Если положить

$$C_1 = \operatorname{ctg} \pi\nu, \qquad C_2 = -\frac{1}{\sin \pi\nu},$$

то получим функцию

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}. \tag{4.2}$$

♦ Функция (4.2) называется функцией Неймана

◊ Она была введена Вебером и иногда называется также функцией Вебера и часто обозначается через $Y_\nu(x)$. Функцию $N_\nu(x)$ называют также бесселевой (или цилиндрической) функцией второго рода индекса ν от аргумента x (см. рис. 8).

◊ Функция Неймана (4.2) определена для нецелых ν. Однако ее можно доопределить для целых ν, полагая

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(x).$$

Утверждение 4.1. *Существует предел*

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \lim_{\nu \to n} N_\nu(x) = \\ &= \frac{2}{\pi}\Big(\gamma + \ln\frac{x}{2}\Big) J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-n+2k} - \\ &- \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+n}\Big\{\sum_{m=1}^{k+n}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\Big\}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где γ – постоянная Эйлера, введенная ранее в разд. «Гамма-функция» части I.

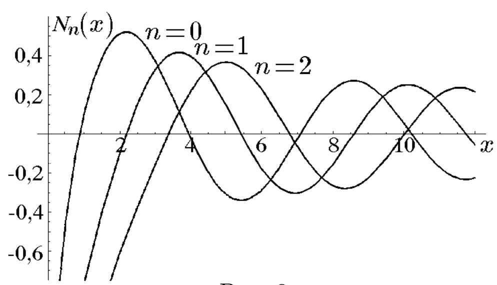

Рис. 8

Доказательство этого утверждения см., например, в [27].

Утверждение 4.2. *Функции* $J_\nu(x)$ *и* $N_\nu(x)$ *линейно независимы при любом* ν.

Для доказательства того, что функция Неймана $N_\nu(x)$ и функция Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ линейно независимы при всех ν, рассмотрим определитель Вронского

$$W(x) = W[J_\nu(x), N_\nu(x)] = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & N_\nu(x) \\ J'_\nu(x) & N'_\nu(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} J_\nu(x) & \dfrac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu} \\ J'_\nu(x) & \dfrac{J'_\nu(x)\cos\pi\nu - J'_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu} \end{vmatrix} = \frac{\cos\pi\nu}{\sin\pi\nu}\begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_\nu(x) \\ J'_\nu(x) & J'_\nu(x) \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{1}{\sin\pi\nu}\begin{vmatrix} J_\nu & J_{-\nu}(x) \\ J'_\nu(x) & J'_{-\nu}(x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sin\pi\nu}W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)].$$

Из соотношения (4.2) получим

$$W[J_\nu(x), N_\nu(x)] = -\frac{1}{\sin\pi\nu}W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] =$$

$$= -\frac{1}{\sin\pi\nu}\Big(-\frac{2}{\pi x}\Big)\sin\pi\nu.$$

Таким образом,

$$W[J_\nu(x), N_\nu(x)] = \frac{2}{\pi x}. \tag{4.4}$$

Эта формула получена в предположении, что ν не является целым числом. Но в силу теоремы 4.1 ее можно распространить и на целые значения $\nu = n$.

Из соотношения (4.4) следует, что $W[J_\nu(x), N_\nu(x)] \neq 0$ при любых значениях ν и x. Следовательно, $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ линейно независимы, что и требовалось доказать.

Утверждение 4.3. *Функции* $J_\nu(x)$ *и* $N_\nu(x)$ *образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя при любом, в том числе и целом, индексе. Общее решение уравнения Бесселя* (3.1) *при любом индексе* ν *дается формулой*

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x). \tag{4.5}$$

Справедливость утверждения непосредственно следует из того, что функции $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ линейно независимы и являются решениями линейного дифференциального уравнения второго порядка (3.1).

Пример 4.1. Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' + xy' + \Big(a^2x^2 - \nu^2\Big)y = 0, \tag{4.6}$$

где a и ν — некоторые постоянные.

Решение. Положим $x = t/a$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = a^2\frac{d^2y}{dt^2}$$

и уравнение примет вид

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + \Big(t^2 - \nu^2\Big)y = 0.$$

Следовательно,

$$y(t) = C_1J_\nu(t) + C_2N_\nu(t).$$

Возвратившись к исходным переменным, получим

$$y(x) = C_1J_\nu(ax) + C_2N_\nu(ax). \tag{4.7}$$

5. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя

Теорема 5.1. *Справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \tag{5.1}$$

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x). \tag{5.2}$$

Доказательство. Из определения (3.6) следует

$$\frac{d}{dx}\Big[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\Big] = \frac{d}{dx}\Bigg[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k}}{2^{2k+\nu}}\Bigg] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k-1}}{2^{2k+\nu}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(-1)}{(k-1)!\Gamma([k-1]+[\nu+1]+1)}\frac{x^{2(k-1)+1+\nu}}{2^{2(k-1)+(\nu+1)}}\frac{1}{x^\nu} =$$

$$= \frac{(-1)}{x^\nu}J_{\nu+1}(x).$$

Аналогично получаем

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = \frac{d}{dx}\Bigg[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu}}\Bigg] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2(k+\nu)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+[\nu-1]+1)}\frac{x^{2k+(\nu-1)}}{2^{2k+(\nu-1)}}x^\nu = x^\nu J_{\nu-1}(x),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 5.1.1. Справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x). \tag{5.3}$$

$$xJ'_\nu(x) = -\nu J_\nu(x) + xJ_{\nu-1}(x). \tag{5.4}$$

Доказательство непосредственно следует из соотношений (5.1) и (5.2).

Пример 5.1. Доказать справедливость рекуррентного соотношения (5.3), исходя из определения бесселевых функций (3.6).

Решение. Из определения (3.6) следует, что

$$xJ'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+\nu)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$
$$= \nu\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} +$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Положив $l = k-1$, получим

$$xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) + 2\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l!\Gamma(l+(\nu+1)+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+(\nu+1)+1} =$$
$$= \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x),$$

что и требовалось доказать.

Пример 5.2. Доказать справедливость рекуррентного соотношения (5.4), исходя из определения бесселевых функций (3.6).

Решение. Рассмотрим

$$xJ'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+\nu)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Аналогично предыдущему примеру

$$xJ'_\nu(x) = \nu\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k[(2k+2\nu)-\nu]}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$
$$= -\nu\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} +$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+2\nu)}{k!(k+\nu)\Gamma(k+(\nu-1)+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu-1)}\frac{x}{2} =$$
$$-\nu J_\nu(x) + xJ_{\nu-1}(x),$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\Gamma(k+\nu+1) = (k+\nu)\Gamma(k+(\nu-1)+1).$$

Таким образом, соотношение (5.4) доказано.

Следствие 5.1.2. Справедливы рекуррентные соотношения

$$2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \tag{5.5}$$
$$2\frac{\nu}{x}J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x). \tag{5.6}$$

Доказательство. Складывая соотношения (5.3) и (5.4), получим (5.5). Вычтя (5.4) из (5.3), получим (5.6).

◊ Положим в (5.3) $\nu = 0$. Тогда

$$J_0'(x) = -J_1(x). \tag{5.7}$$

Следовательно, нули функции $J_1(x)$ совпадают с максимумами и минимумами функции $J_0(x)$ (см. рис. 4).

Следствие 5.1.3. Справедливы соотношения

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m \left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = (-1)^m \frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}}, \tag{5.8}$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m [x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-m} J_{\nu-m}(x). \tag{5.9}$$

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции. Представим (5.1) в виде

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}.$$

Таким образом, при $m = 1$ соотношение (5.8) справедливо. Предположим, что (5.8) выполняется при некотором $m = k$. Проверим справедливость соотношения (5.8) при $m = k + 1$. Для этого продифференцируем его по x и воспользуемся соотношением (5.1). Получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k \left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = (-1)^k \frac{d}{dx}\left[\frac{J_{\nu+k}(x)}{x^{\nu+k}}\right] = (-1)^{k+1} \frac{J_{\nu+k+1}(x)}{x^{\nu+k}}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k \left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = (-1)^{k+1} \frac{J_{\nu+k+1}(x)}{x^{\nu+k+1}},$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказывается (5.9).

Следствие 5.1.4. Справедливы соотношения

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m x^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{qx}) = q^{m/2} x^{(\nu-m)/2} J_{\nu-m}(2\sqrt{qx}); \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}\right)^m x^{-\nu/2} J_\nu(2\sqrt{qx}) &= \\ &= (-1)^m q^{m/2} x^{-(\nu+m)/2} J_{\nu+m}(2\sqrt{qx}).\end{aligned} \tag{5.11}$$

Доказательство. Проведем в (5.9) замену переменных

$$x = 2\sqrt{qt}, \qquad \frac{1}{x}\frac{d}{dx} = \frac{1}{2q}\frac{d}{dt} \tag{5.12}$$

и получим

$$\Big(\frac{1}{2q}\frac{d}{dt}\Big)^m [2\sqrt{qt}]^\nu J_\nu(2\sqrt{qt}) = (2\sqrt{qt})^{\nu-m} J_{\nu-m}(2\sqrt{qt}).$$

Заменив здесь t на x, получим (5.10). Аналогично из (5.8) придем к (5.11).

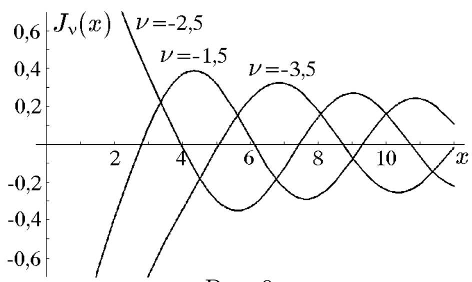

Рис. 9

Следствие 5.1.5. Функции Бесселя полуцелого индекса выражаются через элементарные функции (см. рис. 9)

$$J_{1/2+m}(x) = (-1)^m x^{m+1/2}\Big[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big]^m\Big[\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\Big]; \tag{5.13}$$

$$J_{-1/2-m}(x) = x^{m+1/2}\Big[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big]^m\Big[\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\Big]. \tag{5.14}$$

Доказательство. Вычислим $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$:

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+1/2};$$

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1/2)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k-1/2}.$$

Из основного функционального соотношения для гамма-функции $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ и из того, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, следует

$$\Gamma(k+3/2) = \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi} \quad \text{и} \quad \Gamma(k+1/2) = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}.$$

Следовательно,

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{k+1}}{k!(2k+1)!!\sqrt{\pi}} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+1/2}$$

и

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{k}}{k!(2k-1)!!\sqrt{\pi}} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k-1/2}.$$

Заметим, что

$$k!(2k+1)!! = \frac{(2k)!!}{2^k}(2k+1)!! = \frac{(2k+1)!}{2^k},$$
$$k!(2k-1)!! = \frac{(2k)!}{2^k}.$$

Тогда

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{2}}{(2k+1)!\sqrt{\pi}} x^{2k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$
$$J_{-1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{2}}{(2k)!\sqrt{\pi}} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Следовательно,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad \text{и} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \tag{5.15}$$

Положим в соотношении (5.8) $\nu = 1/2$, а в (5.9) $\nu = -1/2$ и воспользуемся соотношениями (5.15). Получим формулы (5.13) и (5.14), что и требовалось доказать.

Пример 5.3. Вычислить $J_{3/2}(x)$ и $J_{-3/2}(x)$.

Решение. Подставим в (5.13) $m = 1$ и в (5.14) $m = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{\sin x}{x} - \cos x\Big), \\ J_{-3/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(-\sin x - \frac{\cos x}{x}\Big). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Пример 5.4. Доказать справедливость соотношений

$$\begin{aligned} &J_0'(x) = -J_1(x), \\ &J_2(x) - J_0(x) = 2J_0''(x), \\ &x^2 J_n''(x) = (n^2 - n - x^2)J_n + xJ_{n+1}(x). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Решение. Применив рекуррентную формулу

$$-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = x^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}(x)$$

для $\nu = 0$, получим первое равенство.

Продифференцировав полученное равенство и воспользовавшись соотношением

$$J_\nu'(x) = \frac{1}{2}[J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)]$$

для $\nu = 1$, получим второе равенство.

В тождестве

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) \equiv 0$$

воспользуемся рекуррентным соотношением (5.5). Тогда

$$x^2 J_n''(x) = -\frac{x}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] - (x^2 - n^2)J_n(x).$$

Исключим из этого равенства $J_{n-1}(x)$ с помощью соотношения (5.6) и получим

$$x^2 J_n''(x) = -\frac{x}{2}[\frac{2n}{x}J_n(x) - 2J_{n+1}(x)] - (x^2 - n^2)J_n(x)$$

или

$$x^2 J_n''(x) = (n^2 - n - x^2)J_n(x) + xJ_{n+1}(x).$$

Пример 5.5. Доказать соотношение

$$\int\limits_0^x J_\nu(t)dt = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{\nu+2k+1}(x), \quad \nu > -1. \tag{5.18}$$

Решение. Воспользуемся известной формулой для производной бесселевой функции $2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)$. Заменив ν на $\nu+1$, получим $2J'_{\nu+1}(x) = J_\nu(x) - J_{\nu+2}(x)$. Проинтегрировав, найдем

$$2J_{\nu+1}(x) = \int\limits_0^x J_\nu(t)dt - \int\limits_0^x J_{\nu+2}(t)dt, \quad \nu+1>0 \ (\nu>-1).$$

Аналогично

$$2J_{\nu+3}(x) = \int\limits_0^x J_{\nu+2}(t)dt - \int\limits_0^x J_{\nu+4}(t)dt,$$

$$2J_{\nu+5}(x) = \int\limits_0^x J_{\nu+4}(t)dt - \int\limits_0^x J_{\nu+6}(t)dt,$$

и т.д.

Сложив эти равенства, получим

$$\int\limits_0^x J_\nu(t)dt = 2[J_{\nu+1}(x) + J_{\nu+3}(x) + J_{\nu+5}(x) + \ldots].$$

Здесь $\nu > -1$. Можно показать, что ряд справа быстро сходится.

Пример 5.6. Вычислить интеграл Вебера

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx, \quad b>0, \quad \operatorname{Re}\nu > -1.$$

Решение. Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-a^2x^2} x^{\nu+1} \Big(\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{(bx/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \Big) dx =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{(b/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \int\limits_0^\infty e^{-a^2x^2} x^{2\nu+2k+1} dx.$$

Сделав замену переменных $a^2x^2 = t$, получим

$$I = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(b/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \frac{1}{2a^{2\nu+2k+2}} \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{\nu+k} dt =$$

$$= \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(b/2)^{2k}}{k!a^{2k}} =$$

$$= \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(b^2/4a^2)^k}{k!} = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-b^2/4a^2}$$

для $\operatorname{Re}\nu > -1$, $b > 0$. Таким образом,

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-a^2x^2} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-b^2/4a^2}. \tag{5.19}$$

Пример 5.7. При помощи бесселевых функций полуцелого порядка вычислить интегралы Френеля

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \qquad C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

Решение. Имеем

$$S(x) = \frac{1}{2} \int\limits_0^x \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t \, dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^x J_{1/2}(t) dt.$$

Положим в соотношении (5.18) $\nu = 1/2$ и получим

$$\int\limits_0^x J_{1/2}(t)\, dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{1/2+2k+1}(x).$$

Тогда

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{3/2+2k}(x).$$

Аналогично найдем

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{1/2+2k}(x).$$

Можно показать, что полученные ряды быстро сходятся и поэтому удобны для вычислений.

Пример 5.8. Вывести рекуррентную формулу

$$\int_0^x t^\mu J_\nu(t)dt = x^\mu J_{\nu+1}(x) - (\mu-\nu-1)\int_0^x t^{\mu-1} J_{\nu+1}(t)dt \quad (5.20)$$

при $\mu+\nu > -1$.

Решение. Воспользуемся рекуррентным соотношением (5.2) и положим в нем $\nu = \nu+1$. Тогда

$$\frac{d}{dx}[x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)] = x^{\nu+1}J_\nu(x).$$

Подынтегральную функцию $t^\mu J_\nu(t)$ в (5.20) представим в виде

$$t^{\mu-(\nu+1)}t^{\nu+1}J_\nu(t) = t^{\mu-(\nu+1)}\frac{d}{dt}[t^{\nu+1}J_{\nu+1}(t)].$$

Выполним один раз интегрирование по частям, положив

$$U = t^{\mu-(\nu+1)}, \qquad dV = \frac{d}{dt}[t^{\nu+1}J_{\nu+1}(t)]dt.$$

Найдем

$$\int_0^x t^\mu J_\nu(t)dt = \int_0^x t^{\mu-(\nu+1)}\frac{d}{dt}[t^{\nu+1}J_{\nu+1}(t)]dt =$$

$$= t^{\mu-(\nu+1)}t^{\nu+1}J_{\nu+1}(t)\Big|_0^x - \int_0^x t^{\nu+1}J_{\nu+1}(t)(\mu-\nu-1)t^{\mu-\nu-2}dt =$$

$$= x^\mu J_{\nu+1}(x) - (\mu-\nu-1)\int_0^x t^{\mu-1}J_{\nu+1}(t)dt.$$

Здесь использовано условие $\mu+\nu > -1$. В самом деле, $t^\mu J_{\nu+1}(t)|_{t=0} = 0$, так как

$$t^\mu J_{\nu+1}(t) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{t^{(\mu+\nu+1)+2k}}{2^{\nu+1+2k}k!\Gamma(\nu+2+k)}, \qquad \mu+\nu+1 > 0.$$

Пример 5.9. Используя соотношение (5.20), показать, что вычисление интеграла

$$\int\limits_0^x t^m J_\nu(t)dt, \quad \nu > -1, \quad m = \overline{0,\infty}$$

сводится к вычислению интеграла

$$\int\limits_0^x J_{\nu+m}(t)dt.$$

Если $m-\nu = 2k+1$, $k=\overline{0,\infty}$, то исходный интеграл выражается в замкнутом виде через конечное число бесселевых функций.

Решение. Воспользуемся соотношением (5.20), положив $\mu = m$

$$\int\limits_0^x t^m J_\nu(t)dt = x^m J_{\nu+1}(x) - (m-\nu-1)\int\limits_0^x t^{m-1}J_{\nu+1}(t)dt,$$

где $m+\nu > -1$. Применим эту формулу m раз

$$\int\limits_0^x t^{m-1}J_{\nu+1}(t)dt = x^{m-1}J_{\nu+2}(x) - (m-\nu-3)\int\limits_0^x t^{m-2}J_{\nu+2}(t)dt,$$

$$\int\limits_0^x t^{m-2}J_{\nu+2}(t)dt = x^{m-2}J_{\nu+3}(x) - (m-\nu-5)\int\limits_0^x t^{m-3}J_{\nu+3}(t)dt,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\int\limits_0^x tJ_{\nu+m-1}(t)dt = xJ_{\nu+m}(x) - [m-\nu-(2m-1)]\int\limits_0^x J_{\nu+m}(t)dt,$$

Пришли к интегралу

$$\int\limits_0^x J_{\nu+m}(t)dt,$$

рассмотренному в примере 5.5.

Если $m-\nu = 2k+1$ ($k=\overline{0,\infty}$), то, применив исходную формулу k раз, придем к равенству

$$\int\limits_0^x t^{m-k+1}J_{\nu+k-1}(t)dt =$$

$$= x^{k+\nu+1}J_{\nu+k}(x) - (m-\nu-2k+1)\int\limits_0^x t^{\nu_k+1}J_{\nu+k}(t)dt.$$

Но $m-k=k+\nu+1$ (из условия $m-\nu=2k+1$). Тогда

$$\int\limits_0^x t^{m-k}J_{\nu+k}(t)dt=\int\limits_0^x t^{k+\nu+1}J_{\nu+k}(t)dt=$$
$$=t^{k+\nu+1}J_{\nu+k}(t)\Big|_0^x=x^{k+\nu+1}J_{\nu+k}(x),$$

и исходный интеграл будет выражен в замкнутом виде через бесселевы функции.

Пример 5.10. Используя прием, описанный в примере 5.9, вычислить интегралы

$$\int\limits_0^x t^3J_0(t)dt, \qquad \int\limits_0^x t^3J_1(t)dt.$$

Решение. Воспользовавшись соотношением (5.20) и положив в нем $\mu=3$, $\nu=0$, получим

$$\int\limits_0^x t^3J_0(t)dt=x^3J_1(x)-(3-0-1)\int\limits_0^x t^2J_1(t)dt=$$
$$=x^3J_1(x)-2t^2J_2(t)\big|_0^x=x^3J_1(x)-2x^2J_2(x)=$$
$$=x^3J_1(x)-2x^2\Big[\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)\Big]=(x^3-4x)J_1(x)+2x^2J_0(x).$$

Аналогично

$$\int\limits_0^x t^3J_1(t)dt=x^3J_2(x)-(3-1-1)\int\limits_0^x t^2J_2(t)dt=$$
$$=x^3J_2(x)-\Big[x^2J_3(x)-(2-2-1)\int\limits_0^x tJ_3(t)dt\Big]=$$
$$=x^3J_2(x)-x^2J_3(x)+\Big[xJ_4(x)-(1-3-1)\int\limits_0^x J_4(t)dt\Big]=$$
$$=x^3J_2(x)-x^2J_3(x)+xJ_4(x)+6\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+3}(x).$$

6. Различные виды функций Бесселя

♦ Функции

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \qquad (6.1)$$

называются, соответственно, первой и второй функциями Ханкеля, или функциями Бесселя третьего рода.

Воспользовавшись определениями функции Неймана $N_\nu(x)$ (4.2), получим

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= \frac{J_{-\nu}(x) - e^{-i\pi\nu}J_\nu(x)}{i\sin\pi\nu}, \\ H_\nu^{(2)}(x) &= \frac{-J_{-\nu}(x) + e^{i\pi\nu}J_\nu(x)}{i\sin\pi\nu}. \end{aligned} \qquad (6.2)$$

♢ При $\nu \to n$ в формулах (6.2) возникает неопределенность типа $0/0$, которая может быть раскрыта, например, по правилу Лопиталя.

♢ Из (6.2), в частности, следует, что

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(x) \qquad \text{и} \qquad H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-i\pi\nu}H_\nu^{(2)}(x).$$

Пример 6.1. Выразить функции Ханкеля $H_{1/2}^{(1,2)}(x)$ и $H_{-1/2}^{(1,2)}(x)$ через элементарные функции.

Решение. Так так $\sin(\pi/2) = 1$ и $e^{i\pi/2} = i$, то из (6.2) с учетом (5.15) получим

$$\begin{aligned} H_{1/2}^{(1)}(x) &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{ix}, \quad H_{-1/2}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{ix}; \\ H_{1/2}^{(2)}(x) &= i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-ix}, \quad H_{-1/2}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-ix}. \end{aligned}$$

♢ Сравнение формул (6.1) с формулами Эйлера показывает, что $J_\nu(x)$ – аналог функции $\cos x$, $N_\nu(x)$ – $\sin x$, $H^{(1)}(x)$ – e^{ix}.

♦ Функция

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix) = e^{-i\pi\nu/2}J_\nu(ix) \qquad (6.3)$$

называется модифицированной бесселевой функцией первого рода индекса ν (см. рис. 10).

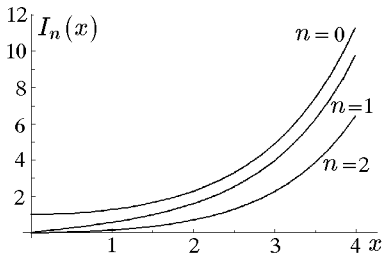

Рис. 10

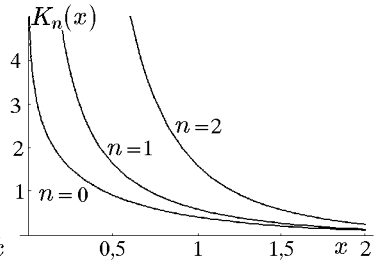

Рис. 11

♦ Функция

$$K_\nu(x) = i^{\nu+1}\frac{\pi}{2}H_\nu^{(1)}(ix) \tag{6.4}$$

называется модифицированной функцией Бесселя второго рода или функцией Макдональда (см. рис. 11).

◊ Из определения функции $J_\nu(x)$ следует, что функция $I_\nu(x)$ представима рядом Тейлора вида

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu}. \tag{6.5}$$

◊ Функции $K_\nu(x)$ и $I_\nu(x)$ связаны соотношением

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \pi\nu}.$$

Теорема 6.1. *Функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения*

$$x^2y'' + xy' - (x^2+\nu^2)y = 0. \tag{6.6}$$

Доказательство. Заменой переменной $z = ix$ уравнение (6.6) приводится к уравнению Бесселя

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2-\nu^2)y = 0,$$

частными решениями которого являются функции

$$y(z) = C_1J_\nu(z) = C_1J_\nu(ix) \quad \text{и} \quad y(z) = C_2J_{-\nu}(z) = C_2J_{-\nu}(ix),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Выбрав, согласно (6.3), $C_1 = i^{-\nu}$, $C_2 = i^{\nu}$, убеждаемся, что $I_\nu(x)$, $I_{-\nu}(x)$ являются частными решениями уравнения (6.6).

Вронскиан функций $i^{-\nu}J_\nu(z)$ и $i^{\nu}J_{-\nu}(z)$, согласно (3.10), можно записать

$$W[i^{-\nu}J_\nu(z), i^{\nu}J_{-\nu}(z)] = W[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)] = -\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu$$

или в развернутой форме

$$i^{-\nu}J_\nu(z)\frac{d}{dz}[i^{\nu}J_{-\nu}(z)] - i^{\nu}J_{-\nu}(z)\frac{d}{dz}[i^{-\nu}J_\nu(z)] = -\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu.$$

Последнее равенство с учетом определения (6.3) и соотношений

$$z = ix, \qquad \frac{d}{dz} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$$

запишется в виде

$$I_\nu(x)\frac{dI_{-\nu}(x)}{dx} - I_{-\nu}(x)\frac{dI_\nu(x)}{dx} = W[I_\nu(x), I_{-\nu}(x)] = -\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu.$$

Отсюда следует линейная независимость функций $I_\nu(x)$, $I_{-\nu}(x)$ при $\nu \neq n$.

Вычислим

$$W[I_\nu(x), K_\nu(x)] = W\Big[I_\nu(x), \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin\pi\nu}\Big] =$$
$$= \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}W[I_\nu(x), I_{-\nu}(x)] = \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\Big(-\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu\Big) = -\frac{1}{x}.$$

Следовательно, $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ линейно независимы при любых ν, что и требовалось доказать.

Следствие. Функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (6.6), и общее решение уравнения (6.6) имеет вид

$$y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x). \tag{6.7}$$

Доказательство следует из того, что $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ линейно независимы при любых ν и являются решениями уравнения (6.6).

Теорема 6.2. *Для функций Бесселя мнимого аргумента справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$
\begin{aligned}
&I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x), \\
&I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x).
\end{aligned} \tag{6.8}
$$

Доказательство. Заменив x на ix в рекуррентном соотношении

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

и умножив равенство на $i^{-(\nu+1)}$, получим первую формулу. Для вывода второй формулы воспользуемся рекуррентным соотношением

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x).$$

Пример 6.2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \left(4 + \frac{1}{x}\right)y' + \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}\right)y = 0. \tag{6.9}$$

Решение. Сделаем замену переменных

$$y(x) = e^{-2x} z(x). \tag{6.10}$$

Вычислим производные

$$
\begin{aligned}
&y'(x) = [e^{-2x} z(x)]' = e^{-2x}[-2z(x) + z'(x)]; \\
&y''(x) = \{e^{-2x}[-2z(x) + z'(x)]\}' = \\
&\quad = e^{-2x}[z''(x) - 4z'(x) + 4z(x)].
\end{aligned} \tag{6.11}
$$

Подставим (6.10) и (6.11) в (6.9)

$$e^{-2x}[z''(x) - 4z'(x) + 4z(x)] + \left(4 + \frac{1}{x}\right)e^{-2x}[z'(x) - 2z(x)] +$$
$$+\left(3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}\right)e^{-2x} z(x) = 0.$$

Разделив на экспоненту и приведя подобные, получим

$$x^2 z''(x) + xz'(x) + (-x^2 - 5)z(x) = 0. \tag{6.12}$$

Уравнение (6.12) — уравнение Бесселя (6.6) с $\nu = \sqrt{5}$, общее решение которого, согласно (6.7), имеет вид

$$z(x) = C_1 I_{\sqrt{5}}(x) + C_2 K_{\sqrt{5}}(x).$$

Окончательно получим

$$y(x) = C_1 e^{-2x} I_{\sqrt{5}}(x) + C_2 e^{-2x} K_{\sqrt{5}}(x)$$

7. Асимптотическое поведение цилиндрических функций

Теорема 7.1. *Функция*

$$y(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}\cos(x+\varphi), \tag{7.1}$$

где A и φ — произвольные постоянные, является асимптотическим с точностью до $O(x^{-3/2})$, $x \to \infty$, решением уравнения Бесселя (3.1) *при любом ν.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \Big(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\Big)y = 0. \tag{7.2}$$

Сделаем в уравнении (7.2) замену переменных $x = \varepsilon t$, $t \in]0,1]$, $\varepsilon = \mathrm{const}$. Тогда при больших x, т.е. при $x \to \infty$, параметр ε также будет стремиться к бесконечности.

Уравнение (7.2) в новых переменных примет вид

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\ddot{y} + \frac{1}{\varepsilon^2 t}\dot{y} + \Big(1 - \frac{\nu^2}{\varepsilon^2 t^2}\Big)y = 0. \tag{7.3}$$

Здесь точка означает дифференцирование по переменной t, $\dot{y} = dy/dt$.

Решение уравнения (7.3) будем искать в виде

$$y(t,\varepsilon) = e^{i\varepsilon S(t)}f(t,\varepsilon), \tag{7.4}$$

где функция $S(t)$ не зависит от ε, функция $f(t,\varepsilon)$ зависит от параметра $\omega = 1/\varepsilon$ регулярно, т.е.

$$f(t,\varepsilon) = f_0(t) + \frac{1}{\varepsilon}f_1(t) + \frac{1}{\varepsilon^2}f_2(t) + \ldots, \tag{7.5}$$

а $f_k(t)$, $k = \overline{0,\infty}$, от ε не зависят. Из (7.4) найдем

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t,\varepsilon) = \dot{f}(t,\varepsilon)e^{i\varepsilon S(t)} + i\varepsilon\dot{S}(t)f(t,\varepsilon)e^{i\varepsilon S(t)},\\ &\ddot{y}(t,\varepsilon) = \ddot{f}(t,\varepsilon)e^{i\varepsilon S(t)} + 2i\varepsilon\dot{S}(t)\dot{f}(t,\varepsilon)e^{i\varepsilon S(t)} -\\ &\quad -\varepsilon^2(\dot{S}(t))^2 f(t,\varepsilon)e^{i\varepsilon S(t)}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Подставим (7.4) и (7.6) в уравнение (7.3), получим

$$\Big\{[-\dot S^2(t)+1]f(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\Big[2i\dot f(t,\varepsilon)\dot S(t)+\frac{i}{t}f(t,\varepsilon)\dot S(t)\Big]+ \\ +\frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\ddot f(t,\varepsilon)+\frac{1}{t}\dot f(t,\varepsilon)-\frac{\nu^2}{t^2}f(t,\varepsilon)\Big]\Big\}e^{i\varepsilon S(t)}=0.$$

Подставим разложение (7.5) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $1/\varepsilon$. Получим

$$\begin{array}{l|l} \varepsilon^0 & 1-\dot S^2(t)=0 \\ \varepsilon^{-1} & 2\dot f_0+\dfrac{1}{t}f_0=0 \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Из этих уравнений находим

$$S(t)=\pm t,\qquad f_0(t)=\frac{C}{\sqrt t}.$$

Следовательно, функция

$$y(t,\varepsilon)=\frac{C_\pm}{\sqrt t}\exp(\pm i\varepsilon t) \tag{7.7}$$

является асимптотическим с точностью до $O(1/\varepsilon)$ решением уравнения (7.3). Уравнение (7.3) — линейное дифференциальное уравнение второго порядка с вещественными коэффициентами. Следовательно, действительная и мнимая части его комплексных решений — также решения уравнения (7.3). Таким образом, функция

$$y(t,\varepsilon)=\frac{C_1}{\sqrt t}\cos\varepsilon t+\frac{C_2}{\sqrt t}\sin\varepsilon t \tag{7.8}$$

– также асимптотическое решение уравнения (7.3). Положив в (7.8)

$$C_1=\frac{A}{\sqrt\varepsilon}\cos\varphi,\qquad C_2=\frac{A}{\sqrt\varepsilon}\sin\varphi$$

и возвратившись к исходным переменным, получим утверждение теоремы.

Можно показать (см., например, [3]), что при $x \to \infty$ справедливы следующие асимптотические оценки:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\Big(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) + O(x^{-3/2}), \tag{7.9}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\Big(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) + O(x^{-3/2}), \tag{7.10}$$

$$H_\nu^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\Big[\pm i\Big(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\Big)\Big] + O(x^{-3/2}) \tag{7.11}$$

$\Diamond$ Отметим, что асимптотические оценки (7.9)–(7.11) справедливы не только для $x \gg 1$, но и для всех $|z| \gg 1$, $\arg z < \pi - \delta$, δ – произвольное малое положительное число.

$\Diamond$ Аналогично можно получить асимптотику функций Бесселя мнимого аргумента при $x \to \infty$:

$$I_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x [1 + O(1/x)], \tag{7.12}$$

$$K_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2x}} e^{-x} [1 + O(1/x)]. \tag{7.13}$$

Рассмотрим поведение цилиндрических функций при $x \to +0$. Из определения (3.6) следует

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^\nu + O(x^\nu), \quad x \to +0, \ \nu \geqslant 0. \tag{7.14}$$

Из определения (4.2) и соотношения (4.3) получим

$$N_\nu(x) = -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{-\nu} + O(x^{-\nu}), \quad x \to 0, \ \nu > 0,$$
$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} + O(1), \quad x \to 0.$$

Из (6.2) найдем

$$H_0^{(1,2)}(x) = \pm i \ln \frac{x}{2},$$
$$H_\nu^{(1,2)}(x) = \pm i \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{-\nu}, \quad \nu > 0, \ x \to +0.$$

Аналогично для функций Бесселя мнимого аргумента имеем

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^\nu + O(x^\nu), \quad x \to +0,\ \nu \geqslant 0;$$

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\Gamma(\nu)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-\nu} + O(x^{-\nu}), \quad x \to +0,\ \nu > 0;$$

$$K_0(x) = \ln\frac{x}{2} + O(1), \quad x \to 0.$$

Пример 7.1. Доказать, что

$$\int\limits_0^\infty J_n(x)dx = \int\limits_0^\infty J_{n+2}(x)dx, \quad n = \overline{0,\infty}. \tag{7.15}$$

Решение. Рассмотрим разность $J_n(x) - J_{n+2}(x)$. Из формулы (5.5) при $\nu = n+1$ найдем

$$J_n(x) - J_{n+2}(x) = 2J'_{n+1}(x).$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty [J_n(x) - J_{n+2}(x)]dx = 2\int\limits_0^\infty J'_{n+1}(x)dx = 2J_{n+1}(x)\Big|_0^\infty.$$

Для функций Бесселя следующая асимптотическая оценка:

$$J_\nu(x) \approx \Big(\frac{2}{\pi x}\Big)^{1/2}\cos\Big(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big), \quad x \to \infty \tag{7.16}$$

справедлива при больших x. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} J_\nu(x) = 0. \tag{7.17}$$

Учтем, что $J_{n+1}(0) = 0$ при $n = \overline{0,\infty}$, и получим

$$\int\limits_0^\infty [J_n(x) - J_{n+2}(x)]dx = 0 \text{ или } \int\limits_0^\infty J_n(x)dx = \int\limits_0^\infty J_{n+2}(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Пример 7.2. Показать, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{J_{n+1}(x)}{x^n}dx = \frac{1}{2^n n!}, \qquad n = \overline{0,\infty}. \tag{7.18}$$

Решение. Воспользуемся соотношением

$$\int \frac{J_{n+1}(x)}{x^n}dx = -\frac{J_n(x)}{x^n} + C,$$

которое следует из (5.1), и получим

$$\int\limits_0^\infty \frac{J_{n+1}(x)}{x^n}dx = -\frac{J_n(x)}{x^n}\Big|_0^\infty = \frac{J_n(x)}{x^n}\Big|_{x=0} =$$

$$= \frac{1}{x^n}\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!\Gamma(n+k+1)}\Big|_{x=0} =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{n+2k}k!\Gamma(n+k+1)}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2^n n!}.$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (7.16) и (7.17).

8. Интегральное представление функций Бесселя

До сих пор мы рассматривали вещественные решения уравнения Бесселя. Теперь мы покажем, что существуют решения уравнения Бесселя в виде контурных интегралов. Но прежде мы рассмотрим дифференциальное уравнение более общего вида.

♦ Уравнение

$$(az + a_1)f'' + (bz + b_1)f' + (cz + c_1)f = 0 \tag{8.1}$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением Лапласа. Здесь f – искомая функция, а a, a_1, b, b_1, c, c_1 – постоянные коэффициенты.

Теорема 8.1. *Функция*

$$f(z) = \int\limits_\gamma \varphi(\zeta)e^{\zeta z}d\zeta, \tag{8.2}$$

является решением уравнения Лапласа (8.1), *если*

$$\varphi(\zeta) = \frac{D}{a\zeta^2 + b\zeta + c} \exp\left[\int \frac{a_1\zeta^2 + b_1\zeta + c_1}{a\zeta^2 + b\zeta + c} d\zeta\right], \tag{8.3}$$

где $D = \mathrm{const}$, *а контур* γ *удовлетворяет условию*

$$(a\zeta^2 + b\zeta + c)\varphi(\zeta)e^{\zeta z}\Big|_\gamma = 0. \tag{8.4}$$

Доказательство. Будем искать решение уравнения (8.1) в виде (8.2), где $\varphi(\zeta)$ – неизвестная функция, а γ – некоторый заранее неизвестный контур интегрирования. Тогда

$$f'(z) = \int\limits_\gamma \zeta\varphi(\zeta)e^{\zeta z}d\zeta,$$

$$f''(z) = \int\limits_\gamma \zeta^2\varphi(\zeta)e^{\zeta z}d\zeta.$$

Подставив в (8.1), получим

$$\int\limits_\gamma \{(az + a_1)\zeta^2 + (bz + b_1)\zeta + (cz + c_1)\}\varphi(\zeta)e^{\zeta z}d\zeta = 0$$

или

$$\int\limits_\gamma \varphi(\zeta)e^{\zeta z}[(a\zeta^2 + b\zeta + c)z + (a_1\zeta^2 + b_1\zeta + c_1)]d\zeta = 0.$$

Потребуем теперь, чтобы функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяла дополнительному условию

$$(a_1\zeta^2 + b_1\zeta + c_1)\varphi(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}[(a\zeta^2 + b\zeta + c)\varphi(\zeta)], \tag{8.5}$$

что эквивалентно (8.3). Тогда

$$\int\limits_\gamma e^{\zeta z}\{(a\zeta^2 + b\zeta + c)z\varphi(\zeta) + \frac{d}{d\zeta}[(a\zeta^2 + b\zeta + c)\varphi(\zeta)]d\zeta = 0$$

или

$$\int\limits_\gamma \Big\{\frac{d}{d\zeta}[(a\zeta^2 + b\zeta + c)\varphi(\zeta)e^{\zeta z}]\Big\}d\zeta = 0,$$

если справедливо соотношение (8.4). Следовательно, функция $f(z)$ (8.2) будет удовлетворять уравнению (8.1), если функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет уравнению (8.5), а значение функции

$$\Phi(\zeta) = (a\zeta^2 + b\zeta + c)\varphi(\zeta)e^{\zeta z} \tag{8.6}$$

в конечной точке будет совпадать с ее значением в начальной точке контура. Таким образом, теорема доказана.

◊ Функция $\varphi(\zeta)$ аналитична, кроме, может быть, двух особых точек, являющихся корнями уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Если особые точки не охватываются контуром, то по теореме Коши $f(z)$ тождественно равна нулю, т.е. контур γ должен охватывать хотя бы одну особую точку.

Теорема 8.2. *Функция*

$$f(z) = z^\nu A \int\limits_\gamma (1-\eta^2)^{\nu-1/2} e^{i\eta z} d\eta, \tag{8.7}$$

где $A = \text{const}$*, удовлетворяет уравнению Бесселя при условии*

$$(1-\eta^2)^{\nu-3/2} e^{i\eta z}\Big|_\gamma = 0. \tag{8.8}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим уравнение Бесселя

$$z^2 f'' + zf' + (z^2 - \nu^2)f = 0. \tag{8.9}$$

Сделаем подстановку

$$f = z^\nu w. \tag{8.10}$$

При этом

$$f' = \nu z^{\nu-1} w + z^\nu w',$$
$$f'' = \nu(\nu-1) z^{\nu-2} w + 2\nu z^{\nu-1} w' + z^\nu w''.$$

Подставим эти соотношения в (8.9). Тогда

$$\nu(\nu-1)z^\nu w + 2\nu z^{\nu+1} w' + z^{\nu+2} w'' +$$
$$+\nu z^\nu w + z^{\nu+1} w' + \nu z^{\nu+2} w - \nu^2 z^\nu w = 0$$

или

$$z^{\nu+2} w'' + (2\nu+1) z^{\nu+1} w' + z^{\nu+2} w = 0.$$

Окончательно получим

$$zw'' + (2\nu+1)w' + zw = 0. \tag{8.11}$$

2. Таким образом, мы привели уравнение Бесселя к уравнению Лапласа с коэффициентами $a = 1$, $a_1 = 0$, $b = 0$, $b_1 = 2\nu + 1$, $c = 1$, $c_1 = 0$. Следовательно,

$$\varphi(\zeta) = \frac{D}{1+\zeta^2} \exp\left\{ \int \frac{(2\nu+1)\zeta}{1+\zeta^2} d\zeta \right\},$$

а так как

$$\int \frac{(2\nu+1)\zeta}{1+\zeta^2} d\zeta = \frac{2\nu+1}{2} \ln(1+\zeta^2),$$

то

$$\exp\left\{\int \frac{(2\nu+1)\zeta}{1+\zeta^2}d\zeta\right\} = (1+\zeta^2)^{(2\nu+1)/2}.$$

Окончательно запишем

$$\varphi(\zeta) = (1+\zeta^2)^{\nu-1/2}. \tag{8.12}$$

Следовательно,

$$f_\nu(z) = Dz^\nu \int\limits_\gamma (\zeta^2+1)^{\nu-1/2} e^{\zeta z} d\zeta.$$

3. Сделаем в интеграле замену $\zeta = i\eta$, что эквивалентно повороту плоскости ζ против часовой стрелки на $\pi/2$. Тогда $\zeta^2 = -\eta^2$, а $d\zeta = id\eta$ и для $f_\nu(z)$ получим

$$f_\nu(z) = Diz^\nu \int\limits_\gamma (-\eta^2+1)^{\nu-1/2} e^{i\eta z} d\eta =$$

$$= Di(-1)^{\nu-1/2} z^\nu \int\limits_\gamma (1-\eta^2)^{\nu-1/2} e^{i\eta z} d\eta.$$

Выберем $D = -i(-1)^{1/2-\nu}A$, тогда функция $f_\nu(z)$ определяется уравнением (8.7). Таким образом, в комплексной плоскости уравнению Бесселя может удовлетворить функция, представленная некоторым контурным интегралом, что и требовалось доказать.

◊ Если контур является замкнутой кривой, внутри которой находится одна из точек $t = \pm 1$, то при ее обходе в положительном направлении аргумент увеличивается на $(\nu - 1/2)\pi i$ независимо от формы контура. Модуль функции при этом не меняется. Если взять контур в виде восьмерки, то указанные точки обходятся в противоположных направлениях.

◊ Если $\nu + 1/2 \neq n$, то $(1-\eta)^{\nu-1}$ – многозначная функция.

◊ Придавая контуру ту или иную форму, можно получить различные интегральные представления бесселевых функций.

9. Интеграл Пуассона

Теорема 9.1. *Для функции Бесселя $J_\nu(z)$ справедливы следующие интегральные представления:*

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu \int\limits_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{\nu-1/2} \cos\eta z\, d\eta, \tag{9.1}$$

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu \int\limits_{0}^{\pi} \sin^{2\nu}\theta\, \cos(z\cos\theta) d\theta \tag{9.2}$$

при $\operatorname{Re}(\nu - 1/2) > 0$. *Соотношения* (9.1) *и* (9.2) *называются формулами или интегралами Пуассона.*

Доказательство. 1. Рассмотрим функцию $f_\nu(z)$ (8.7). При $\mathrm{Re}\,\nu > 1/2$ в качестве контура интегрирования можно выбрать отрезок $[-1, 1]$, тогда

$$f_\nu(z) = Az^\nu \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{\nu-1/2} e^{i\eta z} d\eta =$$
$$= Az^\nu \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{\nu-1/2} \cos \eta z d\eta. \tag{9.3}$$

Здесь мы воспользовались тем, что в силу нечетности подынтегральной функции интеграл, содержащий $\sin \eta z$, равен нулю.

2. Аналитическое продолжение функции $J_\nu(x)$ в комплексную плоскость будет иметь вид

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

Следовательно,

$$\lim_{z\to 0} \frac{J_\nu(z)}{z^\nu} = \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}. \tag{9.4}$$

Теперь рассмотрим аналогичный предел для $f_\nu(z)$:

$$\lim_{z\to 0} \frac{f_\nu(z)}{z^\nu} = A \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{\nu-1/2} d\eta.$$

Сделаем замену $\eta^2 = t$, $\eta = \sqrt{t}$, $d\eta = dt/2\sqrt{t}$:

$$\lim_{z\to 0} \frac{f_\nu(z)}{z^\nu} = A \int_{0}^{1} t^{1/2-1} (1-t)^{\nu+1/2-1} dt = AB(1/2, \nu+1/2) =$$
$$= A \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)} = \frac{A\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)},$$

т.е.

$$\lim_{z\to 0} \frac{f_\nu(z)}{z^\nu} = \frac{A\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)}. \tag{9.5}$$

Положим

$$A = \frac{1}{2^\nu \sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}. \tag{9.6}$$

Тогда

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{\nu-1/2} e^{i\eta z} d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu}\int\limits_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{\nu-1/2}\cos\eta z\,d\eta \tag{9.7}$$

при $\mathrm{Re}(\nu-1/2)>0$. Таким образом, соотношение (9.1) доказано.

3. Сделаем в интеграле (9.1) замену $\eta=\cos\theta$, $d\eta=-\sin\theta d\theta$:

$$(1-\eta^2)^{\nu-1/2}=\frac{\sin^{2\nu}\theta}{\sin\theta}.$$

Заметим, что $\theta=\pi$ при $\eta=-1$, $\theta=0$ при $\eta=+1$. Получим

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu}\int\limits_0^{\pi}\sin^{2\nu}\theta e^{iz\cos\theta}d\theta=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu}\int\limits_0^{\pi}\sin^{2\nu}\theta\,\cos(z\cos\theta)d\theta, \tag{9.8}$$

что и требовалось доказать.

10. Производящие функции. Интеграл Бесселя

♦ Производящей функцией функциональной последовательности $\{a_n(z)\}$, $n=\overline{-\infty,\infty}$, называется функция $\Phi(z,t)$, разлагающаяся в сходящийся степенной ряд по t

$$\Phi(z,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z)t^n \tag{10.1}$$

с коэффициентами $a_n(z)$.

◊ Если известна производящая функция, то для изучения последовательности $\{a_n(z)\}$ можно использовать свойства коэффициентов ряда Лорана аналитических функций.

Теорема 10.1. *Функция*

$$F(z,t)=\exp\Big[\frac{1}{2}z\Big(t-\frac{1}{t}\Big)\Big] \tag{10.2}$$

является производящей для бесселевых функций целого индекса, т.е.

$$\exp\Big[\frac{1}{2}z\Big(t-\frac{1}{t}\Big)\Big]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)t^n. \tag{10.3}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию комплексного переменного t (10.2). Она имеет существенно особые точки $t = 0$ и $t = \infty$ и, следовательно, разлагается в ряд Лорана на комплексной плоскости t, причем коэффициенты будут функциями параметра z, входящего в выражение (10.2), т.е.

$$F(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z) t^n, \tag{10.4}$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} \frac{\exp[(z/2)(\eta - 1/\eta)]}{\eta^{n+1}} d\eta. \tag{10.5}$$

Здесь γ_0 – произвольный замкнутый контур, охватывающий начало координат.

Сделаем замену переменной $\eta = 2t/z$, $(z \neq 0)$, а $\gamma_0 \to \gamma$, γ также содержит начало координат. Тогда

$$a_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^n \int\limits_{\gamma} t^{-n-1} e^{t - z^2/4t} dt,$$

но

$$e^{-z^2/4t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{z^{2k}}{2^{2k} t^k},$$

причем последний ряд сходится равномерно. Тогда

$$a_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} t^{-n-1-k} e^t dt \right\}.$$

Если $n + k < 0$, то под интегралом стоит аналитическая функция и он равен нулю. Если $n + k \geqslant 0$, то точка $t = 0$ — полюс порядка $n + k + 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} t^{-n-1-k} e^t dt = \lim_{t \to 0} \frac{1}{(n+k)!} \frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}} \left[\frac{e^t}{t^{n+k+1}} t^{n+k+1} \right].$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} t^{-n-1-k} e^t dt = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+k)!} & n + k \geqslant 0 \\ 0 & k + n < 0 \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+k+1)},$$

получим

$$a_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} = J_n(z).$$

Следствие 10.1.1. Справедлива формула

$$e^{-iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{-in\varphi}. \tag{10.6}$$

Доказательство. Положим в формуле (10.3) $t = e^{-i\varphi}$:

$$F(z, e^{i\varphi}) = e^{-iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{-in\varphi},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 10.1.2. Справедливо соотношение

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - z\sin\varphi)} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos(n\varphi - z\sin\varphi) d\varphi. \tag{10.7}$$

Формула (10.7) называется интегралом Бесселя, а при $n = 0$ – интегралом Парсеваля.

Доказательство. Разложим функцию $e^{-iz\sin\varphi}$ в ряд Фурье по переменной φ:

$$e^{-iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-in\varphi}, \tag{10.8}$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz\sin\varphi + in\varphi} d\varphi.$$

Разложение в ряд Фурье единственно. Следовательно, коэффициенты рядов (10.6) и (10.8) равны и соотношение (10.7) справедливо.

◊ Формула Бесселя (10.7) справедлива только для целых n. В противном случае она имеет вид

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(\nu\varphi - z\sin\varphi)d\varphi - \\ - \frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\nu\varphi - z\,\mathrm{sh}\,\varphi}d\varphi \tag{10.9}$$

(см., например, [27] § 30).

Следствие 10.1.3. Справедливы соотношения

$$\cos(z\sin\varphi) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^\infty J_{2n}(z)\cos(2n\varphi); \tag{10.10}$$

$$\sin(z\sin\varphi) = 2\sum_{n=1}^\infty J_{2n-1}(z)\sin(2n-1)\varphi; \tag{10.11}$$

$$\cos(z\cos\theta) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^\infty (-1)^n J_{2n}(z)\cos(2n\theta); \tag{10.12}$$

$$\sin(z\sin\theta) = 2\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} J_{2n-1}(z)\cos(2n-1)\theta. \tag{10.13}$$

Разложения (10.10) – (10.13) называются разложениями Якоби.

Доказательство. Приравняв действительные и мнимые части соотношения (10.6), находим (10.10), (10.11) (проделать самим). Сделав в (10.10), (10.11) замену $\varphi = \pi/2 - \theta$, получим (10.12) и (10.13).

Из (10.10) и (10.11) следует

$$\int\limits_0^\pi \cos(z\sin\varphi)\cos 2n\varphi\, d\varphi = \pi J_{2n}(z), \tag{10.14}$$

$$\int\limits_0^\pi \sin(z\sin\varphi)\sin(2n-1)\varphi\, d\varphi = \pi J_{2n-1}(z). \tag{10.15}$$

Пример 10.1. Разложить в ряд по функциям Бесселя целых индексов функции $\cos x$ и $\sin x$.

Решение. В равенствах (10.10) – (10.13) положим $z = x$:

$$\cos(x\sin\varphi) = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\cos 2k\varphi,$$

$$\sin(x\sin\varphi) = 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x)\sin(2k-1)\varphi.$$

При $\varphi = \pi/2$ окончательно получим

$$\cos x = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\cos k\pi = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(x),$$

$$\sin x = 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x)\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} J_{2k-1}(x).$$

Пример 10.2. Используя интегральное представление функций Бесселя (10.7), доказать, что

$$I = \int_0^{\infty} J_0(\beta x)e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Решение. Воспользуемся соотношениями (10.7)

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\int_0^{\pi/2}\cos(\beta x\,\sin\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x\sin\varphi)dx.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x\sin\varphi)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}[e^{(-\alpha+i\beta\sin\varphi)x} + e^{(-\alpha-i\beta\sin\varphi)x}]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{e^{(-\alpha+i\beta\sin\varphi)x}}{-\alpha+i\beta\sin\varphi} + \frac{e^{(-\alpha-i\beta\sin\varphi)x}}{-\alpha-i\beta\sin\varphi}\Big]\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\alpha-i\beta\sin\varphi} + \frac{1}{\alpha+i\beta\sin\varphi}\Big) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2\sin^2\varphi}.$$

Тогда

$$I = \frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\alpha^2+\beta^2\sin^2\varphi} = \frac{2}{\pi\alpha}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{-d(\operatorname{ctg}\varphi)}{(1+\operatorname{ctg}^2\varphi)+\beta^2/\alpha^2} =$$
$$= -\frac{2}{\pi\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2/\alpha^2}}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\sqrt{1+\beta^2/\alpha^2}}\Big)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Пример 10.3. С помощью производящей функции

$$F(z,t) = \exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]$$

для функций Бесселя первого рода $J_n(z)$ показать, что

$$J_n(-z) = (-1)^n J_n(z).$$

Решение. Заменим в (10.3) t на $-t$ и z на $-z$ и получим

$$\exp\left[\frac{z}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n J_n(-z)t^n.$$

Тогда $J_n(z) = (-1)^n J_n(-z)$ или $J_n(-z) = (-1)^n J_n(z)$.

Следствие 10.1.4. Функция

$$G(z,t) = \exp\left[\frac{z}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big)\right]$$

является производящей для функций Бесселя мнимого аргумента $I_n(z)$.

Доказательство. Известно, что

$$\exp\left[\frac{z}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n.$$

Заменим в (10.3) z на iz, а t на $-it$, тогда получим

$$\exp\left[\frac{z}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(iz)(-i)^n t^n,$$

но

$$(-i)^n J_n(iz) = \left(\frac{1}{i}\right)^n J_n(iz) = i^{-n}J_n(iz) = I_n(z).$$

Следовательно,

$$G(z,t) = \exp\left[\frac{z}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z)t^n, \tag{10.16}$$

что и требовалось показать.

Следствие 10.1.5. Справедливо соотношение

$$I_{-n}(z) = I_n(z). \tag{10.17}$$

Доказательство. Сделаем в соотношении (10.16) замену переменных $t = 1/t$, $n = -k$. Получим

$$G(z, 1/t) = \exp\left[\frac{z}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{-k}(z)t^k,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 10.1.6. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} e^{z\cos\varphi} &= I_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(z)\cos n\varphi, \\ e^{z\sin\varphi} &= I_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(z)\cos\left(\frac{n\pi}{2} - n\varphi\right). \end{aligned} \tag{10.18}$$

Доказательство. Положим в соотношении (10.16) $t = e^{i\varphi}$, тогда

$$e^{z\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z)e^{in\varphi}$$

или

$$\begin{aligned} e^{z\cos\varphi} = I_0(z) &+ [I_1(z)e^{i\varphi} + I_{-1}(z)e^{-i\varphi}] + \\ &+ [I_2(z)e^{2i\varphi} + I_{-2}(z)e^{-2i\varphi}] + \dots + \\ &+ [I_n(z)e^{in\varphi} + I_{-n}(z)e^{-in\varphi}] + \dots \end{aligned}$$

Так как $I_{-n}(z) = I_n(z)$ и $e^{in\varphi} + e^{-in\varphi} = 2\cos n\varphi$, то первое разложение в (10.18) доказано. При $\varphi = \pi/2 - \psi$ получим второе равенство в (10.18).

Следствие 10.1.7 (теорема сложения). Справедливы следующие разложения:

$$J_n(u + v) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u)J_{n-s}(v), \tag{10.19}$$

$$\begin{aligned} J_n(u + v) = &\sum_{k=0}^{n} J_{n-k}(u)J_k(v) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k[J_{n+k}(u)J_k(v) + J_{n+k}(v)J_k(u)]. \end{aligned} \tag{10.20}$$

Соотношения (10.19) и (10.20) называются формулами сложения для функций Бесселя первого рода.

Доказательство. Известно, что

$$\exp\left[\frac{z}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n, \quad 0<|t|<\infty.$$

Положим $z=u+v$, тогда

$$\exp\left[\frac{u+v}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big)\right] = \exp\left[\frac{u}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big)\right]\exp\left[\frac{v}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big)\right]$$

и имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(u+v)t^n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(u)t^l \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(v)t^k.$$

Перемножим ряды и приравняем коэффициенты при t^n в левой и правой частях. Приходим к равенству (10.19)

$$J_n(u+v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(u)J_k(v).$$

В частности,

$$J_0(u+v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{-k}(u)J_k(v) = J_0(u)J_0(v) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{-k}(u)J_k(v)$$

или

$$J_0(u+v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{-k}(u)J_k(v) = \\ = J_0(u)J_0(v) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_k(u)J_k(v). \qquad (10.21)$$

Это равенство содержит функции Бесселя только с неотрицательными индексами.

Для доказательства формулы (10.20) воспользуемся соотношением $J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$. В самом деле, при $k=\overline{0,n}$ оба индекса неотрицательны ($n-k\geqslant 0$, $k\geqslant 0$), а при $k=\overline{n+1,\infty}$ будет $n-k<0$, $k>0$. Поэтому запишем

$$J_n(u+v) = \sum_{k=0}^{n} J_{n-k}(u)J_k(v) + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} J_{n-k}(u)(-1)^{-k}J_{-k}(v)}_{n-k=m,\; m=\overline{1,\infty}} + \\ + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-n}J_{k-n}(u)J_k(v)}_{k-n=m,\; m=\overline{1,\infty}} = \sum_{k=0}^{n} J_{n-k}(u)J_k(v) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} J_{n+m}(u)(-1)^m J_m(v) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(u)(-1)^m J_{n+m}(v).$$

Итак, следствие доказано.

$\Diamond$ Можно показать, что для функций Макдональда $K_\nu(x)$ справедливо интегральное представление

$$K_\nu(x) = \int\limits_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,p}\,\mathrm{ch}\,(\nu p)\,dp, \quad \mathrm{Re}\,x > 0, \tag{10.22}$$

аналогичное представлению (10.7). Из (10.22), в частности, следует

$$K_0(x) = \int\limits_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,p} dp. \tag{10.23}$$

Пример 10.4. Показать, что справедливо следующее интегральное представление:

$$\int\limits_0^\infty \frac{pJ_0(Rp)\,dp}{p^2+k^2} = K_0(Rk). \tag{10.24}$$

Решение. Обозначим

$$J(R,k) = \int\limits_0^\infty \frac{pJ_0(pR)dp}{p^2+k^2} = \int\limits_0^\infty \frac{qJ_0(Rkq)dq}{q^2+1} = f(Rk).$$

Здесь мы сделали замену переменных $p = kq$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \int\limits_0^\infty \frac{qJ_0(qx)dq}{q^2+1},$$

которая после замены переменных $q^2 = z$ запишется в виде

$$f(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{J_0(x\sqrt{z})dz}{z+1}.$$

Воспользуемся интегральным представлением

$$\frac{1}{z+1} = \int\limits_0^\infty e^{-(z+1)y}dy.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty dy\,e^{-y}\int\limits_0^\infty dz\,e^{-zy}J_0(x\sqrt{z})$$

или после замены переменных $z = s/y$

$$f(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty dy \frac{e^{-y}}{y}\int\limits_0^\infty ds\, e^{-s} J_0\Big(\sqrt{\frac{x^2 s}{y}}\Big).$$

Рассмотрим далее интеграл

$$\int\limits_0^\infty e^{-p} J_0(a\sqrt{p})dp = \int\limits_0^\infty e^{-p} dp \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (a\sqrt{p})^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} =$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k a^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\int\limits_0^\infty e^{-p} p^k dp = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\Big(\frac{a}{2}\Big)^{2k} = e^{-a^2/4}.$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dy}{y} e^{-y-x^2/(4y)}. \tag{10.25}$$

Сделаем в (10.25) замену $y = xe^t/2$. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty dp\, e^{-x\,\mathrm{ch}\,t} = \int\limits_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,t} dt.$$

С учетом (10.23) нетрудно заметить, что соотношение (10.24) справедливо.

11. Интегралы Ломмеля

Теорема 11.1. *При условии* $\mathrm{Re}\,\nu > -1$ *справедливы соотношения*

$$\int\limits_0^\zeta zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\beta z)dz =$$
$$= \frac{\zeta}{\alpha^2-\beta^2}\{\beta J_\nu(\alpha\zeta)J'_\nu(\beta\zeta) - \alpha J_\nu(\beta\zeta)J'_\nu(\alpha\zeta)\}; \tag{11.1}$$
$$= \frac{\zeta}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha J_\nu(\beta\zeta)J_{\nu+1}(\alpha\zeta) - \beta J_\nu(\alpha\zeta)J_{\nu+1}(\beta\zeta)\}; \tag{11.2}$$
$$= \frac{\zeta}{\alpha^2-\beta^2}\{\beta J_{\nu-1}(\beta\zeta)J_\nu(\alpha\zeta) - \alpha J_\nu(\alpha\zeta)J_{\nu-1}(\beta\zeta); \tag{11.3}$$

$$\int\limits_0^\zeta zJ_\nu^2(\alpha z)dz = \frac{\zeta^2}{2}\Big\{[J'_\nu(\alpha\zeta)]^2 + \Big(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2\zeta^2}\Big)[J_\nu(\alpha\zeta)]^2\Big\}. \tag{11.4}$$

Соотношения (11.1)–(11.4) *называются интегралами Ломмеля.*

Доказательство. 1. Рассмотрим уравнение

$$z^2y'' + zy' + (\alpha^2 z^2 - \nu^2)y = 0. \tag{11.5}$$

Сделаем в нем замену переменных $\alpha^2 z^2 = t^2$, тогда

$$y' = \frac{dy}{dz} = \alpha\frac{dy}{dt} \qquad \text{и} \qquad y'' = \frac{d^2y}{dz^2} = \alpha^2\frac{d^2y}{dt^2}.$$

В результате получим

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - \nu^2)y = 0,$$

следовательно,

$$y(t) = C_1J_\nu(t) + C_2N_\nu(t) = C_1J_\nu(\alpha z) + C_2N_\nu(\alpha z) \tag{11.6}$$

– общее решение уравнения (11.5). В частности, положим $C_2 = 0$, а $C_1 = 1$. Получим

$$z^2\frac{d^2J_\nu(\alpha z)}{dz^2} + z\frac{dJ_\nu(\alpha z)}{dz} + (\alpha^2z^2 - \nu^2)J_\nu(\alpha z) = 0$$

и

$$z^2\frac{d^2J_\nu(\beta z)}{dz^2} + z\frac{dJ_\nu(\beta z)}{dz} + (\beta^2z^2 - \nu^2)J_\nu(\beta z) = 0.$$

Умножим первое уравнение на $\frac{1}{z}J_\nu(\beta z)$, а второе – на $\frac{1}{z}J_\nu(\alpha z)$ и вычтем. Тогда

$$zJ_\nu(\beta z)\frac{d^2J_\nu(\alpha z)}{dz^2} - zJ_\nu(\alpha z)\frac{d^2J_\nu(\beta z)}{dz^2} +$$
$$+J_\nu(\beta z)\frac{dJ_\nu(\alpha z)}{dz} - J_\nu(\alpha z)\frac{dJ_\nu(\beta z)}{dz} = -(\alpha^2 - \beta^2)zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\beta z).$$

Левую часть равенства можно представить в виде

$$\frac{d}{dz}\Big[zJ_\nu(\beta z)\frac{dJ_\nu(\alpha z)}{dz} - zJ_\nu(\alpha z)\frac{dJ_\nu(\beta z)}{dz}\Big] =$$
$$= -(\alpha^2 - \beta^2)zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\beta z).$$

Проинтегрируем левую и правую части равенства в пределах от 0 до ζ:

$$-(\alpha^2-\beta^2)\int\limits_0^\zeta zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\beta z)dz =$$

$$= \Big[zJ_\nu(\beta z)\frac{dJ_\nu(\alpha z)}{dz} - zJ_\nu(\alpha z)\frac{dJ_\nu(\beta z)}{dz}\Big]\Big|_0^\zeta =$$

$$= \zeta\Big[J_\nu(\beta\zeta)\frac{dJ_\nu(\alpha\zeta)}{d\zeta} - J_\nu(\alpha\zeta)\frac{dJ_\nu(\beta\zeta)}{d\zeta}\Big] -$$

$$-\lim_{z\to 0} z\Big[J_\nu(\beta z)\frac{dJ_\nu(\alpha z)}{dz} - J_\nu(\alpha z)\frac{dJ_\nu(\beta z)}{dz}\Big].$$

2. Покажем, что этот предел равен нулю. Действительно,

$$J_\nu(\alpha z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\Big(\frac{\alpha z}{2}\Big)^{2n+\nu} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{\alpha z}{2}\Big)^\nu + \Big(\frac{\alpha z}{2}\Big)^{\nu+2}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\Big(\frac{\alpha z}{2}\Big)^{2n-2} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{\alpha z}{2}\Big)^\nu + \Big(\frac{\alpha z}{2}\Big)^{\nu+2}Q_1(\alpha z),$$

где

$$Q_1(\alpha z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\Big(\frac{\alpha z}{2}\Big)^{2n-2}$$

– ряд по положительным степеням z. Аналогично

$$\frac{z\,dJ_\nu(\beta z)}{dz} = z\Big[\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\Big(\frac{\beta z}{2}\Big)^{2n+\nu}\Big]' =$$

$$= z\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(2n+\nu)}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\Big(\frac{\beta z}{2}\Big)^{2n+\nu-1}\frac{\beta}{2} =$$

$$= \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{\beta z}{2}\Big)^\nu + \Big(\frac{\beta z}{2}\Big)^{\nu+2}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n(2n+\nu)}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\Big(\frac{\beta z}{2}\Big)^{2n-2} =$$

$$= \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{\beta z}{2}\Big)^\nu + \Big(\frac{\beta z}{2}\Big)^{\nu+2}R_1(\beta z),$$

где

$$R_1(\beta z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+\nu)\beta}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \Big(\frac{\beta z}{2}\Big)^{2n-2}$$

– ряд по положительным степеням z. Тогда

$$\lim_{z\to 0} z\Big[J_\nu(\beta z)\frac{dJ_\nu(\alpha z)}{dz} - J_\nu(\alpha z)\frac{dJ_\nu(\beta z)}{dz}\Big] =$$

$$= \lim_{z\to 0}\Big\{\Big[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{\beta z}{2}\Big)^{\nu} + \Big(\frac{\beta z}{2}\Big)^{\nu+2} Q_1(\beta z)\Big] \times$$

$$\times\Big[\frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{\alpha z}{2}\Big)^{\nu} + \Big(\frac{\alpha z}{2}\Big)^{\nu+2} R_1(\alpha z)\Big] -$$

$$-\Big[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{\alpha z}{2}\Big)^{\nu} + \Big(\frac{\alpha z}{2}\Big)^{\nu+2} Q_1(\alpha z)\Big] \times$$

$$\times\Big[\frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{\beta z}{2}\Big)^{\nu} + \Big(\frac{\beta z}{2}\Big)^{\nu+2} R_1(\beta z)\Big]\Big\} = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\mathrm{Re}\,\nu > -1$ и $\lim\limits_{z\to 0} Q_1(\alpha z) = \lim\limits_{z\to 0} R_1(\beta z) = 0$, так как $Q_1(\alpha z)$ и $R_1(\beta z)$ – ряды по положительным степеням z.

3. Заметим, что

$$\frac{dJ_\nu(\beta\zeta)}{d\zeta} = \beta\frac{dJ_\nu(\beta\zeta)}{d(\beta\zeta)} = \beta J'_\nu(\beta\zeta).$$

Тогда при $\alpha \neq \beta$

$$\int\limits_0^{\zeta} zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\beta z)dz = \frac{\zeta}{\alpha^2-\beta^2}[\alpha J_\nu(\beta\zeta)J'_\nu(\alpha\zeta) - \beta J_\nu(\alpha\zeta)J'_\nu(\beta\zeta)].$$

Таким образом, соотношение (11.1) доказано. Воспользовавшись в последнем равенстве рекуррентным соотношением

$$J'_\nu(\alpha\zeta) = \frac{\nu}{\alpha\zeta}J_\nu(\alpha\zeta) - J_{\nu+1}(\alpha\zeta)$$

и аналогичным для $J'_\nu(\beta\zeta)$, получим (11.2).

Если использовать другое рекуррентное соотношение

$$J'_\nu(\alpha\zeta) = -\frac{\nu}{\alpha\zeta}J_\nu(\alpha\zeta) + J_{\nu-1}(\alpha\zeta),$$

то получим (11.3).

4. Интеграл Ломмеля (11.4) можно вычислить из (11.1) с помощью предельного перехода $\beta \to \alpha$. Действительно,

$$\int\limits_0^\zeta z J_\nu^2(\alpha z)dz = \lim_{\beta\to\alpha}\Big\{\frac{\zeta}{\alpha^2-\beta^2}\big[\beta J_\nu(\alpha\zeta)J'_\nu(\beta\zeta)-\alpha J_\nu(\beta\zeta)J'_\nu(\alpha\zeta)\big]\Big\}.$$

Возникающую в правой части этого выражения неопределенность типа $0/0$ раскроем по правилу Лопиталя:

$$\int\limits_0^\zeta z J_\nu^2(\alpha z)dz = \lim_{\beta\to\alpha}\frac{\frac{d}{d\beta}\big\{\zeta\big[\beta J_\nu(\alpha\zeta)J'_\nu(\beta\zeta)-\alpha J_\nu(\beta\zeta)J'_\nu(\alpha\zeta)\big]\big\}}{\frac{d}{d\beta}(\alpha^2-\beta^2)} =$$

$$= \lim_{\beta\to\alpha}\frac{\zeta}{2\beta}\big[\alpha\zeta J'_\nu(\beta\zeta)J'_\nu(\alpha\zeta)-J_\nu(\alpha\zeta)J'_\nu(\beta\zeta)-\beta\zeta J_\nu(\alpha\zeta)J''_\nu(\beta\zeta)\big].$$

Но функция $J_\nu(\beta\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$(\beta\zeta)^2 J''_\nu(\beta\zeta)+\beta\zeta J'_\nu(\beta\zeta)+(\beta^2\zeta^2-\nu^2)J_\nu(\beta\zeta)=0.$$

Тогда

$$J''_\nu(\beta\zeta) = -\Big(1-\frac{\nu^2}{\beta^2\zeta^2}\Big)J_\nu(\beta\zeta)-\frac{1}{\beta\zeta}J'_\nu(\beta\zeta),$$

и исходное выражение принимает вид

$$\int\limits_0^\zeta z J_\nu^2(\alpha z)dz$$

$$= \lim_{\beta\to\alpha}\frac{\zeta^2}{2\beta}\Big\{\alpha J'_\nu(\alpha\zeta)J'_\nu(\beta\zeta)+\beta\Big[1-\frac{\nu^2}{\beta^2\zeta^2}\Big]J_\nu(\beta\zeta)J_\nu(\alpha\zeta)\Big\} =$$

$$= \frac{\zeta^2}{2}\Big\{\big[J'_\nu(\alpha\zeta)\big]^2+\Big[1-\frac{\nu^2}{\alpha^2\zeta^2}\Big]J_\nu(\alpha\zeta)\Big\},$$

совпадающий с (11.4). Таким образом, теорема доказана.

12. Корни бесселевых функций

Задачи об определении корней бесселевых функций играют важную роль в приложениях.

Теорема 12.1. *Если индекс ν вещественен и $\nu > -1$, то функция $J_\nu(z)$ имеет только вещественные корни, т.е. если*

$$J_\nu(\alpha_k^\nu) = 0, \qquad \text{то} \qquad (\alpha_k^\nu)^* = \alpha_k^\nu. \tag{12.1}$$

Доказательство. Будем доказывать методом от противного.

1. По определению,

$$J_\nu(z) = \Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k}. \tag{12.2}$$

Предположим, что корни чисто мнимые, т.е. $z = it$. Получим

$$J_\nu(it) = \Big(\frac{i}{2}\Big)^\nu t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \Big(\frac{t}{2}\Big)^{2k},$$

где под знаком суммы содержатся только положительные слагаемые. Следовательно, $J_\nu(it) \neq 0$ при вещественных t, отличных от нуля. Таким образом, функция $J_\nu(z)$ не имеет чисто мнимых корней.

2. Предположим теперь, что $\alpha = a + ib$ – комплексный корень уравнения (12.1) $J_\nu(\alpha) = 0$ и $a \neq 0$. Так как $J_\nu(z)$ разлагается в степенной ряд (12.2) с вещественными коэффициентами, то α^* – также корень этого уравнения, т.е. $J_\nu(\alpha^*) = 0$.

Теперь воспользуемся интегралом Ломмеля (11.1), положив $\alpha = \alpha$, $\beta = \alpha^*$, т.е.

$$\int\limits_0^\zeta zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\alpha^* z)dz =$$

$$= \frac{\zeta}{\alpha^2 - (\alpha^*)^2}\{\alpha^* J_\nu(\alpha\zeta)J'_\nu(\alpha^*\zeta) - \alpha J_\nu(\alpha^*\zeta)J'_\nu(\alpha\zeta)\}.$$

Положим здесь $\zeta = 1$, тогда с учетом $J_\nu(\alpha) = J_\nu(\alpha^*) = 0$ получим

$$\int\limits_0^1 zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\alpha^* z)dz = 0.$$

Поскольку $J_\nu(\alpha^* z) = [J_\nu(\alpha z)]^*$, то

$$\int\limits_0^1 zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\alpha^* z)dz = \int\limits_0^1 z|J_\nu(\alpha z)|^2 dz > 0.$$

Полученное противоречие показывает, что функция $J_\nu(z)$ не имеет комплексных корней при $\nu > -1$.

Теорема 12.2. *Все корни функции $J_\nu(z)$, кроме $z = 0$, простые.*

Доказательство. Предположим, что $z_0 \neq 0$ – корень кратности $n > 1$. Тогда $J_\nu(z_0) = J'_\nu(z_0) = 0$, но

$$J''(z_0) = -\frac{1}{z_0}J'_\nu(z_0) - \Big(1 - \frac{\nu^2}{z_0^2}\Big)J_\nu(z_0) = 0.$$

Продифференцировав уравнение Бесселя, получим

$$J'''(z_0) = \Big\{\frac{d}{dz}\Big[-\frac{1}{z}J'_\nu(z) - \Big(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\Big)J_\nu(z)\Big]\Big\}\Big|_{z=z_0} = 0.$$

Аналогично можно показать, что все производные функции $J_\nu(z)$ в точке z_0 обращаются в нуль. Следовательно, функция $J_\nu(z) \equiv 0$, так как все коэффициенты ряда Тейлора в точке z_0 равны нулю, и $J_\nu(z)$ не может иметь кратных корней, что и следовало доказать.

Теорема 12.3. *Уравнение $J_\nu(z) = 0$ имеет бесконечное множество решений (корней).*

Доказательство. Функция Бесселя $J_\nu(x)$ является решением уравнения Бесселя и, следовательно, при больших x допускает следующее асимптотическое представление (7.1):

$$y(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}\cos(x + \varphi), \tag{12.3}$$

где $A = \sqrt{2/\pi}$, $\varphi = -\pi\nu/2$, а функция $\cos x$ имеет бесконечное число нулей. Следовательно, $J_\nu(x)$ также имеет бесконечное число нулей, и теорема доказана.

Можно (см. [27]) доказать справедливость следующих теорем, описывающих поведение корней функций Бесселя.

Теорема 12.4 (Бурже). *Функции $J_\nu(z)$ и $J_{\nu+m}(z)$, $m = \overline{1,\infty}$, не имеют общих корней, за исключением $z = 0$.*

Теорема 12.5. *Любые $\gamma_m(\nu)$, для которого выполняется $J_\nu(\gamma_m(\nu)) = 0$, суть возрастающие функции переменного ν, если $\nu > 0$.*

13. Ряды Фурье–Бесселя и Дини

Здесь мы рассмотрим ряды Фурье–Бесселя и Дини, играющие важную роль в приложениях.

Теорема 13.1. *Последовательность функций*

$$J_\nu\Big(\alpha_1^\nu \frac{x}{l}\Big), J_\nu\Big(\alpha_2^\nu \frac{x}{l}\Big), \ldots, J_\nu\Big(\alpha_k^\nu \frac{x}{l}\Big) \ldots, \qquad \nu > -1, \tag{13.1}$$

в которой α_k^ν, $k = \overline{1, \infty}$ *– корни уравнения*

$$J_\nu(x) = 0, \tag{13.2}$$

образует ортогональную систему функций с весом $\rho(x) = x$, *т.е.*

$$\int\limits_0^l x J_\nu\Big(\alpha_k^\nu \frac{x}{l}\Big) J_\nu\Big(\alpha_j^\nu \frac{x}{l}\Big) dx = \frac{l^2}{2}[J'_\nu(\alpha_k^\nu)]^2 \delta_{kj}. \tag{13.3}$$

Здесь δ_{kj} *– символ Кронекера.*

Доказательство. Положим в интеграле Ломмеля (11.1) $\zeta = 1$, $\alpha = \alpha_k^\nu$, $\beta = \alpha_j^\nu$ для $k \neq j$. Так как $J_\nu(\alpha_k^\nu) = J_\nu(\alpha_j^\nu) = 0$, получим

$$\int_0^1 t J_\nu(\alpha_k^\nu t) J_\nu(\alpha_j^\nu t) dt = 0. \tag{13.4}$$

Положив в интеграле Ломмеля (11.4) $\zeta = 1$ и $\alpha = \alpha_k^\nu$, получим

$$\int\limits_0^1 t J_\nu^2(\alpha_k^\nu t) dt = \frac{1}{2}[J'_\nu(\alpha_k^\nu)]^2. \tag{13.5}$$

Объединив (13.4) и (13.5) и сделав в них замену переменных $t = x/l$, получим (13.3). Таким образом, теорема доказана.

Теорема 13.2. *Пусть некоторую функцию* $f(x)$ *вещественного переменного* x *можно представить равномерно сходящимся функциональным рядом*

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k J_\nu\Big(\alpha_k^\nu \frac{x}{l}\Big), \qquad \nu > -1, \tag{13.6}$$

где через α_k^ν обозначены положительные корни уравнения $J_\nu(\alpha) = 0$, пронумерованные в порядке их возрастания. Тогда

$$a_k = \frac{2}{[lJ'_\nu(\alpha_k^\nu)]^2} \int\limits_0^l x f(x) J_\nu\Big(\alpha_k^\nu \frac{x}{l}\Big) dx. \tag{13.7}$$

Ряд (13.6) с коэффициентами (13.7) называется рядом Фурье–Бесселя.

Доказательство. Так как ряд (13.6) сходится равномерно, его можно интегрировать почленно. Домножим равенство (13.6) на $xJ_\nu(\alpha_n^\nu x/l)$ и проинтегрируем в пределах $[0, l]$. Получим

$$\int\limits_0^l x f(x) J_\nu\Big(\alpha_n^\nu \frac{x}{l}\Big) dx = \sum_{k=1}^\infty a_k \int\limits_0^l x J_\nu\Big(\alpha_n^\nu \frac{x}{l}\Big) J_\nu\Big(\alpha_k^\nu \frac{x}{l}\Big) dx$$

и, используя (13.3), найдем

$$\int\limits_0^l x f(x) J_\nu\Big(\alpha_n^\nu \frac{x}{l}\Big) dx = \sum_{k=1}^\infty a_k \frac{l^2}{2} [J'_\nu(\alpha_k^\nu)]^2 \delta_{kn} = \frac{l^2}{2} [J'_\nu(\alpha_n^\nu)]^2 a_n,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 13.3 (Гобсона). *Если для функции $f(x)$ выполняются следующие условия:*

1) *существует интеграл*

$$\int\limits_0^l t^{1/2} |f(t)| dt < \infty;$$

2) $|f(x)| < \infty$ *для* $x \in [0, l]$,

тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k J_\nu(\alpha_k^\nu x/l)$ *сходится для* $\nu > -1/2$, $x \in]0, l[$, *и сумма его равна*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Доказательство см., например, [11], гл. XVIII.

♦ Если γ_k^ν – положительные корни уравнения

$$xJ'_\nu(x) + HJ_\nu(x) = 0, \tag{13.8}$$

где $H = \mathrm{const}$, не зависящая от x и ν, то ряд

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_\nu\Big(\gamma_m^\nu \frac{x}{l}\Big), \tag{13.9}$$

где

$$b_m = \frac{2(\gamma_m^\nu)^2}{[(\gamma_m^\nu)^2 - \nu^2]J_\nu^2(\gamma_m^\nu) + [\gamma_m^\nu J'_\nu(\gamma_m^\nu)]^2}\times$$
$$\times\frac{1}{l^2}\int\limits_0^l xf(x)J_\nu\Big(\gamma_m^\nu\frac{x}{l}\Big)dx, \tag{13.10}$$

называется рядом Дини функции $f(x)$.

Теорема 13.4. *Функции $J_\nu(\gamma_m^\nu x/l)$, $m = \overline{1,\infty}$, $\nu > -1$, где γ_m^ν — корни уравнения* (13.8)*, обладают на интервале* $]0, l[$ *свойством ортогональности с весом $\rho(x) = x$, т.е.*

$$\int\limits_0^l xJ_\nu\Big(\gamma_m^\nu\frac{x}{l}\Big)J_\nu\Big(\gamma_k^\nu\frac{x}{l}\Big)dx =$$
$$= \frac{l^2}{2}\Big\{\Big[1 - \frac{\nu^2}{(\gamma_m^\nu)^2}\Big]J_\nu^2(\gamma_m^\nu) + [J'_\nu(\gamma_m^\nu)]^2\Big\}\delta_{km}. \tag{13.11}$$

Доказательство дословно повторяет доказательство соотношения (13.3).

Пример 13.1. Разложить на интервале $]0, 1[$ в ряд Фурье–Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\alpha_k^0 x)$ функцию $f(x) = x^0 = 1$, α_k^0 — корни бесселевой функции $J_0(x)$.

Решение. Запишем

$$a_k = \frac{2\int\limits_0^1 x^0 x J_0(\alpha_k^0 x)dx}{[J'_0(\alpha_k^0)]^2}.$$

Поскольку $J_0'(x) = -J_1(x)$, то, проведя замену переменных $t = \alpha_k^0 x$, получим

$$a_k = \frac{2\int\limits_0^{\alpha_k^0} tJ_0(t)dt}{(\alpha_k^0)^2 J_1^2(\alpha_k^0)}.$$

Используя рекуррентное соотношение

$$\frac{d}{dz}[z^{\nu+1}J_{\nu+1}(z)] = z^{\nu+1}J_\nu(z),$$

при $\nu = 0$ найдем

$$a_k = \frac{2}{(\alpha_k^0)^2 J_1^2(\alpha_k^0)} tJ_1(t)\Big|_0^{\alpha_k^0} = \frac{2}{\alpha_k^0 J_1(\alpha_k^0)}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_0(\alpha_k^0 x)}{\alpha_k^0 J_1(\alpha_k^0)} = 1, \quad x \in]0, 1[.$$

Пример 13.2. Разложить в ряд Фурье–Бесселя функцию $f(x) = x^2 + 1$ на интервале]0,1[при $\nu = 0$.

Решение. Условия разложимости выполнены. Имеем ряд

$$x^2 + 1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\alpha_n^0 x), \qquad 0 < x < 1$$

с коэффициентами

$$a_n = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n^0)} \int\limits_0^1 x(x^2+1)J_0(\alpha_n^0 x)dx, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Вычислим интеграл

$$I = \int\limits_0^1 (x^3 + x)J_0(\alpha_n^0 x)dx = \int\limits_0^1 x^3 J_0(\alpha_n^0 x)dx + \int\limits_0^1 xJ_0(\alpha_n^0 x)dx.$$

Сделаем в нем замену $t = \alpha_n^0 x$. Тогда

$$I = \frac{1}{(\alpha_n^0)^4}\int\limits_0^{\alpha_n^0} t^3 J_0(t)dt + \frac{1}{(\alpha_n^0)^2}\int\limits_0^{\alpha_n^0} tJ_0(t)dt = I_1 + I_2.$$

Проведем в I_1 интегрирование по частям, положив $t^2 = U$, $tJ_0(t)dt = dV$. Тогда $dU = 2tdt$, $V = tJ_1(t)$. Получим

$$I_1 = \int\limits_0^{\alpha_n^0} t^3 J_0(t)dt = t^3 J_1(t)\Big|_0^{\alpha_n^0} - 2\int\limits_0^{\alpha_n^0} t^2 J_1(t)dt =$$

$$= \big[t^3 J_1(t) - 2t^2 J_2(t)\big]\Big|_0^{\alpha_n^0} = (\alpha_n^0)^3 J_1(\alpha_n^0) - 2(\alpha_n^0)^3 J_2(\alpha_n^0).$$

С учетом рекуррентного соотношения (5.6)

$$J_2(\alpha_n^0) = \frac{2}{\alpha_n^0} J_1(\alpha_n^0) - J_0(\alpha_n^0) = \frac{2}{\alpha_n^0} J_1(\alpha_n^0),$$

так как $J_0(\alpha_n^0) = 0$, найдем

$$a_n = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n^0)}\Big[\frac{(\alpha_n^0)^3 J_1(\alpha_n^0) - 4\alpha_n^0 J_1(\alpha_n^0)}{(\alpha_n^0)^4} + \frac{1}{(\alpha_n^0)^2}\alpha_n^0 J_1(\alpha_n^0)\Big]$$

или

$$a_n = \frac{2}{\alpha_n^0 J_1(\alpha_n^0)}\Big(1 - \frac{2}{(\alpha_n^0)^2}\Big), \qquad n = \overline{1,\infty}.$$

Итак,

$$x^2 + 1 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{2}{(\alpha_n^0)^2}\Big)\frac{J_0(\alpha_n^0 x)}{\alpha_n^0 J_1(\alpha_n^0)}, \qquad 0 < x < 1.$$

Пример 13.3. Разложить функцию $f(x) = x^\nu$ $(\nu > -1)$ в ряд Дини по системе функций $\{J_\nu(\gamma_n^\nu x)\colon n = \overline{1,\infty}\}$ на $]0,1[$, если γ_n^ν – положительные нули функции $J'_\nu(x)$, $\nu > 0$.

Решение. Разложение имеет вид (13.9)

$$x^\nu = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_\nu(\gamma_n^\nu x), \qquad 0 < x < 1,$$

где, согласно (13.10),

$$b_n = \frac{2}{[1-\nu^2/(\gamma_n^\nu)^2]J_\nu^2(\gamma_n^\nu)} \int\limits_0^1 x^{\nu+1} J_\nu(\gamma_n^\nu x)dx, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Сделав замену переменных $\gamma_n^\nu x = t$, вычислим интеграл

$$\int\limits_0^1 x^{\nu+1} J_\nu(\gamma_n^\nu x)dx = \frac{1}{(\gamma_n^\nu)^{\nu+2}} \int\limits_0^{\gamma_n^\nu} t^{\nu+1} J_\nu(t)dt =$$

$$= \frac{1}{(\gamma_n^\nu)^{\nu+2}} \big[t^{\nu+1} J_{\nu+1}(t)\big]\Big|_0^{\gamma_n^\nu} = \frac{1}{\gamma_n^\nu} J_{\nu+1}(\gamma_n^\nu).$$

Окончательно получим

$$x^\nu = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{\gamma_n^\nu J_{\nu+1}(\gamma_n^\nu)}{[(\gamma_n^\nu)^2 - \nu^2]J_\nu^2(\gamma_n^\nu)} J_\nu(\gamma_n^\nu x), \quad 0 < x < 1.$$

Пример 13.4. Разложить в ряд Фурье–Бесселя функцию $f(x) = x^{-\nu}$ $(0 < x < 1)$ по системе $\{J_\nu(\alpha_n^\nu x) : n = \overline{1,\infty}\}$, где α_n^ν — положительные нули функции $J_\nu(x)$.

Решение. Согласно (13.7), имеем

$$x^{-\nu} = \sum_{n=1}^\infty a_n J_\nu(\alpha_n^\nu x), \quad 0 < x < 1,$$

где, согласно (13.10),

$$a_n = \frac{2}{J_{\nu+1}^2(\alpha_n^\nu)} \int\limits_0^1 x^{-\nu+1} J_\nu(\alpha_n^\nu x)dx, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Вычислим $\int\limits_0^1 x^{-\nu+1} J_\nu(\alpha_n^\nu x)dx$. Из рекуррентного соотношения

$$-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = x^{-(\nu+1)} J_{\nu+1}(x)$$

найдем

$$\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)dx = -x^{-\nu} J_\nu(x) + C.$$

Заменим ν на $\nu-1$. Тогда

$$\int x^{-\nu+1}J_\nu(x)dx = -x^{-\nu+1}J_{\nu-1}(x)+C.$$

В нашем случае

$$\int\limits_0^1 x^{-\nu+1}J_\nu(\alpha_n^\nu x)dx = \frac{1}{(\alpha_n^\nu)^{\nu-2}}\int\limits_0^{\alpha_n^\nu} t^{-\nu+1}J_\nu(t)dt =$$
$$= -\frac{1}{(\alpha_n^\nu)^{\nu-2}}t^{-\nu+1}J_{\nu-1}(t)\Big|_0^{\alpha_n^\nu} =$$
$$= \frac{1}{\alpha_n^\nu}J_{\nu-1}(\alpha_n^\nu) + \frac{1}{(\alpha_n^\nu)^{\nu-2}}t^{-\nu+1}J_{\nu-1}(t)\Big|_{t=0}.$$

Найдем

$$t^{-\nu+1}J_{\nu-1}(t)\Big|_{t=0} = \sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{t^{2k}}{2^{\nu-1+2k}k!\Gamma(\nu+k)}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}.$$

Тогда

$$a_n = \frac{2}{J^2_{\nu+1}(\alpha_n^\nu)}\Big[\frac{(\alpha_n^\nu)^{\nu-2}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} - \frac{J_{\nu-1}(\alpha_n^\nu)}{\alpha_n^\nu}\Big], \quad n=\overline{1,\infty}.$$

Окончательно получим

$$x^{-\nu} = \sum_{n=0}^\infty\frac{2}{J^2_{\nu+1}(\alpha_n^\nu)}\Big[\frac{(\alpha_n^\nu)^{\nu-2}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} - \frac{J_{\nu-1}(\alpha_n^\nu)}{\alpha_n^\nu}\Big]J_\nu(\alpha_n^\nu x).$$

14. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя

Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя играет важную роль при решении широкого класса уравнений в частных производных. Ее стандартная формулирировка имеет вид

Найти собственные значения и собственные функции задачи

$$x^2y''+xy'+(\lambda x^2-\nu^2)y=0, \qquad \nu>0, \tag{14.1}$$
$$\lim_{x\to0}|y(x)|<\infty, \qquad ly'(l)+Hy(l)=0, \quad H>0, \quad l>0.$$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

Решение проведем по схеме, использованной ранее для других обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Пусть $\lambda = \omega^2$, $\omega > 0$. Общее решение уравнения (14.1) имеет вид

$$y(x) = C_1 J_\nu(\omega x) + C_2 N_\nu(\omega x).$$

Из явного вида функции

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

следует, что

$$J_\nu(0) = \begin{cases} 0 & \nu > 0, \\ 1 & \nu = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $|J_\nu(0)| < \infty$ при $\nu > 0$. Поскольку

$$\lim_{x\to 0} |N_\nu(x)| = \infty,$$

то $C_2 = 0$.

Рассмотрим второе условие

$$C_1[\omega l J_\nu'(\omega l) + H J_\nu(\omega l)] = 0.$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю, если $\omega l = \gamma_k^\nu$, $k = \overline{1,\infty}$, где γ_k^ν – корни уравнения $\gamma J_\nu'(\gamma) + H J_\nu(\gamma) = 0$. Следовательно,

$$\lambda_k = \left(\frac{\gamma_k^\nu}{l}\right)^2, \qquad y_k(x) = A_k J_\nu\left(\gamma_k^\nu \frac{x}{l}\right). \tag{14.2}$$

2. Пусть $\lambda = -\omega^2$, $\omega > 0$. Тогда общее решение уравнения

$$x^2 y'' + x y' - (\omega^2 x^2 + \nu^2) y = 0$$

имеет вид

$$y(x) = C_1 I_\nu(\omega x) + C_2 K_\nu(\omega x).$$

Аналогично предыдущему случаю

$$|\lim_{x\to 0} I_\nu(x)| < \infty, \qquad \text{а} \qquad |\lim_{x\to 0} K_\nu(x)| = \infty.$$

Следовательно,

$$C_2 = 0.$$

По определению,

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu}.$$

Тогда

$$\omega l I'(\omega l) + HI(\omega l) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+\nu+H}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\Big(\frac{l\omega}{2}\Big)^{2k+\nu} = 0.$$

Это равенство невозможно, так как его левая часть положительна при $\omega l \neq 0$. Тогда

$$C_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad y(x) = 0, \tag{14.3}$$

т.е. существуют только тривиальные решения.

3. Пусть $\lambda = 0$. В этом случае

$$x^2y'' + xy' - \nu^2 y = 0,$$

и необходимо рассмотреть две возможности: $\nu = 0$ и $\nu \neq 0$.

а) Положим $\nu = 0$ и преобразуем уравнение к виду

$$xy'' + y' = \frac{d}{dx}[xy'(x)] = 0,$$

откуда

$$xy' = C_1,$$

и для общего решения получим

$$y(x) = C_1 \ln x + C_2.$$

Из первого условия $C_1 = 0$, из второго – $C_2 = 0$.

б) Положим $\nu > 0$. Частное решение ищем в виде $y = x^\alpha$, подстановка которого дает

$$\alpha(\alpha-1)x^\alpha + \alpha x^\alpha - \nu^2 x^\alpha = 0.$$

Следовательно, $\alpha = \pm\nu$. Тогда

$$y(x) = C_1 x^\nu + C_2 x^{-\nu}.$$

Из первого условия (14.1) найдем

$$C_2 = 0,$$

из второго

$$C_1(\nu l^\nu + Hl^\nu) = 0$$

и

$$C_1 = 0.$$

Резюмируя все сказанное выше, запишем окончательное решение задачи Штурма–Лиувилля (14.1):

$$\lambda_k = \left(\frac{\gamma_k^\nu}{l}\right)^2, \qquad y_k(x) = C_1 J_\nu\left(\gamma_k^\nu \frac{x}{l}\right).$$

4. Соотношение ортогональности для функций (14.2) с учетом (13.11) примет вид

$$\int\limits_0^l x y_n(x) y_k(x) dx = C_m C_k \int\limits_0^l x J_\nu\left(\gamma_m^\nu \frac{x}{l}\right) J_\nu\left(\gamma_k^\nu \frac{x}{l}\right) dx =$$
$$= C_m^2 \frac{l^2}{2}\left\{\left[1 - \frac{\nu^2}{(\gamma_m^\nu)^2}\right] J_\nu^2(\gamma_m^\nu) + [J_\nu'(\gamma_m^\nu)]^2\right\}\delta_{km}. \quad (14.4)$$

15. Интегральные преобразования бесселевых функций

Рассмотрим несколько примеров интегральных преобразований бесселевых функций.

Пример 15.1. Найти преобразование Лапласа функции Бесселя нулевого индекса $J_0(t)$.

Решение. По определению,

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \sum_{k=0}^\infty C_{2k} t^{2k},$$

где

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}.$$

Согласно первой теореме разложения,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} t^{2k} \div \varphi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} \frac{(2k)!}{p^{2k+1}}. \tag{15.1}$$

Воспользовавшись свойствами факториалов

$$(2k)! = (2k)!!(2k-1)!! = 2^k k!(2k-1)!!,$$

где по определению $(-1)!! = 1$, получим

$$C_{2k}(2k)! = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} 2^k k!(2k-1)!!$$

и, следовательно,

$$\varphi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k(k!)} \frac{1}{p^{2k+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Таким образом,

$$J_0(t) \div \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{15.2}$$

Пример 15.2. Найти лапласовское изображение функции

$$f(t) = t^{n/2} J_n(2\sqrt{at}).$$

Решение. Согласно определению функции Бесселя (3.6), получим

$$f(t) = t^{n/2} J_n(2\sqrt{at}) = t^{n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{k+n/2} t^{k+n/2}}{k!\Gamma(k+n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{k+n/2}}{k!(k+n)!} t^{k+n}.$$

В силу первой теоремы разложения

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k \div \varphi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k k!}{p^{k+1}}.$$

Тогда

$$f(t) \risingdotseq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{k+n/2}}{k!} \frac{1}{p^{k+n+1}} =$$
$$= \frac{a^{n/2}}{p^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Big(\frac{a}{p}\Big)^k = \frac{a^{n/2}}{p^{n+1}} e^{-a/p}.$$

Окончательно получим

$$t^{n/2} J_n(2\sqrt{at}) \risingdotseq \frac{a^{n/2}}{p^{n+1}} e^{-a/p}. \tag{15.3}$$

Пример 15.3. Найти лапласовское изображение функции

$$f(t) = J_n(t), \qquad n = \overline{0, \infty}.$$

Решение. 1. При $n = 0$ решение дается формулой (15.2).

2. Из рекуррентного соотношения

$$tJ_n'(t) = nJ_n(t) - tJ_{n+1}(t) \tag{15.4}$$

при $n = 0$ получим

$$J_1(t) = -J_0'(t). \tag{15.5}$$

По теореме о дифференцировании оригинала

$$f'(t) \risingdotseq p\varphi(p) - f(0), \tag{15.6}$$

где $f(t) \risingdotseq \varphi(p)$. С учетом соотношения (15.2) из (15.5) получим

$$J_1(t) \risingdotseq -p\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} + J_0(0).$$

Поскольку $J_0(0) = 1$, это дает

$$J_1(t) \risingdotseq \frac{\sqrt{1+p^2} - p}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{15.7}$$

3. В рекуррентном соотношении

$$2J_n'(t) = J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) \tag{15.8}$$

положим $n = 2$. Тогда

$$J_2(t) = -2J_1'(t) + J_0(t).$$

Из теоремы о дифференцировании оригинала (15.6) с учетом соотношений (15.2) и (15.7) получим

$$J_2(t) \risingdotseq -2\Big[p\frac{\sqrt{1+p^2}-p}{\sqrt{1+p^2}} - J_1(0)\Big] + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{15.9}$$

Так как $J_1(0) = 0$, окончательно найдем

$$J_2(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{1+p^2}-p)^2}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{15.10}$$

4. Используя метод математической индукции, с учетом рекуррентного соотношения (15.8) и равенства $J_n(0) = 0$, $n > 0$, для целых $\nu = n \geqslant 2$ имеем

$$\begin{gathered}
J_n(x) = J_{n-2}(x) - 2J_{n-1}'(x) \risingdotseq \\
\risingdotseq \frac{(\sqrt{1+p^2}-p)^{n-2}}{\sqrt{1+p^2}} - 2p\frac{(\sqrt{1+p^2}-p)^{n-1}}{\sqrt{1+p^2}} = \\
= \frac{(\sqrt{1+p^2}-p)^{n-2}[1-2p(\sqrt{1+p^2}-p)]}{\sqrt{1+p^2}} = \\
= \frac{(\sqrt{1+p^2}-p)^{n-2}[(p^2+1)-2p\sqrt{1+p^2}+p^2]}{\sqrt{1+p^2}} = \\
= \frac{(\sqrt{1+p^2}-p)^{n-2}(\sqrt{1+p^2}-p)^2}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{(\sqrt{1+p^2}-p)^n}{\sqrt{1+p^2}},
\end{gathered}$$

что с учетом (15.3) и (15.4) дает

$$J_n(x) \risingdotseq \frac{(\sqrt{1+p^2}-p)^n}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad n = \overline{0,\infty}. \tag{15.11}$$

Пример 15.4. Найти лапласовское изображение функции

$$f(t) = J_\nu(t), \qquad \nu > -1.$$

Решение. Рассмотрим уравнение Бесселя для $u(t)$

$$t^2u'' + tu' + (t^2 - \nu^2)u = 0. \tag{15.12}$$

Пусть $u(t) \risingdotseq U(p)$. По теореме о дифференцировании изображения

$$\begin{aligned}
&t^2u'' \risingdotseq (p^2U - pu_0 - u_1)'' = p^2U'' + 4pU' + 2U,\\
&tu' \risingdotseq -(pU - u_0)' = -pU' - U,\\
&t^2u \risingdotseq U'',
\end{aligned}$$

где $u_0 = u(0)$ и $u_1 = u'(0)$ — начальные данные. Так как точка $t = 0$ является особой для (15.12), то она не учитывается в операторном уравнении

$$(p^2 + 1)U'' + 3pU' + (1 - \nu^2)U = 0. \tag{15.13}$$

Сделаем в уравнении замену переменных

$$\begin{aligned}
&p = \operatorname{sh} q, \qquad U(p) = \frac{1}{\operatorname{ch} q}V(q),\\
&\frac{dU}{dp} = \frac{dU}{dq}\frac{dq}{dp} = \frac{dU}{dq}\Big/\frac{dp}{dp} = \frac{1}{\operatorname{ch} q}\Big[\frac{1}{\operatorname{ch} q}\frac{dV}{dq} - \frac{\operatorname{sh} q}{\operatorname{ch}^2 q}V\Big], \quad (15.14)\\
&\frac{d^2U}{dp^2} = \frac{d}{dq}\Big(\frac{dU}{dp}\Big)\Big/\frac{dp}{dq} =\\
&\qquad = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 q}\Big[\frac{d^2V}{dq^2} - 3\frac{\operatorname{sh} q}{\operatorname{ch} q}\frac{dV}{dq} + \frac{3\operatorname{sh}^2 q - \operatorname{ch}^2 q}{\operatorname{ch}^2 q}V\Big].
\end{aligned}$$

Тогда уравнение (15.13) преобразуется к виду

$$\frac{d^2V}{dq^2} - \nu^2V = 0. \tag{15.15}$$

Частными линейно независимыми решениями этого уравнения являются функции $e^{-\nu q}$ и $e^{\nu q}$. Так как

$$q = \operatorname{Arsh} p = \operatorname{Ln}(\sqrt{p^2+1} + p), \qquad \operatorname{ch} q = \sqrt{p^2+1},$$

то, возвратившись в частном решении $e^{-\nu q}$ к старой переменной p и функции U, получим частное решение

$$U(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}e^{-\nu\operatorname{Ln}(\sqrt{p^2+1}+p)} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\frac{1}{(\sqrt{p^2+1}+p)^\nu} \tag{15.16}$$

уравнения (15.13).

Функция $\sqrt{p^2+1}$ допускает выделение однозначных ветвей в плоскости $p = \operatorname{Re} p + i \operatorname{Im} p$ с вырезанными лучами $\operatorname{Re} p = 0$, $|\operatorname{Im} p| > 1$. Положим $\nu > -1$ и условимся рассматривать ту ветвь $\sqrt{p^2+1}$, которая на оси $\operatorname{Re} p$ принимает положительные значения. Тогда $U(p) \to 0$ при $|p| \to \infty$, $\operatorname{Re} p > 0$, и, следовательно, будет служить изображением некоторой функции $u(t)$, т.е.

$$u(t) \div \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \frac{1}{(\sqrt{p^2+1}+p)^\nu} = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^\nu}{\sqrt{p^2+1}}. \qquad (15.17)$$

Совершив в (15.17) предельный переход $\nu \to n$, получим (15.11). Следовательно,

$$u(t) = J_\nu(t) \div \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^\nu}{\sqrt{p^2+1}}, \qquad \nu > -1. \qquad (15.18)$$

Пример 15.5. Найти лапласовское изображение функции

$$f(t) = J_n(at).$$

Решение. По теореме подобия, если $f(t) \div \varphi(p)$, то

$$f(at) \div \frac{1}{a} \varphi\Big(\frac{p}{a}\Big).$$

Тогда

$$J_\nu(at) \div \frac{1}{a} \frac{[\sqrt{(p/a)^2+1} - p/a)^\nu}{\sqrt{(p/a)^2+1}} = \\ = \frac{1}{a^\nu} \frac{(\sqrt{p^2+a^2}-p)^\nu}{\sqrt{p^2+a^2}}. \qquad (15.19)$$

Пример 15.6. Найти лапласовское изображение функции $I_\nu(t)$.

Решение. По определению,

$$I_\nu(t) = i^{-\nu} J_\nu(it) \div i^{-\nu} \frac{1}{i^\nu} \frac{(\sqrt{p^2-1}-p)^\nu}{\sqrt{p^2-1}} = \\ = \frac{(p-\sqrt{p^2-1})^\nu}{\sqrt{p^2-1}}. \qquad (15.20)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (15.19).

Пример 15.7. Найти лапласовское изображение функции

$$f(t) = \frac{J_0(t) - 1}{t}.$$

Решение. Согласно теореме об интегрировании изображения,

$$\frac{f(t)}{t} \div \int\limits_p^\infty \varphi(q)dq, \tag{15.21}$$

где $f(t) \div \varphi(p)$. Из (15.19) найдем

$$\frac{J_0(t) - 1}{t} \div \int\limits_p^\infty \Big[\frac{1}{\sqrt{1+q^2}} - \frac{1}{q}\Big]dq. \tag{15.22}$$

Здесь мы учли, что $1 \div 1/p$. После интегрирования получим

$$\frac{J_0(t) - 1}{t} \div \ln \frac{q + \sqrt{1+q^2}}{q}\Big|_p^\infty = \ln 2 - \ln \frac{p + \sqrt{1+p^2}}{p}.$$

Окончательно получим

$$\frac{J_0(t) - 1}{t} \div \ln \frac{2p}{p + \sqrt{1+p^2}}. \tag{15.23}$$

Пример 15.8. Найти лапласовское изображение функции

$$f(t) = \frac{J_\nu(at)}{t}, \qquad \nu > 0.$$

Решение. Согласно теореме об интегрировании изображения (15.21), из (15.20) получим

$$\frac{J_\nu(at)}{t} \div \int\limits_p^\infty \frac{(\sqrt{a^2+q^2} - q)^\nu}{a^\nu \sqrt{a^2+q^2}} dq. \tag{15.24}$$

Сделаем в этом интеграле замену переменной $\sqrt{q^2+a^2} - q = u$. Тогда $q^2 + a^2 = q^2 + 2qu + u^2$ и

$$q = \frac{a^2 - u^2}{2u}, \qquad dq = \Big(-\frac{a^2}{2u^2} - \frac{1}{2}\Big)du = -\frac{a^2+u^2}{2u^2}du,$$
$$\frac{1}{\sqrt{a^2+q^2}} = \frac{1}{u+q} = \frac{1}{u + (a^2-u^2)/(2u)} = \frac{2u}{a^2+u^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{J_\nu(at)}{t} \risingdotseq \frac{1}{a^\nu} \int\limits_{\sqrt{p^2+a^2}-p}^{0} u^\nu \frac{2u}{a^2+u^2}\Big(-\frac{a^2+u^2}{2u^2}\Big)du =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{p^2+a^2}-p} u^{\nu-1}du = \frac{u^\nu}{\nu}\Big|_0^{\sqrt{p^2+a^2}-p}.$$

Окончательно получим

$$\frac{J_\nu(at)}{t} \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+a^2}-p)^\nu}{\nu a^\nu}. \tag{15.25}$$

Пример 15.9. Вычислить интеграл

$$I(t) = \int\limits_0^t \frac{J_n(\tau)J_m(t-\tau)}{\tau(t-\tau)}d\tau, \qquad n, m = \overline{1,\infty}.$$

Решение. Согласно теореме умножения изображений (теореме Бореля), если $f(t) \risingdotseq \varphi(p)$, $g(t) \risingdotseq \psi(p)$, то

$$\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \risingdotseq \varphi(p)\psi(p). \tag{15.26}$$

Положим в (15.26)

$$f(t) = \frac{J_n(t)}{t}, \qquad g(t) = \frac{J_m(t)}{t}.$$

С учетом (15.25) получим

$$I(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{n}\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^m}{m}.$$

Найдем оригинал правой части последнего соотношения. С учетом (15.25) имеем

$$\int\limits_0^t \frac{J_n(\tau)J_m(t-\tau)}{\tau(t-\tau)}d\tau = \frac{m+n}{mn}\frac{J_{n+m}(t)}{t}. \tag{15.27}$$

Здесь мы воспользовались свойством единственности: функции, имеющие одинаковые изображения, равны.

Пример 15.10. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^\infty [J_0(t) - \cos t]\frac{dt}{t}.$$

Решение. Согласно формуле Парсеваля,

$$\int_0^\infty f(t)\psi(t)dt = \int_0^\infty g(t)\varphi(t)dt, \tag{15.28}$$

где

$$f(t) \risingdotseq \varphi(p), \qquad g(t) \risingdotseq \psi(p).$$

Положим в (15.28)

$$f(t) = J_0(t) - \cos t, \qquad \psi(p) = \frac{1}{p}.$$

Тогда

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} - \frac{p}{p^2+1}, \qquad g(t) = 1.$$

Следовательно,

$$I = \int_0^\infty \Big(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} - \frac{p}{p^2+1}\Big)dp = \Big[\ln(p + \sqrt{p^2+1}) -$$

$$-\frac{1}{2}\ln(p^2+1)\Big]\Big|_0^\infty = \ln\frac{p+\sqrt{p^2+1}}{\sqrt{p^2+1}}\Big|_0^\infty = \ln 2.$$

Окончательно получим

$$\int_0^\infty [J_0(t) - \cos t]\frac{dt}{t} = \ln 2.$$

Пример 15.11. Используя частный случай теоремы Эфроса, вычислить интеграл

$$I(t) = \int_0^t J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})d\tau.$$

Решение. Используем частный случай теоремы Эфроса:

$$\int\limits_0^t J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\varphi(\sqrt{p^2+1}).$$

Положим здесь $f(t)=1$, $\varphi(p)=1/p$. Тогда

$$\frac{1}{q}\varphi(q)\Big|_{q=\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\,\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{p^2+1} \fallingdotseq \sin t.$$

Следовательно,

$$I(t)=\int\limits_0^t J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})d\tau = \sin t.$$

Пример 15.12. Используя частный случай теоремы Эфроса, вычислить интеграл

$$I(t)=\int\limits_0^t e^{-2\tau}J_0(2\sqrt{\tau(t-\tau)})d\tau.$$

Решение. Используем частный случай теоремы Эфроса:

$$\int\limits_0^t J_0(2\sqrt{\tau(t-\tau)})f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\varphi\Big(p+\frac{1}{p}\Big). \tag{15.29}$$

Положим здесь

$$f(t)=e^{-2t}, \qquad \varphi(p)=\frac{1}{p+2}.$$

Тогда

$$\varphi(q)\big|_{q=p+1/p} = \frac{1}{q+2}\Big|_{q=p+1/p} = \frac{p}{(p+1)^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p}\varphi\Big(p+\frac{1}{p}\Big) = \frac{1}{(p+1)^2} \fallingdotseq te^{-t}.$$

Окончательно получим

$$\int_0^t e^{-2\tau} J_0(2\sqrt{\tau(t-\tau)})d\tau = te^{-t}.$$

Пример 15.13. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^\infty J_{1/2}(x)dx. \tag{15.30}$$

Решение. *Первый способ.* Заметим, что исходный интеграл можно представить в виде

$$I = \int_0^\infty e^{-px} J_{1/2}(x)dx\Big|_{p=0},$$

где интеграл является преобразованием Лапласа функции $J_{1/2}(x)$. Следовательно,

$$I = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{1/2}}{\sqrt{p^2+1}}\Big|_{p=0} = 1.$$

Второй способ. Используем частный случай теоремы Эфроса:

$$\int_0^\infty \Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{\tau t})f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{1}{p^{\nu+1}}\varphi\Big(\frac{1}{p}\Big). \tag{15.31}$$

Сделаем в интеграле (15.30) замену $x = 2\sqrt{\tau t}$. Тогда

$$\int_0^\infty J_{1/2}(x)dx = \int_0^\infty \Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{1/2} J_{1/2}(2\sqrt{\tau t})d\tau =$$

$$= t^{1/4}\int_0^\infty \Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{1/4} J_{1/2}(2\sqrt{\tau t})\tau^{-1/4}d\tau.$$

Положим в формуле (15.31)

$$f(t) = t^{1/4}, \qquad \varphi(p) = \frac{\Gamma(3/4)}{p^{3/4}}, \quad \nu = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\int_0^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/4} J_{1/2}(2\sqrt{\tau t})d\tau \risingdotseq \frac{1}{p^{\nu+1}}\varphi(q)\Big|_{\substack{q=1/p\\ \nu=1/2}} =$$

$$= \frac{1}{p^{3/2}}\Gamma(3/4)p^{3/4} = \frac{\Gamma(3/4)}{p^{3/4}} \fallingdotseq t^{-1/4}.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty J_{1/2}(x)dx = t^{1/4}t^{-1/4} = 1.$$

Пример 15.14. Используя преобразование Лапласа, найти частное решение уравнения

$$ty'' + ky' + ay = bt^{n/2}J_n(2\sqrt{at}), \quad y(0) = 0, k = \overline{0, \infty}.$$

Решение. Пусть $y(t) \risingdotseq \bar{y}(p)$. По теореме о дифференцировании оригинала

$$y'(t) = p\bar{y} - y(0), \qquad y''(t) = p^2\bar{y} - py(0) - y'(0), \tag{15.32}$$

а по теореме о дифференцировании изображения

$$ty''(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}[p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0)] = -p^2\bar{y}'(p) - 2p\bar{y}(p) + y(0).$$

Тогда с учетом (15.3) и начального условия $y(0) = 0$ получим

$$[-p^2\bar{y}' - 2p\bar{y} + y(0)] + k[p\bar{y} - y(0)] + a\bar{y} = b\frac{a^{n/2}}{p^{n+1}}e^{-a/p}$$

или

$$\bar{y}' - \frac{a}{p^2}\bar{y} + \frac{2-k}{p}\bar{y} = -b\frac{a^{n/2}}{p^{n+3}}e^{-a/p}.$$

Решение уравнения будем искать методом Бернулли: $\bar{y}(p) = u(p)v(p)$, $\bar{y}(p)' = u'(p)v(p) + v'(p)u(p)$. Следовательно,

$$u'v + u\Big(v' + \frac{2-k}{p}v - \frac{a}{p^2}v\Big) = -\frac{ba^{n/2}}{p^{n+3}}e^{-a/p}.$$

Для определения функций $v(p)$ и $u(p)$ получим уравнения

$$v' + \frac{2-k}{p}v - \frac{a}{p^2}v = 0, \qquad u' = -\frac{ba^{n/2}}{p^{n+3}v(p)}e^{-a/p}.$$

Отсюда

$$v(p) = \frac{1}{p^{2-k}} e^{-a/p}, \qquad u' = -\frac{ba^{n/2}}{p^{n+k+1}}$$

и

$$u(p) = \frac{ba^{n/2}}{p^{n+k}} \frac{1}{n+k} + C.$$

Для функции $\bar{y}(p)$ получим

$$\bar{y}(p) = -\frac{b}{(n+k)\sqrt{a}} \frac{a^{(n+1)/2}}{p^{n+2}} e^{-a/p} + C\frac{e^{-a/p}}{p^{2-k}}.$$

Найдем оригинал функции $\bar{y}(p)$:

$$y(t) = \frac{b}{(n+k)\sqrt{a}} t^{(n+1)/2} J_{n+1}(2\sqrt{at}) + \\ +Ca^{(k-1)/2} t^{(1-k)/2} J_{1-k}(2\sqrt{at}).$$

Пример 15.15. С помощью преобразования Лапласа найти общее решение уравнения

$$ty'' + 2y' + ay = bt^{n/2} J_n(2\sqrt{at}).$$

Решение. Аналогично предыдущему примеру получим

$$[-p^2\bar{y}' - 2p\bar{y} + y(0)] + 2[p\bar{y} - y(0)] + ay = b\frac{a^{n/2}}{p^{n+1}} e^{-a/p}$$

или

$$\bar{y}' - \frac{a}{p^2}\bar{y} + \frac{1}{p}\bar{y} = -b\frac{a^{n/2}}{p^{n+3}} e^{-a/p} - \frac{1}{p^2} y(0).$$

Решение уравнения будем искать методом Бернулли:

$$\bar{y}(p) = u(p)v(p), \quad \bar{y}(p)' = u'(p)v(p) + v'(p)u(p).$$

Следовательно,

$$u'v + u\Big(v' + \frac{1}{p}v - \frac{a}{p^2}v\Big) = -\frac{ba^{n/2}}{p^{n+3}} e^{-a/p} - \frac{1}{p^2} y(0).$$

Для определения функций $v(p)$ и $u(p)$ получим уравнения

$$v' + \frac{1}{p}v - \frac{a}{p^2}v = 0, \qquad u' = -\frac{ba^{n/2}}{p^{n+3}v(p)} e^{-a/p} - \frac{1}{p^2} y(0).$$

Отсюда

$$v(p) = \frac{1}{p} e^{-a/p}, \qquad u' = -\frac{ba^{n/2}}{p^{n+2}} - \frac{1}{p^2} y(0) e^{a/p}$$

и

$$u(p) = -\frac{ba^{n/2}}{p^{n+1}} \frac{1}{n+1} + C + y(0) e^{a/p}.$$

Для функции $\bar{y}(p)$ получим

$$\bar{y}(p) = -\frac{b}{(n+2)\sqrt{a}} \frac{a^{(n+1)/2}}{p^{n+2}} e^{-a/p} + C \frac{e^{-a/p}}{p} - y(0).$$

Найдем оригинал функции $\bar{y}(p)$:

$$y(t) = -\frac{b}{(n+2)\sqrt{a}} t^{(n+1)/2} J_{n+1}(2\sqrt{at}) + C J_0(2\sqrt{at}) - y(0)\delta(t).$$

Это выражение содержит обобщенную функцию $\delta(t)$, которая не является решением исходного уравнения. В этом можно убедиться непосредственной подстановкой. Полученное противоречие связано с тем, что в общем решении слагаемое, пропорциональное $y(0)$, должно умножаться на функцию, не являющуюся оригиналом.

ГЛАВА 3

Классические ортогональные полиномы

16. Полиномы Лежандра

При изучении распределения ньютоновских потенциалов на шаре Лежандр ввел полиномы специального вида, названные впоследствии полиномами Лежандра, и исследовал их свойства.

$\Diamond$ Ортогональные полиномы Лежандра могут быть определены посредством:

1) производящей функции;
2) соответствующего дифференциального уравнения;
3) интегрального представления;
4) ортогонализации степеней x^k.

Заметим, что функции Бесселя целого индекса могут быть также определены с помощью производящей функции (см. разд. «Производящие функции. Интеграл Бесселя»).

$\blacklozenge$ Функция

$$\Psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}}, \qquad |t|<1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{16.1}$$

называется производящей функцией полиномов Лежандра.

Положив

$$x = \cos\theta, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

найдем

$$1+t^2-2tx = 1+t^2-2t\cos\theta = (t-e^{i\theta})(t-e^{-i\theta}).$$

Таким образом, $\Psi(t,x)$ как функция переменной t на интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ имеет две особые точки $t = t_{1,2} = \exp(\pm i\theta)$. Обе точки лежат на единичной окружности $|t| = 1$. Следовательно, $\Psi(t,x)$ как функция t при любом фиксированном вещественном x, $|x| \leqslant 1$, аналитична внутри круга единичного радиуса и разлагается в этом круге в равномерно сходящийся ряд Тейлора по степеням t.

Теорема 16.1. *Коэффициенты разложения функции* $\Psi(t,x)$ (16.1) *в ряд Тейлора*

$$\Psi(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{16.2}$$

по степеням t являются полиномами степени n по x.

Полиномы $P_n(x)$ называются полиномами Лежандра степени n.

Доказательство. Очевидно, что

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n}\Big|_{t=0}.$$

С другой стороны, n-ая производная от аналитической функции дается интегральной формулой Коши

$$\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{\Psi(\omega, x)}{\omega^{n+1}}d\omega = \frac{\partial^n\Psi(t,x)}{\partial t^n}\Big|_{t=0}, \tag{16.3}$$

где γ – произвольный кусочно гладкий замкнутый контур в комплексной плоскости ω, охватывающий точку $\omega = 0$ и лежащий внутри круга единичного радиуса.

В интеграле (16.3) сделаем замену переменных

$$\sqrt{1 - 2x\omega + \omega^2} = 1 - \omega z, \tag{16.4}$$

тогда

$$\begin{gathered} 1 - 2x\omega + \omega^2 = 1 - 2\omega z + \omega^2 z^2, \\ 2(z - x) = (z^2 - 1)\omega, \qquad \omega = \frac{2(x - z)}{1 - z^2}. \end{gathered} \tag{16.5}$$

При этом преобразовании точка $\omega = 0$ отображается в точку $z = x$. Тогда

$$\begin{aligned} d\omega = d\Big(\frac{2(z - x)}{z^2 - 1}\Big) = 2\Big[\frac{dz}{z^2 - 1} - \frac{z - x}{(z^2 - 1)^2}2zdz\Big] = \\ = \frac{2(z^2 - 1 - 2z^2 + 2zx)}{(z^2 - 1)^2}dz = -2\frac{1 + z^2 - 2xz}{(z^2 - 1)^2}dz; \end{aligned}$$

Аналогично с учетом (16.5) получим

$$1 - \omega z = \frac{(1 - z^2) - 2z(x - z)}{1 - z^2} = \frac{1 + z^2 - 2zx}{1 - z^2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Psi(\omega, x)d\omega = \frac{d\omega}{1 - \omega z} = \\ = -\frac{z^2 - 1}{1 + z^2 - 2zx}\frac{(-2)(1 + z^2 - 2zx)}{(z^2 - 1)^2}dz = \frac{2dz}{z^2 - 1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{\Psi(\omega, x)}{\omega^{n+1}} d\omega = \oint\limits_{\tilde{\gamma}} \Big[\frac{z^2-1}{2(z-x)}\Big]^{n+1} \frac{2dz}{z^2-1} = \frac{1}{2^n} \oint\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz,$$

где $\tilde{\gamma}$ – произвольный кусочно гладкий замкнутый контур, охватывающий точку $z = x$. (В последнем интеграле подынтегральное выражение как функция z аналитична всюду, кроме точки $z = x$. Следовательно, теперь замкнутый контур $\tilde{\gamma}$ произволен, если он охватывает точку $z = x$.) Таким образом,

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2^n} \oint\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz. \qquad (16.6)$$

Преобразуем

$$\frac{d^n}{dx^n} \int\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{(z^2-1)^n}{z-x} dz = n! \oint\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{(z^2-1)^n}{z-x} dz = (x^2-1)^n.$$

Отсюда

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n. \qquad (16.7)$$

Следовательно, $P_n(x)$ – полином порядка n, что и требовалось доказать.

♦ Формулы (16.7) называются формулами Родрига, а соотношение (16.6) – интегралом Шлёфли.

Следствие. Справедливо соотношение

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

Доказательство. По определению,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n.$$

Заменим x на $-x$ и z на $-z$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)(-z)^n.$$

Из сравнения двух рядов следует, что $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

Пример 16.1. Показать справедливость следующих соотношений:

$$P_n(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n.$$

Решение. Действительно, полагая в (16.1) $x = 1$ и $x = -1$, получим

$$\Psi(t,1) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n,$$

$$\Psi(t,-1) = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)t^n.$$

Первое уравнение дает $P_n(1) = 1$, второе – $P_n(-1) = (-1)^n$.

Пример 16.2. Найти значение $P_n(0)$ при любом n.

Решение. Аналогично примеру 16.1 положим в соотношении (16.1) $x = 0$. Получим

$$\Psi(t,0) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} t^{2k}.$$

Отсюда найдем

$$P_{2k+1}(0) = 0, \qquad P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Пример 16.3. Найти явный вид шести первых полиномов Лежандра.

Решение. Положив в (16.7) $n = \overline{0,5}$, получим функции

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \qquad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$
$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

графики которых приведены на рис. 12 и 13.

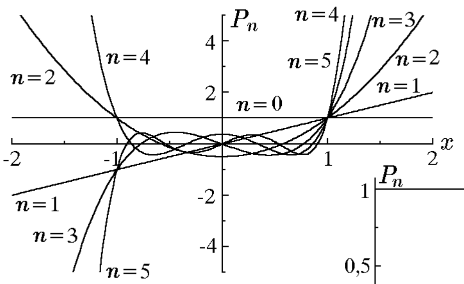

Рис. 12

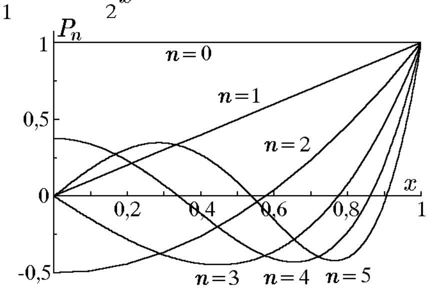

Рис. 13

Пример 16.4. Найти значения $P_n'(0)$ для любого n.

Решение. Воспользуемся равенством

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{t}{\sqrt{(1 - 2xt + t^2)^3}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) t^n.$$

При $x = 0$ получим

$$\frac{t}{\sqrt{(1 + t^2)^3}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(0) t^n.$$

Разложим выражение в левой части в ряд Тейлора по степеням

t:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(0)t^n = t\Big[1 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{(-3/2)(-5/2)}{2!}t^4 + \dots + \\ + (-1)^k \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}t^{2k} + \dots\Big], \quad |t| < 1.$$

Отсюда $P'_{2k}(0) = 0$ и

$$P'_{2k+1}(0) = (-1)^k \frac{(2k+1)!!}{2^k k!} = (-1)^k \frac{(2k+1)!}{(2^k k!)^2}, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Пример 16.5. Показать, что для полиномов Лежандра справедливо следующее представление:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}.$$

Решение. Согласно формуле Родрига,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

но

$$(x^2-1)^n = x^{2n} - nx^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{2n-4} - \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{2!}x^{2n-6} + \dots + (-1)^n,$$

т.е.

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{2n-2k}.$$

Тогда

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \\ = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^k (2n-2k)(2n-2k-1)\cdots(n+1-2k)x^{n-2k}$$

или

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{n!(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}.$$

Итак,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}.$$

Теорема 16.2. *Для полиномов Лежандра справедливо следующее интегральное представление:*

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [x+(x^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^n d\varphi. \tag{16.8}$$

Соотношение (16.8) *называется интегралом Лапласа.*

Доказательство. Используем интеграл Шлёфли (16.6)

$$P_n(x) = \frac{2^{-n}}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz,$$

где точка $z=x$ лежит внутри контура интегрирования γ. В качестве контура интегрирования возьмем окружность радиуса $|\sqrt{x^2-1}|$ с центром $z=x$. Тогда $z = x+\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}$, $-\pi \leqslant \varphi < \pi$. В самом деле, $|z-x| = |\sqrt{x^2-1}|$. Получим

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{[(x+\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi})^2-1]^n\sqrt{x^2-1}ie^{i\varphi}}{(\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi})^{n+1}}d\varphi$$

или

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}+(x^2-1)e^{2i\varphi}-1}{2\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}}\Big)^n d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{(x^2-1)(e^{-i\varphi}+e^{i\varphi})e^{i\varphi}}{2\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}}+x\Big)^n d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\sqrt{x^2-1}\cos\varphi+x)^n d\varphi = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi.$$

Выбор значения корня $\sqrt{x^2-1}$ здесь произволен, так как после возведения в n-ую степень и почленного интегрирования нечетные степени выпадают. Действительно,

$$\int\limits_0^\pi \cos^m\varphi d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^m\varphi d\varphi + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos^m\varphi d\varphi.$$

Во втором интеграле сделаем подстановку $\varphi = \psi + \pi/2$. Тогда

$$\int\limits_0^\pi \cos^m\varphi d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^m\varphi d\varphi + (-1)^m \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m\varphi d\varphi.$$

С учетом соотношения (см. разд. II.5)

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^m\varphi d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m\varphi d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma((m+1)/2)}{\Gamma(m/2+1)}.$$

При четном m получим

$$2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m\varphi d\varphi = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma((m+1)/2)}{\Gamma(m/2+1)},$$

при нечетном m — нуль. Таким образом, теорема доказана.

Следствие. *Справедливо неравенство*

$$|P_n(x)| \leqslant 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{16.9}$$

Доказательство. Пусть x – вещественная переменная, удовлетворяющая условию $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда

$$|x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi| = \sqrt{x^2 + (1-x^2)\cos^2\varphi} \leqslant 1,$$

так как $\cos^2\varphi \leqslant 1$. Имеем

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi,$$

но

$$\Big|\int\limits_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi\Big| \leqslant 1\cdot\pi,$$

следовательно, $|P_n(x)| \leqslant 1$, что и требовалось доказать.

Пример 16.6. Показать, что $P_n(\cos\theta)$ представляет собой полином по $\cos k\theta$. Определить коэффициенты этого полинома. Вывести неравенство

$$|P_n(x)| \leqslant 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Показать, что если $n > 0$, то $|P_n(x)| = 1$ лишь при $x = 1$ или $x = -1$.

Решение. В разложении

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n, \quad |z| < 1$$

положим $x = \cos\theta$. Получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) z^n.$$

Используя равенство

$$1-2z\cos\theta+z^2 = 1-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})z+z^2 = (1-ze^{i\theta})(1-ze^{-i\theta}),$$

найдем

$$\frac{1}{\sqrt{1-ze^{i\theta}}}\frac{1}{\sqrt{1-ze^{-i\theta}}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) z^n.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-ze^{i\theta}}} &= (1-ze^{i\theta})^{-1/2} = \\
&= 1+\frac{1}{2}ze^{i\theta}+\frac{1\cdot 3}{2^2 2!}z^2e^{2i\theta}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}z^3e^{3i\theta}+\ldots,\\
\frac{1}{\sqrt{1-ze^{-i\theta}}} &= (1-ze^{-i\theta})^{-1/2} = \\
&= 1+\frac{1}{2}ze^{-i\theta}+\frac{1\cdot 3}{2^2 2!}z^2e^{-2i\theta}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}z^3e^{-3i\theta}+\ldots
\end{aligned}$$

Тогда

$$\Bigl(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}z^k e^{ik\theta}\Bigr)\Bigl(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}z^k e^{-ik\theta}\Bigr) = \\
= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) z^n.$$

Перемножив выражения в скобках и приравняв коэффициенты при z^n в левой и правой частях, найдем

$$\begin{aligned}
P_n(\cos\theta) = {} & \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}(e^{in\theta}+e^{-in\theta}) + \\
& + \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{1}{2}(e^{i(n-2)\theta}e^{-i(n-2)\theta}) + \\
& + \frac{(2n-5)!!}{2^{n-2}(n-2)!}\frac{1\cdot 3}{2^2 2!}(e^{i(n-4)\theta}+e^{-i(n-4)\theta}) + \ldots
\end{aligned}$$

Число слагаемых в правой части равно $[n/2]$.

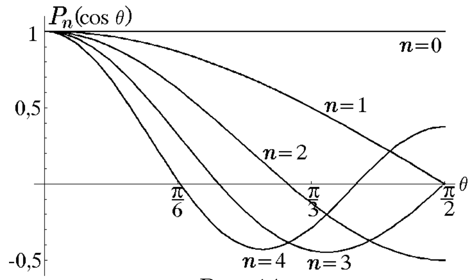

Рис. 14

Воспользовавшись формулой Эйлера, получим (см. рис. 14)

$$P_n(\cos\theta) = 2\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}\cos n\theta + 2\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{1}{2}\cos(n-2)\theta+$$
$$+2\frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos(n-4)\theta+\ldots \tag{16.10}$$

Тогда

$$|P_n(\cos\theta)| =$$
$$= \Big|2\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}\cos n\theta + 2\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{1}{2}\cos(n-2)\theta+\ldots\Big| \leqslant$$
$$\leqslant 2\frac{(2n-1)!!}{(2n)!} + 2\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{1}{2}+\cdots = P_n(1) = 1,$$

т.е. $|P_n(x)| \leqslant 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Равенство имеет место только при $\theta = k\pi$, k – целое (в этом случае косинусы одновременно обращаются в 1 или –1). Значит, $|P_n(x)| = 1$ при $x = 1$, $x = -1$.

17. Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра

Утверждение 17.1. *Справедливы следующие рекуррентные соотношения*

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0; \tag{17.1}$$
$$nP_n(x) - xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) = 0. \tag{17.2}$$

1. Продифференцируем производящую функцию $\Psi(t,x)$ (10.1) по x и получим

$$\frac{\partial\Psi(t,x)}{\partial x} = \frac{t}{(1+t^2-2tx)^{3/2}}.$$

Следовательно,

$$(1+t^2-2tx)\frac{\partial\Psi}{\partial x} - t\Psi = 0. \tag{17.3}$$

Аналогично, продифференцировав по t, получим

$$\frac{\partial\Psi(t,x)}{\partial t} = \frac{2t-2x}{(-2)(1+t^2-2tx)^{3/2}},$$

что дает

$$(1+t^2-2tx)\frac{\partial\Psi}{\partial t} + (t-x)\Psi = 0. \tag{17.4}$$

Домножим (17.3) на $(t-x)$, а (17.4) – на t и сложим

$$(t-x)\frac{\partial\Psi}{\partial x} + t\frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0. \tag{17.5}$$

Подставим в (17.4)

$$\Psi(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)t^k \quad \text{и} \quad \frac{\partial\Psi(t,x)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k(x)t^{k-1}.$$

Тогда

$$(1+t^2-2tx)\sum_{k=1}^{\infty} kP_k(x)t^{k-1} + (t-x)\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)t^k = 0.$$

Следовательно,

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} kP_k(x)t^{k-1}}_{k-1=n} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} kP_k(x)t^{k+1}}_{k+1=n} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} 2kxP_k(x)t^k}_{k=n} +$$
$$+ \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)t^{k+1}}_{k+1=n} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} xP_k(x)t^k}_{k=n} = 0.$$

Изменим в полученных суммах индекс суммирования по правилу, указанному под фигурной скобкой:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n + P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)t^n -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} 2nxP_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} xP_n(x)t^n - xP_0(x) = 0.$$

С учетом соотношения $P_1(x) = xP_0(x)$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)P_{n+1}(x) + (n-1)P_{n-1}(x) - \\ - 2nxP_n(x) + P_{n-1}(x) - xP_n(x)]t^n = 0,$$

Приравняв к нулю коэффициенты при одинаковых степенях t, приходим к (17.1).

Проделаем аналогичную процедуру с соотношением (17.5):

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP'_n(x)t^n = 0.$$

Положим во второй сумме $n + 1 = n$, тогда n изменяется в пределах $n = \overline{1,\infty}$. Учитывая, что $P'_0(x) = 0$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}[nP_n - xP'_n + P'_{n-1}]t^n = 0.$$

Таким образом, справедливость утверждения доказана.

Утверждение 17.2. *Справедливы следующие соотношения:*

$$(n+1)P_n(x) - P'_{n+1}(x) + xP'_n(x) = 0. \tag{17.6}$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) - (2n+1)P_n(x) = 0. \tag{17.7}$$

Действительно, продифференцировав (17.1) по x, имеем

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - \\ -(2n+1)xP'_n(x) + nP'_{n-1}(x) = 0.$$

Исключив с помощью (17.2) P'_{n-1}, запишем

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - \\ -(2n+1)xP'_n(x) + n(xP'_n(x) - nP_n(x)) = 0$$

или

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (n+1)xP'_n(x) - (n+1)^2P_n(x) = 0.$$

Таким образом, соотношение (17.6) доказано.

Сложив (17.2) с (17.6), получим (17.7).

Утверждение 17.3. *Справедливо соотношение*

$$\int P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] + C, \tag{17.8}$$

где C – произвольная постоянная.

Соотношение (17.8) непосредственно следует из уравнения (17.7).

Утверждение 17.4. *Полиномы Лежандра $y = P_n(x)$ удовлетворяют уравнению*

$$[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0. \tag{17.9}$$

Действительно, пусть $U(x) = (x^2-1)^n$. Тогда

$$U'(x) = n2x(x^2-1)^{n-1}$$

или

$$(x^2-1)U'(x) - 2nxU(x) = 0.$$

Продифференцируем это соотношение $n+1$ раз по x:

$$[(x^2-1)U'(x)]^{(n+1)} - 2n[xU(x)]^{(n+1)} = 0. \tag{17.10}$$

По формуле Лейбница

$$(UV)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} U^{(n-k)} V^{(k)}$$

имеем

$$\begin{gathered}
[(x^2-1)U'(x)]^{(n+1)} = (x^2-1)U^{(n+2)}(x) + \\
+(n+1)2xU^{(n+1)}(x) + \frac{(n+1)n}{2}2U^{(n)}(x); \\
2n[xU(x)]^{(n+1)} = xU^{(n+1)}(x) + (n+1)U^{(n)}(x).
\end{gathered}$$

Тогда из формулы (17.10) получим

$$\begin{gathered}
(x^2-1)[U^{(n)}(x)]'' + 2x(n+1)[U^{(n)}(x)]' + n(n+1)U^{(n)}(x) - \\
-2n\{x[U^{(n)}(x)]' + (n+1)U^{(n)}(x)\} = 0.
\end{gathered}$$

Обозначив $W = U^{(n)}(x)$, запишем

$$(x^2 - 1)W'' + 2xW' - n(n+1)W = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение, следовательно, $y(x) = CW(x)$, где $C = \text{const}$, – также его решение. Положив $C = 1/(2^n n!)$, получим

$$y = \frac{1}{n!2^n}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)} = P_n(x),$$

что и требовалось показать.

Пример 17.1. Используя рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра, доказать справедливость соотношения (17.9).

Решение. В соотношении (17.6) изменим индекс n на $n-1$, тогда

$$nP_{n-1}(x) - P_n'(x) + xP_{n-1}'(x) = 0.$$

Из полученного уравнения вычтем (17.2), умноженное на x. Получим

$$(x^2-1)P_n'(x) - nxP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Дифференцирование полученного выражения по x дает

$$[(x^2-1)P_n'(x)]' - n[xP_n(x)]' + nP_{n-1}'(x) = 0$$

или

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' + n[xP_n(x)]' - nP_{n-1}'(x) = 0.$$

Подставив сюда $P_{n-1}'(x)$ из (17.2), найдем

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' + nP_n(x) + nxP_n'(x) - n[xP_{n-1}'(x) - nP_n(x)] = 0,$$

откуда следует

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' + n(1+n)P_n(x) = 0$$

или

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(1+n)P_n(x) = 0.$$

Утверждение 17.5. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$(1-x^2)P_n'(x) = \frac{n(n+1)}{2n+1}[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)]. \qquad (17.11)$$

Используем тождество

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)] = -n(n+1)P_n(x).$$

Отсюда

$$(1-x^2)P_n'(x) = -n(n+1)\int P_n(x)dx + C$$

или

$$(1-x^2)P_n'(x) = n(n+1)\frac{1}{2n+1}[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)] + C.$$

Полагая $x = 1$, найдем $C = 0$ и соотношение доказано.

Утверждение 17.6. *Все нули полиномов Лежандра простые и расположены на интервале* $]-1,1[$.

Доказательство этого утверждения приведено в разделе, посвященном общим свойствам ортогональных полиномов (см. теорему 31.4).

Пример 17.2. Доказать, что

$$P_n'(1) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Решение. Имеем

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Полагаем $x = 1$. Получим

$$-2P_n'(1) + n(n+1)P_n(1) = 0.$$

Но $P_n(1) = 1$ при любом n. Следовательно,

$$P_n'(1) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

18. Ортогональность полиномов Лежандра

Утверждение 18.1. *Полиномы Лежандра разных порядков ортогональны на отрезке* $[-1,1]$ *с весом* $\rho(x) = 1$, *т.е.*

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, \qquad n \neq m. \tag{18.1}$$

Действительно,

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)] + n(n+1)P_n(x) = 0,$$
$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_m'(x)] + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

Домножим первое уравнение на $P_m(x)$, второе – на $P_n(x)$ и вычтем его из первого. Получим

$$P_m(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)] - P_n(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_m'(x)] +$$
$$+[(n+1)n-(m+1)m]P_n(x)P_m(x) = 0$$

или

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)[P_m(x)P_n'(x) - P_n(x)P_m'(x)]\} -$$
$$-(n-m)(m+n+1)P_n(x)P_m(x) = 0.$$

Проинтегрируем левую и правую части последнего равенства на интервале $]-1,1[$. Поскольку

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\{(1-x^2)[P_m(x)P_n'(x) - P_n(x)P_m'(x)]\}dx =$$
$$= \{(1-x^2)[P_m(x)P_n'(x) - P_n(x)P_m'(x)]\}\Big|_{-1}^{1} = 0,$$

то

$$(m+n+1)(n-m)\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = 0,$$

откуда и следует (18.1).

Утверждение 18.2. *Для нормы полиномов Лежандра справедливо соотношение*

$$\|P_n\|^2 = \int\limits_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx = \frac{2}{2n+1}. \qquad (18.2)$$

По формуле Родрига

$$J = \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{d^n(x^2-1)}{dx^n} \frac{d^n(x^2-1)}{dx^n} dx.$$

Проинтегрируем это выражение n раз по частям и учтем, что внеинтегральные слагаемые, содержащие $(x^2-1)|_{-1}^{1}$, равны нулю. Тогда

$$J = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \Big[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\Big] dx.$$

Заметив, что

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = (2n)!,$$

получим

$$J = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx.$$

Сделав в интеграле

$$I = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx,$$

замену переменных $1-x=2t$, $dx=-2dt$, запишем

$$I = (-1)^n 2^{2n+1} \int_{0}^{1} t^n(1-t)^n dt = (-1)^n 2^{2n+1} B(n+1, n+1) =$$

$$= (-1)^n 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = (-1)^n \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Следовательно,

$$J = \frac{2}{2n+1}.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Теорема 18.1. *Полиномы Лежандра $P_n(x)$ являются решением задачи Штурма–Лиувилля*

$$\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\Big]+\lambda y=0, \tag{18.3}$$
$$|\lim_{|x|\to 1} y(x)|<\infty, \qquad x\in[-1,1]$$

с собственными значениями $\lambda = n(n+1)$.

♦ *Уравнение (18.3) при любом λ называется уравнением Лежандра, а его решения, отличные от тождественного нуля, — функциями Лежандра.*

Доказательство. Полиномы Лежандра удовлетворяют условиям (18.3) при $\lambda = n(n+1)$. Рассмотрим теперь $\lambda \neq n(n+1)$. Введем число ν

$$\nu=\sqrt{\lambda+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}, \qquad \lambda=\nu(\nu+1), \quad \nu\neq n. \tag{18.4}$$

Уравнение (18.3) примет вид

$$(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+\nu(\nu+1)y(x)=0. \tag{18.5}$$

Будем искать $y_\nu(x)$ в виде ряда по степеням x

$$y_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(\nu)x^k. \tag{18.6}$$

Подставив (18.6) в уравнение (18.5) и приравняв к нулю коэффициенты при одинаковых степенях x, найдем рекуррентные соотношения для коэффициентов $C_k(\nu)$:

$$C_{k+2}(\nu)=\frac{(k-\nu)(k+\nu+1)}{(k+2)(k+1)}C_k(\nu). \tag{18.7}$$

Посредством (18.7) все $C_k(\nu)$ с четными номерами выразятся через $C_0(\nu)$, с нечетными — через $C_1(\nu)$. Коэффициенты $C_0(\nu)$ и $C_1(\nu)$ остаются произвольными (общее решение, как и должно быть, зависит от двух произвольных постоянных). С учетом известного свойства гамма-функции

$$\Gamma(1+x)=x\Gamma(x),$$

прямой проверкой можно убедиться, что рекуррентному соотношению удовлетворяют следующие коэффициенты:

$$C_{2n}(\nu)=\frac{\Gamma(n-\nu/2)\Gamma(n+(1+\nu)/2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1/2)}A(\nu), \tag{18.8}$$

$$C_{2n+1}(\nu)=\frac{\Gamma(n+(1-\nu)/2)\Gamma(n+1+\nu/2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+3/2)}B(\nu), \tag{18.9}$$

где $A(\nu)$, $B(\nu)$ произвольны. Следовательно,

$$y_\nu(x) = A(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n-\nu/2)\Gamma(n+(1+\nu)/2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1/2)}x^{2n}+$$
$$+B(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+(1-\nu)/2)\Gamma(n+1+\nu/2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+3/2)}x^{2n+1}. \qquad (18.10)$$

Легко установить (проделать самим), что при $|x| < 1$ ряды (18.10) сходятся абсолютно и равномерно, т.е. для x, лежащих внутри круга единичного радиуса, эти ряды определяют все множество функций Лежандра $y_\nu(x)$.

Используя формулу Стирлинга для функции $\Gamma(n + a)$ при $n \to \infty$:

$$\Gamma(n+a) = \sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+a-1/2}[1+O(1/n)], \qquad (18.11)$$

из (18.8) и (18.9) при $n \to \infty$ получим

$$C_{2n}(\nu) = \frac{A(\nu)}{n} + O(1/n^2), \quad C_{2n+1}(\nu) = \frac{B(\nu)}{n} + O(1/n^2). \qquad (18.12)$$

Но знакоположительные ряды

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}, \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$$

при $x \to \pm 1$ расходятся, а поэтому при $x \to \pm 1$ расходятся оба ряда в (18.10). Можно было бы попытаться устранить эту расходимость, например, при $x \to 1$ за счет выбора $A(\nu)$ и $B(\nu)$ (и это действительно можно сделать!), но тогда нельзя будет устранить расходимость при $x \to -1$. Тем самым доказано, что решение задачи (18.3) возможно лишь при целых ν, т.е. при $\lambda = n(n+1)$.

Пример 18.1. Решить задачу Штурма–Лиувилля

$$y'' + \operatorname{ctg} x y' + \lambda y = 0, \qquad |y(0)| < \infty, \quad |y(\pi)| < \infty. \qquad (18.13)$$

Нормировать собственные функции задачи.

Решение. Сделаем в уравнении замену переменных

$$t = \cos x. \tag{18.14}$$

Поскольку $dt/dx = -\sin x$ и

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\sin x\frac{dt}{dx},\\
&\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(-\sin x\frac{dy}{dt}\Big) =\\
&\quad = -\cos x\frac{dy}{dt} - \sin x\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} = \sin^2 x\frac{d^2y}{dt^2} - \cos x\frac{dy}{dt},
\end{aligned}$$

получим

$$\sin^2 x\frac{d^2y}{dt^2} - \cos x\frac{dy}{dt} + \frac{\cos x}{\sin x}\Big(-\sin x\frac{dy}{dt}\Big) + \lambda y = 0 \tag{18.15}$$

или

$$(1-\cos^2 x)\frac{d^2y}{dt^2} - 2\cos x\frac{dy}{dt} + \lambda y = 0.$$

Исключим x из уравнения (18.15) с помощью (18.14) с учетом того, что $t|_{x=0} = 1$, $t|_{x=\pi} = -1$. Тогда для определения $y(x)$ получим следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$\begin{aligned}
&(1-t^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2t\frac{dy}{dt} + \lambda y = 0, \\
&|y(1)| < \infty, \qquad |y(-1)| < \infty.
\end{aligned} \tag{18.16}$$

Решением задачи (18.16) являются (см. теорему 18.1) собственные значения $\lambda_n = n(n+1)$ и собственные функции $y_n(t) = C_nP_n(t)$ с условием ортогональности

$$\langle y_n(t)|y_kt)\rangle = \int\limits_{-1}^{1} C_nC_kP_n(t)P_k(t)dt = \frac{2C_n^2}{2n+1}\delta_{nk},$$

где $n, k = \overline{0,\infty}$.

Возвратимся к исходным переменным. Положив

$$C_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}},$$

получим решение задачи (18.13)

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(\cos x), \qquad \lambda_n = n(n+1) \tag{18.17}$$

с условием ортогональности

$$\langle y_n(x)|y_k(x)\rangle = \sqrt{\frac{(2n+1)(2k+1)}{4}} \times$$
$$\times \int\limits_0^\pi P_n(\cos x) P_k(\cos x) \sin x \, dx = \delta_{nk}$$

(см. теорему 18.1).

Теорема 18.2. *Полином $f(x)$ степени n тогда и только тогда удовлетворяет условиям*

$$\int\limits_{-1}^1 x^k f(x) dx = 0 \quad \textit{при} \quad k = \overline{0, n-1},$$

когда $f(x)$ имеет вид $CP_n(x)$, где C – постоянная, а $P_n(x)$ – полином Лежандра порядка n.

Доказательство. Пусть $f(x) = CP_n(x)$. Система функций $\{P_n(x)\colon n = \overline{0, \infty}\}$ ортогональна на $]-1, 1[$. Следовательно,

$$\int\limits_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0, \qquad k = \overline{0, n-1}.$$

Предположим, что для некоторой функции $f(x)$ справедливо

$$\int\limits_{-1}^1 x^k f(x) dx = 0, \qquad k = \overline{0, n-1}.$$

Проинтегрировав по частям k раз, получим

$$\int\limits_{-1}^1 x^k f(x) dx = f_1(1) - k f_2(1) + k(k-1) f_3(1) - \cdots + (-1)^k k! f_{n+1}(1),$$

где
$$f_1(x) = \int\limits_{-1}^{x} f(t)dt, \qquad f_2(x) = \int\limits_{-1}^{x} f_1(t)dt, \ldots$$

Получим $f_1(1) = 0$ при $k = 0$, $f_2(1) = 0$ при $k = 1$ и т.д., $f_n(1) = 0$ при $k = n - 1$. В силу принятых обозначений

$$f_n(x) = \int\limits_{-1}^{x} dt \int\limits_{-1}^{t} dt_1 \cdots \int\limits_{-1}^{t_{n-1}} f(t_{n-1})dt_{n-1}.$$

Очевидно, что функции $f_k(x)$ при $k = \overline{1, n-1}$ являются производными порядка $(n-k)$ от функции $f_n(x)$, причем в точках $x = 1$ и $x = -1$ функция $f_n(x)$ и ее производные до $(n-1)$-го порядка включительно обращаются в нуль, т.е. точки $x = 1$ и $x = -1$ будут нулями функции $f_n(x)$ кратности n. Учитывая, кроме того, что $f(x)$ – многочлен степени $2n$ от x, найдем представление

$$f_n(x) = a_0(x-1)^n(x+1)^n.$$

Тогда
$$f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f_n(x) \qquad \text{или} \qquad f(x) = a_0,$$
т.е. $f(x) = CP_n(x)$, что доказывает теорему.

Пример 18.2. Вычислить

$$\int\limits_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx, \qquad n, m = \overline{0, \infty}.$$

Решение. Если $m < n$, то

$$J_n^m \equiv \int\limits_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx = 0,$$

так как полином из ортогональной системы ортогонален любому полиному меньшей степени (см. теорему 18.2). Пусть $m \geqslant n$. Применим интегрирование по частям, положив $U = x^m$, $dV = P_n(x)dx$. Получим

$$J_n^m = x^m \frac{1}{2n+1}[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)]\Big|_{-1}^{1} -$$
$$-\frac{m}{2n+1}\int\limits_{-1}^{1} x^{m-1}P_{n+1}(x)dx + \frac{m}{2n+1}\int\limits_{-1}^{1} x^{m-1}P_{n-1}(x)dx.$$

Внеинтегральное слагаемое равно нулю, поэтому

$$J_n^m = -\frac{m}{2n+1}\int_{-1}^{1} x^{m-1}P_{n+1}(x)dx+$$
$$+\frac{m}{2n+1}\int_{-1}^{1} x^{m-1}P_{n-1}(x)dx. \tag{18.18}$$

Если $m = n$, то

$$\int_{-1}^{1} x^{m-1}P_{n+1}(x)dx = 0,$$

и получим рекуррентное соотношение

$$J_n^n = \frac{n}{2n+1}J_{n-1}^{n-1},$$

откуда найдем

$$J_n^n = \frac{n}{2n+1}\frac{n-1}{2n-1}\frac{n-2}{2n-3}\cdots\frac{1}{3}J_0^0,$$

но

$$J_0^0 = \int_{-1}^{1} P_0(x)dx = \int_{-1}^{1} dx = 2.$$

Тогда

$$\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)dx = 2\frac{n!}{(2n+1)!!}.$$

Пусть m строго больше n. Из соотношения

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

выразим

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

и подставим в равенство (18.18). Получим

$$J_n^m = -\frac{m}{n+1}J_n^m + \frac{mn}{(n+1)(2n+1)}J_{n-1}^{m-1} + \frac{m}{2n+1}J_{n-1}^{m-1}$$

или

$$\frac{n+m+1}{n+1}J_n^m = \frac{m}{n+1}J_{n-1}^{m-1}.$$

Итак,

$$J_n^m = \frac{m}{m+n+1}J_{n-1}^{m-1}.$$

Тогда

$$J_n^m = \frac{m}{m+n+1}\frac{m-1}{m+n-1}J_{n-2}^{m-2} =$$
$$= \frac{m}{m+n+1}\frac{m-1}{m+n-1}\frac{m-2}{m+n-3}\cdots\frac{m-(n-1)}{m+n-(2n-3)}J_0^{m-n}.$$

Но

$$J_0^{m-n} \equiv \int\limits_{-1}^{1} x^{m-n}P_0(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} x^{m-n}dx =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m-n=2k-1, \\ 2\int\limits_0^1 x^{m-n}dx = \dfrac{2}{m-n+1}, & \text{если} \quad m-n=2k. \end{cases}$$

Получили $J_n^m = 0$ при $m-n=2k-1$, $k=\overline{1,\infty}$. Если $m-n=2k$, $k=\overline{1,\infty}$, то

$$J_n^m = \frac{2m(m-1)(m-2)\cdots}{(m+n+1)(m+n-1)(m+n-3)\cdots}\times$$
$$\times\frac{\cdots(m-n+1)}{\cdots(m-n+3)(m-n+1)} =$$
$$= 2\frac{n!(m-n-1)!!}{(m-n)!(m+n+1)!!} = 2\frac{m!}{(m-n)!!(m+n+1)!!}$$

и окончательно

$$\int\limits_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m<n; \\ 2\dfrac{n!}{(2n+1)!!} & \text{при} \quad m=n; \\ 0 & \text{при} \quad m>n, \quad m-n=2k-1; \\ 2\dfrac{m!}{(m-n)!!(m+n+1)!!} & \text{при} \quad m>n, \quad m-n=2k. \end{cases}$$

Пример 18.3. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^5 x^2 P_n^2(x/5)dx. \qquad (18.19)$$

Решение. Сделаем в интеграле замену переменных $x/5 = t$. Тогда

$$I = \int_0^1 (5t)^2 P_n^2(t) 5dx = 125 \int_0^1 [tP_n(t)]^2 dt. \qquad (18.20)$$

В силу четности подынтегрального выражения (18.20) можно представить в виде

$$I = \frac{125}{2} \int_{-1}^1 [tP_n(t)]^2 dt.$$

Воспользуемся рекуррентной формулой (17.1)

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0,$$

откуда

$$tP_n(t) = \frac{1}{2n+1}\big[(n+1)P_{n+1}(t) + nP_{n-1}(t)\big].$$

Следовательно,

$$I = \frac{125}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{(2n+1)^2}\big[(n+1)P_{n+1}(t) + nP_{n-1}(t)\big]^2 dt =$$

$$= \frac{125}{2(2n+1)^2} \int_{-1}^1 \big[(n+1)^2 P_{n+1}^2(t) + 2n(n+1)P_{n+1}(t)P_{n-1}(t) +$$

$$+ n^2 P_{n-1}^2(t)\big] dt = \frac{125}{2(2n+1)^2}\Big[(n+1)^2 \int_{-1}^1 P_{n+1}^2(t) dt +$$

$$+ 2n(n+1) \int_{-1}^1 P_{n+1}(t)P_{n-1}(t) dt + n^2 \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(t) dt\Big].$$

С учетом условия ортогональности

$$\int_{-1}^1 P_n(t)P_k(t) dt = \|P_n\|^2 \delta_{nk} = \frac{2}{2n+1}\delta_{nk}$$

получим

$$I = \frac{125}{2(2n+1)^2}\{(n+1)^2\|P_{n+1}\|^2 + n^2\|P_{n-1}\|^2\}$$

или

$$I = \frac{125}{(2n+1)^2}\Big\{\frac{(n+1)^2}{2n+3} + \frac{n^2}{2n-1}\Big\}.$$

Пример 18.4. Показать, что

$$\int\limits_0^1 x^2 P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}.$$

Решение. Подынтегральная функция будет четной при любом n, так как $P_{n+1}(x)$ и $P_{n-1}(x)$ одновременно четные или нечетные функции. Из рекуррентного соотношения

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

выразим

$$xP_{n+1}(x) = \frac{1}{2n+3}[(n+2)P_{n+2}(x) + (n+1)P_n(x)],$$
$$xP_{n-1}(x) = \frac{1}{2n-1}[nP_n(x) + (n-1)P_{n-2}(x)].$$

Тогда в силу ортогональности $\{P_n(x):\ n=\overline{0,\infty}\}$ на $]-1,1[$ получим

$$\int\limits_0^1 x^2 P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)}\int\limits_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}.$$

Пример 18.5. Показать, что интеграл

$$J = \int\limits_{-1}^1 x(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx$$

равен нулю при $m-n \neq \pm1$ и найти его значение при $m-n = \pm1$.

Решение. Из соотношения (17.11) найдем

$$(1-x^2)P_n'(x) = \frac{n(n+1)}{2n+1}[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)].$$

Очевидно, что

$$xP_m'(x) = [xP_m(x)]' - P_m(x).$$

Тогда

$$J = \int\limits_{-1}^{1} x(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2n+1}\int\limits_{-1}^{1}[xP_m(x)]'[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)]dx$$

при условии $m \neq n \pm 1$ (или $m - n \neq \pm 1$) в силу ортогональности $\{P_n(x):\, n = \overline{0,\infty}\}$ на $]-1,1[$.

Проведем интегрирование по частям, положив

$$U = P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x), \quad dV = [xP_m(x)]'dx,$$

тогда $dU = [P_{n-1}'(x) - P_{n+1}'(x)]dx$, $V = xP_m(x)$. Внеинтегральное слагаемое равно нулю, так как $P_{n-1}(1) - P_{n+1}(1) = 0$, $P_{n-1}(-1) - P_{n+1}(-1) = 0$. Получим

$$J = n(n+1)\int\limits_{-1}^{1} xP_n(x)P_m(x)dx.$$

Из рекуррентной формулы

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n+1}(x) = 0$$

выразим $xP_n(x)$. Тогда

$$J = \frac{n(n+1)^2}{2n+1}\int\limits_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_m(x)dx +$$

$$+\frac{n^2(n+1)}{2n+1}\int\limits_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_m(x)dx.$$

Если $m \neq n+1$ и $m \neq n-1$ (или $m - n \neq \pm 1$), то $J = 0$.

Рассмотрим случай $m = n+1$. Имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} x(1-x^2)P'_n(x)P'_m(x)dx =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2n+1}\int\limits_{-1}^{1} xP'_{n+1}(x)[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)]dx =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2n+1}\int\limits_{-1}^{1}[xP_{n+1}(x)]'[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)]dx -$$

$$- \frac{n(n+1)}{2n+1}\int\limits_{-1}^{1} P_{n+1}(x)[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)]dx =$$

$$= n(n+1)\int\limits_{-1}^{1} xP_{n+1}(x)P_n(x)dx + \frac{n(n+1)}{2n+1}\|P_{n+1}(x)\|^2 =$$

$$= n(n+1)\int\limits_{-1}^{1}\Big[\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)\Big]P_{n-1}(x)dx +$$

$$+ \frac{n(n+1)}{2n+1}\|P_{n+1}(x)\|^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)^2}{2n+1}\|P_{n+1}(x)\|^2 + \frac{n(n+1)}{2n+1}\|P_{n+1}(x)\|^2 =$$

$$= \frac{2n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Для $m = n-1$ аналогично найдем

$$\int\limits_{-1}^{1} x(1-x^2)P'_n(x)P'_m(x)dx = \frac{2n(n+1)(n-1)}{(2n-1)(2n+1)}.$$

19. Ряд Фурье–Лежандра

$\Diamond$ *Можно показать, что произвольная функция* $f(x)$*, удовлетворяющая условиям Дирихле на отрезке* $[-1,1]$*, разла-*

гается в ряд по полиномам Лежандра

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x), \qquad a_k = \frac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx. \quad (19.1)$$

В каждой точке, где функция $f(x)$ непрерывна, ряд (19.1) *сходится к этой функции, а в точках разрыва – к функции* $f^*(x) = [f(x+0) + f(x-0)]/2$.

♦ *Ряд* (19.1) *называется рядом Фурье–Лежандра.*

◊ Напомним, что функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условиям Дирихле, если она:

1) равномерно ограничена на $[a, b]$;
2) имеет на $[a, b]$ конечное число экстремумов;
3) непрерывна на $[a, b]$ за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва первого рода.

◊ В случае бесконечного интервала ($a = -\infty$ и/или $b = \infty$) функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, если она подчиняется, помимо условий 1 и 2, справедливых на любом конечном промежутке, дополнительному условию абсолютной (или квадратичной) интегрируемости, т.е.

$$\int\limits_{a}^{b} |f(x)|dx < \infty.$$

Пример 19.1. Найти коэффициенты ряда Фурье по полиномам Лежандра для функции $f(x) = |x|$.

Решение. Имеем

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

где

$$C_n = \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\int\limits_{-1}^{1} |x| P_n(x)dx.$$

Очевидно, что $C_{2k+1} = 0$, $k = \overline{1, \infty}$. Вычислим

$$C_{2k} = \frac{4k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} |x|P_k(x)dx = (4k+1)\int\limits_{0}^{1} xP_{2k}(x)dx, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

При $k=0$ непосредственно находим $C_0 = 1/2$. Для $k=\overline{1,\infty}$ проведем интегрирование по частям, положив $U = x$, $dV = P_{2k}(x)dx$. Тогда

$$dU = dx, \qquad V = \frac{1}{4k+1}[P_{2k+1}(x) - P_{2k-1}(x)].$$

Получим

$$C_{2k} = x[P_{2k+1}(x) - P_{2k-1}(x)]\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 [P_{2k+1}(x) - P_{2k-1}(x)]dx =$$
$$= -\frac{P_{2k+2}(x) - P_{2k}(x)}{4k+3}\Big|_0^1 + \frac{P_{2k}(x) - P_{2k-2}(x)}{4k-1}\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{P_{2k+2}(0) - P_{2k}(0)}{4k+3} - \frac{P_{2k}(0) - P_{2k-2}(0)}{4k-1}.$$

Преобразуем полученный результат. Из рекуррентного соотношения

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

при $x=0$ найдем

$$(n+1)P_{n+1}(0) = -nP_{n-1}(0).$$

Тогда

$$P_{2k+2}(0) = -\frac{2k+1}{2k+2}P_{2k}(0), \qquad P_{2k-2}(0) = -\frac{2k}{2k-1}P_{2k}(0).$$

Подставив, получим

$$C_{2k} = \Big[\frac{1}{4k-1}\Big(-\frac{2k}{2k-1} - 1\Big) + \frac{1}{4k+3}\Big(-\frac{2k+1}{2k+2} - 1\Big)\Big]P_{2k}(0)$$

или

$$C_{2k} = -\frac{4k+1}{(2k-1)(2k+2)}P_{2k}(0).$$

Итак,

$$C_{2k} = (-1)^{k+1}\frac{(4k+1)(2k-1)!!}{(2k-1)(2k+2)(2k)!!}, \quad k=\overline{1,\infty}.$$

или

$$C_{2k} = (-1)^{k+1}\frac{(4k+1)(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}, \quad k=\overline{1,\infty}.$$

Пример 19.2. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -1 \leqslant x < \alpha \\ 1 & \text{при} \quad \alpha < x \leqslant 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье–Лежандра.

Решение. Функция удовлетворяет условиям разложимости. Тогда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x),$$

где

$$C_n = \Big(n + \frac{1}{2}\Big) \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} C_n &= \Big(n + \frac{1}{2}\Big) \int\limits_{\alpha}^{1} P_n(x) dx = \\ &= \Big(n + \frac{1}{2}\Big) \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)]\Big|_{\alpha}^{1} = \\ &= -\frac{1}{2}[P_{n+1}(\alpha) - P_{n-1}(\alpha)], \quad n = \overline{1, \infty} \end{aligned}$$

и

$$C_0 = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{1} P_0(x) dx = \frac{1}{2}(1 - \alpha).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $P_0(x) = 1$. Искомое разложение запишется в виде

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \alpha) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(\alpha) - P_{n-1}(\alpha)] P_n(x).$$

В частности, если

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

получим

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0)]P_n(x),$$

но

$$P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0) = \\ = \begin{cases} 0, & n = 2k,\ k = \overline{1,\infty}; \\ (-1)^{k+1}\dfrac{(2k)!(4k+3)}{2^{2k+1}k!(k+1)!}, & n = 2k+1,\ k = \overline{0,\infty}. \end{cases}$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(4k+3)(2k)!}{2^{2k+2}k!(k+1)!}P_{2k+1}(x).$$

Пример 19.3. Разложить в ряд Фурье по полиномам Лежандра на интервале $]-1,1[$ функцию $f(x) = x^2 - x + 1$.

Решение. Так как $f(x)$ – полином второй степени, то в разложении

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$$

коэффициенты $C_n = 0$ при $n > 2$, т.е.

$$f(x) = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x).$$

Коэффициенты C_0, C_1, C_2 можно вычислить по формуле

$$C_n = \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\int\limits_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

при $n = 0, 1, 2$ или непосредственно, используя явный вид полиномов Лежандра

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

т.е.

$$x^2 - x + 1 = C_0\cdot 1 + C_1 x + C_2\frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{3}{2}C_2 x^2 + C_1 x + C_0 - \frac{C_2}{2}.$$

Окончательно получим

$$x^2 - x + 1 = \frac{4}{3}P_0(x) - P_1(x) + \frac{2}{3}P_2(x).$$

Пример 19.4. Разложить функцию

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

в ряд по полиномам Лежандра.

Решение. Для данной функции выполнены достаточные условия сходимости ряда Фурье–Лежандра. Тогда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x),$$

где

$$C_n = \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\int\limits_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx.$$

Для нашей функции коэффициенты C_n ряда вычислим, применив следующий прием. Воспользуемся разложением

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n, \qquad |z| < 1 \quad (-1 < x < 1).$$

Умножим это равенство на $f(x)$ и проинтегрируем от $x = -1$ до $x = 1$. Интегрирование возможно при равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n$ на $[-1, 1]$, что следует из оценки $|P_n(x)| \leqslant 1$, справедливой на интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Приходим к равенству

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1-2xz+z^2}}dx = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}P_n(x)dx, \quad |z| < 1.$$

Вычислим интеграл, стоящий в левой части равенства. Сделаем подстановку

$$u = \sqrt{\frac{1-x}{1-2xz+z^2}}.$$

Тогда

$$x = \frac{1-u^2(1+z^2)}{1-2u^2z}, \quad dx = -\frac{(1-z)^2}{2z^2}\frac{udu}{(u^2-1/2z)^2}.$$

Получим

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1-2xz+z^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1+z^2)^2}{2z^2} \int\limits_{\sqrt{2}/(1+z)}^{0} \frac{u^2 du}{(u^2-1/2z)^2} =$$

$$= \frac{(1+z^2)^2}{2\sqrt{2}z^2} \int\limits_{0}^{\sqrt{2}/(1+z)} u \frac{udu}{u^2-1/2z}.$$

Проинтегрируем по частям:

$$J = \frac{(1+z^2)^2}{2\sqrt{2}z^2} \Big\{ - \frac{u}{2u^2-1/z}\Big|_0^{\sqrt{2}/(1+z)} + \int\limits_0^{\sqrt{2}/(1+z)} \frac{du}{2u^2-1/z} \Big\} =$$

$$= \frac{(1+z^2)^2}{2\sqrt{2}z^2} \Big[- \frac{u}{2u^2-1/z} + \frac{1}{4\sqrt{1/2z}} \ln \frac{u-1/\sqrt{2z}}{u+1/\sqrt{2z}} \Big]\Big|_0^{\sqrt{2}/(1+z)} =$$

$$= \frac{(1+z^2)^2}{2\sqrt{2}z^2} \Big[\frac{\sqrt{2}z(1+z)}{(1-z)^2} + \frac{\sqrt{2z}}{4} \ln \frac{2\sqrt{z}-1-z}{2\sqrt{z}+1-z} \Big] =$$

$$= \frac{(1+z^2)^2}{2\sqrt{2}z^2} \Big[\frac{\sqrt{2}z(1+z)}{(1-z)^2} + \frac{\sqrt{2z}}{2} \ln \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} \Big] =$$

$$= \frac{1}{2z} \Big[1+z+\frac{(1-z)^2}{2\sqrt{z}} \ln \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} \Big].$$

Распишем подробно

$$\frac{1}{2z}\Big[1+z+\frac{(1-z)^2}{2\sqrt{z}}\ln\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2z}\Big\{1+z+\frac{(1-z)^2}{2\sqrt{z}}(-2)\Big[\sqrt{z}+\frac{(\sqrt{z})^3}{3}+\frac{(\sqrt{z})^5}{5}+\ldots\Big]\Big\}=$$

$$=\frac{1}{2z}\Big[1+z-(1-z)^2\Big(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{5}+\ldots\Big)\Big]=$$

$$=\frac{1}{2z}\Big[1+z-(1-z)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2n-1}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2z}\Big[1+z-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2n-1}}_{n-1=k}+2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{2n-1}}_{n=k}-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{2n-1}}_{n+1=k}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2z}\Big[1+z-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2k+1}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{2k-1}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^k}{2k-3}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2z}\Big[1+z-1-\frac{z}{3}+2z-\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{2k+1}-\frac{2}{2k-1}+\frac{1}{2k-3}\Big)z^k\Big]=$$

$$=\frac{4}{3}-4\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{(4k^2-1)(2k-3)}.$$

Положив в последней сумме $k-1=n$, получим

$$\frac{1}{2z}\Big[1+z+\frac{(1-z)^2}{2\sqrt{z}}\ln\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\Big]=\frac{4}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(4n^2-1)(2n-3)}.$$

Итак, мы приходим к равенству

$$\frac{4}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(4n^2-1)(2n-3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}P_n(x)dx\Big)z^n.$$

Отсюда

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}P_0(x)dx=\frac{4}{3},$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}P_n(x)dx=-\frac{4}{(4n^2-1)(2n+3)},\quad n=\overline{1,\infty}.$$

Но

$$C_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x)dx,$$

следовательно, $C_0 = 2/3$,

$$C_n = -\frac{2}{(2n-1)(2n+3)}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Искомое разложение имеет вид

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{3}P_0(x) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} P_n(x), \quad -1 < x < 1.$$

Пример 19.5. Разложить функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

в ряд по полиномам Лежандра.

Решение. Разложение имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x),$$

где

$$C_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n(x)dx, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Так как функция $f(x)$ – четная, то $C_{2k+1} = 0$, а

$$C_{2k} = \frac{4k+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} P_{2k}(x)dx = \frac{4k+1}{2} \int\limits_{0}^{\pi} P_{2k}(\cos\theta)d\theta,$$

где $k = \overline{0, \infty}$. Использовав соотношение (16.10), запишем

$$P_{2k}(\cos\theta) = 2\frac{(4k-1)!!}{(4k)!} \cos 2k\theta + 2\frac{(4k-3)!!}{(2k-2)!!}\frac{1}{2} \cos(2k-2)\theta +$$
$$+2\frac{(4k-5)!!}{(4k-4)!!}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \cos(2k-4)\theta + \cdots + \frac{(4k-2k-1)!!}{(4k-2k)!!}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Проинтегрировав это равенство от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$, найдем

$$\int\limits_{0}^{\pi} P_{2k}(\cos\theta)d\theta = \Big[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\Big]^2 \pi, \qquad k = \overline{1, \infty}.$$

Тогда

$$C_{2k} = \frac{4k+1}{2}\Big[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\Big]^2\pi, \qquad k = \overline{1,\infty}.$$

Непосредственно вычислим

$$C_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, для $-1 < x < 1$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}P_0(x) + \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(4k+1)\Big[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\Big]^2 P_{2k}(x).$$

Проинтегрировав это равенство в пределах от 0 до x, получим разложение

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2}P_1(x) + \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\Big]^2[P_{2k+1}(x) - P_{2k-1}(x)].$$

Пример 19.6. Найти сумму ряда

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)P_n(y)z^n, \tag{19.2}$$

$$|x| < 1, \quad |y| < 1, \quad 0 \leqslant z < 1.$$

Решение. Воспользуемся представлением полиномов Лежандра $P_n(x)$ через интеграл Лапласа (16.8). Поменяв местами интегрирование и суммирование, получим

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}R(x,y,z,\theta)d\theta, \tag{19.3}$$

где обозначено

$$R(x,y,z,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}[(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)z]^n P_n(y).$$

Подынтегральное выражение $R(x,y,z,\theta)$ в (19.3) можно просуммировать по n, если воспользоваться определением полиномов Лежандра через производящую функцию. С учетом (16.2), где положим

$$\omega = z(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta),$$

получим

$$R(x,y,z,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\omega^n P_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2-2\omega y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\omega - y + i\sqrt{1-y^2}}} \frac{1}{\sqrt{\omega - y - i\sqrt{1-y^2}}}. \qquad (19.4)$$

Проведем в (19.3) замену переменных с помощью соотношений

$$\cos\theta = \frac{1-(1+\gamma)\sin^2\varphi}{1-(1-\gamma)\sin^2\varphi}, \quad d\theta = \frac{2\sqrt{\gamma}d\varphi}{1-(1-\gamma)\sin^2\varphi}, \qquad (19.5)$$

где

$$\gamma = \frac{zx - y - i\sqrt{1-y^2} + iz\sqrt{1-x^2}}{zx - y - i\sqrt{1-y^2} - iz\sqrt{1-x^2}},$$

$\theta_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $\varphi_2 = \pi/2$. После такой замены получим

$$\Phi(x,y,z) = \frac{2}{\pi a}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}; \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \qquad (19.6)$$

$$a^2 = 1 + z^2 + 2z[\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy],$$
$$b^2 = 1 + z^2 - 2z[\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} + xy].$$

Таким образом, функция $\Phi(x,y,z)$ выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ (см. [16], стр. 919, разд. 8.112.1)

$$\Phi(x,y,z) = \frac{2}{\pi a}K(k). \qquad (19.7)$$

Пример 19.7. Найти сумму ряда

$$F(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x)P_n(y)z^n, \qquad (19.8)$$
$$|x| < 1, \quad |y| < 1, \quad 0 \leqslant z < 1$$

и показать, что для полиномов Лежандра справедливо условие полноты (2.9)

$$\lim_{z\to 1-0} F(x,y,z) = \delta(x-y), \qquad |x| < 1, \quad |y| < 1. \qquad (19.9)$$

Решение. Заметим, что имеет место тождество

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}\Phi + z\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \qquad (19.10)$$

где $\Phi(x,y,z)$ определена формулой (19.7). Учтем непосредственно проверяемые соотношения (см. обозначения примера 19.6)

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{a^2 - 1 + z^2}{2az}, \quad \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{(1-z^2)k}{2a^2 z} \qquad (19.11)$$

и выражение (см. [16], стр. 921, разд. 8.112.2) для производной полного эллиптического интеграла первого рода

$$k\frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k)}{1-k^2} - K(k), \tag{19.12}$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода (см. [16], стр. 921, разд. 8.112.2), и получим для $F(x, y, z)$ выражение

$$F(x, y, z) = \frac{(1-z^2)E(k)}{\pi a b^2}. \tag{19.13}$$

Рассмотрим для произвольной функции $\varphi(x)$, непрерывной на отрезке $[-1, 1]$, интеграл

$$J(x, z) = \int\limits_{-1}^{1} F(x, y, z)\varphi(y)dy. \tag{19.14}$$

Сделаем в нем замену переменных

$$y = x + (1-z)\sqrt{1-x^2}t, \tag{19.15}$$
$$-\frac{1}{1-z}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \leqslant t \leqslant \frac{1}{1-z}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

после чего перейдем к пределу $z \to 1-0$. Учтем, что при $z \to 1-0$ справедливы асимптотическое оценки (см. разд. <Простейшие асимптотические оценки> части I)

$$a^2 \sim 4(1-x^2), \quad b^2 \sim (1-z)^2(1+t^2), \quad k \sim 1, \quad E(1) \sim 1. \tag{19.16}$$

В результате для $J(x, z)$ найдем

$$\lim_{z\to 1-0} J(x, z) = \varphi(x)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2} = \varphi(x), \tag{19.17}$$

что и доказывает соотношение (19.9).

Пример 19.8. Найти сумму ряда

$$S(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}P_n(x). \tag{19.18}$$

◊ Этот ряд используется при построении функции Грина внутренней задачи Неймана.

Решение. Для вычисления суммы этого ряда представим (16.2) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

Это соотношение проинтегрируем по t, предварительно разделив обе его части на t:

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{1-2tx+t^2}} = \int \frac{dt}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) \int t^{n-1} dt.$$

Тогда

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{1-2tx+t^2}} = \ln t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} P_n(x).$$

Отсюда находим выражение для искомой суммы (19.18)

$$S(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} P_n(x) = -\ln t + \int \frac{dt}{t\sqrt{1-2tx+t^2}}. \qquad (19.19)$$

Для вычисления интеграла в правой части воспользуемся первой подстановкой Эйлера

$$\sqrt{1-2tx+t^2} = y - t, \qquad (19.20)$$

тогда

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{1-2tx+t^2}} = \ln \frac{t(x+1)}{1-xt+\sqrt{t^2-2tx+1}} + C,$$

где C – произвольная функция переменной x. Возвратившись к (19.18), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} P_n(x) = \ln \frac{x+1}{1-xt+\sqrt{t^2-2tx+1}} + C. \qquad (19.21)$$

Произвольную постоянную C можно вычислить, положив $t = 0$ в (19.21):

$$C = -\ln \frac{x+1}{2}.$$

В результате сумма ряда (19.18) будет равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} P_n(x) = \ln \frac{2}{1-xt+\sqrt{t^2-2tx+1}}. \qquad (19.22)$$

Пример 19.9. Найти сумму ряда

$$S(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} P_n(x). \qquad (19.23)$$

Решение. Разложение (16.2) проинтегрируем по t:

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\int\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(x)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}P_n(x). \quad (19.24)$$

Вычисление интеграла (19.24) с помощью подстановки (19.20) дает

$$I=\int\frac{dy}{y-x}=\ln(y-x)+C=\ln(t-x+\sqrt{1-2tx+t^2})+C.$$

Определение постоянной, как и в предыдущем случае, приводит к

$$C=-\ln(1-x).$$

В результате ряд (19.23) можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}P_n(x)=\ln\frac{t-x+\sqrt{1-2tx+t^2}}{1-x},\quad |t|<1. \quad (19.25)$$

20. Присоединенные функции Лежандра

♦ Функции

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}P_n^{(m)}(x) \quad (20.1)$$

называются присоединенными функциями Лежандра (см. рис. 15 и 16).

◊ Заметим, что при $m>n$ присоединенные функции Лежандра $P_n^m(x)$ тождественно равны нулю, а при $m=0$ совпадают с полиномами Лежандра, т.е. $P_n^0=P_n(x)$.

Пример 20.1. Найти явный вид функций Лежандра $P_1^1(x)$, $P_2^1(x)$.

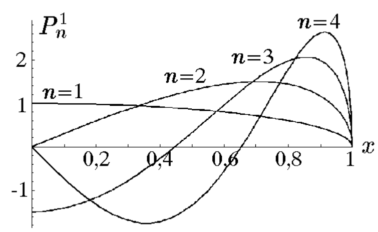

Рис. 15

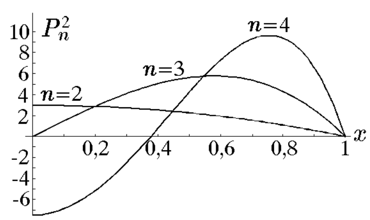

Рис. 16

Решение. Действительно, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2-1)/2$. Следовательно, $P_1^{(1)}(x) = 1$, $P_2^{(1)}(x) = 3x$. Окончательно получим

$$P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2}.$$

Теорема 20.1. *Присоединенные функции Лежандра P_n^m удовлетворяют уравнению*

$$\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\Big] + \Big[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\Big]y = 0. \tag{20.2}$$

Уравнение (20.2) называется уравнением Лежандра порядка m, или уравнением для присоединенных функций Лежандра.

Доказательство. Продифференцируем уравнение Лежандра

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0$$

m раз по x и воспользуемся формулой Лейбница. Тогда

$$\begin{gathered}(1-x^2)P_n^{(m+2)} - 2xmP_n^{(m+1)} - \frac{2m(m-1)}{2}P_n^{(m)} - \\ -2xP_n^{(m+1)} - 2mP_n^{(m)} + (n+1)nP_n^{(m)} = 0\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}(1-x^2)[P_n^{(m)}]'' - 2x(m+1)[P_n^{(m)}]' - \\ -[m(m+1) + n(n+1)]P_n^{(m)} = 0.\end{gathered} \tag{20.3}$$

Пусть $y(x) = (\sqrt{1-x^2})^m P_n^{(m)}$. Тогда

$$\begin{aligned}&P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{-m/2}y(x),\\&[P_n^{(m)}(x)]' = mx(1-x^2)^{-(m+2)/2}y(x) + (1-x^2)^{-m/2}y'(x),\\&[P_n^{(m)}(x)]'' = m(1-x^2)^{-(m+2)/2}y(x) + \\&\qquad + m(m+2)x^2(1-x^2)^{-(m+4)/2}y(x) + \\&\qquad + 2mx(1-x^2)^{-(m+2)/2}y'(x) + (1-x^2)^{-m/2}y''(x).\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в формулу (20.3), получим

$$\begin{gathered}(1-x^2)[m(1-x^2)^{-(m+2)/2}y(x) + \\ + m(m+2)x^2(1-x^2)^{-(m+4)/2}y(x) + \\ + 2mx(1-x^2)^{-(m+2)/2}y'(x) + (1-x^2)^{-m/2}y''(x)] - \\ -2x(m+1)[mx(1-x^2)^{-(m+2)/2}y(x) + (1-x^2)^{-m/2}y'(x)] - \\ -[m(m+1) - n(n+1)](1-x^2)^{-m/2}y(x) = 0.\end{gathered}$$

Сократив на множитель $(1-x^2)^{-m/2}$ и приведя подобные, получим

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y - \frac{m^2}{1-x^2}y = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Для присоединенных функций Лежандра справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$P_n^{m+1}(x) - \frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}}P_n^m(x) + \\ +(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(x) = 0. \qquad (20.4)$$

$$[(1-x^2)^{m/2}P_n^m(x)]' + \\ +(n+m)(n-m+1)(1-x^2)^{(m-1)/2}P_n^{m-1}(x). \qquad (20.5)$$

Доказательство. Заменив в соотношении (20.3) m на $m-1$, имеем

$$(1-x^2)P_n^{(m+1)} - 2xmP_n^{(m)} - [n(n+1) - m(m-1)]P_n^{(m-1)} = 0.$$

С учетом того, что

$$n(n+1) - m(m-1) = n^2 - m^2 + n + m = (n+m)(n-m+1),$$

запишем

$$(1-x^2)P_n^{(m+1)} - 2xmP_n^{(m)} + (n+m)(n-m+1)P_n^{(m-1)} = 0. \qquad (20.6)$$

Домножив (20.6) на $(1-x^2)^{(m-1)/2}$, получим

$$(1-x^2)^{(m+1)/2}P_n^{(m+1)}(x) - \frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)^{m/2}P_n^{(m)}(x) + \\ +(n+m)(n-m+1)(1-x^2)^{(m-1)/2}P_n^{(m-1)}(x) = 0,$$

откуда с учетом определения (20.1) и следует рекуррентная формула (20.4).

Домножив (20.6) на $(1-x^2)^{m-1}$, найдем

$$(1-x^2)^m P_n^{(m+1)} - 2mx(1-x^2)^{m-1}P_n^{(m)} + \\ +(n+m)(n-m+1)(1-x^2)^{m-1}P_n^{(m-1)} = 0$$

или

$$[(1-x^2)^m P_n^{(m)}]' + \\ +(n+m)(n-m+1)(1-x^2)^{m-1}P_n^{(m-1)} = 0, \qquad (20.7)$$

откуда с учетом определения (20.1) и следует рекуррентная формула (20.5).

Теорема 20.2. *Присоединенные функции Лежандра* $Y = P_n^m(x)$ *являются решениями следующей задачи Штурма–Лиувилля*

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y - \frac{m^2}{1-x^2}y = 0, \qquad (20.8)$$

$$\lim_{|x|\to 1-0} \big|y(x)\big| < \infty \qquad (20.9)$$

с собственными значениями $\lambda_n = n(n+1)$.

Доказательство. Пока без доказательства.

Теорема 20.3. *Присоединенные функции Лежандра образуют на интервале* $]-1,1[$ *ортогональную с весом* $\rho(x)=1$ *систему функций с соотношением ортогональности*

$$\int\limits_{-1}^{1} P_k^m(x)P_n^m(x)dx = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\delta_{nk}. \qquad (20.10)$$

Доказательство. Обозначим

$$A_{k,n}^m = \int\limits_{-1}^{1} P_k^m(x)P_n^m(x)dx. \qquad (20.11)$$

Тогда из определения присоединенных функций Лежандра получим

$$A_{k,n}^m = \int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^m\Big[\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\Big]\Big[\frac{d^m}{dx^m}P_k(x)\Big]dx.$$

Проведем интегрирование по частям, положив

$$U = (1-x^2)^m P_n^{(m)}(x), \quad dV = P_k^{(m)}(x)dx.$$

Получим

$$A_{k,n}^m = (1-x^2)^m P_n^{(m)}(x) P_k^{(m-1)}(x)\Big|_{-1}^{1} - \\ - \int\limits_{-1}^{1} P_k^{(m-1)}(x)[(1-x^2)^m P_n^{(m)}(x)]' dx. \qquad (20.12)$$

Очевидно, что внеинтегральное слагаемое равно нулю.

Использовав рекуррентное соотношение (20.7), выражение (20.12) можно записать в виде

$$A_{k,n}^m = (n-m+1)(n+m)\int\limits_{-1}^{1} P_k^{(m-1)}(x)(1-x^2)^{m-1} P_n^{(m-1)}(x) dx$$

или, согласно (20.11),

$$A_{k,n}^m = (n-m+1)(n+m)A_{k,n}^{m-1}. \qquad (20.13)$$

Применим формулу (20.13) к $A_{k,n}^{m-1}$, $A_{k,n}^{m-2}$ и т.д. Получим

$$A_{k,n}^m = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} A_{k,n}^0. \qquad (20.14)$$

В силу (20.11) и (18.2)

$$A_{k,n}^0 = \|P_n(x)\|^2 \delta_{kn} = \frac{2}{2n+1}\delta_{kn},$$

и теорема доказана.

Можно показать, что справедливо следующее

Утверждение 20.1. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на интервале $]-1,1[$, то для функции $f(x)$ справедливо разложение*

$$f(x) = \sum_{n=m}^{\infty} C_n^m P_n^m(x), \qquad (20.15)$$

где

$$C_n^m = \frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n^m(x) dx$$

— коэффициенты Фурье, а сам ряд (20.15) называется рядом Фурье по присоединенным функциям Лежандра.

Теорема 20.4. *Для присоединенных функций Лежандра при* $0 < k, m \leqslant n$ *справедливо условие ортогональности*

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^k(x)P_n^m(x)\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{mk}. \tag{20.16}$$

Доказательство. 1. Докажем ортогональность этих функций. Согласно (20.2), функции $P_n^k(x)$ удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \Big(\lambda - \frac{k^2}{1-x^2}\Big)y = 0 \quad \text{при} \quad \lambda = n(n+1).$$

Следовательно,

$$(1-x^2)[P_n^k(x)]'' - 2x[P_n^k(x)]' + \Big[n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2}\Big]P_n^k(x) = 0;$$

$$(1-x^2)[P_n^m(x)]'' - 2x[P_n^m(x)]' + \Big[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\Big]P_n^m(x) = 0.$$

Умножим эти соотношения, соответственно, на $P_n^m(x)$ и $P_n^k(x)$ и вычтем из первого второе. Найдем

$$\Big[(1-x^2)\{[P_n^k(x)]'P_n^m(x) - [P_n^m(x)]'P_n^k(x)\}\Big]' + \\ + \frac{m^2-k^2}{1-x^2}P_n^k(x)P_n^m(x) \equiv 0.$$

Проинтегрировав в пределах от $x=-1$ до $x=1$, получим

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^k(x)P_n^m(x)\frac{dx}{1-x^2} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq k.$$

Тем самым доказана ортогональность присоединенных функций Лежандра, у которых нижние индексы одинаковы, а верхние различны, на интервале $]-1,1[$ с весом $\rho(x) = 1/(1-x^2)$.

2. Вычислим интеграл (20.16) при $k=m$. Обозначим

$$B_n^m = \int\limits_{-1}^{1} [P_n^m(x)]^2\frac{dx}{1-x^2}$$

или с учетом определения (20.1)

$$B_n^m = \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^{m-1}[P_n^{(m)}(x)]^2 dx.$$

Один из полиномов $P_n^{(m)}(x)$ преобразуем по формуле (20.3). Тогда

$$B_n^m = \frac{1}{(n+m+1)(n-m)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m-1}P_n^{(m)}(x)\times$$

$$\times[2(m+1)xP_n^{(m+1)}(x)-(1-x^2)P_n^{(m+2)}(x)]dx =$$

$$= \frac{-1}{(n+m+1)(n-m)}\left\{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m P_n^{(m)}(x)P_n^{(m+2)}(x)dx-\right.$$

$$\left.-2(m+1)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m-1}xP_n^{(m)}(x)P_n^{(m+1)}(x)dx\right\}. \qquad (20.17)$$

Перейдем в первом интеграле от полиномов $P_n^{(m)}(x)$ к функциям $P_n^m(x)$. В силу доказанной ортогональности присоединенных функций Лежандра по верхнему индексу имеем

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m P_n^{(m)}(x)P_n^{(m+2)}(x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}P_n^m(x)P_n^{m+2}(x)\frac{dx}{1-x^2} = 0. \qquad (20.18)$$

Второй интеграл в (20.17) проинтегрируем по частям, положив

$$U = P_n^{(m)}(x)P_n^{(m+1)}(x),$$

$$dU = \{[P_n^{(m+1)}(x)]^2 + P_n^{(m)}(x)P_n^{(m+2)}(x)\}dx;$$

$$dV = (1-x^2)^{m-1}xdx, \qquad V = -\frac{1}{2m}(1-x^2)^m.$$

Тогда

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m-1}xP_n^{(m)}(x)P_n^{(m+1)}(x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2m}(1-x^2)^m P_n^{(m)}(x)P_n^{(m+1)}(x)\Big|_{-1}^{1} +$$

$$+\frac{1}{2m}\left\{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m[P_n^{(m+1)}(x)]^2dx+\right.$$

$$\left.+\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m P_n^{(m)}(x)P_n^{(m+2)}(x)dx\right\}.$$

Внеинтегральное слагаемое равно нулю. С учетом (20.18) последний интеграл также равен нулю. Тогда

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m-1}xP_n^{(m)}(x)P_n^{(m+1)}(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2m}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m[P_n^{(m+1)}(x)]^2dx = \frac{1}{2m}B_n^{m+1}. \qquad (20.19)$$

Здесь мы воспользовались определением коэффициентов B_n^m.

Подставив (20.19) в (20.17), получим рекуррентное соотношение

$$B_n^m = \frac{m+1}{m(n+m+1)(n-m)}B_n^{m+1}. \qquad (20.20)$$

Применив полученное соотношение $(n-m-1)$ раз, имеем

$$B_n^m = \frac{n(m+n)!}{m(n-m)!(2n)!}B_n^n.$$

Из определения коэффициентов B_n^m запишем

$$B_n^n = \int_{-1}^{1}[P_n^n(x)]^2\frac{dx}{1-x^2} =$$

$$= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n-1}[P_n^{(n)}(x)]^2dx = \Big(\frac{(2n)!}{2^nn!}\Big)^2\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n-1}dx.$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$P_n^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^nn!},$$

которое следует из формулы Родрига для полиномов Лежандра. В интеграле

$$I = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n-1}dx = 2\int_{0}^{1}(1-x^2)^{n-1}dx$$

сделаем замену переменных $x^2=t$. Тогда

$$I = \int_{0}^{1}t^{1/2-1}(1-t)^{n-1}dt = B\Big(\frac{1}{2},n\Big) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n)}{\Gamma(n+1/2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}(n-1)!}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}/(2^n)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{n(2n-1)!!n!2^n} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{n(2n)!},$$

откуда

$$B_n^n = \frac{(2n)!}{n}$$

и, соответственно,

$$B_n^m = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!},$$

и теорема доказана.

Пример 20.2. Показать, что система функций $\{P_{2m}^{(k)}(x)\colon m = \overline{0,\infty}\}$ ортогональна с весом $(1-x^2)^k$ на интервале $]0,1[$.

Решение. Из (20.10) следует, что

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^k(x) P_s^k(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq s$$

или

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^k \frac{d^k}{dx^k} P_n(x) \frac{d^k}{dx^k} P_s(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq s.$$

В частности,

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^k \frac{d^k}{dx^k} P_{2m}(x) \frac{d^k}{dx^k} P_{2l}(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq l.$$

Так как подынтегральная функция четна при любом k, то

$$\int\limits_{0}^{1} (1-x^2)^k \frac{d^k}{dx^k} P_{2m}(x) \frac{d^k}{dx^k} P_{2l}(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq l,$$

что и требовалось доказать.

Пример 20.3. Найти несколько первых членов ряда Фурье по присоединенным функциям Лежандра второго порядка на интервале $]-1,1[$ для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ -1 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Решение. Так как $0 \leqslant k \leqslant n$, $k = 2$, то $n = \overline{2,\infty}$, т.е. суммирование ведется от $n = 2$:

$$f(x) = C_2 P_2^2(x) + C_3 P_3^2(x) + \dots + C_n P_n^2(x) + \dots;$$

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-2)!}{(n+2)!} \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n^2(x) dx.$$

Здесь
$$P_n^2(x) = (1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2}.$$
Так как по условию $f(x)$ – нечетная функция, а $P_n^2(x)$ – четная при $n=2k$, то $C_{2k}=0$, $k=\overline{1,\infty}$. Вычислим C_{2k+1}, $k=\overline{1,\infty}$, по формуле
$$C_{2k+1} = \frac{4k+1}{2}\frac{(2k-1)!}{(2k+3)!}2\int\limits_0^1(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_{2k+1}(x)dx.$$
Имеем
$$C_3 = \frac{7}{2}\frac{1!}{5!}2\int\limits_0^1(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\Big)dx = \frac{7}{32};$$
$$C_5 = \frac{11}{2}\frac{3!}{7!}2\int\limits_0^1(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{63}{8}x^5-\frac{70}{8}x^3+\frac{15}{8}x\Big)dx =$$
$$= \frac{11\cdot 3!}{7!}\int\limits_0^1\frac{1}{8}(63\cdot 20x^3-70\cdot 6x-63\cdot 20x^5-70\cdot 6x^3)dx =$$
$$= \frac{11\cdot 3!}{7!8}\Big(\frac{63\cdot 20}{4}-\frac{70\cdot 6}{2}-\frac{63\cdot 20}{6}-\frac{70\cdot 6}{4}\Big)dx = 0;$$
$$C_7 = \frac{15}{2}\frac{5!}{9!}2\int\limits_0^1(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_7(x)dx.$$
Получили
$$f(x) = \frac{7}{32}P_3^2(x)+\ldots, \qquad -1<x<1.$$

Теорема 20.5. *Функция*
$$F_m(x,t) = \frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!(1-2xt+t^2)^{(2m+1)/2}} \tag{20.21}$$
является производящей функцией для присоединенных функций Лежандра, т.е.
$$F(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty}P_{m+l}^m(x)t^l. \tag{20.22}$$

Доказательство. Из (20.21) имеем
$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n.$$

Продифференцировав это равенство m раз по x, получим

$$(2m-1)!!t^m(1-2xt+t^2)^{-(2m+1)/2} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} t^n.$$

Умножив полученное соотношение на $(1-x^2)^{m/2}$ и разделив на t^m, приходим к равенству

$$(1-x^2)^{m/2}(2m-1)!!(1-2xt+t^2)^{-(2m+1)/2} = \\ = \sum_{n=m}^{\infty}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}t^{n-m}.$$

Введем новый индекс суммирования $l = n - m$. Тогда

$$\frac{(1-x^2)^{m/2}(2m-1)!!}{(1-2xt+t^2)^{(2m+1)/2}} = \sum_{l=0}^{\infty}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_{m+l}(x)}{dx^m}t^l.$$

Но, согласно определению (20.1),

$$(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_{k+s}(x)}{dx^k} = P_{k+s}^m(x).$$

Следовательно,

$$\frac{(1-x^2)^{m/2}(2m)!}{2^m m!(1-2xt+t^2)^{(2m+1)/2}} = \sum_{l=0}^{\infty}(1-x^2)^{m/2}P_{m+l}^m(x)t^l,$$

что и требовалось доказать.

Пример 20.4. Вычислить

$$\int_0^1 (1-x^2)[P_n'(x)]^2 dx.$$

Решение. В силу четности подынтегральной функции

$$J = \int_0^1 (1-x^2)[P_n'(x)]^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-x^2)[P_n'(x)]^2 dx.$$

Проинтегрируем по частям, положив $U = (1-x^2)P_n'(x)$, $dV = P_n'(x)dx$. Тогда $V = P_n(x)$,

$$dU = \frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)]dx = -n(n+1)P_n(x)dx.$$

Найдем

$$J = \frac{1}{2}(1-x^2)P_n'(x)P_n(x)\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{2}n(n+1)\|P_n(x)\|^2 = \frac{n(n+1)}{2n+1}.$$

Если использовать присоединенные функции Лежандра, то

$$(1-x^2)^{1/2}\frac{dP_n(x)}{dx} = P_n^1(x)$$

и

$$\int\limits_0^1 (1-x^2)[P_n'(x)]^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}[P_n^1(x)]^2 dx =$$
$$= \frac{1}{2}\|P_n^1(x)\|^2 = \frac{1}{2}\frac{(n+1)!}{(n-1)!}\frac{2}{2n+1} = \frac{n(n+1)}{2n+1}.$$

21. Сферические функции

♦ Функции

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = e^{im\varphi}P_n^m(\cos\theta) \tag{21.1}$$

называются сферическими функциями, или сферическими гармониками первого рода (см. рис. 17 – 24).

Теорема 21.1. *Функции $Y_n^m(\theta,\varphi)$ удовлетворяют уравнению*

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + n(n+1)Y = 0. \tag{21.2}$$

Доказательство. Подставим в (21.2) $Y(\theta,\varphi) = e^{im\varphi}y(\theta)$. Сократив на $e^{im\varphi}$, для функции $y(\theta)$ получим уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta\frac{dy}{d\theta}\Big) + \Big(-\frac{m^2}{\sin^2\theta} + n(n+1)\Big)y = 0. \tag{21.3}$$

Сделаем в этом уравнении замену переменных $\cos\theta = x$. Тогда

$$\sin\theta = \sqrt{1-x^2},$$
$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx} = -\sin\theta\frac{d}{dx} = \sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}.$$

Окончательно получим

$$\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\Big] + \Big[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\Big]y = 0. \tag{21.4}$$

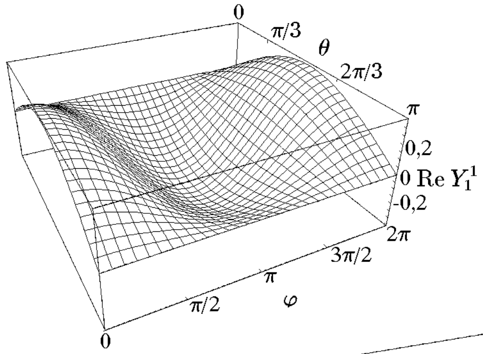

Рис. 17

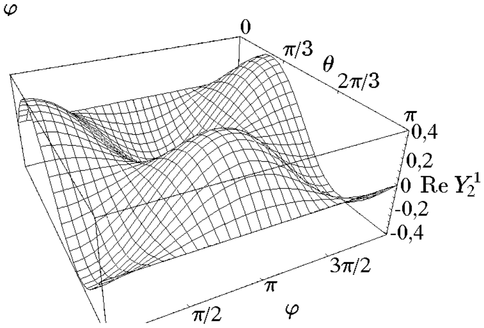

Рис. 18

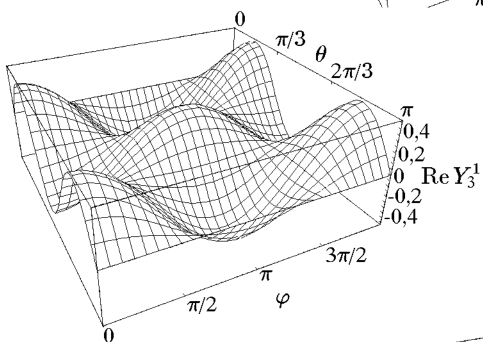

Рис. 19

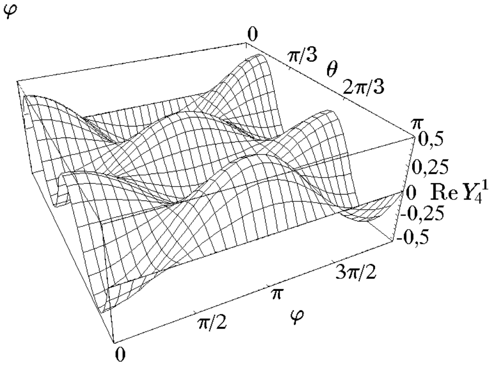

Рис. 20

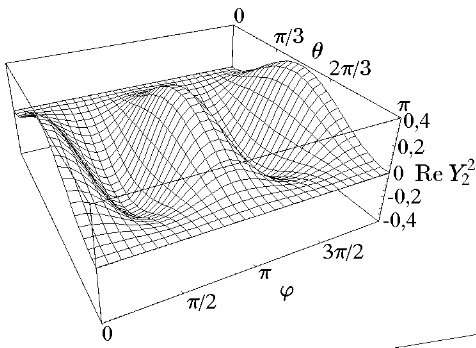

Рис. 21

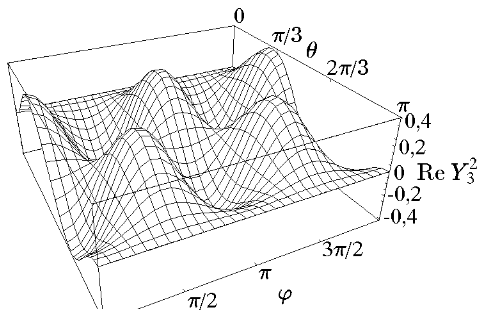

Рис. 22

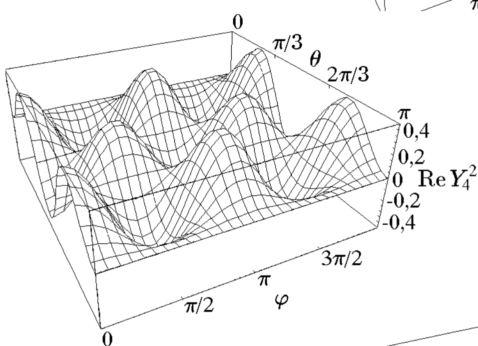

Рис. 23

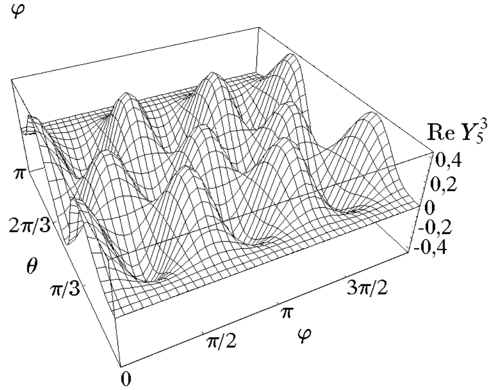

Рис. 24

Уравнение (21.4) — уравнение Лежандра порядка m. Следовательно, функции $y(x) = P_n^m(x)$ удовлетворяют уравнению (21.4), а функции (21.1) — уравнению (21.2). Таким образом, теорема доказана.

Можно показать (см., например, [62], стр. 684), что справедлива следующая теорема:

Теорема 21.2. *Сферические функции $Y_n^m(\theta,\varphi)$ при любом φ являются собственными для задачи Штурма–Лиувилля*

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0; \tag{21.5}$$
$$|Y(\theta,\varphi)| < \infty, \qquad Y(\theta,\varphi+2\pi) = Y(\theta,\varphi).$$

♦ Ограниченные решения уравнения (21.5), обладающие непрерывными частными производными до второго порядка включительно, называются сферическими функциями.

Теорема 21.3. *Функции $Y_n^m(\theta,\varphi)$ обладают свойством ортогональности*

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} Y_n^m(\theta,\varphi)Y_k^l(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta =$$
$$= \frac{4\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{ml}\delta_{nk}. \tag{21.6}$$

Доказательство непосредственно следует из свойства ортогональности присоединенных функций Лежандра $P_n^m(x)$ (21.4), если в них сделать замену переменных $x = \cos\theta$, и условия

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{i(m-l)\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{ml}.$$

22. Полиномы Эрмита

♦ Функция

$$H(x,t) = e^{2xt-t^2} \tag{22.1}$$

называется производящей функцией полиномов Эрмита.

Теорема 22.1. *Коэффициенты разложения функции* (22.1) *в ряд Тейлора по* t

$$H(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{22.2}$$

являются полиномами степени n.

Полиномы $H_n(x)$ *называются полиномами Эрмита или полиномами Чебышева–Эрмита.*

Доказательство. Так как функция $H(x,t)$ – аналитическая по x и t, то

$$H_n(x) = \frac{\partial^n H(x,t)}{\partial t^n}\Big|_{t=0} = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{2\omega x-\omega^2}}{\omega^{n+1}}d\omega, \tag{22.3}$$

где γ – произвольный замкнутый контур, содержащий точку $\omega = 0$. Но $2\omega x - \omega^2 = x^2 - (x-\omega)^2$, поэтому

$$H_n(x) = \frac{e^{x^2}n!}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{-(x-\omega)^2}}{\omega^{n+1}}d\omega.$$

Сделаем замену переменных $x-\omega = z$, $\omega = -(z-x)$, $d\omega = -dz$, а контур γ перейдет в произвольный контур $\tilde{\gamma}$, охватывающий точку $z = x$. Тогда

$$H_n(x) = e^{x^2}\frac{n!}{2\pi i}(-1)^n\oint\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}}dz \tag{22.4}$$

или

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\Big[\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{e^{-z^2}}{z-x}dz\Big].$$

Согласно интегральной формуле Коши,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{e^{-z^2}}{z-x}dz = e^{-x^2}.$$

Таким образом,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \tag{22.5}$$

откуда следует, что $H_n(x)$ есть полиномы степени n.

♦ Соотношение (22.5) называется формулой Родрига для полиномов Эрмита.

Пример 22.1. Получить явный вид полиномов Эрмита $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ и показать, что

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x). \tag{22.6}$$

Решение. 1. Из формулы Родрига (22.5) имеем

$$\begin{aligned} H_2(x) &= (-1)^2 e^{x^2}(e^{-x^2})'' = e^{x^2}(-2xe^{-x^2})' = \\ &= e^{x^2}(-2+4x^2)e^{-x^2} = 4x^2 - 2, \end{aligned}$$

т.е. $H_2(x) = 4x^2 - 2$. Аналогично находим, что $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$ (см. рис. 25).

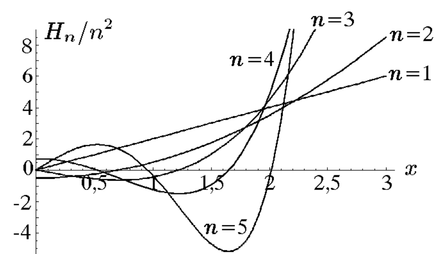

Рис. 25

2. Поскольку $H(-x,-t) = H(x,t)$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} H(-x)\frac{(-1)^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H(x)\frac{t^n}{n!},$$

что возможно лишь в том случае, если справедливо соотношение (22.6).

Пример 22.2. Вычислить $H_n(0)$ при любом n.

Решение. Положив в разложении

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n$$

$x = 0$, получим

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(0) t^n.$$

С другой стороны,

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}.$$

Тогда

$$H_{2k+1}(0) = 0, \qquad \frac{1}{(2k)!} H_{2k}(0) = (-1)^k \frac{1}{k!}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

или

$$H_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!}, \qquad k = \overline{0, \infty}.$$

Пример 22.3. Показать, что для полиномов Эрмита справедливо следующее представление:

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^{[n/2]} (-1)^l \frac{n!}{(n-2l)!l!} (2x)^{n-2l}. \tag{22.7}$$

Решение. Из определения имеем

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n.$$

С другой стороны,

$$\begin{gathered} e^{2xt-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (2xt - t^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k (2x - t)^k = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \sum_{l=0}^{k} (-1)^l (2x)^{k-l} t^l C_k^l = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{1}{k!} \frac{k!}{l!(k-l)!} t^{k+l} (2x)^{k-l}. \end{gathered}$$

Введем новый индекс суммирования $k+l=n$, тогда $k-l=$ $=n-2l$. Так как $l=\overline{0,k}$, то $n-2l\geqslant 0$, откуда $l\leqslant [n/2]$. Получим

$$e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{[n/2]}(-1)^l\frac{1}{l!(n-2l)!}(2x)^{n-2l}t^n.$$

Тогда

$$\frac{1}{n!}H_n(x)=\sum_{l=0}^{[n/2]}(-1)^l\frac{1}{l!(n-2l)!}(2x)^{n-2l},$$
$$H_n(x)=\sum_{l=0}^{[n/2]}(-1)^l\frac{n!}{l!(n-2l)!}(2x)^{n-2l}.$$

Теорема 22.2. *Для полиномов Эрмита справедливы следующие интегральные представления:*

$$\begin{gathered}
H_{2k}(x)=(-1)^k 2^{2k+1}e^{x^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}e^{-t^2}t^{2k}\cos 2xt\,dt,\\
H_{2k+1}(x)=(-1)^k 2^{2k+2}e^{x^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}e^{-t^2}t^{2k+1}\sin 2xt\,dt,\\
H_n(x)=2^{n+1}e^{x^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}e^{-t^2}t^{n}\cos\Big(2xt-\frac{\pi n}{2}\Big)dt.
\end{gathered}\tag{22.8}$$

Доказательство. В интеграле

$$J=\int\limits_0^{\infty}e^{-t^2}\cos 2xt\,dt$$

разложим косинус в ряд Тейлора:

$$J=\int\limits_0^{\infty}e^{-t^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2xt)^{2n}}{(2n)!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\int\limits_0^{\infty}e^{-t^2}t^{2n}dt.$$

Почленное интегрирование возможно, так как ряд равномерно сходится на любом конечном отрезке $[0,a]$:

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-t^2}t^{2n}dt=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi},\quad n=\overline{1,\infty}.$$

Тогда

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}(2n-1)!!}{(2n)!2^n}\frac{\sqrt{\pi}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\right) = \frac{\sqrt{\pi}e^{-x^2}}{2}.$$

Итак,

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}\cos 2tx\,dt. \tag{22.9}$$

Продифференцировав полученное соотношение $2k$ раз по параметру x, получим

$$\frac{d^{2k}e^{-x^2}}{dx^{2k}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}\frac{d^{2k}\cos 2tx}{dx^{2k}}dt =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}(2t)^{2k}(-1)^k\cos 2tx\,dt,$$

но

$$\frac{d^{2k}e^{-x^2}}{dx^{2k}} = (-1)^{2k}e^{-x^2}H_{2k}(x),$$

тогда

$$H_{2k}(x) = \frac{2^{2k+1}}{\sqrt{\pi}}e^{x^2}(-1)^k\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}t^{2k}\cos 2tx\,dt.$$

Таким образом, первое соотношение в формуле (22.8) доказано.

Продифференцируем теперь соотношение (22.9) $2k+1$ раз. Получим

$$H_{2k+1}(x) = \frac{(-1)^k 2^{2k+2}e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}t^{2k+1}\sin 2xt\,dt.$$

Обе формулы можно объединить:

$$H_n(x) = 2^{n+1}e^{x^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}t^n\cos\left(2xt - \frac{\pi n}{2}\right)dt.$$

В самом деле, $e^{2xti} = \cos 2xt + i\sin 2xt$. Если $n = 2k$, то

$$H_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2k}(-1)^k e^{x^2} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos 2xt \, t^{2k} dt + \\ + i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \sin 2xt \, t^{2k} dt \Big].$$

Поскольку второе слагаемое в квадратных скобках равно нулю, то

$$H_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2k+1}(-1)^k e^{x^2} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \cos 2xt \, dt.$$

При $n = 2k+1$ получим формулу для $H_{2k+1}(x)$. Последнее соотношение в (22.8) является непосредственным следствием двух первых. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 22.3. *Для полиномов Эрмита справедливо следующее интегральное представление:*

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x + it)^n e^{-t^2} dt. \qquad (22.10)$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл, стоящий в правой части (22.10):

$$\frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x + it)^n e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2x + 2it)^n e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (2x)^{n-k} (2it)^k dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (2x)^{n-k} (2i)^k \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s C_n^{2s} (2x)^{n-2s} 2^{2s} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2s} e^{-t^2} dt.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2} dt = 0 \qquad \text{при} \quad k = 2s + 1, \quad s = \overline{0, \infty}.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{2s}e^{-t^2}dt = 2\int\limits_{0}^{\infty} t^{2s}e^{-t^2}dt = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-u}u^{s-1/2}du =$$

$$= \Gamma(s+1/2) = \frac{(2s-1)!!}{2^s}\sqrt{\pi} = \frac{(2s)!}{2^{2s}s!}\sqrt{\pi}.$$

Тогда

$$\frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+it)^n e^{-t^2}dt = \sum_{s=0}^{[n/2]}(-1)^s(2x)^{n-2s}C_n^{2s}\frac{(2s)!}{s!} =$$

$$= \sum_{s=0}^{[n/2]}(-1)^s(2x)^{n-2s}\frac{n!}{(n-2s)!s!} = H_n(x).$$

Здесь мы воспользовались представлением (22.7). Таким образом, теорема доказана. Продифференцировав равенство (22.10) по x, получим

$$H_n'(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} n(x+it)^{n-1}e^{-t^2}dt =$$

$$= 2n\tfrac{2^{n-1}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+it)^{n-1}e^{-t^2}dt = 2nH_{n-1}(x),$$

т.е. $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

Теорема 22.4. *Функции*

$$H_1(x,t) = e^{t^2}\sin 2xt, \quad H_2(x,t) = e^{t^2}\cos 2xt$$

являются производящими функциями для нечетных $H_{2k+1}(x)$ *и четных* $H_{2k}(x)$ *полиномов Эрмита, соответственно, т.е.*

$$\begin{aligned} H_1(x,t) &= e^{t^2}\sin 2xt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{H_{2k+1}(x)}{(2k+1)!}t^{2k+1}, \\ H_2(x,t) &= e^{t^2}\cos 2xt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{H_{2k}(x)}{(2k)!}t^{2k}. \end{aligned} \qquad (22.11)$$

Доказательство. Имеем

$$e^{t^2}\cos 2xt = \frac{1}{2}e^{t^2}(e^{2xti}+e^{-2xti}) =$$
$$= \frac{1}{2}[e^{-(it)^2+2x(it)}+e^{-(it)^2+2(-x)ti}] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(x)(it)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(-x)(it)^n\right] =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{H_{2k}(x)}{(2k)!}t^{2k}.$$

Аналогично установим справедливость второго равенства:

$$e^{t^2}\sin 2xt = \frac{1}{2i}e^{t^2}(e^{2xti}-e^{-2xti}) = \frac{1}{2i}e^{-(it)^2}(e^{2xit}-e^{2(-x)it})$$
$$= \frac{1}{2i}[e^{2x(it)-(it)^2}-e^{2(-x)(it)-(it)^2}] =$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(x)(it)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(-x)(it)^n\right] =$$
$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(x)[1-(-1)^n](it)^n =$$
$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}H_{2k+1}(x)2i^{2k+1}t^{2k+1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}H_{2k+1}(x)t^{2k+1},$$

что и требовалось доказать.

Пример 22.4. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(2xy-\alpha^2x^2)H_n(x)dx, \quad \operatorname{Re}\alpha^2>0.$$

Решение. Воспользовавшись формулой (22.3), для J получим

$$J = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(2xy+2xt-\alpha^2x^2-t^2)dx\Big|_{t=0}.$$

С учетом значения интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(2\beta x-\alpha^2x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\exp\frac{\beta^2}{\alpha^2}, \quad \operatorname{Re}\alpha^2>0, \qquad (22.12)$$

приведем J к виду

$$J = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\exp\Big[\frac{y^2+2yt-(\alpha^2-1)t^2}{\alpha^2}\Big]\Big|_{t=0}.$$

Введя переменную q:

$$\alpha q = t\sqrt{\alpha^2-1}$$

(условие $t=0$ приводит к $q=0$), для J получим

$$J = \frac{\sqrt{\pi}(\alpha^2-1)^{n/2}e^{y^2/\alpha^2}}{\alpha^{n+1}}\frac{\partial^n}{\partial q^n}\exp\Big(\frac{2yq}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}-q^2\Big)\Big|_{q=0}.$$

Воспользовавшись снова соотношением (22.3), при условии $\operatorname{Re}\alpha^2>0$ окончательно найдем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2xy-\alpha^2x^2}H_n(x)dx = \\ = \frac{\sqrt{\pi}(\alpha^2-1)^{n/2}}{\alpha^{n+1}}e^{y^2/\alpha^2}H_n\Big(\frac{y}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}\Big). \qquad (22.13)$$

Пример 22.5. Показать, что полином Эрмита $H_n(x)$ может быть представлен в виде

$$H_n(x) = \hat{b}^n\cdot 1, \qquad \hat{b} = 2x - \frac{d}{dx}. \qquad (22.14)$$

Решение. Из формулы Родрига (22.5) последовательным преобразованием получаем

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = \\ = \underbrace{\Big(-e^{x^2}\frac{d}{dx}e^{-x^2}\Big)\Big(-e^{x^2}\frac{d}{dx}e^{-x^2}\Big)\cdots\Big(-e^{x^2}\frac{d}{dx}e^{-x^2}\Big)}_{n}\cdot 1 = \hat{b}^n\cdot 1,$$

$$\hat{b} = -e^{x^2}\frac{d}{dx}e^{-x^2} = 2x - \frac{d}{dx},$$

что эквивалентно формуле (22.14).

23. Рекуррентные соотношения для полиномов Эрмита

Теорема 23.1. *Справедливы соотношения*

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1} = 0, \tag{23.1}$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x). \tag{23.2}$$

Доказательство. Формулу Родрига (22.5)

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$$

продифференцируем по x:

$$\frac{d}{dx}H_n(x) = (-1)^n 2xe^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)} - (-1)^{n+1}e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n+1)}.$$

Таким образом,

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x). \tag{23.3}$$

Рассмотрим теперь

$$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\frac{d}{dx}\big(e^{-x^2}\big) = (-1)^n 2e^{x^2}\Big(\frac{d^n}{dx^n}xe^{-x^2}\Big).$$

Поскольку

$$\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n xe^{-x^2} = 2(-1)^n\big[x(e^{-x^2})^{(n)} + n(e^{-x^2})^{(n-1)}\big],$$

то получим

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \tag{23.4}$$

что эквивалентно (23.1). Вычтя (23.4) из (23.3), получим (23.2), что и требовалось доказать.

Пример 23.1. Вычислить $H_n'(0)$ для всех n.

Решение. Применим рекуррентную формулу

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Положим $x = 0$ и получим $H_n'(0) = 2nH_{n-1}(0)$. Отсюда

$$H_{2k}'(0) = 0, \qquad H_{2k+1}'(0) = 2(2k+1)H_{2k}(0),$$

и с учетом результатов предыдущего примера окончательно получим

$$H'_{2k+1}(0) = (-1)^k 2\frac{(2k+1)!}{k!}, \qquad k = \overline{0,\infty}.$$

Теорема 23.2. *Полиномы Эрмита $y = H_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$y''_n(x) - 2xy'_n(x) + 2ny_n(x) = 0 \tag{23.5}$$

или в самосопряженном виде

$$\frac{d}{dx}\Big(e^{-x^2}\frac{dy_n(x)}{dx}\Big) + 2ne^{-x^2}y_n(x) = 0.$$

Доказательство. Продифференцируем (23.2):

$$\frac{d^2H_n(x)}{dx^2} = 2nH'_{n-1}(x).$$

Выразив $H'_{n-1}(x)$ из (23.3), получим

$$\frac{d^2H_n(x)}{dx^2} = 2n[2xH_{n-1}(x) - H_n(x)],$$

а записав из (23.2)

$$H_{n-1}(x) = \frac{H'_n}{2n}(x),$$

найдем

$$\frac{d^2H_n(x)}{dx^2} = 2xH'_n(x) - 2nH_n(x),$$

что и требовалось доказать.

♦ Уравнение

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad x \in]-\infty,\infty[, \tag{23.6}$$

называется уравнением Эрмита.

Теорема 23.3. *Полиномы Эрмита $H_n(x)$ являются решением задачи на собственные значения и собственные функции (задачи Штурма–Лиувилля) уравнения (23.6) при условии непрерывности и квадратичной интегрируемости на $]-\infty,\infty[$ функций $y(x,\lambda)$ с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ и собственными значениями $\lambda = 2n$.*

Доказательство. Запишем уравнение (23.6) в самосопряженной форме

$$(e^{-x^2}y')' + \lambda e^{-x^2}y = 0, \tag{23.7}$$

откуда и следует явный вид весовой функции $\rho(x) = e^{-x^2}$.

Из условия квадратичной интегрируемости функций $y(x,\lambda)$ с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}y^2(x,\lambda)dx < \infty$$

следует, что сама функция $y(x,\lambda)$ на бесконечности может возрастать не быстрее, чем $e^{x^2/2}$.

Непрерывное решение уравнения (23.6) ищем в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{l=0}^{\infty} \big[C_{2l} + xC_{2l+1}\big]x^{2l}. \tag{23.8}$$

Подстановка (23.8) в (23.6) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0. \tag{23.9}$$

Заменим в первом слагаемом (23.9) индекс суммирования $n \to n+2$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)C_{n+2} - (2n-\lambda)C_n]x^n = 0,$$

откуда следует

$$C_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}C_n. \tag{23.10}$$

Формула (23.10) после задания C_0 и C_1 полностью определяет коэффициенты ряда (23.8), а тем самым и общее решение (если C_0, C_1 — произвольные постоянные) уравнения (23.6). Это позволяет исследовать его поведение при $|x| \to \infty$.

Понятно, что поведение ряда в этом случае определяется коэффициентами при x с большими n. Из (23.10) для $n \gg 1$ (как четных $n = 2l$, так и нечетных $n = 2l+1$) имеем

$$\frac{C_{n+2}}{C_n} \sim \frac{2}{n} \sim \frac{1}{l}, \qquad l \to \infty, \tag{23.11}$$

поэтому ряд (23.8) при $|x| \to \infty$ ведет себя как e^{x^2}, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \sim e^{x^2}, \qquad |x| \to \infty. \tag{23.12}$$

В этом легко убедиться, выписав разложение для функции $e^{\alpha x^2}$. Действительно,

$$e^{\alpha x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} x^{2k},$$

$$a_k = \frac{\alpha^k}{k!}, \qquad a_{k+2} = \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!}$$

откуда или

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} \sim \frac{\alpha}{k}, \qquad k \gg 1. \tag{23.13}$$

Сравнив (23.13) с (23.11), убеждаемся в справедливости (23.12).

Таким образом, при произвольном значении λ ряд (23.8) растет как e^{2x^2}, т.е. быстрее чем $e^{x^2/2}$. Этого можно избежать, если оборвать ряд на n-ом слагаемом, положив в (23.10) $\lambda = 2n$ и одновременно $C_1 = 0$ (если n четно) и $C_0 = 0$ (если n нечетно). Но тогда уравнение (23.6) переходит в уравнение

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

решением которого с точностью до произвольной постоянной C_n являются полиномы Эрмита, т.е.

$$y(x, \lambda) = y_n(x) = C_n H_n(x),$$

образующие спектр собственных функций с собственными значениями $\lambda = 2n$, что и требовалось доказать.

$\Diamond$ Естественное требование квадратичной интегрируемости функции $e^{-x^2/2}y(x,\lambda)$ иногда заменяют более жестким условием: $|y(x,\lambda)|$ должен возрастать не быстрее некоторой конечной степени x при $|x| \to \infty$.

24. Ортогональность полиномов Эрмита

Теорема 24.1. *Для полиномов Эрмита справедливо следующее условие ортогональности:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}. \tag{24.1}$$

Доказательство. Пусть $n \geqslant m$. Рассмотрим интеграл

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m(x) (e^{-x^2})^{(n)} dx.$$

Проинтегрируем по частям, положив
$U = H_m(x)$, $dU = H'_m(x)dx$, $dV = (e^{-x^2})^{(n)}dx$, $V = (e^{-x^2})^{(n-1)}$.

Тогда

$$J = (-1)^n H_m(x)(e^{-x^2})^{(n-1)}\Big|_{-\infty}^{\infty} +$$
$$+(-1)^{n+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H'_m(x)(e^{-x^2})^{(n-1)}dx.$$

Поскольку $\lim\limits_{|x|\to\infty} H_m(x)e^{-x^2} = 0$, то

$$J = (-1)^{n+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H'_m(x)(e^{-x^2})^{(n-1)}dx.$$

Проведя аналогичное интегрирование $m-1$ раз, получим

$$J = (-1)^{n+m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m^{(m)}(x)(e^{-x^2})^{(n-m)}dx.$$

Учтем, что $H_m^{(m)}(x) = 2^m m!$ в силу рекуррентного соотношения $H'_m(x) = 2mH_{m-1}(x)$ и условия $H_0(x) = 1$. Тогда

$$J = (-1)^{n+m}m!2^m\int\limits_{-\infty}^{\infty}(e^{-x^2})^{(n-m)}dx =$$
$$= (-1)^{n+m}m!2^m\begin{cases} (e^{-x^2})^{(n-m+1)}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0, & n > m \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}, & n = m \end{cases} =$$
$$= n!2^n\sqrt{\pi}\delta_{nm}.$$

Окончательно получим

$$J = n!2^n\sqrt{\pi}\delta_{nm},$$

что и требовалось доказать.

Можно показать (см., например, [27]), что справедлива следующая теорема:

Теорема 24.2. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном интервале и квадратично интегрируема на интервале $]-\infty,\infty[$ с весом e^{-x^2}, то ее можно разложить в ряд по полиномам Эрмита*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nH_n(x) \tag{24.2}$$

с коэффициентами

$$C_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}n!2^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-x^2}H_n(x)dx, \tag{24.3}$$

причем ряд (24.2) *сходится к функции*

$$f^*(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

Ряд (24.2) *называется рядом Фурье–Эрмита.*

Пример 24.1. Разложить функцию

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad |x|<a,\\ 0 & \text{при} \quad |x|>a\end{cases}$$

в ряд по полиномам Эрмита.

Решение. Очевидно, что условия разложимости функции в ряд Фурье по полиномам Эрмита выполнены.

Так как функция $f(x)$ четная, то разложение имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n}H_{2n}(x),$$

где

$$C_{2n}=\frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}}\int\limits_{-a}^{a}e^{-x^2}H_{2n}(x)dx.$$

Воспользуемся соотношением

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2}H_{k-1}(x)]=-e^{-x^2}H_k(x), \qquad k=\overline{1,\infty}.$$

Тогда

$$C_{2n} = -2\frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}}\int\limits_0^a \frac{d}{dx}[e^{-x^2}H_{2n-1}(x)] =$$
$$= -\frac{2e^{-a^2}}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}}H_{2n-1}(a), \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Коэффициент C_0 найдем непосредственно

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-a}^a e^{-x^2}H_0(x)dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^a e^{-x^2}dx = \operatorname{erf} a,$$

где $\operatorname{erf} x$ – функция ошибок (см. разд. <Интеграл ошибок> части I). Итак,

$$f(x) = \operatorname{erf} a - \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{H_{2n-1}(a)}{2^{2n}(2n)!}H_{2n}(x).$$

Пример 24.2. Разложить в ряд по полиномам Эрмита функцию

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad x < 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ 1 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Решение. Функция $y = \operatorname{sign} x$ нечетная, следовательно, $C_{2n} = 0$, $n = \overline{0,\infty}$. Разложение имеет вид

$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=0}^\infty C_{2n+1}H_{2n+1}(x).$$

Вычислим коэффициенты ряда. Имеем

$$C_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n}(2n+1)!\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-x^2}H_{2n+1}(x)dx.$$

Воспользуемся соотношением

$$e^{-x^2}H_{2n+1}(x) = -\frac{d}{dx}[e^{-x^2}H_{2n}(x)].$$

Тогда

$$C_{2n+1} = -\frac{1}{2^{2n}(2n+1)!\sqrt{\pi}} e^{-x^2} H_{2n}(x)\Big|_0^\infty =$$
$$= (-1)^n \frac{1}{(2n+1)2^{2n} n! \sqrt{\pi}}.$$

Итак,

$$\operatorname{sign} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{H_{2n+1}(x)}{(2n+1)2^{2n} n!}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Пример 24.3. Разложить функцию $f(x) = e^x$ в ряд по полиномам Эрмита.

Решение. Достаточные условия разложимости функции $f(x)$ в ряд по полиномам Эрмита выполнены. Действительно, функция $f(x)$ и ее производная непрерывны на любом конечном отрезке и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x) dx$ имеет конечное значение:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x) dx = e \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-1)^2} dx = e\sqrt{\pi}.$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x), \qquad -\infty < x < \infty,$$

где

$$C_n = \frac{1}{\|H_n\|^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^x H_n(x) dx, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Проинтегрировав по частям с учетом соотношения

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2} H_{n-1}(x)] = -e^{-x^2} H_n(x),$$

находим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^x H_n(x)dx =$$

$$= -e^x e^{-x^2} H_{n-1}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-x^2} H_{n-1}(x)dx.$$

Внеинтегральное слагаемое равно нулю. В самом деле,

$$\lim_{x\to\infty} e^{x-x^2} H_{n-1}(x) = e^{1/4} \lim_{x\to\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{e^{(x-1/2)^2}} = 0.$$

Применив $n-1$ раз интегрирование по частям, придем к равенству

$$C_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^x H_0(x)dx =$$

$$= \frac{e^{1/4}}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-1/2)^2} dx = \frac{e^{1/4}}{2^n n!}.$$

Итак,

$$e^x = e^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{2^n n!}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

$\Diamond$ Разложение $f(x) = e^x$ в ряд по полиномам Эрмита можно получить искусственным приемом, используя производящую функцию.

Пример 24.4. Найти разложение функций $f(x) = e^{ax}$, $\varphi(x) = \operatorname{sh} ax$, $g(x) = \operatorname{ch} ax$ в ряд по полиномам Эрмита.

Решение. В равенстве

$$e^{2xz-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$$

положим $z = a/2$, тогда

$$e^{ax} = e^{a^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{2^n n!} H_n(x).$$

В частности,

$$e^x = e^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{2^n n!}.$$

Из последнего соотношения легко получить разложения гиперболических функций

$$\operatorname{ch} ax = e^{a^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{2^{2n}(2n)!} H_{2n}(x),$$
$$\operatorname{sh} ax = e^{a^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} H_{2n+1}(x).$$

Пример 24.5. Показать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n^2(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n!(n+1/2).$$

Решение. Воспользуемся рекуррентной формулой

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n^2(x) dx = \frac{1}{4}\|H_{n+1}\|^2 + n^2\|H_{n-1}\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi} \frac{2n+1}{2}.$$

Пример 24.6. Вычислить

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^m H_n(x) dx$$

для любых натуральных чисел m и n.

Решение. Если $0 \leqslant m \leqslant n-1$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^m H_n(x) dx = 0,$$

так как полином из ортогональной системы ортогонален любому полиному меньшей степени.

При $m \geqslant n$ используем равенство

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2}H_n(x)] = -e^{-x^2}H_{n+1}(x)$$

и выполним интегрирование по частям. Тогда

$$A_n^m \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x^m H_n(x)dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^m \frac{d}{dx}[e^{-x^2}H_{n-1}(x)]dx =$$

$$-x^m e^{-x^2}H_{n-1}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + m\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x^{m-1}H_{n-1}(x)dx \equiv mA_{n-1}^{m-1}.$$

Если $m = n$, то

$$A_n^n = nA_{n-1}^{n-1} = n(n-1)A_{n-2}^{n-2} = \cdots = n(n-1)\cdots 1A_0^0,$$

$$A_0^0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Если $m > n$, то $A_n^m = mA_{n-1}^{m-1} = m(m-1)A_{n-2}^{m-2} = \cdots = m(m-1)\cdots[m-(n-1)]A_0^{m-n}$, где

$$A_0^{m-n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x^{m-n}dx =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad m-n = 2k+1, \quad k = \overline{0,\infty}; \\ 2\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}x^{m-n}dx \quad \text{при} \quad m-n = 2k, \quad k = \overline{0,\infty}. \end{cases}$$

Вычислим $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}x^{m-n}dx$ при $m-n = 2k$, $k = 0, 1, \ldots$ Положим $x^2 = t$, $dx = \frac{1}{2}t^{-1/2}dt$ и получим

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}x^{m-n}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-t}t^{(m-n-1)/2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{m-n+1}{2}\Big) = \frac{1}{2}\frac{(m-n-1)!!}{2^{(m-n)/2}}\sqrt{\pi}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}x^m H_n(x)dx = \frac{m!\sqrt{\pi}}{2^{(m-n)/2}(m-n)!!}.$$

В итоге имеем

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2} x^m H_n(x)dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } m < n, \\ \sqrt{\pi} n! & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m > n, \quad m - n = 2k - 1, \\ \dfrac{m!\sqrt{\pi}}{2^{(m-n)/2}(m-n)!!} & \text{при } m > n, \quad m - n = 2k, \end{cases} \qquad (24.4)$$

где $k = \overline{0, \infty}$.

Пример 24.7. Разложить функцию $f(x) = x^{2m}$ $(m = \overline{0, \infty})$ в ряд Фурье по полиномам Эрмита.

Решение. Условия разложимости выполнены: функция $f(x) = x^{2m}$ — гладкая на любом конечном отрезке оси $0x$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{4m} dx = \begin{cases} \dfrac{(4m-1)!!}{2^{2m}} & \text{при} \quad m = \overline{1, \infty}, \\ \sqrt{\pi} \quad \text{при} \quad m = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} H_{2n}(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$C_{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2m} e^{-x^2} H_{2n}(x)dx, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Коэффициенты $C_{2n} = 0$ при $n > m$. Вычислим C_{2n} при $n = \overline{0, 2m}$. Воспользовавшись соотношением (24.4), имеем

$$C_{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{m-n}} \dfrac{(2m)!}{(2m-2n)!!} & \text{при} \quad m > n, \\ \sqrt{\pi}(2n)! & \text{при} \quad m = n \end{cases}$$

или

$$C_{2n} = \begin{cases} \dfrac{(2m)!}{2^{2m}(m-n)!(2n)!} & \text{при} \quad n = \overline{0, m-1}, \\ \dfrac{1}{2^{2m}} & \text{при} \quad n = m. \end{cases}$$

Итак,

$$C_{2n} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m-n)!(2n)!}, \qquad n = \overline{0, m}.$$

Получили разложение

$$x^{2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n}(x)}{(m-n)!(2n)!}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Пример 24.8. Найти разложение функции $f(x) = e^{-a^2x^2}$ в ряд по полиномам Эрмита.

Решение. Имеем

$$e^{-a^2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

В силу четности функции коэффициенты $C_{2k+1} = 0$. Найдем

$$C_{2k} = \frac{2}{\|H_{2k}\|^2} \int\limits_0^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} H_{2k}(x) dx.$$

Воспользуемся интегральным представлением (22.8) для функции $H_{2k}(x)$. Тогда

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k 2^{2k+2}}{\sqrt{\pi}\|H_{2k}\|^2} \int\limits_0^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} e^{x^2} dx \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \cos 2xt\, dt =$$

$$= \frac{(-1)^k 2^{2k+2}}{\sqrt{\pi} 2^{2k}(2k)! \sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} dt \int\limits_0^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos 2xt\, dx.$$

Применив формулу

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} \cos 2xt\, dt,$$

вычислим внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos 2xt\, dx = \frac{1}{a} \int\limits_0^{\infty} e^{-(ax)^2} \cos\Big(2xt\,\frac{t}{a}\Big) d(ax) = \frac{1}{a}\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2/a^2}.$$

Тогда

$$C_{2k} = \frac{2(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)! a} \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} e^{-t^2/a^2} t^{2k} dt.$$

Сделаем замену переменных $(1 + \frac{1}{a^2})t^2 = \xi$. Получим

$$C_{2k} = \frac{2(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)! a} \int\limits_0^{\infty} e^{\xi} \frac{\xi^k (1 + 1/a^2)^{1/2}}{(1 + 1/a^2)^{k+1} 2\xi^{1/2}} d\xi =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)! a (1 + 1/a^2)^{k+1/2}} \int\limits_0^{\infty} e^{\xi} \xi^{k-1/2} d\xi =$$

$$= \frac{(-1)^k \Gamma(k + 1/2)}{\sqrt{\pi}(2k)! a (1 + 1/a)^{k+1/2}} = \frac{(-1)^k a^{2k}}{(1 + a^2)^{k+1/2} 2^{2k} k!}.$$

Итак,

$$e^{-a^2x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{a^{2k}H_{2k}(x)}{(1+a^2)^{k+1/2}2^{2k}k!}. \tag{24.5}$$

В разложении функции $f(x) = e^{-a^2x^2}$ (24.5) положим $a = 1$ и проинтегрируем полученное равенство в пределах от 0 до x. Найдем

$$\int\limits_0^x e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1/2}2^{2k}k!} \int\limits_0^x H_{2k}(t)dt.$$

Отсюда

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{H_{2k+1}(x)}{2^{k+1/2}2^{2k}k!(2k+1)}$$

или

$$\operatorname{erf} x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{H_{2k+1}(x)}{(2k+1)k!2^{3k}},$$

т.е. получено разложение интеграла вероятности.

25. Функции Эрмита

В приложениях часто применяются функции Эрмита.

♦ Функция вида

$$u_n(x) = \frac{1}{\|H_n(x)\|}\sqrt{\rho(x)}H_n(x), \qquad n = \overline{0,\infty} \tag{25.1}$$

называется функцией Эрмита (см. рис. 26). Здесь $\|H_n\|^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$.

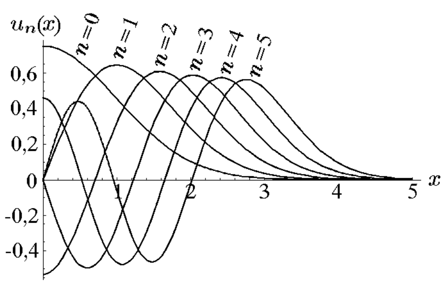

Рис. 26

Утверждение 25.1. *Функции Эрмита $u_n(x)$ ортонормированы на интервале $]-\infty,\infty[$ с весом $\rho(x)=1$, т.е.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_n(x)U_m(x)dx = \delta_{nm}. \tag{25.2}$$

Рассмотрим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_n(x)u_m(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^{n+m}n!m!\pi}} \int\limits_{\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}H_m(x)e^{-x^2/2}H_n(x)dx =$$

$$= \frac{2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{nm}}{\sqrt{2^{n+m}n!m!}} = \delta_{nm},$$

что и доказывает утверждение.

Теорема 25.1. *Функции Эрмита $y = u_n(x)$ являются собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля*

$$y'' + (\lambda - x^2)y = 0, \qquad \lim_{|x|\to\infty} y(x) = 0, \tag{25.3}$$

соответствующими собственным значениям $\lambda = 2n+1$ и нормировочному условию $\|y(x)\| = 1$.

Доказательство. Сделаем в уравнении замену

$$y(x) = e^{-x^2/2}z(x).$$

Тогда для функции $z(x)$ получим задачу Штурма–Лиувилля для полиномов Эрмита (см. теорему 23.3). С учетом формул (25.1) и (25.2) теорема доказана.

Пример 25.1. Найти суммы рядов

$$\text{а) } \sigma_u(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)u_n(y)z^n.$$

$$\text{б) } \sigma_H(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}H_n(x)H_n(y)z^n.$$

Решение. Из определения функции Эрмита (25.1) следует, что функции $\sigma_u(x,y,z)$ и $\sigma_H(x,y,z)$ связаны соотношением

$$\sigma_u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{2}\Big)\sigma_H(x,y,z). \tag{25.4}$$

а) Воспользуемся представлением (22.10) для полиномов Эрмита $H_n(x)$ и получим

$$\sigma_u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{2}\Big) \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(x+it)z]^n H_n(y)}{n!} e^{-t^2}\,dt.$$

Поменяем порядок суммирования и интегрирования:

$$\sigma_u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{2}\Big) \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(x+it)z]^n H_n(y)}{n!}.$$

Проведя теперь суммирование с помощью (22.2), найдем

$$\sigma_u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{\left[-\frac{x^2+y^2}{2}+2yz(x+it)-z^2(x+it)^2-t^2\right]} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{\left[-\left(\frac{1}{2}+z^2\right)x^2+2yz+2itz(y-xz)-(1-z^2)t^2-\frac{y^2}{2}\right]}.$$

Вычислив интеграл от гауссовой экспоненты с учетом формулы (22.12), для $|z|<1$ окончательно получим

$$\sigma_u(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)u_n(y)z^n =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-z^2)}} \exp\Big[\frac{4xyz-(1+z^2)(x^2+y^2)}{2(1-z^2)}\Big]. \tag{25.5}$$

б) Из соотношения (25.4) следует, что

$$\sigma_H(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} H_n(x)H_n(y)z^n =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp\Big[\frac{2xyz+z^2(x^2+y^2)}{1-z^2}\Big]. \tag{25.6}$$

Формула (25.6) называется формулой Меллера.

Пример 25.2. Показать, что функции Эрмита в классе квадратично интегрируемых непрерывных функций удовлетворяют условию полноты (2.9)

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)u_n(y) = \delta(x-y). \tag{25.7}$$

Решение. Найдем сумму ряда (25.7) методом Абеля. Для этого рассмотрим вспомогательный ряд (25.5) при $|z| < 1$. В этом случае сумма исходного ряда находится как обобщенный предел от (25.5) при $z \to 1-0$, а соотношение (25.7) будет доказано, если мы покажем, что

$$\lim_{z\to 1-0} \sigma_u(x,y,z) = \delta(x-y). \tag{25.8}$$

Пусть $\varphi(x)$ – квадратично интегрируемая непрерывная (кусочно непрерывная) функция. Тогда интеграл

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_u(x,y,z)\varphi(x)dx, \qquad |z| < 1$$

существует. Подставив $\sigma_u(x,y,z)$ из (25.5) и проведя замену переменных

$$x = \sqrt{1-z^2}t + \frac{2yz}{1+z^2},$$

получим

$$J = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\Big[-\frac{(1-z^2)y^2}{2(1+z^2)}\Big]\times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\Big(\sqrt{1-z^2}t + \frac{2yz}{1+z^2}\Big) \exp\Big(-\frac{1+z^2}{2}t^2\Big)dt. \tag{25.9}$$

Устремив здесь $z \to 1-0$, получим $J = \varphi(y)$, что доказывает соотношение (25.7).

В частности, из (25.9) при $\varphi(x) = 1$ с учетом (22.12) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_u(x,y,z)\,dx = \sqrt{\frac{2}{1+z^2}} \exp\Big[-\frac{(1-z^2)y^2}{2(1+z^2)}\Big]. \tag{25.10}$$

Пример 25.3. Найти трехчленную рекуррентную формулу для функций Эрмита и выразить производную от функций Эрмита через эти функции.

Решение. Из формулы (25.1) имеем

$$H_n(x) = (2^n n!\sqrt{\pi})^{1/2} e^{x^2/2} u_n(x). \tag{25.11}$$

Подставив это выражение в (23.1), получим трехчленную рекуррентную формулу

$$\sqrt{\frac{n+1}{2}}u_{n+1}(x) - xu_n(x) + \sqrt{\frac{n}{2}}u_{n-1}(x) = 0. \tag{25.12}$$

Соответственно, из (23.2) с учетом (25.12) получим

$$\begin{aligned} u_n'(x) &= \sqrt{2n}u_{n-1}(x) - xu_n(x) = \\ &= xu_n(x) - \sqrt{2(n+1)}u_{n+1}(x) = \\ &= \sqrt{\frac{n}{2}}u_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n+1}{2}}u_{n+1}(x). \end{aligned} \tag{25.13}$$

Первые два соотношения из (25.13) можно записать в виде

$$\hat{a}u_n(x) = \sqrt{n}u_{n-1}(x), \qquad \hat{a}^+u_n(x) = \sqrt{n+1}u_{n+1}(x), \tag{25.14}$$

где операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ имеют вид

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(x + \frac{d}{dx}\Big), \qquad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(x - \frac{d}{dx}\Big) \tag{25.15}$$

и называются операторами «уничтожения» и «рождения». Из (25.14) вытекает, что

$$\begin{gathered} u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n u_0(x), \quad \hat{a}^+\hat{a}u_n(x) = nu_n(x), \\ \hat{a}\hat{a}^+u_n(x) = (n+1)u_n(x), \end{gathered} \tag{25.16}$$

т.е. все функции $u_n(x)$ «порождаются» функцией $u_0(x)$ при последовательном действии на нее оператором «рождения» $\hat{a}^+$ и являются собственными функциями операторов $\hat{a}^+\hat{a}$ и $\hat{a}\hat{a}^+$. Операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1, \tag{25.17}$$

что проверяется непосредственно с учетом (25.15).

26. Линейный гармонический осциллятор

Задача о гармоническом осцилляторе имеет принципиальное значение для теоретической физики. Часто при изучении сложной системы оказывается возможным представить ее совокупностью гармонических осцилляторов, по крайней мере в некотором приближении. Задача о гармоническом осцилляторе сыграла большую роль, в частности, при создании метода вторичного квантования в квантовой теории поля и т.д.

Рассмотрим квантовую систему с гамильтонианом

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, \qquad \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{26.1}$$

и задачу о нахождении допустимых энергий системы E и соответствующих им волновых функций $\Psi_E(x)$, которые определяются стационарным уравнением Шрёдингера

$$\widehat{\mathcal{H}}\Psi_E = E\Psi_E \tag{26.2}$$

(см. также разд. «Уравнения квантовой механики» части IV).

Квадрат модуля волновой функции $|\Psi_E(x)|^2$ с физической точки зрения можно интерпретировать как плотность вероятности обнаружить частицу в точке x. Поэтому волновая функция $\Psi_E(x)$ должна стремиться к нулю при неограниченном возрастании x.

Подставив (26.1) в (26.2), получим задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{gathered} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{kx^2}{2}\Psi = E\Psi, \\ \lim_{|x|\to\infty}|\Psi_E(x)| = 0. \end{gathered} \tag{26.3}$$

Сделав в уравнении замену переменных $x = x_\hbar t$, где

$$x_\hbar = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

получим

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \Big(\frac{2mx_0^2E}{\hbar^2} - \frac{kmx_\hbar^4}{\hbar^2}t^2\Big)\Psi = 0.$$

Обозначив $\lambda = 2E/(\hbar\omega_0)$, получим задачу Штурма–Лиувилля для функций Эрмита (25.3). Следовательно,

$$\lambda_n = 2n + 1, \qquad \Psi_n(t) = u_n(t).$$

Возвратившись к исходным переменным, получим

$$E_n = \hbar\omega_0\Big(n + \frac{1}{2}\Big), \tag{26.4}$$

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_\hbar}} u_n\Big(\frac{x}{x_\hbar}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} x_\hbar}} e^{-x^2/(2x_0^2)} H_n\Big(\frac{x}{x_\hbar}\Big).$$

Наличие множителя $1/\sqrt{x_\hbar}$ следует из условия ортонормированности.

Пример 26.1. Вероятность перехода между двумя состояниями гармонического осциллятора, которые характеризуются квантовыми числами m и n, определяется интегралом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx.$$

Доказать, что этот интеграл равен

$$\sqrt{\pi} 2^{n-1} n! \delta_{m,n-1} + \sqrt{\pi} 2^n (n+1)! \delta_{m,n+1},$$

т.е. такой переход возможен только между соседними энергетическими уровнями $m = n \pm 1$.

Решение. Из рекуррентной формулы

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

выразим $xH_n(x)$ и внесем под знак интеграла. Получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\Big(\frac{1}{2}H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x)\Big) H_m(x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\infty}^{\infty} H_{n+1}(x) H_m(x) e^{-x^2} dx + n\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}(x) H_m(x) e^{-x^2} dx =$$

$$= 2^n (n+1)! \sqrt{\pi} \delta_{m,n+1} + n 2^{n-1} (n-1)! \sqrt{\pi} \delta_{m,n-1}.$$

27. Полиномы Лагерра

Определим полиномы Лагерра с помощью производящей функции.

♦ Функция

$$L^\alpha(x,t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-xt/(1-t)}, \qquad \alpha > -1, \tag{27.1}$$

называется производящей функцией полиномов Лагерра индекса α.

Теорема 27.1. *Коэффициенты разложения функции $L^\alpha(x,t)$ в ряд Тейлора по степеням t*

$$L^\alpha(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n. \tag{27.2}$$

являются полиномами порядка n. Полиномы $L_n^\alpha(x)$ называются (обобщенными) полиномами Лагерра индекса α (см. рис. 27 – 29).

Доказательство. Функция $L^\alpha(x,t)$ аналитична в области $|t| < 1$. Поэтому, согласно интегральной формуле Коши (I.14.7),

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n L^\alpha(x,t)}{\partial t^n}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\gamma \frac{L^\alpha(x,\omega)}{\omega^{n+1}} d\omega,$$

где γ – произвольный кусочно гладкий замкнутый контур, охватывающий точку $\omega = 0$. Сделаем в интеграле замену

$$\omega = 1 - \frac{x}{z}.$$

Тогда

$$d\omega = \frac{x}{z^2} dz, \quad 1 - \omega = \frac{x}{z}, \quad \frac{x\omega}{1-\omega} = x\frac{z-x}{z}\frac{z}{x} = z - x,$$

и получим

$$L^\alpha(x,\omega) = \frac{z^{\alpha+1}}{x^{\alpha+1}} e^x e^{-z}.$$

Поскольку

$$\omega^{-n-1} = \frac{z^{n+1}}{(z-x)^{n+1}},$$

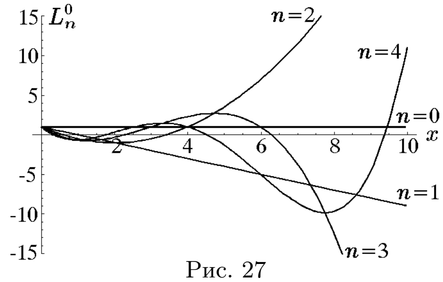

Рис. 27

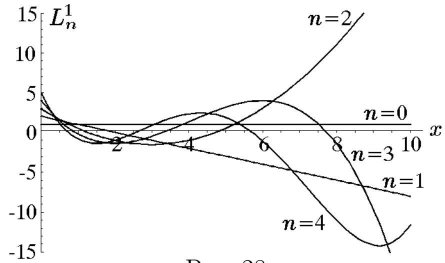

Рис. 28

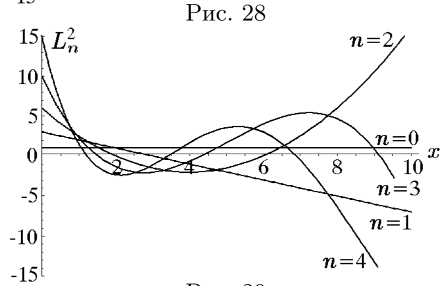

Рис. 29

то

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{2\pi i} \oint\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{z^{n+\alpha}e^{-z}}{(z-x)^{n+1}} dz, \tag{27.3}$$

где $\tilde{\gamma}$ — контур, охватывающий точку $z = x$, или

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{z^{n+\alpha}e^{-z}}{z-x} dz.$$

Из интеграла Коши (I.12.1) получим

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\tilde{\gamma}}\frac{z^{n+\alpha}e^{-z}}{z-x}dz = x^{n+\alpha}e^{-x}.$$

Следовательно,

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}\frac{e^x}{x^\alpha}\frac{d^n}{dx^n}[x^{n+\alpha}e^{-x}], \tag{27.4}$$

что и требовалось доказать.

◊ Полиномы Лагерра нулевого индекса $L_n^0(x)$ часто обозначаются через $L_n(x)$.

♦ Формула (27.4) называется формулой Родрига для полиномов Лагерра.

Пример 27.1. Найти явный вид полиномов Лагерра $L_0^\alpha(x)$ и $L_1^\alpha(x)$ для любых $\alpha > -1$.

Решение. По формуле Родрига (27.4) находим

$$\begin{aligned}
&L_0^\alpha(x) = x^{-\alpha}e^x(x^\alpha e^{-x}) = 1,\\
&L_1^\alpha(x) = x^{-\alpha}e^x(x^{1+\alpha}e^{-x})' =\\
&\qquad = x^{-\alpha}e^x[(1+\alpha)x^\alpha e^{-x} - x^{1+\alpha}e^{-x}] = 1+\alpha-x.
\end{aligned}$$

Следовательно, $L_0^\alpha(x) = 1$, $L_1^\alpha(x) = 1+\alpha-x$.

Пример 27.2. Показать, что для полиномов Лагерра справедливо следующее представление:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)k!(n-k)!}x^k. \tag{27.5}$$

Решение. В соотношении (27.4) выполним дифференцирование по формуле Лейбница. Найдем

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x}) = \sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^{n+\alpha})^{(n-k)}(e^{-x})^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k e^{-x}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)x^{\alpha+k}.$$

Тогда

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)}{k!(n-k)!}(-x)^k,$$

и, умножив числитель и знаменатель на $\Gamma(\alpha+k+1)$, с учетом основного функционального соотношения для гамма-функции получим

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(-x)^k}{k!(n-k)!\Gamma(\alpha+k+1)},$$

что и требовалось показать.

Пример 27.3. С помощью представления (27.5) получить явный вид производящей функции для полиномов Лагерра

$$L^\alpha(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) z^n. \tag{27.6}$$

Решение. Использовав представление (27.5) и поменяв порядок суммирования, получим

$$\begin{aligned} L^\alpha(x,z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{z^n(-x)^m\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-m+1)\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(m+1)} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-xz)^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+m+\alpha+1)z^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+\alpha+1)}. \end{aligned} \tag{27.7}$$

Если воспользоваться известным соотношением

$$(1-z)^{-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n\Gamma(n+p)}{n!\Gamma(p)},$$

можно вычислить внутреннюю сумму в (27.7):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+m+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+\alpha+1)} z^n = (1-z)^{-(m+\alpha+1)} \tag{27.8}$$

и записать производящую функцию

$$L^\alpha(x,z) = (1-z)^{-1-\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\Big(-\frac{xz}{1-z}\Big)^m = (1-z)^{-1-\alpha}e^{xz/(z-1)}.$$

Итак, окончательно

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) z^n = (1-z)^{-1-\alpha} \exp\Big(\frac{xz}{z-1}\Big), \quad |z| < 1, \tag{27.9}$$

что можно записать, пользуясь формулой (35.2), в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)}} I_{\alpha+n,n}(x) z^n = \\ = x^{\alpha/2}(1-z)^{-1-\alpha} \exp\Big(\frac{z+1}{z-1}\frac{x}{2}\Big). \tag{27.10}$$

Пример 27.4. Вычислить сумму

$$P^\alpha(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha-n}(x) z^n. \tag{27.11}$$

Решение. Аналогично примеру 27.3

$$P^\alpha(x,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} z^n \binom{\alpha}{n-m}\frac{(-x)^m}{m!} = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-xz)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n.$$

Здесь коэффициент при z^n – биномиальный коэффициент (см. разд. <Биномиальные коэффициенты> части I). Использовав известное разложение

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad |z| < 1,$$

окончательно получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha-n}(x) z^n (1+z)^\alpha e^{-xz}, \quad |z| < 1, \tag{27.12}$$

что эквивалентно выражению

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_{\alpha,n}(x) z^n}{\sqrt{\Gamma(n+1)}} = \frac{(z+\sqrt{x})^\alpha}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}} \exp\Big(-z\sqrt{x} - \frac{x}{2}\Big), \tag{27.13}$$

где $|z|^2 < |x|$.

Теорема 27.2. *Справедливо следующее интегральное представление:*

$$L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{(2n)!\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha-1/2} H_{2n}(t\sqrt{x})\, dt, \tag{27.14}$$

где $\alpha > -1/2$, $H_{2n}(z)$ – полиномы Эрмита.

Доказательство. Воспользуемся представлением (22.7) для полиномов Эрмита

$$H_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2n)!}{(2n-2k)!k!} (2x)^{2n-2k}.$$

Тогда

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha-1/2} H_{2n}(t\sqrt{x})dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2n)!2^{2n-2k}x^{n-k}}{(2n-2k)!k!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha-1/2} t^{2n-2k} dt.$$

Но при $\alpha + 1/2 > 0$ или $\alpha > -1/2$

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha-1/2} t^{2n-2k} dt = 2\int_{0}^{1} (1-t^2)^{\alpha-1/2} t^{2n-2k} dt =$$

$$= \int_{0}^{1} (1-u)^{\alpha-1/2} u^{n-k-1/2} du =$$

$$= B(n-k+1/2, \alpha+1/2) = \frac{\Gamma(n-k+1/2)\Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(n-k+\alpha+1)}.$$

Правая часть искомой формулы равна

$$I(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\sqrt{\pi}(2n)!\Gamma(\alpha+1/2)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2n)!2^{2n-2k}\Gamma(n-k+1/2)\Gamma(\alpha+1/2)}{(2n-2k)!k!\Gamma(n-k+\alpha+1)} x^{n-k} =$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2n-2k}\Gamma(n-k+1/2)}{k!(2n-2k)!\Gamma(n-k+\alpha+1)} (-x)^{n-k}.$$

Использовав соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z)$$

и положив в нем $z = n-k+1/2$, получим

$$\Gamma(n-k+1/2)\Gamma(n-k+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-2k}}\Gamma(2n-2k+1)$$

или
$$\frac{2^{2n-2k}\Gamma(n-k+1/2)}{(2n-2k)!\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\Gamma(n-k+1)}.$$
Таким образом,
$$I(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(-x)^{n-k}}{k!(n-k)!\Gamma(n-k+\alpha+1)}$$
или, положив $n-k=s$ и применив представление (27.5) для $L_n^\alpha(x)$, найдем
$$I(x) = \sum_{s=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(-x)^{s}}{(n-s)!s!\Gamma(s+\alpha+1)} = L_n^\alpha(x),$$
что и требовалось доказать.

Теорема 27.3. *Имеет место следующее интегральное представление:*
$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha/2}\int\limits_0^\infty t^{n+\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{xt})dt, \qquad x>0, \tag{27.15}$$
где $J_\alpha(q)$ – функция Бесселя первого рода порядка α, $\alpha>-1$.

Доказательство. 1. Рассмотрим интеграл
$$I = \int\limits_0^\infty (\sqrt{xt})^{n+\alpha}J_{n+\alpha}(2\sqrt{xt})e^{-t}dt.$$

Воспользовавшись разложением (3.6) и определением гамма-функции (см. разд. <Гамма-функция> части I), получим
$$I = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+\alpha+1)}\int\limits_0^\infty(\sqrt{xt})^{n+\alpha+2k+n+\alpha}e^{-t}dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{n+\alpha+k}}{k!\Gamma(k+n+\alpha+1)}\int\limits_0^\infty t^{k+n+\alpha}e^{-t}dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+n+\alpha}}{k!} = x^{n+\alpha}e^{-x}.$$

Таким образом,
$$x^{n+\alpha}e^{-x} = \int\limits_0^\infty (\sqrt{xt})^{n+\alpha}J_{n+\alpha}(2\sqrt{xt})e^{-t}dt. \tag{27.16}$$

2. Из определения функции Бесселя (3.6) следует, что

$$u^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^{k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}. \tag{27.17}$$

Продифференцируем обе части соотношения (27.17) по u:

$$\big(u^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{u})\big)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+\nu) u^{k+\nu-1}}{k!\Gamma(k+\nu+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^{k+\nu-1}}{k!\Gamma(k+\nu)} =$$

$$= u^{(\nu-1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^{k+(\nu-1)/2}}{k!\Gamma(k+\nu)} \Big(\frac{n}{2}\Big)^{2k+\nu-1} = u^{(\nu-1)/2} J_{\nu-1}(2\sqrt{u}).$$

Таким образом, получим соотношение

$$\big(u^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{u})\big)' = u^{(\nu-1)/2} J_{\nu-1}(2\sqrt{u}). \tag{27.18}$$

3. Продифференцируем (27.16) по x. С учетом (27.18) получим

$$(x^{n+\alpha} e^{-x})' = \int\limits_0^\infty t(\sqrt{xt})^{n+\alpha-1} J_{n+\alpha-1}(2\sqrt{xt}) e^{-t} dt.$$

Повторив эту операцию n раз, найдем

$$(x^{n+\alpha} e^{-x})^{(n)} = \int\limits_0^\infty (\sqrt{xt})^{\alpha} J_{\alpha}(2\sqrt{xt}) t^n e^{-t} dt.$$

С учетом формулы Родрига (27.4) теорема доказана.

Следствие. Полиномы Лагерра связаны с полиномами Эрмита соотношениями

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} L_n^{-1/2}(x^2), \tag{27.19}$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} \sqrt{x} L_n^{1/2}(x^2). \tag{27.20}$$

Доказательство. Согласно (5.15),

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \qquad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \tag{27.21}$$

Подставив (27.21) в (27.15), получим

$$L_n^{-1/2}(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{1/4} \int\limits_0^\infty t^{n-1/4} \sqrt{\frac{2}{2\pi\sqrt{xt}}} \cos(2\sqrt{xt}) e^{-t} dt =$$

$$= \frac{2e^x}{n!\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-u^2} u^{2n} \cos(2u\sqrt{x}) du.$$

С учетом (22.8) соотношение (27.19) доказано. Доказательство соотношения (27.20) аналогично.

28. Рекуррентные соотношения для полиномов Лагерра

Теорема 28.1. *Справедливо следующее рекуррентное соотношение:*

$$nL_n^{\alpha-1}(x) = (n+\alpha-1)L_{n-1}^{\alpha-1}(x) - xL_{n-1}^{\alpha}(x). \tag{28.1}$$

Доказательство. По определению,

$$L_n^{\alpha-1}(x) = \frac{1}{n!}\frac{e^x}{x^{\alpha-1}}\frac{d^n}{dx^n}[x^{n+\alpha-1}e^{-x}] =$$
$$= \frac{1}{n!}e^x x^{1-\alpha}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[-e^{-x}x^{n+\alpha-1} + (n+\alpha-1)x^{n+\alpha-2}e^{-x}] =$$
$$= -\frac{1}{n!}e^x x^{1-\alpha}[e^{-x}x^{n+\alpha-1}]^{(n-1)} + \frac{n+\alpha-1}{n!}[e^{-x}x^{n+\alpha-2}]^{(n-1)} =$$
$$= -\frac{x}{n}L_{n-1}^{\alpha}(x) + \frac{n+\alpha-1}{n}L_{n-1}^{\alpha-1}(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 28.2. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$L_n^{\alpha+1}(x) = L_{n-1}^{\alpha+1}(x) + L_n^{\alpha}(x). \tag{28.2}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$L_n^{\alpha+1}(x) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha-1}[e^{-x}x^{n+\alpha+1}]^{(n)} =$$
$$= \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha-1}\{x[e^{-x}x^{n+\alpha}]^{(n)} + n[e^{-x}x^{n+\alpha}]^{(n-1)}\} =$$
$$= \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha-1+1}[e^{-x}x^{n+\alpha}]^{(n)} +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}e^x x^{-\alpha-1}[e^{-x}x^{n-1+\alpha+1}]^{(n-1)} =$$
$$= L_n^{\alpha}(x) + L_{n-1}^{\alpha+1}(x),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 28.2.1. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x) - (2n+1+\alpha-x)L_n^{\alpha}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x) = 0. \tag{28.3}$$

Доказательство. Заменим в (28.2) α на $\alpha-1$, тогда получим

$$L_n^{\alpha-1} = L_n^\alpha(x) - L_{n-1}^\alpha(x). \tag{28.4}$$

Заменим в (28.1) n на $n+1$. Тогда

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha-1}(x) = (n+\alpha)L_n^{\alpha-1}(x) - xL_n^\alpha(x)$$

или с учетом (28.4)

$$(n+1)\big[L_{n+1}^\alpha(x) - L_n^\alpha(x)\big] = (n+\alpha)[L_n^\alpha(x) - L_{n-1}^\alpha(x)] - xL_n^\alpha(x)$$

или

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) - (2n+1+\alpha-x)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 28.2.2. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$\frac{d}{dx}L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x) = \frac{n}{x}L_n^\alpha(x) - \frac{(n+\alpha)}{x}L_{n-1}^\alpha(x). \tag{28.5}$$

Доказательство. Продифференцируем соотношение (27.4) по x и получим

$$\begin{gathered}\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}[e^{-x}x^{\alpha+n}]^{(n)} = \\ = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}[e^{-x}x^{\alpha+n}]^{(n)} - \frac{\alpha}{n!}e^x x^{-\alpha-1}[e^{-x}x^{\alpha+n}]^{(n)} - \\ -\frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}[e^{-x}x^{\alpha+n}]^{(n)} + \frac{\alpha+n}{n!}e^x x^{-\alpha}[e^{-x}x^{\alpha+n-1}]^{(n)}.\end{gathered}$$

С учетом (27.4) найдем

$$\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} = -\frac{\alpha}{x}L_n^\alpha(x) + \frac{n+\alpha}{x}L_n^{\alpha-1}(x).$$

Подставим сюда (28.4). Тогда

$$\begin{aligned}\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} &= -\frac{\alpha}{x}L_n^\alpha(x) + \frac{n+\alpha}{x}[L_n^\alpha(x) - L_{n-1}^\alpha(x)] = \\ &= \frac{n}{x}L_n^\alpha - \frac{n+\alpha}{x}L_{n-1}^\alpha(x).\end{aligned}$$

Таким образом, правая часть соотношения (28.5) доказана. Положим в (28.1) $\alpha = \alpha + 1$ и получим

$$nL_n^\alpha(x) = (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) - xL_{n-1}^{\alpha+1}(x).$$

С помощью полученного соотношения исключим $nL_n^\alpha(x)$ из правой части соотношения (28.5). Тогда

$$\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} = \frac{1}{x}\Big[(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) - xL_{n-1}^{\alpha+1}(x)\Big] - \frac{n+\alpha}{x}L_{n-1}^\alpha(x) = \\ = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 28.3. *Полиномы Лагерра $y = L_n^\alpha(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0. \tag{28.6}$$

Доказательство. Пусть $U(x) = x^{n+\alpha}e^{-x}$. Тогда

$$U'(x) = (n+\alpha)x^{n+\alpha-1}e^{-x} - x^{n+\alpha}e^{-x}$$

или

$$xU'(x) + (x - n - \alpha)U(x) = 0.$$

Продифференцируем это соотношение $n+1$ раз по x. С помощью формулы Лейбница

$$(UV)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}U^{(n-k)}(x)V^{(k)}(x)$$

получим

$$x[U^{(n)}(x)]'' + (x + 1 - \alpha)[U^{(n)}(x)]' + (n+1)U^{(n)}(x) = 0. \tag{28.7}$$

Сделаем в полученном уравнении замену $U^{(n)} = n!x^\alpha e^{-x}y$. С учетом соотношений

$$[U^{(n)}(x)]' = n!x^\alpha e^{-x}\Big\{\frac{\alpha - x}{x}y + y'\Big\};$$

$$[U^{(n)}(x)]'' = n!x^\alpha e^{-x}\Big\{\Big[\frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} - \frac{2\alpha}{x} + 1\Big]y + \\ +2\Big[\frac{\alpha}{x} - 1\Big]y' + y''\Big\}$$

из (28.7), разделив на общий множитель $n!x^\alpha e^{-x}$, получим

$$x\Big\{\Big[\frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2}-\frac{2\alpha}{x}+1\Big]y+2\Big[\frac{\alpha}{x}-1\Big]y'+y''\Big\}+$$
$$+(x+1-\alpha)\Big\{\frac{\alpha-x}{x}y+y'\Big\}+(n+1)y=0.$$

Приведя подобные, получим утверждение теоремы.

Пример 28.1. Используя рекуррентные соотношения для полиномов Лагерра, доказать справедливость формулы (28.6).

Решение. В уравнение (28.6) подставим $y=L_n^\alpha$:

$$[L_n^\alpha(x)]'=-L_{n-1}^{\alpha+1}(x),\qquad [L_n^\alpha(x)]''=L_{n-2}^{\alpha+2}(x),$$

тогда

$$x[L_n^\alpha]''(x)+(\alpha+1-x)[L_n^\alpha]'(x)+nL_n^\alpha(x)=$$
$$=nL_n^\alpha(x)+(\alpha+1-x)L_{n-1}^{\alpha+1}(x)+xL_{n-2}^{\alpha+2}(x).$$

Положим в (28.4) $\alpha=\alpha+1$, тогда

$$L_n^\alpha(x)=L_n^{\alpha+1}(x)-L_{n-1}^{\alpha+1}(x),\quad L_{n-1}^{\alpha+1}(x)=L_{n-1}^{\alpha+2}(x)-L_{n-2}^{\alpha+2}(x)$$

и

$$n[L_n^{\alpha+1}(x)-L_{n-1}^{\alpha+1}(x)]-(\alpha+1-x)[L_{n-1}^{\alpha+2}(x)-L_{n-2}^{\alpha+2}(x)]+$$
$$+xL_{n-2}^{\alpha+2}(x)=n[L_n^{\alpha+2}(x)-2L_{n-1}^{\alpha+2}(x)+L_{n-2}^{\alpha+2}(x)]+$$
$$+(\alpha+1-x)L_{n-1}^{\alpha+2}(x)+(\alpha+1)L_{n-2}^{\alpha+2}(x)=$$
$$=nL_n^{\alpha+2}(x)-(2n+\alpha+1-x)L_{n-1}^{\alpha+2}(x)+$$
$$+(\alpha+1+n)L_{n-2}^{\alpha+2}(x).$$

Положим в (28.3) $\alpha=\alpha+2$, $n=n-1$ и получим

$$nL_n^{\alpha+2}(x)-(2n-2+1+\alpha+2-x)L_{n-1}^{\alpha+2}(x)+$$
$$+(\alpha+2+n-1)L_{n-2}^{\alpha+2}(x)=0,$$

что и требовалось доказать.

Пример 28.2. С помощью рекуррентных соотношений доказать, что

$$\Big(\frac{d}{dx}\Big)^k x^\nu L_n^\nu(x)=\frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(n+\nu+1-k)}x^{\nu-k}L_n^{\nu-k}(x). \tag{28.8}$$

Решение. Вычислим, используя формулы (28.5) и (28.2),

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^\nu L_n^\nu(x) &= \nu x^{\nu-1}L_n^\nu(x) + x^\nu\frac{d}{dx}L_n^\nu(x) = \\
&= x^{\nu-1}\Big[\nu L_n^\nu(x) + x\frac{d}{dx}L_n^\nu(x)\Big] = \\
&= x^{\nu-1}\big[\nu L_n^\nu(x) + nL_n^\nu(x) - (n+\nu)L_{n-1}^\nu(x)\big] = \\
&= (n+\nu)x^{\nu-1}\big[L_n^\nu(x) - L_{n-1}^\nu(x)\big] = (n+\nu)x^{\nu-1}L_n^{\nu-1}(x).
\end{aligned}
$$

Окончательно имеем

$$
\frac{d}{dx}x^\nu L_n^\nu(x) = (n+\nu)x^{\nu-1}L_n^{\nu-1}(x). \tag{28.9}
$$

Отсюда немедленно следует

$$
\begin{aligned}
\frac{d^k}{dx^k}x^\nu L_n^\nu(x) &= (n+\nu)(n+\nu-1)\cdots \\
&\cdots(n+\nu-k+1)x^{\nu-k}L_n^{\nu-1}(x),
\end{aligned} \tag{28.10}
$$

что эквивалентно формуле (28.8).

29. Ортогональность полиномов Лагерра

Теорема 29.1. *Полиномы Лагерра ортогональны на интервале $[0,\infty[$ с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ при $\alpha > -1$. Условие ортогональности имеет вид*

$$
\int\limits_0^\infty x^\alpha L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)e^{-x}dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{nm}. \tag{29.1}
$$

Доказательство. Запишем формулу Родрига для полиномов Лагерра

$$
L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}[e^{-x}x^{\alpha+n}]^{(n)}.
$$

Не уменьшая степени общности, будем считать, что $n \geqslant m$. Тогда

$$
I_{n,m} = \int\limits_0^\infty x^\alpha L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)e^{-x}dx = \frac{1}{n!}\int\limits_0^\infty L_m^\alpha(x)[e^{-x}x^{\alpha+n}]^{(n)}dx.
$$

а) Пусть $n = 0$. Тогда, по предположению, $m = 0$. Поскольку $L_0^\alpha(x) = 1$, то

$$I_{0,0} = \int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = \Gamma(\alpha + 1). \tag{29.2}$$

б) Пусть $n > 0$. Проведем интегрирование $I_{n,m}$ по частям, положив $U = L_m^\alpha(x)$, $dU = [L_m^\alpha(x)]' dx$, $dV = [e^{-x} x^{\alpha+n}]^{(n)} dx$, $V = [e^{-x} x^{\alpha+n}]^{(n-1)}$. Получим

$$I_{n,m} = \frac{1}{n!} \Big\{ L_m^\alpha(x) [e^{-x} x^{\alpha+n}]^{(n-1)} \Big|_0^\infty - \\ - \int\limits_0^\infty [e^{-x} x^{\alpha+n}]^{(n-1)} [L_m^\alpha(x)]' dx \Big\}.$$

По определению, $\alpha > -1$ и $n \neq 0$. Поэтому $\alpha + n > 0$, что дает $x^{\alpha+n}|_{x=0} = 0$. Следовательно, внеинтегральное слагаемое равно нулю. Проинтегрировав по частям еще $m - 1$ раз, получим

$$I_{n,m} = \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^\infty [e^{-x} x^{\alpha+n}]^{(n-m)} [L_m^\alpha(x)]^{(m)} dx.$$

Вычислим производную

$$[L_m^\alpha(x)]^{(m)} = \frac{1}{m!} [x^{-\alpha} e^x (x^{\alpha+m} e^{-x})^{(m)}]^{(m)} = \\ = \frac{1}{m!} [x^m (-1)^m + Q_{m-1}(x)]^{(m)} = (-1)^m,$$

где $Q_{m-1}(x)$ – полином $m - 1$ степени, т.е.

$$[L_m^\alpha(x)]^{(m)} = (-1)^m.$$

Тогда

$$I_{n,m} = \frac{(-1)^{n+m}}{n!} \int\limits_0^\infty [e^{-x} x^{\alpha+n}]^{(n-m)} dx =$$

$$
= \frac{(-1)^{n+m}}{n!} \begin{cases} [e^{-x}x^{\alpha+n}]^{(n-m+1)}\Big|_0^\infty, & n \neq m \\ \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{n+\alpha}dx, & n = m \end{cases} =
$$

$$
= \frac{(-1)^{n+m}}{n!} \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \Gamma(n+\alpha+1), & n = m \end{cases} =
$$

$$
= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{nm}. \tag{29.3}
$$

Объединив (29.2) и (29.3), получим утверждение теоремы.

Теорема 29.2. *Полиномы Лагерра являются решением задачи на собственные значения (задачи Штурма–Лиувилля)*

$$
xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + \lambda y = 0, \qquad \alpha > -1, \tag{29.4}
$$

при условии непрерывности, ограниченности в точке $x = 0$ и квадратичной интегрируемости на $[0, \infty[$ функций $y(x, \lambda)$ с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$. Уравнение (29.4) называется уравнением Лагерра.

Доказательство. Прежде всего отметим, что уравнение (29.4) в самосопряженной форме имеет вид

$$
(x^{\alpha+1}e^{-x}y')' + \lambda x^\alpha e^{-x}y = 0, \tag{29.5}
$$

откуда и следует явный вид весовой функции $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$.

Поскольку условием квадратичной интегрируемости функций $y(x, \lambda)$ с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ является неравенство

$$
\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}y^2(x, \lambda)dx < \infty,
$$

это означает, что сама функция $y(x, \lambda)$ на бесконечности может возрастать не быстрее, чем $x^{-\alpha/2}e^{x/2}$.

С учетом сказанного и непрерывности решение уравнения (29.4) ищем в виде обобщенного степенного ряда

$$
y(x) = \sum_{n=0}^\infty C_n x^{n+\sigma}, \tag{29.6}
$$

где C_n и σ — постоянные, подлежащие определению. Подстановка (29.6) в (29.4) дает

$$
x\sum_{n=0}^\infty (n+\sigma)(n+\sigma-1)C_n x^{n+\sigma-2} +
$$

$$+(\alpha+1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)C_n x^{n+\sigma-1}+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+\sigma}=0 \qquad (29.7)$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+\sigma)(n+\sigma+\alpha)x^{n+\sigma-1}+ \\ +\sum_{n=0}^{\infty}C_n(\lambda-n-\sigma)x^{n+\sigma}=0. \qquad (29.8)$$

Из первой суммы (29.8) выделим слагаемые с $n=0$, а в «укороченной» сумме индекс суммирования n заменим на $n+1$. Тогда

$$C_0\sigma(\sigma+\alpha)x^{\sigma-1}+ \\ +\sum_{n=0}^{\infty}\{C_{n+1}(n+\sigma+1)(n+\sigma+\alpha+1)+ \\ +C_n(\lambda-n-\sigma)\}x^{n+\sigma}=0,$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} C_0\sigma(\sigma+\alpha)=0, \\ C_{n+1}=\dfrac{n+\sigma-\lambda}{(n+\sigma+1)(n+\sigma+1+\alpha)}C_n, \quad n=\overline{0,\infty}. \end{cases} \qquad (29.9)$$

Из (29.9) следует, что нетривиальные решения уравнения (29.4) существуют лишь при $\sigma=0$ или $\sigma=-\alpha$. С другой стороны, последовательное применение второй формулы (29.9) позволяет выразить все коэффициенты C_n через C_0 в виде

$$C_n=\frac{(-1)^n(\lambda-\sigma)(\lambda-\sigma-1)\cdots(\lambda-\sigma-n+1)}{(\sigma+1)\cdots(\sigma+n)(\sigma+\alpha+1)\cdots(\sigma+\alpha+n)}C_0. \qquad (29.10)$$

Формулу (29.10) можно записать в более удобной форме. Для этого домножим числитель и знаменатель на произведение

$$\Gamma(\lambda-\sigma-n+1)\Gamma(\sigma+1)\Gamma(\sigma+\alpha+1)$$

с последующим использованием основного функционального соотношения для гамма-функций. В результате получим

$$C_n=\frac{(-1)^n\Gamma(\lambda-\sigma+1)\Gamma(\sigma+1)\Gamma(\sigma+\alpha+1)}{\Gamma(\sigma+n+1)\Gamma(\sigma+\alpha+n+1)\Gamma(\lambda-\sigma-n+1)}C_0. \qquad (29.11)$$

Если в (29.11) положить $\sigma=0$ и обозначить $a_n=C_n|_{\sigma=0}$, то

$$a_n=\frac{(-1)^n\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\lambda-n+1)}a_0. \qquad (29.12)$$

Положим теперь в (29.11) $\sigma=-\alpha$ и обозначим $b_n=C_n|_{\sigma=-\alpha}$. Тогда

$$b_n = \frac{(-1)^n \Gamma(\lambda+\alpha+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1-\alpha)\Gamma(\lambda+\alpha-n+1)} b_0. \tag{29.13}$$

Таким образом, с помощью (29.12) и (29.13) общее решение уравнения (29.4) можно записать

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\lambda+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\lambda-n+1)} x^n +$$
$$+ b_0 x^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\lambda+\alpha+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1-\alpha)\Gamma(\lambda+\alpha-n+1)} x^n, \tag{29.14}$$

где a_0, b_0 — произвольные постоянные.

Для $\alpha > 0$ требование ограниченности функции $y(x)$ в точке $x = 0$ вынуждает положить $b_0 = 0$. Тогда

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\lambda+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\lambda-n+1)} x^n. \tag{29.15}$$

Явный вид (29.15) функции $y(x)$ позволяет исследовать ее поведение при $x \to \infty$, которое в этом случае определяется коэффициентами a_n (29.12) с большими n.

Из (29.15) для $n \gg 1$ имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx -\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(\lambda-n+1)}{\Gamma(n+2)\Gamma(n+2+\alpha)\Gamma(\lambda-n)} =$$
$$= -\frac{(\lambda-n)}{(n+1)(n+\alpha+1)} = \frac{1}{n}, \tag{29.16}$$

а это означает, что ряд (29.15) при $x \to \infty$ ведет себя как e^x, т.е.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim e^x, \quad x \to \infty. \tag{29.17}$$

В этом легко убедиться, выписав разложение для функции $e^{\beta x}$. Действительно,

$$e^{\beta x} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} x^n,$$

откуда

$$a_n = \frac{\beta^n}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{\beta^{n+1}}{(n+1)!}$$

или

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{\beta}{n}, \qquad n \to \infty. \tag{29.18}$$

Сравнив (29.18) с (29.16), убеждаемся в справедливости (29.17).

Таким образом, при произвольном значении λ ряд (29.15) растет как e^x, т.е. быстрее чем $x^{-\alpha/2}e^{x/2}$. Этого можно избежать, если оборвать ряд на n-ом слагаемом, положив в $\Gamma(\lambda-n+1)$ из (29.15) $\lambda=m$ — некоторому целому числу. Тогда $\Gamma(1)=1$ при $n=m$ и $\Gamma(m-n)=\infty$ при $n>m$, а следовательно, $a_n=0$, так как $\Gamma(m-n)$ стоит в знаменателе.

Итак, положив $\lambda=m$, мы нашли спектр собственных значений задачи (29.4). Соответствующий спектр собственных функций следует из (29.17)

$$y_m(x)=\sum_{n=0}^{m}a_nx^n.$$

Задав в (29.12)

$$a_0=\frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+1)},$$

получим

$$y_m(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{\Gamma(m+\alpha+1)(-x)^n}{\Gamma(n+\alpha+1)n!(m-n)!}=L_m^\alpha(x) \qquad (29.19)$$

в полном соответствии с представлением полиномов Лагерра в виде (27.5).

При $\alpha\leqslant 0$ следует положить $a_0=0$. Тогда

$$y(x)=b_0x^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(\lambda+\alpha+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1-\alpha)\Gamma(\lambda+\alpha-n+1)}x^n, \qquad (29.20)$$

и для того чтобы оборвать этот ряд, нужно выбрать $\lambda=m-\alpha$, где m — некоторое целое число. Тогда

$$y_m(x)=b_0x^{-\alpha}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n\Gamma(\lambda+\alpha+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1-\alpha)\Gamma(m-n+1)}x^n.$$

Задав

$$b_0=\frac{\Gamma(m-\alpha+1)}{\Gamma(\lambda+\alpha+1)\Gamma(1-\alpha)},$$

можем записать спектр собственных значений $\lambda=m-\alpha$ и собственных функций

$$y_m(x)=x^{-\alpha}\sum_{n=0}^{m}\frac{\Gamma(m-\alpha+1)(-x)^n}{\Gamma(n-\alpha+1)n!(m-n)!}=x^{-\alpha}L_m^{-\alpha}(x). \qquad (29.21)$$

Если обозначить $\alpha=-\mu$, то соотношение ортогональности для функций (29.21) совпадает с соотношением ортогональности для функций (29.19). Действительно,

$$\langle y_m(x)|y_n(x)\rangle=\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}[x^{-\alpha}L_m^{-\alpha}(x)\cdot x^{-\alpha}L_n^{-\alpha}(x)]dx=$$

$$=\int\limits_0^\infty x^\mu e^{-x}L_m^\mu(x)L_n^\mu(x)dx.$$

Таким образом, теорема доказана.

30. Ряд Фурье–Лагерра

Аналогично рассмотренным ранее ортогональным полиномам полиномы Лагерра можно использовать в качестве базиса для разложения функции $f(x)$ в функциональные ряды. При этом можно показать справедливость следующей теоремы:

Теорема 30.1. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на интервале, лежащем внутри $[0,\infty[$, и квадратично интегрируема на $[0,\infty[$ с весом $x^\alpha e^{-x}$, то ее можно разложить в ряд по полиномам Лагерра*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^\alpha L_n^\alpha(x) \tag{30.1}$$

с коэффициентами

$$C_n^\alpha=\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}L_n^\alpha(x)dx, \qquad \alpha>-1, \tag{30.2}$$

причем ряд сходится к функции $f^*(x)=[f(x+0)+f(x-0)]/2$.

Ряд (30.1) *называется рядом Фурье–Лагерра.*

Пример 30.1. Разложить функцию $f(x)=e^{-bx}$ $(b>0)$ в ряд Фурье по полиномам Лагерра.

Решение. *Первый способ.* Условия разложимости функции выполнены, следовательно,

$$e^{-bx}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^\alpha L_n^\alpha(x),\quad C_n^\alpha=\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int\limits_0^\infty e^{-x}x^\alpha e^{-bx}L_n^\alpha(x)dx.$$

Найдем C_n^α, $n=\overline{0,\infty}$. По формуле Родрига для полиномов Лагерра (27.4)

$$L_n^\alpha(x)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x\frac{d^n(x^{n+\alpha}e^{-x})}{dx^n}.$$

Тогда

$$C_n^\alpha=\frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int\limits_0^\infty e^{-bx}\frac{d^n(x^{n+\alpha}e^{-x})}{dx^n}dx.$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$I_n = \int_0^\infty e^{-bx} \frac{d^n(x^{n+\alpha}e^{-x})}{dx^n} dx =$$
$$= e^{-bx} \frac{d^{n-1}(x^{n+\alpha}e^{-x})}{dx^{n-1}}\Big|_0^\infty + b\int_0^\infty e^{-bx} \frac{d^{n-1}(x^{n+\alpha}e^{-x})}{dx^{n-1}} dx.$$

Внеинтегральное слагаемое при $x = \infty$ равно нулю за счет множителя e^{-bx} $(b > 0)$, а при $x = 0$ — за счет второго множителя

$$\frac{d^{n-1}(x^{n+\alpha}e^{-x})}{dx^{n-1}},$$

так как, вычислив производную $n-1$-го порядка по формуле Лейбница, получим сумму, каждое слагаемое которой содержит x в положительной степени (низшая степень будет равна $\alpha+1$), но, по условию, $\alpha > -1$, значит, $\alpha + 1 > 0$.

Применив n раз интегрирование по частям, придем к равенству

$$\int_0^\infty e^{-bx} \frac{d^n(x^{n+\alpha}e^{-x})}{dx^n} dx = b^n \int_0^\infty e^{-(b+1)x} x^{n+\alpha} dx.$$

Сделаем в интеграле замену переменных $(b+1)x = t$ и получим

$$I_n = \frac{b^n}{(b+1)^{n+\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^{n+\alpha} dt = \frac{b^n \Gamma(n+\alpha+1)}{(b+1)^{n+\alpha+1}}.$$

Тогда

$$C_n^\alpha = \frac{I_n}{\Gamma(n+\alpha+1)} = \frac{b^n}{(b+1)^{n+\alpha+1}}, \qquad n = \overline{0,\infty}.$$

Найдем разложение

$$e^{-bx} = \frac{1}{(b+1)^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{b}{b+1}\right)^n L_n^\alpha(x), \qquad 0 < x < \infty.$$

Рассмотрим частный случай, когда $b = 1$. Тогда

$$e^{-x} = \frac{1}{2^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} L_n^\alpha(x), \qquad 0 < x < \infty.$$

Если $\alpha = 0$, то

$$e^{-x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} L_n(x), \qquad 0 < x < \infty. \tag{30.3}$$

Второй способ. Воспользуемся разложением производящей функции

$$\frac{1}{(1-z)^{(\alpha+1)}} \exp\Big(-\frac{xz}{1-z}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) z^n, \quad |z| < 1.$$

Положим здесь $z = b/(b+1)$, где b – действительное число. Тогда

$$1 - z = \frac{1}{b+1}, \qquad -\frac{xz}{1-z} = -bx,$$

причем из $|z| < 1$ следует, что $b > -1/2$. В результате имеем

$$(b+1)^{\alpha+1} e^{-bx} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) \Big(\frac{b}{b+1}\Big)^n.$$

При $b = 1$ получим

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+\alpha+1}} L_n^\alpha(x), \qquad 0 < x < \infty.$$

Пример 30.2. Разложить функцию $f(x) = x^p$, $x > 0$, в ряд Фурье по полиномам Лагерра.

Решение. Для коэффициентов Фурье имеем представление

$$C_n^\alpha = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^\infty e^{-x} x^\alpha x^p L_n^\alpha(x) dx, \qquad n = \overline{0, \infty}$$

или

$$C_n^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^\infty x^p \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha} e^{-x}) dx, \qquad n = \overline{0, \infty}.$$

Как и в примере 30.1, интегрируем n раз по частям. Получим

$$C_n^\alpha = \frac{(-1)^n p(p-1)\cdots(p-n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^\infty x^{p-n} x^{n+\alpha} e^{-x} dx;$$

$$C_n^\alpha = \frac{(-1)^n p(p-1)\cdots(p-n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \Gamma(p+\alpha+1).$$

Тогда при $0 < x < \infty$

$$x^p = \Gamma(p+\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^\alpha(x). \quad (30.4)$$

Пример 30.3. Разложить функцию $f(x) = \ln x$ в ряд по полиномам Лагерра.

Решение. Искомое разложение имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\alpha L_n^\alpha(x),$$

где

$$C_n^\alpha = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) \ln x \, dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^\infty (x^{n+\alpha} e^{-x})^{(n)} \ln x \, dx. \quad (30.5)$$

Рассмотрим случай $n \geqslant 1$. Интегрируем (30.5) по частям, положив $U = \ln x$, $dU = dx/x$, $dV = (x^{n+\alpha} e^{-x})^{(n)} dx$, $V = (x^{n+\alpha} e^{-x})^{(n-1)}$, и получим

$$C_n^\alpha = -\frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^\infty \frac{1}{x} (x^{n+\alpha} e^{-x})^{(n-1)} dx.$$

Повторив интегрирование по частям $n-1$ раз, получим

$$C_n^\alpha = -\frac{(n-1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^n} x^{n+\alpha} e^{-x} dx = -\frac{(n-1)!\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}.$$

Если $n = 0$, то

$$C_0^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}\ln x dx = \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Следовательно,

$$\ln x = \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} - \Gamma(\alpha+1)\sum_{n=1}^\infty \frac{(n-1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}L_n^\alpha(x).$$

$\Diamond$ Существует еще один способ получения разложений по полиномам Лагерра, основанный на интегральном представлении (27.14).

Действительно, зная разложение четной функции $\varphi(x)$ в ряд по полиномам Эрмита и воспользовавшись представлением полиномов Лагерра через полиномы Эрмита (27.14), получим функцию

$$f(x) = \int\limits_{-1}^1 (1-t^2)^{\alpha-1/2}\varphi(t\sqrt{x})dt$$

и, следовательно, ее разложение в ряд по полиномам Лагерра.

Пусть

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^\infty C_{2n}H_{2n}(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Тогда

$$\varphi(t\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^\infty C_{2n}H_{2n}(t\sqrt{x}).$$

Умножив это равенство на $(1-t^2)^{\alpha-1/2}$ и проинтегрировав в пределах от –1 до 1, получим

$$\int\limits_{-1}^1 (1-t^2)^{\alpha-1/2}\varphi(t\sqrt{x})dt = \sum_{n=0}^\infty C_{2n}\int\limits_{-1}^1 (1-t^2)^{\alpha-1/2}H_{2n}(t\sqrt{x})dt.$$

Используем для функции $f(x)$ представление (27.14) и придем к равенству

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty C_n^\alpha L_n^\alpha(x)$$

при $\alpha > -1/2$, где

$$C_n^\alpha = (-1)^n\frac{(2n)!\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(n+\alpha+1)}C_{2n}.$$

Пример 30.4. С помощью интегрального представления (27.14) получить разложение функции x^{2m} в ряд по полиномам Лагерра.

Решение. Известно, что

$$x^{2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m}} \sum_{n=0}^{m} \frac{H_{2n}(x)}{(m-n)!(2n)!}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Здесь

$$C_{2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m-n)!(2n)!}.$$

Найдем разложение в ряд Фурье по полиномам Лагерра для функции

$$f(x) = \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha-1/2}(t\sqrt{x})^{2m}dt.$$

Преобразуем интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha-1/2}(t\sqrt{x})^{2m}dt = 2x^m \int\limits_{0}^{1} (1-t^2)^{\alpha-1/2}t^{2m}dt =$$

$$= x^m \int\limits_{0}^{1} (1-u)^{\alpha-1/2}u^{m-1/2}du = x^m B(\alpha+1/2, m+1/2) =$$

$$= x^m \frac{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(\alpha+m+1)}$$

при $\alpha > -1/2$. Таким образом,

$$f(x) = x^m \frac{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(\alpha+m+1)}, \qquad \alpha > -\frac{1}{2}.$$

Найдем разложение

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} C_n^\alpha L_n^\alpha(x)$$

с коэффициентами

$$C_n^\alpha = (-1)^n \frac{(2n)!\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m-n)!(2m)!}, \quad n = \overline{0,m}.$$

Получим

$$x^m = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)(2m)!\Gamma(\alpha+m+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)2^{2m}(m-n)!\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(m+1/2)} L_n^\alpha(x)$$

или

$$x^m = m!\Gamma(\alpha+m+1)\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(m-n)!\Gamma(n+\alpha+1)}L_n^\alpha(x),$$

что согласуется с разложением (30.4).

Пример 30.5. Вычислить сумму

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n L_n^\alpha(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)}. \tag{30.6}$$

Решение. Подставив (27.5) в (30.6) и поменяв порядок суммирования (см. пример I.7.1), найдем

$$\begin{aligned}S &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{z^n(-x)^m}{\Gamma(n-m+\alpha)\Gamma(\alpha+m+1)\Gamma(m+1)} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+m}(-x)^m}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+m+1)\Gamma(m+1)} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-xz)^m}{\Gamma(\alpha+m+1)\Gamma(m+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \\ &= e^z\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-xz)^m}{m!\Gamma(\alpha+m+1)}.\end{aligned}$$

Но последняя сумма в этом равенстве выражается через функцию Бесселя первого рода (3.6), и окончательно получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n L_n^\alpha(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)} = e^z(xz)^{-\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{xz}). \tag{30.7}$$

Пример 30.6. Доказать справедливость разложения полинома $L_n^\alpha(x)$ по ортогональной системе полиномов $L_n^\beta(x)$

$$\begin{aligned}L_n^\alpha(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha-\beta+n-k-1}{n-k}L_k^\beta(x) = \\ &= (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\beta-\alpha}{n-k}L_k^\beta(x).\end{aligned} \tag{30.8}$$

Решение. Найдем сумму ряда

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha-\beta+n-k-1}{n-k}L_k^\beta(x). \tag{30.9}$$

Если воспользоваться соотношением

$$\binom{\alpha+n}{n} = (-1)^n \binom{-\alpha-1}{n}. \tag{30.10}$$

(см. разд. «Биномиальные коэффициенты» части I), то выражение (30.9) можно представить в эквивалентной форме

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{\alpha-\beta}{n-k} L_k^{\beta}(x). \tag{30.11}$$

Воспользуемся теперь формулой Родрига для полиномов Лагерра (27.4), которую с помощью биномиальных коэффициентов можно переписать в виде

$$L_k^{\beta}(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{k+\beta}{k-m} \frac{x^m}{m!}, \tag{30.12}$$

и для $F(x)$ найдем

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{n+m+k} \binom{\beta-\alpha}{n-k} \binom{k+\beta}{k-m} \frac{x^m}{m!}. \tag{30.13}$$

Это выражение, согласно (I.7.7), можно записать в виде

$$F(x) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^{n+k} \binom{\beta-\alpha}{n-m-k} \binom{m+\beta+k}{k} \frac{x^m}{m!}.$$

Из соотношения (30.10) следует

$$\binom{m+\beta+k}{k} = (-1)^k \binom{-m-\beta-1}{k},$$

после чего имеем

$$F(x) = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} \sum_{k=0}^{n-m} \binom{\beta-\alpha}{n-m-k} \binom{-m-\beta-1}{k}.$$

Сумму по k можно вычислить с помощью соотношения

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}. \tag{30.14}$$

Суммирование дает

$$F(x) = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} \binom{-m-\alpha-1}{n-m}.$$

Воспользуемся еще раз соотношением (30.10)

$$\binom{-m-\alpha-1}{n-m} = (-1)^{n+m}\binom{n+\alpha}{n-m}$$

и с учетом (30.11) окончательно получим

$$F(x) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n+\alpha}{n-m}\frac{x^m}{m!} = L_n^\alpha(x),$$

что и требовалось показать.

31. Ортогональные классические полиномы

Мы рассмотрели основные свойства полиномов Лежандра, Эрмита и Лагерра. Нетрудно заметить, что свойства этих полиномов во многом похожи. Рассмотрим теперь общие свойства, присущие ортогональным полиномам, называемым классическими.

31.1. Метод ортогонализации Шмидта

Утверждение 31.1. 1. *Пусть* $\{f_k(x),\ k=\overline{0,\infty}\}$ *– линейно независимая система функций.*

2. *Пусть на интервале* $]a,b[$ *определено скалярное произведение с весом* $\rho(x)$, $\rho(x)\geqslant 0$,

$$\langle g_1(x)|g_2(x)\rangle_\rho = \int\limits_a^b \rho(x)g_1(x)g_2(x)dx, \qquad (31.1)$$

причем

$$|\langle f_k(x)|f_j(x)\rangle_\rho| < \infty, \qquad k,j=\overline{0,\infty}.$$

Тогда существуют конечные линейные комбинации функций $f_k(x)$, $k=\overline{0,\infty}$,

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}f_k(x) \qquad (31.2)$$

такие, что

$$\langle\varphi_k(x)|\varphi_m(x)\rangle_\rho = \|\varphi_k(x)\|^2\delta_{km}, \qquad k,m=\overline{0,\infty}. \qquad (31.3)$$

Положим

$$\begin{array}{l} \varphi_0(x) = \gamma_{0,0}f_0(x), \\ \varphi_1(x) = \gamma_{1,0}\varphi_0(x) + \gamma_{1,1}f_1(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_{n,k}\varphi_k(x) + \gamma_{n,n}f_n(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \qquad (31.4)$$

Будем считать, что $\gamma_{n,n}$ не равны нулю, поскольку функции $\varphi_n(x)$ линейно независимы. Очевидно, что функции $\varphi_n(x)$ – конечные линейные комбинации функций $f_k(x)$. Выберем $\gamma_{n,k}$ из условия

$$\langle\varphi_k(x)|\varphi_j(x)\rangle = 0, \qquad k \neq j.$$

Домножим второе уравнение в (31.4) на $\varphi_0(x)\rho(x)$ и проинтегрируем в пределах от a до b. Тогда для выполнения условия ортогональности (31.3) необходимо

$$\gamma_{1,0}\|\varphi_0(x)\|^2 + \gamma_{1,1}\langle f_1(x)|\varphi_0(x)\rangle_\rho = 0.$$

Следовательно,

$$\gamma_{1,0} = -\gamma_{1,1}\frac{\langle f_1(x)|\varphi_0(x)\rangle_\rho}{\|\varphi_0(x)\|^2}.$$

Дальнейшее доказательство проведем методом математической индукции. Пусть соотношение (31.3) выполняется для всех $m < n$. Тогда, домножив n-е уравнение в (31.4) на $\rho(x)\varphi_m(x)$, $m = \overline{0, n-1}$, и проинтегрировав в пределах от a до b, получим

$$\begin{aligned}\langle\varphi_m(x)|\varphi_n(x)\rangle &= \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\gamma_{n,k}\langle\varphi_m(x)|\varphi_k(x)\rangle_\rho + \gamma_{n,n}\langle\varphi_m(x)|f_n(x)\rangle_\rho = \\ &= \gamma_{n,m}\|\varphi_m(x)\|^2 + \gamma_{n,n}\langle\varphi_m(x)|f_n(x)\rangle_\rho, \qquad m = \overline{0, n-1}.\end{aligned}$$

Следовательно, для ортогональности функций $\varphi_n(x)$ и $\varphi_m(x)$, $m = \overline{0, n-1}$, необходимо

$$\gamma_{n,m} = -\gamma_{n,n}\frac{\langle\varphi_m(x)|f_n(x)\rangle_\rho}{\|\varphi_m(x)\|^2}, \qquad m = \overline{0, n-1}. \tag{31.5}$$

Таким образом, утверждение доказано.

Утверждение 31.2. *Интервал $]a, b[$ и весовая функция $\rho(x)$ определяют (с точностью до постоянного множителя) систему ортогональных полиномов $\{\mathcal{P}_n(x)\}$.*

Действительно, положив в (31.4) $f_n(x) = x^n$, получим систему ортогональных полиномов

$$\mathcal{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\gamma_{n,k}x^k + \gamma_{n,n}x^n, \qquad \gamma_{n,n} \neq 0, \tag{31.6}$$

где

$$\gamma_{n,k} = -\gamma_{n,n}\frac{\langle\mathcal{P}_k(x)|x^k\rangle_\rho}{\|\mathcal{P}_k\|^2}, \qquad k = \overline{0, n-1}. \tag{31.7}$$

Таким образом, система ортогональных полиномов полностью определяется интервалом $]a, b[$ и весовой функцией $\rho(x)$, $\rho(x) \geqslant 0$. Причем

$$\sigma_k = \int\limits_a^b x^k \rho(x) dx, \qquad |\sigma_k| < \infty, \qquad k = \overline{0, \infty}, \tag{31.8}$$

даже если интервал $]a, b[$ бесконечен. Таким образом, утверждение доказано.

♦ Величины σ_k (31.8) называются начальными (степенными) моментами функции $\rho(x)$ порядка k.

◊ Из соотношения (31.7) видим, что ортогональные полиномы $\mathcal{P}_n(x)$ определены с точностью до произвольной постоянной $\gamma_{n,n}$. Если $\gamma_{n,n}$ удовлетворяет дополнительному условию $\|\mathcal{P}_n(x)\| = 1$, $n = \overline{0, \infty}$, то такие полиномы называются ортонормированными, а если $\gamma_{n,n} = 1$, $n = \overline{0, \infty}$, то полиномы $\mathcal{P}_n(x)$ называются стандартизованными.

31.2. Обобщенная формула Родрига

Теорема 31.1. *Если весовая функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \qquad \rho(a)\beta(a) = \rho(b)\beta(b) = 0, \quad x \in]a, b[, \tag{31.9}$$

где

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x, \qquad \beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2, \tag{31.10}$$

то функция

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{A_n}{\rho(x)} [\rho(x)\beta^n(x)]^{(n)}, \qquad A_n = \text{const} \tag{31.11}$$

есть полином степени n.

♦ *Условие* (31.9) *называется уравнением Пирсона, соотношения* (31.11) – *обобщенной формулой Родрига, а полиномы* $\mathcal{P}_n(x)$ – *классическими ортогональными полиномами.*

Доказательство. I. Рассмотрим функцию

$$U(x) = \rho(x)\beta^n(x). \tag{31.12}$$

Покажем, что $U^{(n)}(x) = \rho(x)R_n(x)$, где $R_n(x)$ – полином степени не выше n. Доказательство проведем методом математической индукции. Из (31.12) находим

$$\begin{aligned} U'(x) &= \rho'(x)\beta^n(x) + n\rho(x)\beta^{n-1}(x)\beta'(x) = \\ &= \rho(x)\beta^{n-1}(x)[\alpha(x) + n\beta'(x)] = \rho(x)\beta^{n-1}(x)R_1(x). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались уравнением Пирсона и обозначили через $R_1(x)$ полином первой или нулевой степени по x. Для второй производной получим

$$U''(x) = \rho(x)\beta^{n-2}(x)[\alpha'(x)R_1(x) + (n-1)\beta'(x)R_1(x) + \\ + \beta(x)R_1'(x)] = \rho(x)\beta^{n-2}(x)R_2(x),$$

где $R_2(x)$ – полином не выше второй степени. Предположим, что

$$U^{(k)}(x) = \rho(x)\beta^{n-k}(x)R_k(x), \qquad k < n, \tag{31.13}$$

где $R_k(x)$ – некоторый полином степени не выше k. Тогда

$$U^{(k+1)}(x) = \rho(x)\beta^{n-k-1}(x)[\alpha(x)R_k(x) + \\ +(n-k)\beta'(x)R_k(x) + \beta(x)R_k'(x)] = \rho(x)\beta^{n-k-1}(x)R_{k+1}(x),$$

так как в квадратных скобках стоит полином степени не выше $k+1$. Таким образом, методом математической индукции мы показали, что

$$\mathcal{P}_n(x) = A_n R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – полином степени не выше n.

II. Покажем, что $\mathcal{P}_n(x)$ – полином, степень которого равна n.

Из граничного условия для уравнения Пирсона (31.9) и соотношения (31.13) найдем

$$[\rho(x)\beta^k(x)]\big|_{x=a} = [\rho(x)\beta^k(x)]\big|_{x=b} = 0; \tag{31.14}$$
$$U^{(k)}(x)\big|_{x=a} = U^{(k)}(x)\big|_{x=b} = 0, \qquad k = \overline{0, n-1}.$$

Следовательно, для любого полинома $Q_k(x) = \sum\limits_{j=0}^{k} C_j x^j$, $k = \overline{0, n-1}$, получим

$$I_{k,n} = \int\limits_a^b \rho(x)Q_k(x)\mathcal{P}_n(x)dx = A_n \int\limits_a^b Q_k(x)[\rho(x)\beta^n(x)]^{(n)}dx.$$

Проинтегрируем $I_{k,m}$ один раз по частям, положив $u = Q_k(x)$, $du = Q_k'(x)dx$, $dv = [\rho(x)\beta^n(x)]^{(n)}dx$, $v = [\rho(x)\beta^n(x)]^{(n-1)}$, т.е.

$$I_{k,n} = A_n\Big\{Q_k(x)[\rho(x)\beta^n(x)]^{(n-1)}\Big|_a^b - \\ - \int\limits_a^b Q_k'(x)[\rho(x)\beta^n(x)]^{(n-1)}dx\Big\} = \\ = A_n\Big\{Q_k(x)U^{(n-1)}(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b Q_k'(x)U^{(n-1)}(x)dx\Big\}.$$

В силу (31.14) внеинтегральное слагаемое равно нулю. Оставшийся интеграл проинтегрируем еще $k-1$ раз по частям и с учетом соотношения $Q_k^{(k)}(x) = C_k$ получим

$$I_{k,n} = A_k(-1)^k k! C_k \int\limits_a^b [\rho(x)\beta^n(x)]^{(n-k)} dx =$$

$$= (-1)^k A_k k! C_k [\rho(x)\beta^n(x)]^{(n-k-1)}\Big|_a^b = 0.$$

Таким образом,

$$I_{k,n} = 0, \qquad k = \overline{0, n-1}. \tag{31.15}$$

Предположим теперь, что $\mathcal{P}_n(x)$ – полином степени, меньшей чем n. Тогда из (31.15) при $Q_k(x) = \mathcal{P}_n(x)$ следует, что

$$\int\limits_a^b \rho(x)\mathcal{P}_n^2(x) dx = 0.$$

В силу свойств весовой функции это равенство невозможно, так как $\mathcal{P}_n^2(x) \geqslant 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 31.1.1. Полином $\mathcal{P}_n(x)$ ортогонален на интервале $]a, b[$ произвольному полиному $Q_k(x)$ степени, меньшей чем n $(k < n)$.

Доказательство непосредственно следует из (31.15).

Следствие 31.1.2. Полиномы $\mathcal{P}_k(x)$ образуют на интервале $]a, b[$ ортогональную с весом $\rho(x)$ систему функций $\{\mathcal{P}_n(x)\}$, $n = \overline{0, \infty}$, т.е.

$$\int\limits_a^b \rho(x)\mathcal{P}_n(x)\mathcal{P}_m(x) dx = \|\mathcal{P}_n\|^2 \delta_{nm}. \tag{31.16}$$

Доказательство. Рассмотрим два полинома $\mathcal{P}_n(x)$, $\mathcal{P}_m(x)$. Пусть для определенности $n \geqslant m$. Тогда если $n > m$, то в соответствии с предыдущей леммой $\langle \mathcal{P}_m(x) | \mathcal{P}_n(x) \rangle_\rho = 0$. Если $n = m$, то $\langle \mathcal{P}_n(x) | \mathcal{P}_n(x) \rangle = \|\mathcal{P}_n(x)\|^2$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим более подробно уравнение Пирсона или, как его еще называют, уравнение для весовой функции $\rho(x)$. Интервал $]a, b[$, присутствующий в (31.9), может быть как полубесконечным ($b = \infty$ или $a = -\infty$), так и бесконечным ($a = -\infty$, $b = \infty$). Согласно условиям (31.9), (31.10), функцию $\beta(x)$ (с точностью до несущественного постоянного множителя) можно выбрать такой, чтобы она обращалась в нуль в конечных граничных точках:

$$\beta(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x), & x \in]a, b[; \\ x - a, & x \in]a, \infty[; \\ b - x, & x \in]-\infty, b[; \\ 1, & x \in]-\infty, \infty[. \end{cases} \tag{31.17}$$

Любой из этих интервалов с помощью линейной замены переменной можно свести к интервалу $]-1, 1[$ или $]0, \infty[$, или $]-\infty, \infty[$. Тогда равенства (31.17) можно записать

$$\beta(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \in]-1,1[; \\ x, & x \in]0,\infty[; \\ 1, & x \in]-\infty,\infty[. \end{cases} \tag{31.18}$$

С учетом (31.18) решение уравнения Пирсона (с точностью до несущественного постоянного множителя) будет иметь вид

$$\rho(x) = \begin{cases} (1-x)^\mu(1+x)^\nu,\ \mu = -\dfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1), \\ \quad \nu = \dfrac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1); \quad x \in]-1,1[; \\ x^\mu \exp(\alpha_1 x),\ \mu = \alpha_0; \quad x \in]0,\infty[; \\ \exp\Big(\alpha_0 x + \dfrac{\alpha_1}{2}x^2\Big); \quad x \in]-\infty,\infty[. \end{cases} \tag{31.19}$$

Отсюда следует, что

1. На конечном интервале $]-1,1[$ для выполнения условий (31.9)

$$\rho(x)\beta(x)\big|_{x=\pm1} = (1-x)^{\mu+1}(1+x)^{\nu+1}\big|_{x=\pm1} = 0$$

необходимо, чтобы были справедливы неравенства $\mu > -1$, $\nu > -1$. Функция $\alpha(x)$ в этом случае в силу равенств $\alpha_0 = \nu-\mu$, $\alpha_1 = -(\nu+\mu)$ будет иметь вид

$$\alpha(x) = \nu - \mu - (\nu+\mu)x. \tag{31.20}$$

2. На полубесконечном интервале $]0,\infty[$ для выполнения условий (31.9)

$$\rho(x)\beta(x)\big|_{x=0,\infty} = x^{\mu+1}\exp(\alpha_1 x)\big|_{x=0,\infty} = 0$$

можно положить $\alpha_1 = -1$ и потребовать $\mu > -1$, тогда

$$\alpha(x) = \mu - x. \tag{31.21}$$

3. На бесконечном интервале $]-\infty,\infty[$ для выполнения условий (31.9) достаточно выбрать $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = -2$ так, что

$$\alpha(x) = -2x. \tag{31.22}$$

Таким образом, мы приходим к следующим каноническим формам классических ортогональных полиномов, определяемых формулой Родрига (31.11):

1. Полиномы Якоби $\mathcal{P}_n(x) = P_n^{\mu,\nu}(x)$ определены на интервале $]-1,1[$ с весовой функцией $\rho(x) = (1-x)^\mu(1+x)^\nu$ и функциями $\alpha(x) = \nu-\mu-(\nu+\mu)x$ и $\beta(x) = 1-x^2$, причем $\mu > -1$, $\nu > -1$, $A_n = (-1)^n/(2^n n!)$.

   Важными частными случаями полиномов Якоби являются:

   а) полиномы Лежандра $P_n(x) = P_n^{0,0}(x)$, $\mu = \nu = 0$;

   б) полиномы Чебышева первого рода

$$T_n(x) = \frac{n!\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2+n)P_n^{-1/2,-1/2}}, \quad \mu = \nu = -\frac{1}{2};$$

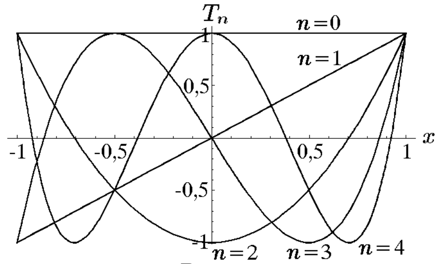

Рис. 30

в) полиномы Чебышева второго рода

$$U_n(x) = \frac{(n+1)!\sqrt{\pi}}{2\Gamma(3/2+n)P_n^{1/2,1/2}}, \quad \mu = \nu = \frac{1}{2};$$

г) полиномы Гегенбауэра (или ультрасферические полиномы)

$$C_n^{\lambda}(x) = \frac{\Gamma(2\lambda+n)\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(\lambda+1/2+n)P_n^{\lambda-1/2,\lambda-1/2}}, \quad \mu = \nu = \lambda - \frac{1}{2}.$$

Полиномы Чебышева первого и второго рода (см. рис. 30 и 31) являются также частными случаями полиномов Гегенбауэра с $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$, соответственно. На рис. 32 и 33 изображены графики некоторых частных случаев полиномов Якоби.

2. Полиномы Лагерра (обобщенные полиномы Лагерра, или Чебышева–Лагерра) $\mathcal{P}_n(x) = L_n^{\mu}(x)$ определены на интервале $]0,\infty[$ с весовой функцией $\rho(x) = x^{\mu}e^{-x}$ и функциями $\alpha(x) = \mu - x$ и $\beta(x) = x$, причем $\mu > -1$, $A_n = 1/(n!)$.
3. Полиномы Эрмита (Чебышева–Эрмита) $\mathcal{P}_n(x) = H_n(x)$ определены на интервале $]-\infty,\infty[$ с весовой функцией $\rho(x) = e^{-x^2}$ и функциями $\alpha(x) = -2x$ и $\beta(x) = 1$, причем $A_n = (-1)^n$.

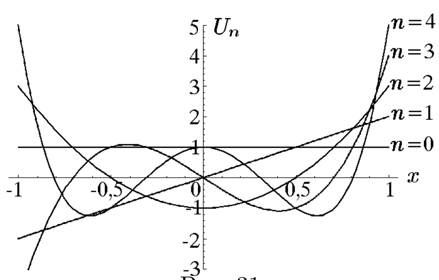

Рис. 31

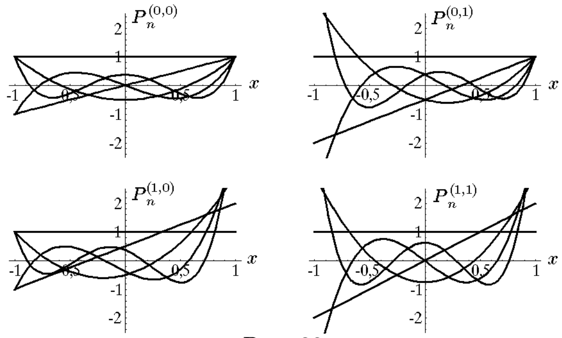

Рис. 32

Для рассмотренных ранее полиномов $P_n(x)$, $L_n^\mu(x)$, $H_n(x)$ подстановка выражений (31.18) и (31.19) в (31.11) с учетом приведенных значений A_n дает уже известные формулы Родрига.

31.3. Производящая функция

♦ Функция $F(x,t)$ называется производящей функцией для системы полиномов $\{\mathcal{P}_n(x)\}$, $n=\overline{0,\infty}$, если ее разложение в ряд Тейлора в точке $t=0$ имеет вид

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!A_n}\mathcal{P}_n(x)t^n.$$

Теорема 31.2. *Функция*

$$F(x,t)=\frac{1}{\rho(x)}\frac{\rho(\omega(x,t))}{1-t\beta'(\omega(x,t))} \tag{31.23}$$

является производящей для полиномов $\{\mathcal{P}_n(x)\}$. Здесь ω неявным образом определяется уравнением

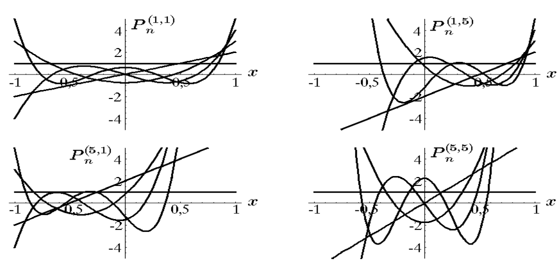

Рис. 33

$$\omega - x - t\beta(\omega) = 0. \tag{31.24}$$

В формуле (31.23) *используется то из решений уравнения* (31.24), *которое при малых* $|t|$ *расположено ближе всего к точке* x.

Доказательство. Разложим функцию (31.23) в ряд Тейлора по t:

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) t^n, \tag{31.25}$$

где

$$C_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n F(x,t)}{\partial t^n}\Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi i}\frac{1}{\rho(x)}\int\limits_{\gamma}\frac{\rho(\omega(x,z))}{[1 - z\beta'(\omega(x,z))]z^{n+1}}dz,$$

а γ – произвольный замкнутый контур в комплексной плоскости z, охватывающий начало координат. Сделаем в интеграле замену переменных $z \to \omega(x,z)$, где $\omega(x,z)$ определяется уравнением

$$\omega - x - z\beta(\omega) = 0. \tag{31.26}$$

Следовательно,

$$z = \frac{\omega - x}{\beta(\omega)}$$

и
$$d\omega - \beta(\omega)dz - z\beta'_\omega(\omega)d\omega = 0$$
или
$$dz = \frac{1 - z\beta'_\omega(\omega)}{\beta(\omega)}d\omega.$$
При преобразовании, определяемом соотношением (31.26), контур γ трансформируется в контур $\tilde{\gamma}$, охватывающий точку x, поэтому следует взять ближайшее к x значение ω, чтобы остаться в области аналитичности. В результате получим
$$C_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\rho(x)}\int\limits_{\tilde{\gamma}}\frac{\rho(\omega)\beta^n(\omega)}{(\omega - x)^{n+1}}d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n!\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}}\frac{\rho(\omega)\beta^n(\omega)}{\omega - x}d\omega\right\}.$$

Воспользовавшись интегральной формулой Коши (I.12.1), получим
$$C_n(x) = \frac{1}{n!\rho(x)}[\rho(x)\beta^n(x)]^{(n)} = \frac{1}{n!A_n}\mathcal{P}_n(x).$$
Таким образом, для функции (31.23) справедливо
$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!A_n}\mathcal{P}_n(x)t^n, \tag{31.27}$$
что и требовалось доказать.

Пример 31.1. Найти производящую функцию для полиномов Лежандра $P_n(x)$.

Решение. Поскольку для полиномов $P_n(x)$ функция $\beta(\omega) = 1-\omega^2$, то уравнение (31.24) принимает вид
$$\omega - x - t(1 - \omega^2) = 0$$
или
$$t\omega^2 + \omega - (x + t) = 0.$$
Из двух решений
$$\omega_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4t(t + x)}}{2t},$$
согласно теореме 31.2, выбираем решение, содержащее знак «+». Приняв во внимание, что $\beta'(\omega) = -2\omega$ и $\rho(x) = 1$, находим
$$F(x,t) = \frac{1}{1 + 2t\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4tx + 4t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\frac{t^n}{A_n n!}.$$

Замена $t \to -t/2$ приводит к разложению

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\frac{(-1)^n t^n}{2^n A_n n!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2^n n!}\Big[\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1),$$

которое с учетом (16.7) можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n,$$

откуда следует выражение для производящей функции

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}},$$

совпадающее с использованным ранее выражением (16.1).

$\Diamond$ Аналогично из (31.23) для производящих функций полиномов Лагерра $L_n^\mu(x)$ и Эрмита $H_n(x)$ можно получить выражения (22.1) и (27.1), соответственно. Для полиномов Чебышева первого рода $T_n(x)$ производящая функция имеет вид

$$\frac{1-tx}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n, \tag{31.28}$$

а для полиномов Чебышева второго рода $U_n(x)$:

$$\frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n. \tag{31.29}$$

31.4. Дифференциальные уравнения для классических ортогональных полиномов

Теорема 31.3. *Ортогональные полиномы $y = \mathcal{P}_n(x)$ (31.11) удовлетворяют уравнению*

$$\beta(x)y'' + [\alpha(x) + \beta'(x)]y' - \gamma_n y = 0, \tag{31.30}$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определяются соотношением (31.10), *а*

$$\gamma_n = n[\alpha_1 + (n+1)\beta_2]. \tag{31.31}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию (31.12)

$$U(x) = \rho(x)\beta^n(x).$$

Тогда

$$U'(x) = \rho(x)\beta^{n-1}(x)[\alpha(x) + \beta'(x)]$$

или
$$\beta(x)U' - [\alpha(x) + n\beta'(x)]U = 0.$$
Продифференцируем это соотношение $n+1$ раз. С учетом формулы Лейбница
$$(UV)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} U^{(k)} V^{(n-k)}$$
получим
$$\beta(x)U^{(n+2)} + (n+1)\beta'(x)U^{(n+1)} + \frac{(n+1)n}{2} U^{(n)}\beta''(x) -$$
$$-[\alpha(x) + n\beta'(x)]U^{(n+2)} - (n+1)[\alpha'(x) + n\beta''(x)]U^{(n)} = 0.$$
Здесь мы воспользовались тем, что $\beta^{(k)}(x) = 0$, $k > 2$, $\alpha^{(j)}(x) = 0$, $j > 1$. Приведя подобные, получим
$$\begin{aligned}&\beta(x)U^{(n+2)} - [\alpha(x) - \beta'(x)]U^{(n+1)} - \\ &-(n+1)\Big[\alpha'(x) + \frac{n}{2}\beta''(x)\Big]U^{(n)} = 0.\end{aligned} \tag{31.32}$$
Сделаем в уравнении (31.32) замену
$$\begin{aligned}&U^{(n)}(x) = A_n^{-1}\rho(x)\mathcal{P}_n(x);\\ &U^{(n+1)}(x) = \frac{1}{A_n}\Big[\rho(x)\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\mathcal{P}_n(x) + \rho(x)\mathcal{P}'_n(x)\Big];\\ &U^{(n+2)}(x) = \frac{\rho(x)}{A_n}\Big[\frac{\alpha^2(x) + \alpha'(x)\beta(x) - \alpha(x)\beta'(x)}{\beta^2(x)}\mathcal{P}_n(x) + \\ &\qquad + 2\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\mathcal{P}'_n + \mathcal{P}''_n(x)\Big]\end{aligned} \tag{31.33}$$
и получим
$$\frac{\rho(x)}{A_n}\Big\{\beta(x)\Big[\frac{\alpha^2(x) + \alpha'(x)\beta(x) - \alpha(x)\beta'(x)}{\beta^2(x)}\mathcal{P}_n(x) +$$
$$+2\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\mathcal{P}'_n + \mathcal{P}''_n(x)\Big] - [\alpha(x) - \beta'(x)]\Big[\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\mathcal{P}_n(x) + \mathcal{P}'_n(x)\Big] -$$
$$-(n+1)\Big[\alpha'(x) + \frac{n}{2}\beta''(x)\Big]\mathcal{P}(x)\Big\} = 0.$$
Приводя подобные, получим утверждение теоремы.

С помощью соотношений (31.18)–(31.22) запишем явный вид дифференциальных уравнений для полиномов

1. Якоби $y = P_n^{\mu,\nu}(x)$:
$$\begin{aligned}&(1-x^2)y'' + [\nu - \mu - (\nu + \mu + 2)x]y' + \\ &+n(\nu + \mu + n + 1)y = 0\end{aligned} \tag{31.34}$$
откуда при $\mu = \nu = 0$ получаются уравнения для полиномов Лежандра

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

при $\mu = \nu = -1/2$ – для полиномов Чебышева первого рода

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0,$$

при $\mu = \nu = 1/2$ – для полиномов Чебышева второго рода

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0,$$

при $\mu = \nu = \lambda - 1/2$ – для полиномов Гегенбауэра

$$(1-x^2)y'' + -(2\lambda+1)xy' + n(2\lambda+n)y = 0.$$

Отметим, что функции $T_n(x)$ и $\sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)$ являются двумя линейно независимыми решениями уравнения

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0. \tag{31.35}$$

2. Лагерра $y = L_n^\mu(x)$:

$$xy'' + (\mu - x + 1)y' + ny = 0.$$

3. Эрмита $y = H_n(x)$:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

31.5. Алгебраические свойства ортогональных полиномов

Теорема 31.4. *Все нули ортогональных полиномов $\mathcal{P}(x)$ действительны, различны (т.е. простые) и расположены на интервале $]a, b[$.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна и только часть нулей является простыми либо таких нет вообще. Рассмотрим только те нули, в которых $\mathcal{P}(x)$ меняет знак. Построим полином

$$Q_k(x) = \prod_{j=1}^{k}(x - \lambda_j), \qquad k \leqslant n,$$

где λ_j – нули полинома $\mathcal{P}_n(x)$, $\lambda_j \in]a, b[$, в которых он меняет знак (если $k = 0$, то $Q_0 = \mathrm{const}$). Следовательно, функция

$$\Phi(x) = \mathcal{P}_n(x)Q_k(x), \qquad x \in]a, b[,$$

не меняет знак, и в силу свойств скалярного произведения получим

$$\int\limits_a^b \rho(x)\mathcal{P}_n(x)Q_k(x)dx \neq 0. \tag{31.36}$$

С другой стороны, $Q_k(x)$ – полином степени k ($k < n$), ортогональный полиному $\mathcal{P}_n(x)$, т.е.

$$\int\limits_a^b \rho(x)\mathcal{P}_n(x)Q_k(x)dx = 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 31.5. *Любые три последовательных классических полинома $\mathcal{P}_{n-1}(x)$, $\mathcal{P}_n(x)$, $\mathcal{P}_{n+1}(x)$ связаны соотношением*

$$\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\frac{\|\mathcal{P}_n(x)\|^2}{\|\mathcal{P}_{n-1}(x)\|^2}\mathcal{P}_{n-1}(x)+ \\ +\Big[\frac{\nu_n}{\mu_n} - \frac{\nu_{n+1}}{\mu_{n+1}} - x\Big]\mathcal{P}_n(x) + \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\mathcal{P}_{n+1}(x) = 0, \qquad (31.37)$$

где μ_n, ν_n – коэффициенты, соответственно, при x^n и x^{n-1} в полиноме

$$\mathcal{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^n x^k, \qquad \alpha_n^n = \mu_n, \qquad \alpha_{n-1}^n = \nu_n.$$

Доказательство. Разложим полином $x\mathcal{P}_n(x)$ по ортогональной системе функций $\{\mathcal{P}_k(x)\}$, $k = \overline{1,\infty}$. Получим

$$x\mathcal{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_k^n \mathcal{P}_k(x), \qquad (31.38)$$

где

$$C_k^n = \frac{1}{\|\mathcal{P}_k\|^2}\int\limits_a^b x\mathcal{P}_n(x)\mathcal{P}_k(x)dx,$$

причем

$$\|\mathcal{P}_k\|^2 C_k^n = \|\mathcal{P}_k\|^2 C_n^k. \qquad (31.39)$$

Так как $x\mathcal{P}_n(x)$ — полином степени $n+1$, то, следовательно, в (31.38), с одной стороны, $C_k^n = 0$ при $k > n+1$, а с другой стороны, согласно (31.39), $C_k^n = 0$ при $k < n-1$ (это вытекает из следствия 31.1.1). Таким образом, сумма в правой части (31.38) содержит всего три слагаемых, т.е.

$$x\mathcal{P}_n(x) = C_{n-1}^n\mathcal{P}_{n-1}(x) + C_n^n\mathcal{P}_n(x) + \mathcal{P}_n^n(x). \qquad (31.40)$$

Приравняв в (31.40) коэффициенты при x^{n+1} и x^n, получим

$$\mu_n = C_{n+1}^n\mu_{n+1}, \qquad \nu_n = C_n^n\mu_n + C_{n+1}^n\nu_{n+1},$$

откуда

$$C_{n+1}^n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}, \qquad C_n^n = \frac{\nu_n}{\mu_n} - \frac{\nu_{n+1}}{\mu_{n+1}}. \qquad (31.41)$$

Для нахождения коэффициента C_{n-1}^n воспользуемся формулой (31.39), из которой следует, что

$$C_{n-1}^n = C_n^{n-1}\frac{\|\mathcal{P}_n\|^2}{\|\mathcal{P}_{n-1}\|^2}$$

или с учетом (31.41)

$$C_{n-1}^n = \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\frac{\|\mathcal{P}_n\|^2}{\|\mathcal{P}_{n-1}\|^2}. \tag{31.42}$$

Подставив (31.41) и (31.42) в (31.40), приходим к рекуррентной формуле (31.37).

Пример 31.2. С помощью рекуррентного соотношения (31.37) получить для полиномов Лежандра рекуррентное соотношение (17.1).

Решение. Так как для полиномов Лежандра

$$\mu_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}, \qquad \nu_n = 0,$$

а

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1},$$

то

$$\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} = \frac{n}{2n-1}, \qquad \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}, \qquad \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} = \frac{2n-1}{2n+1}. \tag{31.43}$$

Подставив (31.43) в (31.37), получим соотношение (17.1)

$$nP_{n-1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + (n+1)P_{n+1}(x) = 0.$$

Теорема 31.6. *Для нормированного на единицу полинома $\mathcal{P}_n(x)$, $n \geqslant 1$, имеет место представление через моменты весовой функции* (31.8)

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}\begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \ldots & \sigma_n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_{n+1} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{n-1} & \sigma_n & \ldots & \sigma_{2n-1} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix}, \tag{31.44}$$

где через Δ_n обозначен определитель Грама

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \ldots & \sigma_n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_{n+1} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{n-1} & \sigma_n & \ldots & \sigma_{2n-1} \\ \sigma_n & \sigma_{n+1} & \ldots & \sigma_{2n} \end{vmatrix}. \tag{31.45}$$

Доказательство. 1. Полином $\mathcal{P}_n(x)$ ортогонален любому полиному

$$R_k(x) = \sum_{l=0}^{k} \alpha_l^k x^l$$

степени $k < n$. Действительно, умножив (31.40) на $x^l \rho(x)$ и проинтегрировав в пределах от a до b, получим определитель с двумя одинаковыми строками. Следовательно,

$$\int\limits_a^b x^l \mathcal{P}_n(x)\rho(x)dx = 0, \qquad l < n$$

и

$$\int\limits_a^b R_k(x)\mathcal{P}_n(x)\rho(x)dx = 0, \qquad k < n.$$

Таким образом, ортогональность доказана.

2. Найдем норму $\|\mathcal{P}_n(x)\|$ полинома $\mathcal{P}_n(x)$. Заметим, что

$$\mathcal{P}_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l^n x^l = \mu_n x^n + Q_{n-1}(x),$$

где $Q_{n-1}(x)$ – полином степени $n-1$, а согласно свойствам определителя,

$$\mu_n = \frac{\Delta_{n-1}}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}.$$

Таким образом,

$$\|\mathcal{P}_n(x)\|^2 = \int\limits_a^b \rho(x)\left[\sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}x^n + Q_{n-1}(x)\right]\mathcal{P}_n(x)dx =$$

$$= \sqrt{\tfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}\int\limits_a^b \rho(x)x^n\mathcal{P}_n(x)dx = \sqrt{\tfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}\frac{\Delta_n}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Пример 31.3. Показать, что если $\{\mathcal{P}_n(x)\}$ — полиномы, ортогональные на $]-a, a[$ с четной весовой функцией $\rho(x)$, то:

1) полиномы $g_n(x) = \mathcal{P}_{2n}(\sqrt{x})$ ортогональны на интервале $]0, a^2[$ с весовой функцией

$$\bar\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\rho(\sqrt{x}); \tag{31.46}$$

2) полиномы

$$q_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\mathcal{P}_{2n+1}(\sqrt{x}) \tag{31.47}$$

ортогональны на интервале $]0, a^2[$ с весовой функцией $\tilde\rho(x) = \sqrt{x}\rho(\sqrt{x})$.

Решение. Так как вес $\rho(x)$ единственным образом (с точностью до постоянного множителя) определяет систему ортогональных полиномов, то для $\rho(-x) = \rho(x)$ справедливо $\mathcal{P}_n(-x) = (-1)^n\mathcal{P}_n(x)$. Это означает, что при нечетном n полиномы $\mathcal{P}_n(x)$ содержат только нечетные степени x, а при четном n — только четные степени x, т.е.

$$\mathcal{P}_{2n}(x) = g_n(x^2), \qquad \mathcal{P}_{2n+1}(x) = xq_n(x^2).$$

Здесь $g_n(x)$ и $q_n(x)$ — некоторые полиномы от x степени n.

Используя условие ортогональности для полиномов четных степеней, при $m \neq n$ получим

$$\int\limits_{-a}^{a} \rho(x)\mathcal{P}_{2n}(x)\mathcal{P}_{2m}(x)dx = \int\limits_{-a}^{a} \rho(x)g_n(x^2)g_m(x^2)dx =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{a} \rho(x)g_n(x^2)g_m(x^2)dx = \int\limits_{0}^{a^2} \frac{\rho(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}g_n(t)g_m(t)dt = 0,$$

откуда и следует справедливость первого утверждения.

Аналогично

$$\int\limits_{-a}^{a} \rho(x)\mathcal{P}_{2n+1}(x)\mathcal{P}_{2m+1}(x)dx = \int\limits_{-a}^{a} \rho(x)x^2q_n(x^2)q_m(x^2)dx =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{a} x^2\rho(x)g_n(x^2)g_m(x^2)dx = \int\limits_{0}^{a^2} \sqrt{t}\rho(\sqrt{t})g_n(t)g_m(t)dt = 0.$$

Отсюда следует справедливость второго утверждения.

Нетрудно заметить, что формулы (27.19) и (27.20), связывающие полиномы Эрмита и Лагерра, являются частным случаем соотношений (31.46) и (31.47).

32. Интегральные преобразования классических ортогональных полиномов

Рассмотрим несколько примеров интегральных преобразований классических ортогональных полиномов.

Пример 32.1. Найти лапласовское изображение функции

$$f(t) = t^\alpha L_n^\alpha(t), \qquad \alpha > -1.$$

Решение. Согласно соотношению (27.5), для полиномов Лагерра справедливо представление

$$L_n^\alpha(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)k!(n-k)!} t^k = \sum_{k=0}^{n} C_k^\alpha t^k.$$

Воспользуемся первой теоремой разложения [см. соотношение (15.1)]. Тогда

$$f(t) = t^\alpha L_n^\alpha(t) = \sum_{k=0}^{n} C_k^\alpha t^{k+\alpha} \risingdotseq \varphi(p) = \sum_{k=0}^{n} C_n^\alpha \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{p^{k+\alpha+1}}.$$

Преобразуем коэффициент при $1/(p^{k+\alpha+1})$:

$$C_n^\alpha \Gamma(k+\alpha+1) = \frac{(-1)^k\Gamma(n+\alpha+1)}{k!(n-k)!}.$$

Следовательно,

$$\varphi(p) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!p^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{p^k} =$$
$$= \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{n!}\frac{1}{p^{\alpha+1}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^n.$$

Окончательно получим

$$t^\alpha L_n^\alpha(t) \risingdotseq \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{n!}\frac{(p-1)^n}{p^{n+\alpha+1}}. \tag{32.1}$$

В частности, при $\alpha = 0$ из (32.1) следует

$$L_n(t) \risingdotseq \frac{(p-1)^n}{p^{n+1}}. \tag{32.2}$$

Пример 32.2. Найти лапласовское изображение функций

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} H_{2n}(\sqrt{t}), \qquad f_2(t) = H_{2n+1}(\sqrt{t}).$$

Решение. *Первый способ.* Из соотношений (27.19) и (27.20) следует, что

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}(-1)^n 2^{2n} L_n^{-1/2}(t),$$
$$f_2(t) = (-1)^n 2^{2n+1}\sqrt{t} L_n^{1/2}(t).$$

Положив в (32.1) $\alpha = -1/2$ и $\alpha = 1/2$, окончательно получим

$$\frac{1}{\sqrt{t}} H_{2n}(\sqrt{t}) \risingdotseq (-1)^n 2^{2n} \frac{\Gamma(n+1/2)}{n!} \frac{(p-1)^n}{p^{n+1/2}}, \qquad (32.3)$$

$$H_{2n+1}(\sqrt{t}) \risingdotseq (-1)^n 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+3/2)}{n!} \frac{(p-1)^n}{p^{n+3/2}}. \qquad (32.4)$$

Второй способ. Соотношения (32.3) и (32.4) можно получить непосредственно из представления (22.7)

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2t)^{n-2k}$$

для полиномов Эрмита. Здесь $[n/2]$ означает целую часть числа $n/2$. Воспользуемся первой теоремой разложения [см. соотношение (15.1)]

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} H_{2n}(\sqrt{t}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n)!}{k!(2n-2k)!} 2^{2n-2k} t^{n-k-1/2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_k^1 t^{n-k-1/2} \risingdotseq \varphi_1(p) = \sum_{k=0}^{n} C_k^1 \frac{\Gamma(n-k-1/2)}{p^{n-k-1/2}}.$$

С учетом соотношений

$$\Gamma\Big(m+\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2^m}(2m-1)!!\sqrt{\pi}; \qquad (32.5)$$
$$(2m-1)! = 2^{m-1} m!(2m-1)!!$$

при $m = n-k$ получим

$$\varphi_1(p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n)!\sqrt{\pi}}{k!(n-k)! p^{n-k+1/2}} = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n!} \frac{(1-p)^n}{p^{n+1/2}},$$

откуда с учетом (32.5) получим (32.3). Доказательство соотношения (32.4) аналогично.

Пример 32.3. Используя теорему умножения для изображений, доказать справедливость соотношения

$$I(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\tau^m L_n^m(\tau)d\tau = \\ = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+m+\alpha+1)} t^{m+\alpha} L_n^{m+\alpha}(t), \qquad (32.6)$$

где $\alpha > -1$.

Решение. Воспользуемся теоремой Бореля (15.26), положив

$$f(t) = t^{\alpha-1}, \qquad g(t) = t^m L_n^m(t).$$

Тогда с учетом (32.1)

$$f(t) \risingdotseq \varphi(p) = \frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha}, \quad g(t) \risingdotseq \psi(p) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{n!}\frac{(p-1)^n}{p^{n+m+1}}.$$

Следовательно,

$$I(t) \risingdotseq \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+m+1)}{n!}\frac{(p-1)^n}{p^{n+m+1+\alpha}}.$$

Найдем оригинал последнего выражения

$$I(t) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+m+\alpha+1)} t^{m+\alpha} L_n^{m+\alpha}(t),$$

что и требовалось доказать.

Пример 32.4. С помощью преобразования Лапласа найти разложение функции $f(t) = e^{-t}$ в ряд Фурье–Лагерра при $\alpha = 0$.

Решение. Разложим правую часть соотношения

$$e^{-t} \risingdotseq \frac{1}{p+1}$$

в ряд Тейлора по степеням $w = (p-1)/p$:

$$\frac{1}{p+1} = \frac{1}{2p}\frac{1}{1-(p-1)/(2p)} = \frac{1}{2p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{(p-1)^n}{p^n}.$$

Проведя обратное преобразование Лапласа, с учетом (32.2) получим

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} L_n(t),$$

что согласуется с соотношением (30.3).

Пример 32.5. Найти Фурье-образ функции

$$f(x) = u_n(x).$$

Решение. По определению (22.2), (25.1),

$$e^{-x^2/2+2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} N_n u_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad N_n = (2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}. \tag{32.7}$$

Проведем преобразование Фурье левой и правой частей соотношения (32.7) по переменной x. Получим

$$e^{-t^2} F_{x\to p} e^{-x^2/2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_n}{n!} \bar{u}_n(p) t^n,$$

где обозначено $\bar{u}_n(p) = F_{x\to p} u_n(x)$. Вычислим

$$F_{x\to p} e^{-x^2/2+2xt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ipx} e^{-x^2/2+2xt} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-(x+ip-2t)^2/2} e^{(ip-2t)^2/2} = e^{-p^2/2+2ipt+2t^2}.$$

Следовательно,

$$e^{-p^2/2+2ipt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_n}{n!} \bar{u}_n(p) t^n.$$

Положив $it = \tau$, запишем

$$e^{-p^2/2+2p\tau-\tau^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_n}{n!} (-i)^n \bar{u}_n(p) \tau^n.$$

С учетом (32.7) окончательно получим

$$F_{x\to p} u_n(x) = (-i)^n \bar{u}_n(p). \tag{32.8}$$

ГЛАВА 4

Гипергеометрическая функция*

В этой главе мы рассмотрим важный класс специальных функций – гипергеометрические функции.

♦ Функция

$$ {}_pF_q(a_1, a_2, \ldots, a_p; b_1, b_2, \ldots, b_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{s=1}^{p} (a_s)_n}{\prod\limits_{l=1}^{q} (b_l)_n} \frac{x^n}{n!} $$

называется обобщенной гипергеометрической функцией, а ряд, стоящий в правой части формулы, — обобщенным гипергеометрическим рядом. Здесь через $(a)_n$ $(n = \overline{0, \infty})$ обозначен символ Похгаммера (сдвинутый факториал)

$$ (a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. $$

33. Вырожденная гипергеометрическая функция*

♦ Функция

$$ \begin{aligned} \Phi(a, c; x) &= {}_1F_1(a; c; x) = \\ &= 1 + \frac{a}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{x^3}{3!} + \cdots = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \end{aligned} \tag{33.1} $$

называется вырожденной гипергеометрической функцией, а ряд, стоящий в правой части, — вырожденным гипергеометрическим рядом. Здесь предполагается, что c не является целым отрицательным числом, т.е. $c \neq -m$, $m = \overline{0, \infty}$.

Утверждение 33.1. *Функция $\Phi(a, c; z)$, где z – комплексное число, аналитична на всей комплексной плоскости.*

Исследуем степенной ряд

$$ \Phi(a, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z), \qquad u_k(z) = \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} $$

на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей. По признаку Даламбера (признаку сходимости знакоположительных рядов)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|u_{k+1}(z)|}{|u_k(z)|}=\lim_{k\to\infty}\frac{(a)_{k+1}(c_k)}{(c)_{k+1}(a_k)}\frac{|z|k!}{(k+1)!}=\lim_{k\to\infty}\frac{a+k}{c+k}\frac{|z|}{k+1}=0<1$$

для любого z. Здесь мы воспользовались основным функциональным соотношением для символов Похгаммера

$$(a)_{n+1}=(a+n)(a)_n, \tag{33.2}$$

которое следует непосредственно из определения. Значит, ряд сходится для всех $|z|<\infty$, и утверждение доказано.

♦ Дифференциальное уравнение

$$xy''+(c-x)y'-ay=0 \tag{33.3}$$

называется вырожденным гипергеометрическим уравнением.

Сделаем в уравнении (33.3) замену переменных

$$\psi(x)=x^{c/2}e^{-x/2}y(x),\qquad y(x)=x^{-c/2}e^{x/2}\psi(x). \tag{33.4}$$

Получим

$$\psi''+\Big(-\frac{1}{4}+\frac{k}{x}+\frac{1/4-u^2}{x^2}\Big)\psi=0, \tag{33.5}$$

где обозначено

$$a=-\frac{1}{2}-k+u,\quad c=1+2u;\qquad u=\frac{c-1}{2},\quad k=\frac{c}{2}-a.$$

♦ Уравнение (33.5) называется уравнением Уитеккера в стандартной форме.

Теорема 33.1. *Функции*

$$\begin{aligned}
&y_1(x)=\Phi(a,c;x),\\
&y_2(x)=x^{1-c}\Phi(a-c+1,2-c;x),\\
&y_3(x)=e^x\Phi(c-a,c;-x),\\
&y_4(x)=x^{1-c}e^x\Phi(1-a,2-c;-x)
\end{aligned} \tag{33.6}$$

являются решениями уравнения (33.3).

Доказательство для функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ получаем прямой подстановкой ряда (33.1) в уравнение (33.3). Для функции $y_3(x)$ сделаем в уравнении замену переменных $y(x)=e^xz(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&y'(x)=e^x[z'(x)+z(x)];\\
&y''(x)=e^x[z''(x)+2z'(x)+z(x)].
\end{aligned}$$

Для функции $z(x)$ получим уравнение

$$xz''+(c+x)z'+(c-a)z=0,$$

решением которого является функция $z(x)=\Phi(c-a,c;-x)$. Таким образом, функция $y_3(x)$ — решение уравнения (33.3). Доказательство для функции $y_4(x)$ аналогично доказательству для функции $y_3(x)$.

Следствие 33.1.1. Если $c \neq n$, $n = \overline{-\infty, \infty}$, то

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{33.7}$$

есть общее решение (33.3).

Доказательство. Как следует из (33.1), функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ при указанных c линейно независимы и функция (33.7) — общее решение (33.3).

Следствие 33.1.2. Справедливо соотношение

$$\Phi(a, c; x) = e^x \Phi(c - a; c; -x). \tag{33.8}$$

Доказательство. Между $y_1(x)$ и $y_3(x)$ существует линейная зависимость

$$\alpha y_1(x) + \beta y_3(x) = 0.$$

При $x = 0$ нетрудно получить

$$\alpha + \beta = 0.$$

Следовательно, $y_1(0) = y_3(0)$. В силу единственности решения задачи Коши

$$y_1(x) = y_3(x),$$

и утверждение доказано.

Теорема 33.2. *Справедливы рекуррентные соотношения*

$$\begin{aligned}
&(c - a)\Phi(a - 1, c; x) + (2a - c + x)\Phi(a, c; x) - \\
&\qquad - a\Phi(a + 1, c; x) = 0, \\
&c(c - 1)\Phi(a, c - 1; x) - c(c - 1 + x)\Phi(a, c; x) + \\
&\qquad + (c - a)x\Phi(a, c + 1; x) = 0, \\
&(a - c + 1)\Phi(a, c; x) - a\Phi(a + 1, c; x) + (c - 1)\Phi(a, c - 1; x) = 0, \\
&c\Phi(a, c; x) - c\Phi(a - 1, c; x) - x\Phi(a, c + 1; x) = 0, \\
&c(a + x)\Phi(a, c; x) - (c - a)x\Phi(a, c + 1; x) - ac\Phi(a + 1, c; x) = 0, \\
&(a - 1 + x)\Phi(a, c; x) + (c - a)\Phi(a - 1, c; x) - \\
&\qquad - (c - 1)\Phi(a, c - 1; x) = 0.
\end{aligned}$$

Доказательство. Любое из соотношений проверяется прямой подстановкой ряда (33.1).

Теорема 33.3. *Справедливо следующее интегральное представление:*

$$\Phi(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c - a)} \int\limits_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1 - t)^{c-a-1} dt \tag{33.9}$$

при $0 < \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} c$.

Доказательство. *Первый способ.* Рассмотрим дифференциальное уравнение (33.3)

$$\widehat{L}y = 0,$$

где обозначим

$$\widehat{L} = x\frac{d^2}{dx^2} + (c-x)\frac{d}{dx} - a.$$

Нетрудно заметить, что

$$\widehat{L}[e^{-xt}t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}] = -\frac{d}{dt}[e^{-xt}t^{a}(1+t)^{c-a}]. \tag{33.10}$$

Интегрируя тождество (33.10) по t в пределах $0 > t > -1$, считая $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$, получим, что функция

$$y(x) = A\int\limits_0^{-1} e^{-xt}t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}dt$$

— решение уравнения (33.3). Заменив здесь $t \to -t$ и выбрав множитель A из условия $y(0) = \Phi(a, c; 0) = 1$, получим (33.10).

Второй способ. Известно, что

$$e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{x^n}{n!}.$$

Подставим это разложение в (33.9):

$$\Phi(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\int\limits_0^1 t^{n+a-1}(1-t)^{c-a-1}dt =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}B(n+a, c-a)x^n.$$

Учтя, что

$$B(n+a, c-a) = \frac{\Gamma(n+a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(n+c)},$$

получим ряд (33.1).

Пример 33.1. Доказать справедливость соотношений

$$\begin{aligned}
&e^x = \Phi(a, a; x),\\
&J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^\nu e^{-ix}\Phi\Big(\frac{1}{2}+\nu, 1+2\nu; 2ix\Big),\\
&I_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^\nu e^{-x}\Phi\Big(\frac{1}{2}+\nu, 1+2\nu; 2x\Big), \qquad (33.11)\\
&L_\nu^\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1+\nu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+1)}\Phi(-\nu, \alpha+1; x),\\
&\frac{d^n}{dx^n}\Phi(a, c; x) = \frac{(a)_n}{(c)_n}\Phi(a+n, c+n; x).
\end{aligned}$$

Доказать самостоятельно.

Пример 33.2. Получить первый член асимптотического разложения $\Phi(a, c; x)$ при $\operatorname{Re} x \to \infty$, если $0 < \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} c$; a и c ограничены.

Решение. Проведем в (33.9) замену переменной интегрирования t на $1 - t$ и получим

$$\Phi(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)e^x}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int\limits_0^1 e^{-xt} t^{c-a-1}(1-t)^{a-1} dt.$$

Применив метод Лапласа, при $\operatorname{Re} x \to \infty$ имеем

$$\int\limits_0^1 e^{-xt} t^{c-a-1}(1-t)^{a-1} dt \approx \frac{\Gamma(c-a)}{x^{c-a}},$$

откуда окончательно найдем

$$\Phi(a, c; x) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-c}, \qquad \operatorname{Re} x \to \infty. \tag{33.12}$$

Пример 33.3. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{n+\nu/2} J_\nu(2\sqrt{qx}) dx \tag{33.13}$$

при $q > 0$, $\operatorname{Re}(n + \nu + 1) > 0$.

Решение. Подставим в формулу (33.13) разложение функции Бесселя в ряд (3.6):

$$I = q^{\nu/2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-q)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{n+\nu+k} dx =$$
$$= q^{\nu/2} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(n+\nu+1+k)}{\Gamma(\nu+1+k)} \frac{(-q)^k}{k!}.$$

Сравнив правую часть с формулой (33.1) и воспользовавшись соотношением (33.8), получим

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} x^{n+\nu/2} J_\nu(2\sqrt{qx}) dx =$$
$$= \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} q^{\nu/2} \Phi(n+\nu+1, \nu+1; -1) =$$
$$= -\frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} e^{-q} q^{\nu/2} \Phi(-n, \nu+1; q). \tag{33.14}$$

34. Гипергеометрическая функция Гаусса*

Свойства обобщенных гипергеометрических функций мы продемонстрируем на примере функции, введенной в 1812 г. Гауссом и получившей впоследствии его имя.

♦ Функция

$$F(a,b;c;x) = {}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!} \tag{34.1}$$

называется гипергеометрической функцией Гаусса.

◊ Нетрудно заметить (см. утверждение 33.1), что ряд (34.1) сходится при $|x| < 1$. Из определения также следует, что

$$F(a,b;c;x) = F(b,a;c;x).$$

♦ Дифференциальное уравнение

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0, \quad y = y(x) \tag{34.2}$$

называется гипергеометрическим.

Теорема 34.1. *Если $c \neq n$, $n = \overline{-\infty, \infty}$, то функции*

$$\begin{aligned} &y_1(x) = F(a,b;c;x),\\ &y_2(x) = x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1; 2-c; x) \end{aligned} \tag{34.3}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (34.2).

◊ Шесть функций

$$F(a\pm 1, b; c; x), \quad F(a, b\pm 1; c; x), \quad F(a,b;c\pm 1;x)$$

называются смежными. Можно показать, что между функцией $F(a,b;c;x)$ и любыми двумя смежными с ней существует линейная зависимость, коэффициенты которой есть линейные функции x. Эти соотношения впервые были найдены Гауссом. Например,

$$\begin{aligned} cF(a,b-1;c;x) + (a-b)xF(a,b;c+1;x)-\\ -cF(a-1,b;c;x) = 0. \end{aligned} \tag{34.4}$$

Нетрудно получить, что

$$\frac{d^n}{dx^n}F(a,b;c;x) = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}F(a+n, b+n; c+n; x). \tag{34.5}$$

Теорема 34.2. *При* $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ *справедливо интегральное представление*

$$F(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt. \tag{34.6}$$

Доказательство. Рассмотрим дифференциальное уравнение (34.2) $\widehat{L}y = 0$, где обозначено

$$\widehat{L} = x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + [c - (a+b+1)x]\frac{d}{dx} - ab.$$

Можно проверить, что

$$\widehat{L}[(1-xt)^{-a}t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}] = -a\frac{d}{dt}[t^b(1-t)^{c-b}(1-tx)^{-a-1}].$$

Проинтегрировав это выражение по t в пределах от нуля до единицы, имеем (34.6), что и требовалось доказать.

Можно показать, что справедливо

Утверждение 34.1. *Справедливы следующие представления:*

$$\begin{aligned}
F(a,b;c;x) &= (1-x)^{-a}F\Big(a, c-b; c; \frac{x}{x-1}\Big) = \\
&= (1-x)^{-b}F\Big(c-a, b; c; \frac{x}{x-1}\Big) = \\
&= (1-x)^{c-a-b}F(c-a, c-b; c; x) = \qquad (34.7)\\
&= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-1)^a x^{-a} F\Big(a, a+1-c; a+1-b; \frac{1}{x}\Big) + \\
&+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-1)^b x^{-b} F\Big(b, b+1-c; b+1-a; \frac{1}{x}\Big).
\end{aligned}$$

Пример 34.1. Доказать, что при $|x| < 1$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&1)\ \ \frac{1}{1-x} = F(1,b;b;x);\\
&2)\ \ \ln(1+x) = xF(1,1;2;-x);\\
&3)\ \ (1-x)^{-b} = F(a,b;a;x);\\
&4)\ \ \ln\frac{1+x}{1-x} = 2xF\Big(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; x^2\Big).
\end{aligned}$$

Решение. Согласно определению, имеем

$$\begin{aligned}
&1)\ \ F(1,b;b;x) = \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k b(b+1)(b+2)\cdots(b+k-1)}{k! b(b+1)(b+2)\cdots(b+k-1)}x^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x};
\end{aligned}$$

$$2)\quad F(1,1;2;-x) = x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!k!(-1)^k}{k!(k+1)!}x^{k+1} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x);$$

$$3)\quad F(a,b;a;x) = 1 + \frac{b}{1}x + \frac{b(b+1)}{1\cdot 2}x^2 + \dots + \\ + \frac{b(b+1)\cdots(b+k-1)}{k!}x^k + \dots = (1-x)^{-b};$$

$$4)\quad 2xF\Big(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};x^2\Big) = \\ = 2x\bigg[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1\right)k!}{k!\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{3}{2}+k-1\right)}x^{2k}\bigg] = \\ = 2x\Big[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}x^{2k}\Big] = 2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

При $|x| < 1$ получим

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \\ \dots + \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k!} + \dots - \Big(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^k}{k!}\Big) = \\ = 2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

Пример 34.2. Доказать, что при любом натуральном k справедливо равенство

$$\frac{d^k}{dx^k}\big[x^{c+k-1}(x-1)^{a+b-c+k}F^{(k)}(a,b;c;x)\big] = \\ = (-1)^k a(a-1)\cdots(a+k-1)b(b-1)\cdots(b+k-1)\times \\ \times x^{c-1}(x-1)^{a+b-c}F(a,b;c;x), \tag{34.8}$$

где
$$F^{(k)}(a,b;c;x) = \frac{d^k}{dx^k}F(a,b;c;x).$$

Решение. Запишем гипергеометрическое уравнение в самосопряженном виде
$$\frac{d}{dx}\Big[x^c(x-1)^{a+b-c+1}\frac{dy}{dx}\Big] + abx^{c-1}(x-1)^{a+b-c}y = 0. \qquad (34.9)$$

Продифференцировав n раз функцию $F(a,b;c;x)$, получим
$$F^{(n)}(a,b;c;x) = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)} \times \\ \times F(a+n,b+n;c+n;x),$$

т.е. n-я производная от гипергеометрической функции с параметрами a, b, c лишь постоянным множителем отличается от гипергеометрической функции с параметрами $a+n$, $b+n$, $c+n$. Таким образом, функция $F^{(n)}(a,b;c;x)$ удовлетворяет уравнению (34.9), если в нем заменить a, b, c соответственно на $a+n$, $b+n$, $c+n$, т.е.
$$\frac{d}{dx}\Big[x^{c+n}(x-1)^{a+b+1-c+n}\frac{dF^{(n)}(a,b;c;x)}{dx}\Big] + \\ +(a+n)(b+n)x^{c-1+n}(x-1)^{a+b-c+n}F^{(n)}(a,b;c;x) = 0.$$

Продифференцировав это тождество n раз, получим новое тождество:
$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\Big[x^{c+n}(x-1)^{a+b+1-c+n}\frac{dF^{(n)}(a,b;c;x)}{dx}\Big] = \\ = -(a+n)(b+n)\frac{d^n}{dx^n}\big[x^{c-1+n}(x-1)^{a+b-c+n}F^{(n)}(a,b;c;x)\big]. \qquad (34.10)$$

Положим в (34.10) $n+1=k$ и преобразуем правую часть получившегося соотношения с помощью (34.10), где, в свою очередь, положим $n=k$. Проделав эту операцию $k-1$ раз, придем к исходному тождеству, справедливому при любом k.

Пример 34.3. Показать, что справедливо соотношение
$$P_n(x) = F\Big(n+1,-n;1;\frac{1-x}{2}\Big), \qquad (34.11)$$
где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (16.2).

Решение. Покажем, что уравнение Лежандра
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad n = \overline{0,\infty},$$

сводится к гипергеометрическому уравнению. Сделаем в уравнении Лежандра замену переменных $x = 1 - 2t$. Тогда

$$t = \frac{1-x}{2}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

В результате получим

$$t(t-1)\frac{d^2y}{dt^2} + (2t-1)\frac{dy}{dt} - n(n+1)y = 0,$$

т.е. гипергеометрическое уравнение с параметрами $a = n+1$, $b = -n$, $c = 1$. Следовательно, решением этого уравнения является гипергеометрическая функция

$$y_1(t) = F(n+1, -n; 1; t).$$

Возвратившись к исходным переменным, видим, что функция

$$y_1(x) = F\Big(n+1, -n; 1; \frac{1-x}{2}\Big)$$

является решением уравнения Лежандра.

Из определения (34.1) следует, что функция $y_1(t)$ является полиномом степени n от t с коэффициентами при t^k, равными

$$\frac{\Gamma(n+1+k)}{\Gamma(n+1)}\frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(-n)}\frac{1}{k!}.$$

Следовательно,

$$F^{(n)}(n+1, -n; 1; t) = (-1)^n\frac{2}{n!}. \tag{34.12}$$

Положив в (34.8) $\alpha = n+1$, $\beta = -n$, $\gamma = 1$, с учетом (34.12) после приведения подобных имеем

$$F^{(n)}(n+1, -n; 1; t) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dt^n}[t^n(t-1)^n].$$

Возвратившись к переменной x, с учетом формулы Родрига (16.7) получим

$$F\Big(n+1, -n; 1; \frac{1-x}{2}\Big) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = P_n(x),$$

что и требовалось показать.

В частности,

$$P_1(x) = F\Big(2, -1; 1; \frac{1-x}{2}\Big) = x;$$
$$P_2(x) = F\Big(3, -2; 1; \frac{1-x}{2}\Big) = \frac{1}{2}(3x^2-1);$$
$$P_3(x) = F\Big(4, -3; 1; \frac{1-x}{2}\Big) = \frac{1}{2}(5x^3-3x);$$
$$P_4(x) = F\Big(5, -4; 1; \frac{1-x}{2}\Big) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

35. Функции Лагерра*

Функция

$$I_{\nu,\mu}(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\mu+1)}}\frac{e^{-x/2}x^{(\nu-\mu)/2}}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\Phi(-\mu,\nu-\mu+1;x) \qquad (35.1)$$

называется функцией Лагерра.

Пример 35.1. Показать, что если $\mu = m$ — целое неотрицательное число, то функции Лагерра связаны с полиномами Лагерра соотношением

$$I_{\nu,m}(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\nu+1)}}e^{-x/2}x^{(\nu-m)/2}L_m^{\nu-m}(x). \qquad (35.2)$$

Решение. Воспользуемся формулой Родрига для полиномов Лагерра (27.4)

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x}x^{n+\alpha} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{(-x)^k}{k!} =$$
$$= \binom{n+\alpha}{n}\Phi(-n,1+\alpha;x). \qquad (35.3)$$

Здесь

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

— биномиальные коэффициенты (см. одноименный раздел части I).

Из (35.3) и определения функции Лагерра (35.1) следует (35.2).

◊ Из условий ортогональности полиномов Лагерра (29.1) следует, что система функций $I_{\alpha+n,n}(x)$ при $\alpha > -1$ и целом неотрицательном n образует ортонормированную систему

$$\int\limits_0^\infty I_{\alpha+n,n}(x)I_{\alpha+m,m}(x)dx = \delta_{mn}. \qquad (35.4)$$

Пример 35.2. Показать, что для функций $I_{\nu,\mu}(x)$ справедливы соотношения

$$I_{\nu,\mu}(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\mu+1)}}\frac{e^{x/2}x^{(\nu-\mu)/2}}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\Phi(\nu+1,\nu-\mu+1;-x) =$$
$$= e^{x/2}x^{(\nu-\mu)/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\sqrt{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}}{k!\Gamma(\mu-k+1)\Gamma(\nu-\mu+1)}x^k =$$
$$= \frac{e^{x/2}x^{(\nu-\mu)/2}}{\sqrt{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\nu+1+k)}{\Gamma(\nu-\mu+1+k)}\frac{x^k}{k!}. \qquad (35.5)$$

Решение. Первое равенство следует из определения функций Лагерра (35.1) при учете (33.8). Второе равенство в (35.5) следует из определения (35.1) при использовании разложения (33.1) и учете равенства
$$\frac{\Gamma(-m+k)}{\Gamma(-m)} = (-1)^k \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-k)},$$
справедливого для целых неотрицательных k. Наконец, третье равенство в (35.5) есть следствие первого при использовании разложения (33.1).

$\lozenge$ Используя определение функции Лагерра (35.1), из соотношения (33.14) можно получить следующее интегральное представление при $\mathrm{Re}(n+1) > 0$:

$$I_{n,m}(x) = \frac{e^{x/2}}{\sqrt{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}} \int\limits_0^\infty e^{-y} y^{(n+m)/2} J_{n-m}(2\sqrt{xy})dy. \tag{35.6}$$

Рассмотрим простейшие свойства функций Лагерра.

Свойство 1. Справедливо соотношение
$$I_{n,m}(x) = (-1)^{n-m} I_{m,n}(x), \tag{35.7}$$
если $n-m$ — целое число.

Доказательство следует из интегрального представления (35.6), если учесть, что для целых n справедливо соотношение (3.7)
$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x).$$

Следствие. Для полиномов Лагерра справедливо соотношение
$$\Gamma(m+1)(-1)^m x^n L_m^{n-m}(x) = \Gamma(n+1)(-1)^n x^m L_n^{m-n}(x), \tag{35.8}$$
если n, m — целые неотрицательные числа.

Доказательство. Подставим в обе части соотношения (35.7) выражения (35.2) и получим искомое равенство.

Свойство 2. Справедливо асимптотическое разложение
$$\lim_{p\to\infty} I_{p+\alpha,p+\beta}\Big(\frac{x^2}{4p}\Big) = J_{\alpha-\beta}(x). \tag{35.9}$$

Доказательство. Согласно третьему равенству (35.5), имеем
$$I_{p+\alpha,p+\beta}\Big(\frac{x^2}{4p}\Big) = e^{x^2/(8p)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k Q_k}{k!\Gamma(\alpha-\beta+1+k)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k}, \tag{35.10}$$
где обозначено

$$Q_k = \frac{\Gamma(p+\alpha+1+k)}{\sqrt{\Gamma(p+\alpha+1)\Gamma(p+\beta+1)}} p^{(\beta-\alpha)/2-k}.$$

Величины Q_k, $k = \overline{0,\infty}$, можно представить в следующем виде:

$$Q_k = \frac{Q_k^{(1)}}{\sqrt{Q_k^{(2)} Q_k^{(3)}}},$$
$$Q_k^{(1)} = \frac{\Gamma(p+\alpha+1+k)}{\Gamma(p)} e^{-(\alpha+1+k)\ln p},$$
$$Q_k^{(2)} = \frac{\Gamma(p+\alpha+1)}{\Gamma(p)} e^{-(\alpha+1)\ln p},$$
$$Q_k^{(3)} = \frac{\Gamma(p+\beta+1)}{\Gamma(p)} e^{-(\beta+1)\ln p}.$$

Исследуем их поведение при больших p. Из асимптотического разложения $\Gamma(z)$ при больших значениях $|z|$ (формула Стирлинга)

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi} \exp\Big[\Big(z - \frac{1}{2}\Big)\ln z - z\Big]\Big(1 + \frac{1}{12z} + \ldots\Big) \tag{35.11}$$

следует

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z)} e^{-\alpha \ln z} = 1. \tag{35.12}$$

Отсюда получим

$$\lim_{p\to\infty} Q_k^{(s)} = \lim_{p\to\infty} Q_k = 1, \qquad s = \overline{1,3},$$

что в силу (35.10) приводит к выражению

$$\lim_{p\to\infty} I_{p+\alpha,p+\beta}\Big(\frac{x^2}{4p}\Big) = \Big(\frac{x}{2}\Big)^{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha-\beta+1+k)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k}, \tag{35.13}$$

которое с учетом (3.6) доказывает (35.9).

Свойство 3. Для функций Лагерра справедливы следующие соотношения:

$$2\sqrt{x(\nu+1)} I_{\nu+1,\mu}(x) = (\nu-\mu+x) I_{\nu,\mu}(x) - 2x I'_{\nu,\mu}(x); \tag{35.14}$$
$$2\sqrt{x(\mu+1)} I_{\nu,\mu+1}(x) = (\nu-\mu-x) I_{\nu,\mu}(x) + 2x I'_{\nu,\mu}(x); \tag{35.15}$$
$$2\sqrt{x\nu} I_{\nu-1,\mu}(x) = (\nu-\mu+x) I_{\nu,\mu}(x) + 2x I'_{\nu,\mu}(x); \tag{35.16}$$
$$2\sqrt{x\mu} I_{\nu,\mu-1}(x) = (\nu-\mu-x) I_{\nu,\mu}(x) - 2x I'_{\nu,\mu}(x); \tag{35.17}$$
$$2\sqrt{\nu\mu} I_{\nu-1,\mu-1}(x) = (\nu+\mu-x) I_{\nu,\mu}(x) - 2x I'_{\nu,\mu}(x); \tag{35.18}$$
$$2\sqrt{(\nu+1)(\mu+1)} I_{\nu+1,\mu+1}(x) = (\nu+\mu+2-x) I_{\nu,\mu}(x) + 2x I'_{\nu,\mu}(x). \tag{35.19}$$

Доказательство. Любое из соотношений проверяется подстановкой формулы (35.5) и использованием рекуррентных соотношений (теорема 33.2) и выражения (33.11) для производной гипергеометрической функции $\Phi(a,c;x)$.

Вычтя из формулы (35.16) формулу (35.14), а из (35.15) – (35.17), получим

$$\begin{aligned}2\sqrt{x}I'_{\nu,\mu}(x) &= \sqrt{\nu}I_{\nu-1,\mu}(x) - \sqrt{\nu+1}I_{\nu+1,\mu}(x);\\ 2\sqrt{x}I'_{\nu,\mu}(x) &= \sqrt{\mu+1}I_{\nu,\mu+1}(x) - \sqrt{\mu}I_{\nu,\mu-1}(x).\end{aligned} \tag{35.20}$$

Сложив эти же формулы, получим трехчленные рекуррентные соотношения по каждому из индексов ν и μ:

$$\sqrt{x(\nu+1)}I_{\nu+1,\mu}(x) - (\nu-\mu+x)I_{\nu,\mu}(x) + \\ +\sqrt{x\nu}I_{\nu-1,\mu}(x) = 0, \tag{35.21}$$

$$\sqrt{x(\mu+1)}I_{\nu,\mu+1}(x) - (\nu-\mu-x)I_{\nu,\mu}(x) + \\ +\sqrt{x\mu}I_{\nu,\mu-1}(x) = 0. \tag{35.22}$$

Очевидно, из выражений (35.14)–(35.19) можно получить и другие линейные соотношения, связывающие функции Лагерра.

$\lozenge$ При практическом использовании формул (35.20) нужно проявлять некоторую осторожность в случае, когда один из индексов стремится к нулю. Так, в первой из формул (35.20) прямым вычислением можно найти (при любом μ)

$$2\sqrt{x}I'_{0,\mu}(x) = -\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\sqrt{\Gamma(\mu+1)}e^{x/2}x^{-(\mu+1)/2} - I_{1,\mu}(x), \tag{35.23}$$

т.е. имеем

$$\lim_{\nu\to0}\sqrt{\nu}I_{\nu-1,\mu}(x) = -\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\sqrt{\Gamma(\mu+1)}e^{x/2}x^{-(\mu+1)/2}, \tag{35.24}$$

что можно получить непосредственно из второго разложения в формуле (35.5).

С другой стороны, прямое вычисление дает

$$2\sqrt{x}I'_{\nu,0}(x) = I_{\nu,1}(x). \tag{35.25}$$

Сравнив (35.25) со вторым равенством в (35.20) при $\mu\to0$, получим

$$\lim_{\mu\to0}\sqrt{\mu}I_{\nu,\mu-1}(x) = 0. \tag{35.26}$$

Пример 35.3. Определить асимптотическое поведение при $\nu\to\infty$ функций $I_{\nu,\mu}(x)$ с фиксированными μ, x.

Решение. Приняв во внимание соотношение (35.13), получим из второго разложения в ряд (35.5)

$$I_{\nu,\mu}(x) \sim \frac{e^{x/2}x^{(\nu-\mu)/2}\nu^{\mu}}{\sqrt{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}.$$

При $\nu \to \infty$ и ограниченных μ, x окончательно найдем

$$I_{\nu,\mu}(x) \sim \frac{\nu^{\mu} x^{(\nu-\mu)/2} e^{-x/2}}{\sqrt{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}}. \tag{35.27}$$

Пример 35.4. Определить асимптотическое поведение при $\mu \to \infty$ функций $I_{\nu,\mu}(x)$ с фиксированными ν, x.

Решение. Пусть разность $\nu - \mu$ не равна целому числу. Воспользуемся очевидным равенством (k — целое)

$$\begin{aligned}\Gamma(\nu-\mu+k+1) &= \frac{\Gamma(\nu-\mu+k+1)\Gamma(\mu-\nu-k)}{\Gamma(\mu-\nu-k)} = \\ &= \frac{\pi}{\sin\pi(\mu-\nu-k)}\frac{1}{\Gamma(\mu-\nu-k)} = \\ &= (-1)^k \frac{\pi}{\sin\pi(\mu-\nu)}\frac{1}{\Gamma(\mu-\nu-k)}.\end{aligned} \tag{35.28}$$

Первое разложение в (35.5) перепишется в виде

$$\begin{aligned}I_{\nu,\mu}(x) &= \frac{\sin\pi(\mu-\nu)}{\pi}\sqrt{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}\times \\ &\times e^{-x/2}x^{(\nu-\mu)/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu-\nu-k)}{\Gamma(\mu-k+1)}\frac{x^k}{k!}.\end{aligned} \tag{35.29}$$

Учтем соотношение (35.12) при $\mu \to \infty$ и получим

$$I_{\nu,\mu}(x) \sim \frac{\sin\pi(\nu-\mu)}{\pi\mu^{\nu+1}}\sqrt{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}e^{x/2}x^{(\nu-\mu)/2},$$

где ν и x ограничены, а $\nu - \mu$ не равно целому числу. Если $\nu - \mu$ равно целому числу, то соотношение (35.7) сводит пример к предыдущему.

Пример 35.5. Определить асимптотическое поведение функций $I_{\alpha+n,n}(x)$ при $n \to \infty$ и ограниченных α, x.

Решение. Первое разложение в (35.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}I_{\alpha+n,n}(x) &= e^{-x/2}x^{\alpha/2}\times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty}&\sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(n-k+1)}}\frac{(-x)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}.\end{aligned} \tag{35.30}$$

Воспользовавшись формулой (35.12), при $n \to \infty$ найдем

$$\begin{aligned}I_{\alpha+n,n}(x) &\approx e^{-x/2}(nx)^{\alpha/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-nx)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)} = \\ &= e^{-x/2}J_{\alpha}(2\sqrt{nx}).\end{aligned} \tag{35.31}$$

Учтем асимптотическую формулу для функций Бесселя (7.16) и окончательно получим при $n \to \infty$

$$I_{\alpha+n,n}(x) \approx \frac{e^{-x/2}}{(\pi^2 nx)^{1/4}} \cos\Big(2\sqrt{nx} - \frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\pi}{4}\Big). \qquad (35.32)$$

Пример 35.6. Вычислить сумму

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} I_{\alpha+n,n}(x) I_{\alpha+n,n}(y) z^n.$$

Решение. Используя интегральное представление (35.6) для $I_{\alpha+n,n}(y)$, получим

$$S = e^{x/2} \int\limits_0^\infty dp\, e^{-p} p^{\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{xp}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_{\alpha+n,n}(x)(pz)^n}{\sqrt{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)}}.$$

С учетом суммы (35.76) для S имеем

$$S = e^{(x-y)/2} z^{-\alpha/2} \int\limits_0^\infty J_\alpha(2\sqrt{xp}) J_\alpha(2\sqrt{yzp})\, dp.$$

Наконец, воспользовавшись результатом (36.10), для $|z| < 1$ окончательно найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{\alpha+n,n}(x) I_{\alpha+n,n}(y) z^n = \\ = \frac{z^{-\alpha/2}}{1-z} \exp\Big(\frac{z+1}{z-1}\frac{x+y}{2}\Big) I_\alpha\Big(\frac{2\sqrt{xyz}}{1-z}\Big). \qquad (35.33)$$

Заменив здесь z на $-z$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\alpha+n,n}(x) I_{\alpha+n,n}(y) z^n = \\ = \frac{z^{-\alpha/2}}{1+z} \exp\Big(\frac{z-1}{z+1}\frac{x+y}{2}\Big) J_\alpha\Big(\frac{2\sqrt{xyz}}{1+z}\Big). \qquad (35.34)$$

Пример 35.7. Показать, что система функций $I_{\alpha+n,n}(x)$, $x > 0$, удовлетворяет условию полноты на полуоси $x > 0$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{\alpha+n,n}(x) I_{\alpha+n,n}(y) = \delta(x-y). \qquad (35.35)$$

Решение. Рассмотрим функцию $K_\alpha(z;x,y)$, определяемую соотношением

$$K_\alpha(z;x,y) = \frac{z^{-\alpha/2}}{1-z}\exp\Big(\frac{z+1}{z-1}\frac{x+y}{2}\Big)I_\alpha\Big(\frac{2\sqrt{xyz}}{1-z}\Big) \tag{35.36}$$

при дополнительных условиях $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\alpha > -1$, $x > 0$, $y > 0$. Тогда из соотношения (35.33) следует

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{\alpha+n,n}(x)I_{\alpha+n,n}(y)z^n = K_\alpha(z;x,y). \tag{35.37}$$

Таким образом, утверждение будет доказано, если будет показана справедливость соотношения

$$\lim_{z\to 1-0} K_\alpha(z;x,y) = \delta(x-y), \qquad x>0, y>0. \tag{35.38}$$

Рассмотрим произвольную основную функцию $\varphi(x)$ такую, что существует интеграл

$$J_\alpha(z,x) = \int\limits_0^\infty \varphi(y)K_\alpha(z;x,y)dy. \tag{35.39}$$

Сделаем в интеграле (35.39) замену переменных

$$y = x + 2u\sqrt{x(1-z)}.$$

В результате получим

$$J_\alpha(z,x) = \int\limits_{-q}^{\infty} \varphi(x+2u\sqrt{x[1-z]})R_\alpha(z;x,u)du, \tag{35.40}$$

где

$$R_\alpha(z;x,u) = 2\sqrt{x(1-z)}K_\alpha(z;x,x+2u\sqrt{x[1-z]}),$$
$$q = \sqrt{\frac{x}{4(1-z)}}.$$

При $r\to+\infty$ имеет место асимптотическая оценка (7.12):

$$I_\alpha(r) \sim \frac{e^r}{\sqrt{2\pi r}}. \tag{35.41}$$

Отсюда при $z\to 1-0$ следует асимптотическая формула

$$K_\alpha(z;x,y) \sim \frac{\exp\left[(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1-z}\right)\right]}{2\sqrt{\pi(1-z)}\sqrt{xy}}, \tag{35.42}$$

приводящая к следующему предельному соотношению:

$$\lim_{z\to 1-0} R_\alpha(z;x,u)=\frac{\exp(-u^2)}{\sqrt{\pi}}, \tag{35.43}$$

с учетом которого из (35.40) получим

$$\lim_{z\to 1-0} J_\alpha(z,x)=\varphi(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-u^2)}{\sqrt{\pi}}du=\varphi(x). \tag{35.44}$$

Здесь мы учли, что $q\to\infty$ при $z\to 1-0$. В силу произвольности функции $\varphi(x)$ соотношение (35.38) доказано и, следовательно, условие полноты (35.35) справедливо.

Пример 35.8. Вычислить сумму

$$S^\alpha_\beta(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}L^\alpha_n(x)z^n.$$

Решение. Подставив сюда выражение (27.5) для $L^\alpha_n(x)$, запишем

$$S^\alpha_\beta(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}f(n,m),$$
$$f(n,m)=\frac{\Gamma(\beta+n+1)z^n(-x)^m}{m!\Gamma(n-m+1)\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

Поменяв порядок суммирования, получим

$$S^\alpha_\beta(x,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}f(n+m,m)=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-xz)^m}{m!\Gamma(\alpha+m+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n\Gamma(\beta+m+n+1)}{n!}.$$

Воспользовавшись известным разложением в ряд Тейлора

$$(1-z)^{-p}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+n)z^n}{n!\Gamma(p)}, \tag{35.45}$$

для $S^\alpha_\beta(x,z)$ запишем

$$S^\alpha_\beta(x,z)=(1-z)^{-1-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+m+1)}{m!\Gamma(\alpha+m+1)}\Big(\frac{xz}{z-1}\Big)^m=$$
$$=(1-z)^{-1-\beta}\frac{\Gamma(\beta+1)}{m!\Gamma(\alpha+1)}\Phi\Big(1+\beta,1+\alpha;\frac{xz}{z-1}\Big).$$

С учетом свойства (33.6) вырожденной гипергеометрической функции окончательно найдем два представления для S:

$$S_\beta^\alpha(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}L_n^\alpha(x)z^n=$$
$$=\frac{\Gamma(\beta+1)}{m!\Gamma(\alpha+1)}(1-z)^{-1-\beta}\Phi\Big(1+\beta,1+\alpha;\frac{xz}{z-1}\Big)=$$
$$=\frac{\Gamma(\beta+1)}{m!\Gamma(\alpha+1)}(1-z)^{-1-\beta}e^{-xz/(1-z)}\Phi\Big(\alpha-\beta,1+\alpha;\frac{xz}{z-1}\Big),\tag{35.46}$$

где $|z|<1$ и β не равно целому отрицательному числу. Если здесь полиномы Лагерра выразить через функции Лагерра и учесть соотношение (35.1), то получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(n+1)}I_{\alpha+n,n}(x)z^n=$$
$$=\sqrt{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+\beta-\alpha)}z^{-\alpha/2}\times$$
$$\times\tfrac{1}{(1-z)^{1+\beta-\alpha/2}}\exp\Big(\frac{z+1}{z-1}\frac{x}{2}\Big)I_{\beta,\beta-\alpha}\Big(\frac{xz}{z-1}\Big),\tag{35.47}$$

где также $|z|<1$, а β не равно целому отрицательному числу.

При $\alpha=\beta$ из (35.46) получим производящую функцию для полиномов Лагерра

$$S_\alpha^\alpha(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^\alpha(x)z^n=\frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}}\exp\Big(\frac{xz}{z-1}\Big),\tag{35.48}$$

где $|z|<1$, а из (35.47)

$$S_\alpha^\alpha(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(1+n)}}I_{\alpha+n,n}(x)z^n=$$
$$=\tfrac{1}{z^{\alpha/2}(1-z)^{\alpha/2+1}}\exp\Big(\frac{z+1}{z-1}\frac{x}{2}\Big),\quad |z|<\frac{1}{2}.\tag{35.49}$$

Согласно интегральной формуле Коши, из (35.46) для целых неотрицательных n найдем представление

$$I_{\alpha+n,n}(x)=\sqrt{\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+\alpha+n)}}\frac{x^{\alpha/2}}{2\pi i}\oint\limits_{|w|=\rho}\frac{\exp\left(\frac{w+1}{w-1}\frac{x}{2}\right)dw}{(1-w)^{1+\alpha}w^{n+1}},\tag{35.50}$$

где $0<\rho<1$.

Пример 35.9. Для целых неотрицательных n доказать соотношение

$$I_{\alpha+n,n}(x) = x^{(\alpha-\beta)/2}\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha-\beta+n-k-1}{n-k}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\Gamma(1+n)\Gamma(1+\beta+k)}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+\alpha+n)}}I_{\beta+k,k}(x). \qquad (35.51)$$

Решение. Выразив полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$ и $L_n^\beta(x)$ в (30.8) через функции Лагерра $I_{\alpha+n,n}(x)$ и $I_{\beta+k,k}(x)$ согласно (35.2), получим (35.51).

Пример 35.10. Вычислить сумму

$$S(x) = S_{\mu,l}^{m;n}(x) = \sum_{k=0}^{l} I_{k+\mu,m}(x)I_{k+\mu,n}(x). \qquad (35.52)$$

Решение. Продифференцируем (35.52) по x:

$$S'(x) = [S_{\mu,l}^{m;n}(x)]' =$$
$$= \sum_{k=0}^{l}\big[I'_{k+\mu,m}(x)I_{k+\mu,n}(x) + I_{k+\mu,m}(x)I'_{k+\mu,n}(x)\big]. \qquad (35.53)$$

Вычтем (35.14) из (35.16) и получим

$$I'_{n,m}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\big[\sqrt{n}I_{n-1,m}(x) - \sqrt{n+1}I_{n+1,m}(x)\big]. \qquad (35.54)$$

Подставив (35.54) в (35.53), найдем

$$2\sqrt{x}S'(x) = \sum_{k=0}^{l} Q_k - \sum_{k=0}^{l} Q_{k+1},$$

где

$$Q_k = \sqrt{k+\mu}\big[I_{k+\mu-1,m}(x)I_{k+\mu,n}(x) + I_{k+\mu,m}(x)I_{k+\mu-1,n}(x)\big].$$

Сделаем во второй сумме замену $k \to k-1$:

$$2\sqrt{x}S'(x) = \sum_{k=0}^{l} Q_k - \sum_{k=1}^{l+1} Q_k =$$
$$= Q_0 + \sum_{k=1}^{l} Q_k - Q_{l+1} - \sum_{k=1}^{l} Q_k = Q_0 - Q_{l+1}.$$

Окончательно имеем

$$S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{x}}\big[I_{\mu-1,m}(x)I_{\mu,n}(x) + I_{\mu,m}(x)I_{\mu-1,n}(x)\big] -$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l+\mu+1}{x}}\big[I_{l+\mu,m}(x)I_{l+\mu+1,n}(x)+ \\ +I_{l+\mu+1,m}(x)I_{l+\mu,n}(x)\big]. \quad (35.55)$$

Учтя (35.27), видим, что

$$R_\mu^{m,n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}I_{k+\mu,m}(x)I_{k+\mu,n}(x), \quad (35.56)$$

причем из (35.55) при $l\to\infty$ найдем

$$\frac{d}{dx}R_\mu^{m,n}(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{x}}\big[I_{\mu-1,m}(x)I_{\mu,n}(x)+I_{\mu,m}(x)I_{\mu-1,n}(x)\big]. \quad (35.57)$$

Для $S(x)$ тогда легко получить

$$S_{\mu,l}^{m,n}(x)=R_\mu^{m,n}(x)-R_{\mu+l+1}^{m,n}(x). \quad (35.58)$$

Из (35.57) найдем

$$R_\mu^{m,n}(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\sqrt{\frac{\mu}{y}}\big[I_{\mu-1,m}(y)I_{\mu,n}(y)+ \\ +I_{\mu,m}(y)I_{\mu-1,n}(y)\big]dy, \quad \mathrm{Re}\,(2\mu-m-n)>0. \quad (35.59)$$

Если m и n – целые неотрицательные числа, то от ограничения $\mathrm{Re}\,(2\mu-m-n)>0$ можно освободиться следующим образом. Для любых μ, m, n всегда существует такое целое l, что

$$\mathrm{Re}\,(2\mu+2l+2-m-n)>0. \quad (35.60)$$

Из (35.58) имеем

$$R_{\mu+l+1}^{m,n}(x)=R_\mu^{m,n}(x)-S_{\mu,l}^{m,n}(x), \quad (35.61)$$

а для $R_{\mu+l+1}^{m,n}(x)$ в силу (35.60) справедливо (35.59), т.е.

$$R_{\mu+l+1}^{m,n}(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\sqrt{\frac{\mu+l+1}{y}}\big[I_{\mu+l,m}(y)I_{\mu+l+1,n}(y)+ \\ +I_{\mu+l+1,m}(y)I_{\mu+l,n}(y)\big]dy. \quad (35.62)$$

Учтем, что при целых m, n конечная сумма (35.52) обладает свойством

$$\lim_{x\to\infty}S_{\mu,l}^{m,n}(x)=0, \quad (35.63)$$

и из (35.55) получим

$$S_{\mu,l}^{m,n}(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\sqrt{\frac{\mu+l+1}{y}}\big[I_{\mu+l,m}(y)I_{\mu+l+1,n}(y)+$$

$$+I_{\mu+l+1,m}(y)I_{\mu+l,n}(y)\big]dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_x^\infty\sqrt{\frac{\mu}{y}}\big[I_{\mu-1,m}(y)I_{\mu,n}(y)+I_{\mu,m}(y)I_{\mu-1,n}(y)\big]dy. \qquad (35.64)$$

Подставив (35.64) и (35.62) в (35.61), найдем

$$R^{m,n}_{\mu+l+1}(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\sqrt{\frac{\mu+l+1}{y}}\big[I_{\mu+l,m}(y)I_{\mu+l+1,n}(y)+$$

$$+I_{\mu+l+1,m}(y)I_{\mu+l,n}(y)\big]dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_x^\infty\sqrt{\frac{\mu}{y}}\big[I_{\mu-1,m}(y)I_{\mu,n}(y)+I_{\mu,m}(y)I_{\mu-1,n}(y)\big]dy. \qquad (35.65)$$

С учетом (36.26) окончательно имеем

$$R^{m,n}_{\mu}(x)=\delta_{mn}-\frac{1}{2}\int\limits_x^\infty\sqrt{\frac{\mu}{y}}\big[I_{\mu-1,m}(y)I_{\mu,n}(y)+$$

$$+I_{\mu,m}(y)I_{\mu-1,n}(y)\big]dy, \qquad (35.66)$$

где m, n – целые неотрицательные числа.

Соотношения (35.57) и (35.58) имеют место при любых значениях параметров μ, m, n, и, следовательно, $R^{\mu,n}_{\mu}(x)$ определяется квадратурой от правой части (35.57)

$$R^{m,n}_{\mu}(x)=R^{m,n}_{\mu}(a)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_x^a\sqrt{\frac{\mu}{y}}\big[I_{\mu-1,m}(y)I_{\mu,n}(y)+I_{\mu,m}(y)I_{\mu-1,n}(y)\big]dy, \qquad (35.67)$$

где a произвольно. Если m, n – целые неотрицательные и $\mu=0$, то, учитывая (35.24), получим

$$R^{m,n}_0(x)=\delta_{mn}. \qquad (35.68)$$

Пример 35.11. Вычислить сумму

$$R^{n,m}(z;x,y)=\sum_k^\infty I_{k,n}(x)I_{k,m}(y)z^k, \qquad (35.69)$$

где m, n – целые неотрицательные числа.

Решение. Из (27.13) запишем

$$L^{\alpha-n}_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}(1+\tau)^\alpha e^{-x\tau}\Big|_{\tau=0}=$$

$$= \sqrt{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+n)}} e^{x/2} x^{(n-\alpha)/2} I_{\alpha,n}(x). \tag{35.70}$$

С учетом (35.70) для суммы (35.69) найдем

$$R^{n,m}(z;x,y) = \frac{e^{-(x+y)/2} x^{-n/2} y^{-m/2}}{\sqrt{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m)}} \times$$
$$\times \frac{d^m}{dt^m} \frac{d^n}{d\tau^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(1+\tau)(1+t)z\sqrt{xy}]^k}{k!} e^{-x\tau - yt}\Big|_{\tau=t=0}.$$

Вычислив сумму по k, получим

$$R^{n,m}(z;x,y) = \frac{e^{-(x+y)/2} x^{-n/2} y^{-m/2}}{\sqrt{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m)}} \times$$
$$\times \frac{d^m}{dt^m} \frac{d^n}{d\tau^n} e^{(1+\tau)(1+t)z\sqrt{xy} - x\tau - yt}\Big|_{t=\tau=0}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{d^n}{d\tau^n} e^{(1+\tau)(1+t)z\sqrt{xy} - x\tau - yt}\Big|_{\tau=0} =$$
$$= \big[(1+t)z\sqrt{xy} - x\big]^n e^{-(y - z\sqrt{xy})t + z\sqrt{xy}},$$

и для суммы (35.69) получим

$$R^{n,m}(z;x,y) = \frac{e^{z\sqrt{xy} - (x+y)/2} y^{-m/2}}{\sqrt{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m)}} \times$$
$$\times \frac{d^m}{dt^m} \big[(1+t)z\sqrt{y} - \sqrt{x}\big]^n e^{-(y - z\sqrt{xy})t}\Big|_{t=0}. \tag{35.71}$$

Положив здесь

$$t = \frac{z\sqrt{y} - \sqrt{x}}{z\sqrt{y}} \tau,$$

приведем (35.71) к виду

$$R^{n,m}(z;x,y) = \frac{e^{z\sqrt{xy} - (x+y)/2} (z\sqrt{y} - \sqrt{x})^n z^m}{\sqrt{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m)}} \frac{d^m}{d\tau^m} \frac{(1+\tau)^n}{e^{q\tau}}\Big|_{\tau=0}.$$

Здесь учтено, что из условия $t = 0$ следует $\tau = 0$, и обозначено

$$q = \frac{(\sqrt{y} - z\sqrt{x})(z\sqrt{y} - \sqrt{x})}{z} = x + y - \sqrt{xy}\Big(z + \frac{1}{z}\Big). \tag{35.72}$$

Воспользовавшись (35.70), окончательно получим

$$R^{n,m}(z;x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}I_{k,n}(x)I_{k,m}(y)z^k=$$
$$=z^{(m+n)/2}\Big[\frac{z\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{y}-z\sqrt{x}}\Big]\exp\Big[\frac{\sqrt{xy}}{2}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)\Big]\times$$
$$\times I_{n,m}\Big(x+y-\sqrt{xy}\Big[z+\frac{1}{z}\Big]\Big),\qquad(35.73)$$

где m, n – целые неотрицательные числа. В частном случае $z=1$ найдем

$$R^{n,m}(1;x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}I_{k,n}(x)I_{k,m}(y)=I_{n,m}([\sqrt{y}-\sqrt{x}]^2).\qquad(35.74)$$

Отсюда, положив $y=x$, получим (35.52).

Пример 35.12. Доказать соотношения

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_{\alpha+n,n}(x)z^n}{\sqrt{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)}}=e^{z-x/2}z^{-\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{xz});\qquad(35.75)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nI_{\alpha+n,n}(x)z^n}{\sqrt{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)}}=e^{-z-x/2}z^{-\alpha/2}I_\alpha(2\sqrt{xz}).\qquad(35.76)$$

Решение. Выразив в (30.7) полиномы Лагерра с помощью (35.2) через функции Лагерра $I_{\alpha+n,n}(x)$, получим (35.75). Аналогичные вычисления приводят к сумме (35.76).

36. Интегралы, содержащие специальные функции*

Введенные выше гипергеометрические функции и функции Лагерра позволяют получить явные выражения для некоторых интегралов, содержащих специальные функции. Проиллюстрируем это на ряде примеров.

Пример 36.1. Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^{\infty}e^{-x}L_n^\alpha(x)x^{\nu/2}J_\nu(2\sqrt{qx})dx,\quad \mathrm{Re}(\nu+1)>0.\qquad(36.1)$$

Решение. Подставив в формулу (36.1) выражение (30.12), найдем

$$I=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{1}{k!}\int\limits_0^{\infty}e^{-x}x^{k+\nu/2}J_\nu(2\sqrt{qx})dx=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{1}{k!}\frac{\Gamma(k+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}e^{-q}q^{\nu/2}\Phi(-k,\nu+1;q).$$

Но, согласно (33.11), для целых k имеем

$$L_k^\nu(q) = \binom{k+\nu}{k}\Phi(-k, \nu+1; q) = \\ = \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{k!\Gamma(\nu+1)}\Phi(-k, \nu+1; q), \tag{36.2}$$

что приводит к выражению

$$I = e^{-q}q^{\nu/2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+\alpha}{n-k}L_k^\nu(q).$$

Отсюда, согласно (30.8), окончательно получим

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n^\alpha(x)x^{\nu/2}J_\nu(2\sqrt{qx})dx = (-1)^n e^{-q}q^{\nu/2}L_n^{\nu-\alpha-n}(q). \tag{36.3}$$

Пример 36.2. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^\infty e^{-x}L_m^\alpha(x)L_n^\beta(x)x^{(\alpha+\beta)/2}J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{qx})dx,$$

$$\mathrm{Re}(\alpha+\beta+1) > 0.$$

Решение. Воспользуемся формулой Родрига для полиномов Лагерра (27.4) и перепишем интеграл в виде

$$J = \frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_0^\infty dx\, x^\beta L_n^\beta(x)x^{(\alpha+\beta)/2}J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{qx})\frac{d}{dx}e^{-x}x^{m+\alpha}.$$

Проинтегрировав это выражение по частям m раз, с использованием формулы Лейбница находим

$$J = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)}\int_0^\infty dx\, e^{-x}x^{m+\alpha} \times \\ \times\frac{d^m}{dx^m}\Big[x^\beta L_n^\beta(x)x^{(\alpha+\beta)/2}J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{qx})\Big] = \\ = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}e^{-x}x^{m+\alpha}\Big[\frac{d^k}{dx^k}x^{(\alpha+\beta)/2}J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{qx})\Big] \times \\ \times\Big[\frac{d^k}{dx^k}x^{(\alpha+\beta)/2}J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{qx})\Big].$$

Это выражение с помощью формулы

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha}L_n^{\alpha}(x) = x^{\alpha-1}L_n^{\alpha-1}(x), \tag{36.4}$$

которая следует из (28.5), и соотношения (28.8) приведем к виду

$$J = (-1)^m \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{n+\beta}{m-k}\frac{q^{k/2}}{k!} \times$$
$$\times \int\limits_0^{\infty} dx\, e^{-x} L_n^{\beta-m+k}(x) x^{(\alpha+\beta+k)/2} J_{\alpha+\beta+k}(2\sqrt{qx}).$$

Вычислив с помощью (36.1) интеграл в этом выражении, получим

$$J = (-1)^{m+n} L_n^{\alpha+m-n}(q) e^{-q} q^{(\alpha+\beta)/2} \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{n+\beta}{m-k}\frac{q^{k/2}}{k!}.$$

Наконец, согласно формуле (30.12), окончательно находим

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^{(\alpha+\beta)/2} L_m^{\alpha}(x) L_n^{\beta}(x) J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{qx}) dx =$$
$$= (-1)^{n+m} e^{-q} q^{(\alpha+\beta)/2} L_m^{\beta+n-m}(x) L_n^{(\alpha+m-n}(x) \tag{36.5}$$

при $\operatorname{Re}(\alpha+\beta+1) > 0$. Если здесь полиномы Лагерра выразить через функции Лагерра согласно (35.2), то получим

$$\int\limits_0^{\infty} I_{m+\alpha,m}(x) I_{n+\beta,n}(x) J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{qx}) dx = I_{n+\alpha,m}(q) I_{m+\beta,n}(q) \tag{36.6}$$

при $\operatorname{Re}(\alpha+\beta+1) > 0$, $m, n = \overline{0,\infty}$.

Пример 36.3. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^{(\alpha+\beta)/2} L_m^{\alpha}(x) L_n^{\beta}(x) J_{\alpha-\beta}(2\sqrt{qx}) dx,$$
$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta+1) > 0.$$

Решение. Пусть для определенности $n \geqslant m$. Как и в примере 36.2, воспользуемся формулой Родрига для полиномов Лагерра (27.4) и после интегрирования по частям получим

$$J = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \int\limits_0^{\infty} dx\, x^{-(\alpha-\beta)/2} J_{\alpha-\beta}(2\sqrt{qx}) \times$$
$$\times L_n^{\beta}(x) \frac{d^m}{dx^m}\Big[e^{-x} x^{(m+\alpha)/2}\Big] =$$
$$= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)} \int\limits_0^{\infty} dx\, e^{-x} x^{m+\alpha} \frac{d^m}{dx^m}\Big[x^{-(\alpha-\beta)/2} J_{\alpha-\beta}(2\sqrt{qx}) L_n^{\beta}(x)\Big].$$

Продифференцировав выражение в квадратных скобках по формуле Лейбница, с помощью (5.11) и (36.4) запишем

$$J = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} q^{k/2} \times$$

$$\times \int_0^\infty dx\, e^{-x} x^{m+\alpha-(\alpha-\beta+k)/2} J_{\alpha-\beta}(2\sqrt{qx}) L_{n-m+k}^{\beta+m-k}(x).$$

Воспользовавшись в интеграле формулой Родрига для полиномов Лагерра (27.4), перепишем интеграл в виде

$$J = \sum_{k=0}^{m} \frac{q^{k/2}}{(n-m+k)!(m-k)!k!} \times$$

$$\times \int_0^\infty dx\, x^{(\alpha-\beta+k)/2} J_{\alpha-\beta}(2\sqrt{qx}) \frac{d^{n-m+k}}{dx^{n-m+k}} [e^{-x} x^{n+\beta}].$$

Проинтегрировав по частям, с учетом формулы (5.10) имеем

$$J = (-1)^{n+m} q^{(n-m)/2} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-q)^k}{(n-m+k)!(m-k)!k!} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-x} x^{n+\beta+(\alpha-\beta+m-n)/2} J_{\alpha-\beta+m-n}(2\sqrt{qx}) dx.$$

Из последнего соотношения с помощью (33.14) найдем

$$J = (-1)^{n+m} \frac{\Gamma(\alpha+m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-\beta+m-n+1)} e^{-q} q^{(\alpha-\beta)/2} \times$$

$$\times \Phi(-n-\beta, \alpha-\beta+m-n+1; q) \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{m-k} \frac{(-q)^k}{k!}.$$

Наконец, воспользовавшись формулой (30.12), окончательно запишем

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{(\alpha+\beta)/2} L_m^\alpha(x) L_n^\beta(x) J_{\alpha-\beta}(2\sqrt{qx}) dx =$$

$$= (-1)^{n+m} \frac{\Gamma(m+\alpha+1) e^{-q} q^{(\alpha-\beta)/2}}{\Gamma(\alpha-\beta+m-n+1)\Gamma(n+1)} L_m^{n-m}(q) \times$$

$$\times \Phi(-n-\beta, \alpha-\beta+m-n+1; q) \tag{36.7}$$

при $\mathrm{Re}(\alpha+\beta+1) > 0$.

◊ Если воспользоваться соотношениями (35.1) и (35.2), то формулу (36.7) можно представить в симметричном виде

$$\int\limits_0^\infty I_{m+\alpha,m}(x)I_{n+\beta,n}(x)J_{\alpha-\beta}(2\sqrt{qx})dx = \\ = (-1)^{n+m}I_{n,m}(q)I_{m+\alpha,n+\beta}(q) \tag{36.8}$$

при $\operatorname{Re}(\alpha+1) > 0$, $m, n = \overline{0, \infty}$.

Пример 36.4. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_0^\infty e^{-ap}J_\alpha(2\sqrt{xp})J_\alpha(2\sqrt{yp})\,dp$$

в предположении, что $\operatorname{Re}\alpha > -1$ и $\operatorname{Re}a > 0$.

Решение. Заменив в интеграле одну из функций Бесселя, согласно определению (3.6), ее разложением в ряд

$$J_\alpha(2\sqrt{xp}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(xp)^{(\alpha+2n)/2}}{n!\Gamma(\alpha+n+1)},$$

получим

$$J = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(xp)^{(\alpha+2n)/2}}{n!\Gamma(\alpha+n+1)}\int\limits_0^\infty e^{-ap}p^{n+\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{yp})dp, \tag{36.9}$$

откуда с учетом (35.6) найдем

$$J = \frac{1}{a}\Big(\frac{x}{a}\Big)^{\alpha/2}e^{-x/2}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(x/a)^nI_{\alpha+n,n}(y/a)}{\sqrt{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)}}.$$

С учетом суммы (35.76) для $|z| < 1$ окончательно запишем

$$\int\limits_0^\infty e^{-ap}J_\alpha(2\sqrt{xp})J_\alpha(2\sqrt{yp})\,dp = \frac{1}{a}e^{-(x+y)/a}I_\alpha\Big(\frac{2\sqrt{xy}}{a}\Big). \tag{36.10}$$

Пример 36.5. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_0^\infty e^{-ay}y^{\beta/2}I_\alpha(2\sqrt{by})\,dy.$$

Решение. Подставив разложение в ряд функции $I_\alpha(x)$ (6.5), после замены переменных $y \to y/a$ получим

$$J = a^{-1-\beta/2}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{\alpha/2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{n}\frac{\int\limits_0^\infty e^{-y}y^{n+(\alpha+\beta)/2}dy}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(n+1)} =$$

$$= a^{-1-\beta/2}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{\alpha/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1+[\alpha+\beta]/2)}{n!\Gamma(\alpha+n+1)}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{n} =$$

$$= a^{-1-\beta/2}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{\alpha/2}\frac{\Gamma(1+[\alpha+\beta]/2)}{\Gamma(\alpha+1)}\Phi\Big(1+\frac{\alpha+\beta}{2}, 1+\alpha; \frac{b}{a}\Big).$$

Итак, при $\operatorname{Re} a > 0$ окончательно имеем

$$\int\limits_0^\infty e^{-ay}y^{\beta/2}I_\alpha(2\sqrt{by})\,dy = a^{-1-\beta/2}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{\alpha/2}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(1+[\alpha+\beta]/2)}{\Gamma(\alpha+1)}\Phi\Big(1+\frac{\alpha+\beta}{2}, 1+\alpha; \frac{b}{a}\Big). \qquad (36.11)$$

Пример 36.6. Вычислить интеграл

$$S = \int\limits_0^\infty x^{-\lambda}J_\nu(ax)dx, \qquad -\operatorname{Re}\nu - 1 < \operatorname{Re}\lambda < \frac{1}{2}. \qquad (36.12)$$

Решение. В формуле (33.14) сделаем следующие замены и переобозначения:

$$x \to \alpha x^2, \qquad q = \frac{a^2}{4\alpha}, \quad -2n = 1+\nu+\lambda,$$

и получим

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{-\lambda}J_\nu(ax)dx = \frac{\Gamma([\nu-\lambda+1]/2)}{2^{1+\nu}\Gamma(1+\nu)}\frac{a^\nu}{\alpha^{(\nu-\lambda+1)/2}}\times$$

$$\times e^{-a^2/(4\alpha)}\Phi\Big(\frac{\nu+\lambda+1}{2}, 1+\nu; \frac{a^2}{4\alpha}\Big). \qquad (36.13)$$

Перейдя в (36.12) к пределу при $\alpha \to 0$, с учетом асимптотической формулы (33.12) для вырожденной гипергеометрической функции найдем

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{-\lambda}J_\nu(ax)dx = \frac{a^{\lambda-1}}{2^\lambda} = \frac{\Gamma([\nu-\lambda+1]/2)}{\Gamma([\nu+\lambda+1]/2)} \qquad (36.14)$$

при условии $-1/2 < \operatorname{Re}\lambda < 1 + \operatorname{Re}\nu$.

Пример 36.7. Вычислить интегралы

$$J_1=\int\limits_0^\infty e^{-ay}y^{m+\alpha/2}I_\alpha(2\sqrt{by})dy,$$

$$J_2=\int\limits_0^\infty e^{-ay}y^{m+\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{by})dy,$$

если $\operatorname{Re}(m+\alpha+1)>0$, $a>0$.

Решение. 1. Сделаем замену переменной $y\to y/a$ и введем обозначение $x=b/a$. Получим

$$J_1=Ja^{-(m+1+\alpha/2)},$$

где

$$J=\int\limits_0^\infty e^{-y}y^{m+\alpha/2}I_\alpha(2\sqrt{xy})dy.$$

Подставив сюда разложение $I_\alpha(q)$ в ряд Тейлора (6.5) и использовав формулу (33.1), найдем

$$\begin{aligned}J&=x^{\alpha/2}\sum_{k=0}^\infty\frac{x^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\int\limits_0^\infty e^{-y}y^{\alpha+m+k}dy=\\&=x^{\alpha/2}\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(\alpha+m+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}x^k=\\&=\frac{\Gamma(\alpha+m+1)}{k!\Gamma(\alpha+1)}\Phi(\alpha+m+1,\alpha+1;x).\end{aligned}$$

С помощью (33.6) окончательно запишем

$$\begin{aligned}J_1&=\int\limits_0^\infty e^{-ay}y^{m+\alpha/2}I_\alpha(2\sqrt{by})dy=\\&=\frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{b^{\alpha/2}}{a^{m+\alpha+1}}\Phi\Big(\alpha+m+1,\alpha+1;\frac{b}{a}\Big)=\\&=\frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{e^{b/a}b^{\alpha/2}}{a^{m+\alpha+1}}\Phi\Big(-m,\alpha+1;-\frac{b}{a}\Big),\end{aligned}\qquad(36.15)$$

где $\operatorname{Re}(m+\alpha+1)>0$, $a>0$.

2. Аналогичные вычисления приводят к следующему результату:

$$J_2 = \int_0^\infty e^{-ay} y^{m+\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{by})dy =$$

$$= \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{b^{\alpha/2}}{a^{m+\alpha+1}} \Phi\Big(\alpha+m+1, \alpha+1; -\frac{b}{a}\Big) =$$

$$= \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{e^{-b/a} b^{\alpha/2}}{a^{m+\alpha+1}} \Phi\Big(-m, \alpha+1; \frac{b}{a}\Big), \qquad (36.16)$$

где $\mathrm{Re}\,(m+\alpha+1) > 0$, $a > 0$. Несложно убедиться, что формулы (36.15) и (36.16) получаются друг из друга заменой $b \to -b$.

Пример 36.8. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^\infty e^{-ay} I_\alpha(2\sqrt{by}) I_{\alpha+n,n}(y)dy, \quad \mathrm{Re}\,(2a-1) > 0,\ \mathrm{Re}\,\alpha > -1.$$

Решение. Обозначив $q = a - 1/2 > 0$ и использовав для функции Лагерра второе разложение в ряд (35.5), запишем

$$J = [\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+n)]^{-1/2} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(1+\alpha+n+k)}{k!\Gamma(1+\alpha+k)} \times$$

$$\times (-1)^k \int_0^\infty e^{-qy} y^{k+\alpha/2} I_\alpha(2\sqrt{by})dy.$$

Интеграл по y вычисляется по формуле (33.13), и для J получим

$$J = \frac{[\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+n)]^{-1/2}}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{b^{\alpha/2} e^{b/q}}{q^{1+\alpha}} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(1+\alpha+n+k)}{\Gamma(1+k)} \Big(-\frac{1}{q}\Big)^k \Phi\Big(-l, 1+\alpha; -\frac{b}{q}\Big).$$

При целых k

$$\Phi\Big(-l, 1+\alpha; -\frac{b}{q}\Big) = \frac{\Gamma(1+k)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+k)} L_k^\alpha\Big(-\frac{b}{q}\Big), \qquad (36.17)$$

что приводит к следующему выражению:

$$J = [\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+n)]^{-1/2} \frac{b^{\alpha/2} e^{b/q}}{q^{1+\alpha}} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(1+\alpha+n+k)}{\Gamma(1+\alpha+k)} \Big(-\frac{1}{q}\Big)^k L_k^\alpha\Big(-\frac{b}{q}\Big), \qquad (36.18)$$

Положив в (27.7)

$$z = -\frac{1}{q}, \quad x = -\frac{b}{q}, \quad \beta = \alpha + n,$$

получим

$$J = \frac{1}{1+q}\Big(\frac{q}{1+q}\Big)^{n+\alpha/2} e^{\frac{(1+2q)b}{2q(1+q)}} \sqrt{\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)}} \times$$
$$\times \frac{e^{-\frac{b}{2q(1+q)}}}{\Gamma(1+\alpha)}\Big[\frac{b}{q(1+q)}\Big]^{\alpha/2} \Phi\Big(-n, a+\alpha; \frac{b}{1(1+q)}\Big).$$

Подставив сюда q в явном виде и введя функции Лагерра, окончательно найдем

$$\int\limits_0^\infty e^{-ay} I_\alpha(2\sqrt{by}) I_{\alpha+n,n}(y)dy = \frac{2}{2a+1}\Big(\frac{2a-1}{2a+1}\Big)^{n+\alpha/2} \times$$
$$\times \exp\Big(\frac{4ab}{4a^2-1}\Big) I_{\alpha+n,n}\Big(\frac{4ab}{4a^2-1}\Big), \qquad (36.19)$$

при условиях $\mathrm{Re}(2a-1) > 0$, $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$. Если n – целое неотрицательное, то ограничение на a можно ослабить: $\mathrm{Re}(2a+1) > 0$. Формально ряд (36.18) сходится лишь при $|q| > 1$, что соответствует $\mathrm{Re}\,a > 3/2$, однако интеграл слева в (36.19) существует при $\mathrm{Re}\,a > 1/2$ для любых комплексных n, для которых имеет смысл функция $I_{\alpha+n,n}(x)$, а для целых неотрицательных n при $\mathrm{Re}\,a > -1/2$ правая часть (36.19) есть очевидное аналитическое продолжение исходного интеграла в эти области. В частности, для целых неотрицательных n интеграл (36.19) существует при $a = 1/2$, и предельный переход при $a \to 1/2$ в правой части приводит к результату

$$\int\limits_0^\infty e^{-y/2} I_\alpha(2\sqrt{xy}) I_{\alpha+n,n}(y)dy = \frac{(-1)^n e^x x^{n+\alpha/2}}{\sqrt{\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+n)}}, \qquad (36.20)$$

где $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$, n – целое неотрицательное число.

Пример 36.9. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_0^\infty e^{-ay} J_\alpha(2\sqrt{by}) I_{\alpha+n,n}(y)dy, \quad \mathrm{Re}\,(2a-1) > 0, \ \mathrm{Re}\,\alpha > -1.$$

Решение. Аналогично примеру 36.8, но использовав для функции Лагерра разложение в ряд (33.14) вместо (35.5), получим аналог формулы (36.18)

$$J = \frac{b^{\alpha/2} e^{-b/q}}{\sqrt{\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+n)]}q^{1+\alpha}} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+n+k)}{\Gamma(1+\alpha+k)} \Big(-\frac{1}{q}\Big)^k L_k^\alpha\Big(-\frac{b}{q}\Big), \tag{36.21}$$

где $q = a - 1/2$. Положив в (27.7)

$$z = -\frac{1}{q}, \quad x = \frac{b}{q}, \quad \beta = \alpha + n,$$

получим

$$\int_0^\infty e^{-ay} J_\alpha(2\sqrt{by}) I_{\alpha+n,n}(y) dy =$$

$$= \sqrt{\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)}} \frac{b^{\alpha/2} e^{2b/(1-2a)}}{\Gamma(1+\alpha)} \Big(\frac{2}{2a+1}\Big)^{1+\alpha} \times$$

$$\times \Big(\frac{2a-1}{2a+1}\Big)^n \Phi\Big(1+\alpha+n, 1+\alpha; \frac{4b}{4a^2-1}\Big) =$$

$$= \sqrt{\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)}} \frac{b^{\alpha/2} e^{-2b/(1+2a)}}{\Gamma(1+\alpha)} \Big(\frac{2}{2a+1}\Big)^{1+\alpha} \times$$

$$\times \Big(\frac{2a-1}{2a+1}\Big)^n \Phi\Big(-n, 1+\alpha; \frac{4b}{1-4a^2}\Big), \tag{36.22}$$

где $\mathrm{Re}(2a-1) > 0$, $\alpha > -1$. Второе представление (36.22) допускает и такую запись:

$$\int_0^\infty e^{-ay} J_\alpha(2\sqrt{by}) I_{\alpha+n,n}(y) dy = \frac{2e^{i\pi n}}{2a+1} \Big(\frac{1-2a}{1+2a}\Big)^{n+\alpha/2} \times$$

$$\times \exp\Big(\frac{4ab}{1-4a^2}\Big) I_{\alpha+n,n}\Big(\frac{4ab}{1-4a^2}\Big), \tag{36.23}$$

аналогичную (36.19). И здесь для целых неотрицательных n интеграл существует, если справедливы условия $\mathrm{Re}\, a > -1/2$, $\alpha > -1$. При $a = 1/2$ предельным переходом получим

$$\int_0^\infty e^{-y/2} J_\alpha(2\sqrt{xy}) I_{\alpha+n,n}(y) dy =$$

$$= \frac{e^{-x} x^{\alpha/2}}{\sqrt{\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+n)}}, \tag{36.24}$$

где $\alpha > -1$, n – целое неотрицательное число.

Пример 36.10. Вычислить интеграл

$$J_{nm} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \sqrt{\frac{a+1}{x}} \big[I_{a,m}(x) I_{a+1,n}(x) + I_{a+1,m}(x) I_{a,n}(x)\big] dx,$$

где Re $a > (m+n)/2 - 1$, m, n – целые неотрицательные числа.

Решение. Выберем при $m \neq n$

$$\beta = a - \frac{m+n}{2}$$

и воспользуемся формулой (35.51) для каждой функции Лагерра в подынтегральном выражении. Получим соотношение

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+1}{2}}\left[I_{a,m}(x)I_{a+1,n}(x) + I_{a+1,m}(x)I_{a,n}(x)\right] =$$
$$= \frac{1}{2\Gamma(1+a)}\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} Q\left[\binom{\frac{m+n}{2}-1-k}{n-k}\binom{\frac{m+n}{2}-s}{m-s} + \right.$$
$$\left. + \binom{\frac{m+n}{2}-1-s}{m-s}\binom{\frac{m+n}{2}-k}{n-k}\right] I_{\beta+k,k}(x)I_{\beta+s,s}(x),$$

где обозначено

$$Q^2 = \frac{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m)\Gamma(1+\beta+k)\Gamma(1+\beta+s)}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+s)}.$$

Если учесть тождество

$$\binom{\alpha+1}{k} = \frac{\alpha+1}{\alpha+1-k}\binom{\alpha}{k}, \tag{36.25}$$

то легко получить соотношение $(n \neq m)$

$$\binom{\frac{m+n}{2}-1-k}{n-k}\binom{\frac{m+n}{2}-s}{m-s} +$$
$$+ \binom{\frac{m+n}{2}-1-s}{m-s}\binom{\frac{m+n}{2}-k}{n-k} =$$
$$= \frac{2(k-s)}{n-m}\binom{\frac{m+n}{2}-1-k}{n-k}\binom{\frac{m+n}{2}-1-s}{m-s}.$$

Таким образом, для J_{nm} при $n \neq m$ получим

$$J_{nm} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\frac{Q(k-s)}{n-m}\binom{\frac{m+n}{2}-1-k}{n-k} \times$$
$$\times \binom{\frac{m+n}{2}-1-s}{m-s}\int\limits_{0}^{\infty} I_{\beta+k,k}(x)I_{\beta+s,s}(x)\,dx.$$

Условие ортогональности (35.4) приводит к результату

$$J_{nm} = 0, \qquad m \neq n.$$

При $m = n$ получим

$$J_{mn} = \int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{a+1}{x}} I_{a+1,n}(x) I_{a,n}(x)\,dx, \quad \operatorname{Re} a > n-1.$$

Положив в формуле (35.51)

$$\alpha = a+1-n, \qquad \beta = a-n,$$

найдем

$$I_{a+1,n}(x) = \sqrt{x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{n-k} \times \\ \times \sqrt{\frac{\Gamma(1+n)\Gamma(1+a-n+k)}{\Gamma(1+k)\Gamma(2+a)}} I_{a-n+k,k}(x),$$

что приводит к следующему выражению:

$$J_{nn} = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(1+n)\Gamma(1+a-n+k)}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+a)}} \int\limits_0^\infty I_{a,n}(x) I_{a-n+k,k}(x)\,dx.$$

Но в силу (35.4) имеем

$$\int\limits_0^\infty I_{a,n}(x) I_{a-n+k,k}(x)\,dx = \delta_{nk},$$

и в этом случае $J_{nn} = 1$. Окончательно получим

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{a+1}{x}} \big[I_{a,m}(x) I_{a+1,n}(x) + \\ + I_{a+1,m}(x) I_{a,n}(x)\big] dx = \delta_{mn}, \tag{36.26}$$

где Re $a > (m+n)/2 - 1$; m, n – целые неотрицательные числа.

Пример 36.11. Показать, что при $\operatorname{Re}(\mu+\nu) > 0$ справедливо соотношение

$$I = \int\limits_0^\infty J_\mu(x) J_\nu(x) \frac{dx}{x^\lambda} = \\ = \frac{2^{-\lambda}\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+1}{2}\right)}. \tag{36.27}$$

Интеграл (36.27) называется интегралом Вебера–Шафхейтлина.

Решение. Воспользовавшись представлением (3.33), получим

$$I = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\,\cos([\mu-\nu]\varphi)\int\limits_0^{\infty} x^{-\lambda}J_{\mu+\nu}(2x\cos\varphi)dx.$$

Внутренний интеграл по x вычисляется с помощью (36.13):

$$I = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma([\mu+\nu-\lambda+1]/2)}{\Gamma([\mu+\nu+\lambda+1]/2)}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\lambda-1}\varphi\cos([\mu-\nu]\varphi)d\varphi. \qquad (36.28)$$

Внутренний интеграл в (36.28) лишь обозначениями отличается от интеграла (I.40.21), и окончательно найдем, что соотношение (36.27) справедливо.

Пример 36.12. Показать, что при $x > 0$, $y > 0$, $\operatorname{Re}\alpha > -1$ справедливы соотношения

$$\int\limits_0^{\infty} J_\alpha(2\sqrt{xp})J_\alpha(2\sqrt{yp})\,dp = \delta(x-y), \qquad (36.29)$$

$$\int\limits_0^{\infty} J_\alpha(xp)J_\alpha(yp)p\,dp = \frac{\delta(x-y)}{\sqrt{xy}} = \frac{\delta(x-y)}{x}. \qquad (36.30)$$

Решение. Воспользуемся соотношением (36.10):

$$J_a^\alpha(x,y) = \int\limits_0^{\infty} e^{-ap}J_\alpha(2\sqrt{xp})J_\alpha(2\sqrt{yp})dp = \\ = \frac{1}{a}e^{-(x+y)/a}I_\alpha\left(\frac{2\sqrt{xy}}{a}\right) \qquad (36.31)$$

и заменим в нем функцию Бесселя $J_\alpha(2\sqrt{xp})$ разложением (36.9). Тогда

$$J_a^\alpha(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{\alpha/2+n}}{\Gamma(1+\alpha+n)n!}\int\limits_0^{\infty} e^{-ap}p^{n+\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{yp})dp.$$

С учетом (36.16) и (35.1) получим

$$J_a^\alpha(x,y) = \frac{1}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha/2}e^{-y/(2a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x/a)^n I_{\alpha+n,n}(y/a)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+\alpha+n)}.$$

Покажем, что справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\alpha\to+0} J_a^\alpha(x,y) = \delta(x-y), \quad x>0, \quad y>0. \tag{36.32}$$

Для этого рассмотрим произвольную основную функцию $\varphi(x)$ и вычислим интеграл

$$J_a^\alpha(x) = \int\limits_0^\infty \varphi(y) J_a^\alpha(x,y)\,dy, \quad \operatorname{Re}\alpha > -1. \tag{36.33}$$

Сделаем в (36.33) замену переменных

$$y = x + 2t\sqrt{ax}, \quad dy = 2\sqrt{ax}\,dt,$$

тогда для пределов интегрирования получим

$$-q < t < \infty, \quad \text{где} \quad q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

В результате найдем

$$J_a^\alpha(x) = \int\limits_{-q}^\infty dt\, \varphi(x+2t\sqrt{ax}) R^\alpha(a;x,t), \tag{36.34}$$

где

$$R^\alpha(a;x,t) = 2\sqrt{ax} J_a^\alpha(x, x+2t\sqrt{ax}).$$

Воспользовавшись асимптотической оценкой (7.12)

$$I_\alpha(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad x\to+\infty, \tag{36.35}$$

получим

$$\lim_{a\to+0} R^\alpha(a;x,t) = \frac{\exp(-t^2)}{\sqrt{\pi}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{a\to+0} J_a^\alpha(x) = \varphi(x) \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\exp(-t^2)}{\sqrt{\pi}}\,dt = \varphi(x),$$

и, по определению дельта-функции Дирака, соотношение (36.29) справедливо. Сделав в (36.29) замены $p\to p^2$, $x\to x^2/4$ и $y\to y^2/4$, с учетом свойств дельта-функции получим (36.30).

ГЛАВА 5

Ряды Неймана и Каптейна*

В этом разделе мы рассмотрим некоторые приемы, позволяющие находить суммы рядов по специальным функциям.

В практических приложениях, например в теории излучения электромагнитных волн, наряду с рассмотренными ранее рядами Фурье–Бесселя (13.6) и Дини (13.10) используются ряды вида

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m^\nu J_{\nu+m}(b_m^\nu x),$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m^{\nu,\mu} J_{\nu+m}(b_m^\nu x) J_{\mu+m}(d_m^\mu x).$$

В этой главе мы рассмотрим некоторые частные случаи таких рядов, а именно, ряды Неймана и Каптейна.

37. Ряды Неймана*

♦ Ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m^\nu J_{\nu+m}(x) \tag{37.1}$$

называется рядом Неймана первого рода.

♦ Ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m^{\mu,\nu} J_{\nu+m/2}(x) J_{\mu+m/2}(x) \tag{37.2}$$

называется рядом Неймана второго рода.

При разложении функции в ряд Неймана иногда оказывается полезным следующее соотношение ортогональности функций Бесселя:

Теорема 37.1. *Функции $J_{\nu+2n+1}(x)$ образуют на интервале $[0,\infty[$ ортогональную систему функций с весом $\rho(x) = 1/x$ и условием ортогональности*

$$\int\limits_0^\infty J_{\nu+2n+1}(x) J_{\nu+2m+1}(x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2(2n+\nu+1)} \delta_{mn} \tag{37.3}$$

при условии $\mathrm{Re}(\nu+m+n) > -1$.

Доказательство. Заменим в интеграле Вебера–Шафхейтлина (36.27) ν на $\nu+2n+1$, а μ на $\nu+2m+1$ и положим $\lambda = 1$. С учетом свойств гамма-функции

$$\frac{1}{\Gamma(-k)} = 0, \qquad \Gamma(1) = 1$$

получим формулу (37.3), что и требовалось доказать.

Рассмотрим несколько примеров вычисления суммы рядов Неймана.

Пример 37.1. Вычислить суммы рядов Неймана

$$1)\quad S_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(x). \tag{37.4}$$

$$2)\quad S_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (2k+1) J_{2k+1}(x); \tag{37.5}$$

Решение. 1) Найдем лапласовское изображение функции $S_1(x)$. С учетом (15.19) получим

$$\begin{aligned} S_1(x) &\doteqdot \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{2k+1}}{\sqrt{p^2+1}} = \\ &= \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{p^2+1}-p)^{2k} = \\ &= \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}} \frac{1}{1+(\sqrt{p^2+1}-p)^2} = \frac{1}{2(p^2+1)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{2k+1}}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{2(p^2+1)}. \tag{37.6}$$

Найдя оригиналы функций в (37.6), получим

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(x) = \frac{1}{2}\sin x.$$

2) Найдем лапласовское изображение функции $S_2(x)$ (37.5):

$$\begin{aligned} S_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)J_{2k+1}(x) \doteqdot \\ &\doteqdot \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{2k+1}}{\sqrt{p^2+1}}. \end{aligned}$$

Домножим правую и левую части (37.6) на $\sqrt{p^2+1}$ и продифференцируем по p. Получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{2k+1}}{\sqrt{p^2+1}} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dp}\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Согласно теореме о дифференцировании изображения (см. разд. <Свойства преобразования Лапласа> части I), найдем оригиналы

$$S_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)J_{2k+1}(x) = \frac{1}{2}xJ_0(x). \tag{37.7}$$

38. Ряд Каптейна первого рода*

♦ Ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m^\nu J_{\nu+m}\big((\nu+m)x\big) \tag{38.1}$$

называется рядом Каптейна первого рода.

В этом разделе мы ограничимся рядами вида

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_m(mx)}{m^{2\nu}}\cos m\gamma, \tag{38.2}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_m(mx)}{m^{2\nu+1}}\sin m\gamma, \tag{38.3}$$

$$\gamma = \gamma(æ) = æ - x\sin æ, \qquad |x| < 1. \tag{38.4}$$

Здесь æ – параметр, не зависящий от x.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда $\mu = 0$.

Теорема 38.1. *Справедливы соотношения*

$$\frac{1}{1 - x\cos æ} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(mx)\cos m\gamma; \tag{38.5}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} J_m(mx)\cos m\gamma = \frac{1}{2}\frac{x\cos æ}{1 - x\cos æ}. \tag{38.6}$$

Для доказательства этих соотношений удобно ввести вспомогательную функцию $F(x,\gamma)$, которую неявным (параметрическим) образом определим соотношением

$$F(x,\gamma) = \Phi(x, æ) = (1 - x\cos æ)^{-1}. \tag{38.7}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, рассмотрим простейшие свойства этой функции.

Свойства функции $F(x,\gamma)$

Свойство 1. Функция $F(x,\gamma)$ – четная функция переменной γ.

Доказательство. Заменив æ на $-$æ, найдем из (38.7) и (38.4)

$$\Phi(x,-æ) = \Phi(x,æ) = F(x,\gamma),$$
$$\gamma(-æ) = -\gamma(æ).$$

Отсюда следует четность функции $F(x,\gamma)$ по переменной γ.

Свойство 2. При фиксированных x ($|x| < 1$) функция $F(x,\gamma)$ есть периодическая функция переменной γ с периодом 2π.

Доказательство. Заменив в (38.7) и (38.4) æ на æ $+ 2\pi$, найдем

$$\Phi(x,æ+2\pi) = \Phi(x,æ) = F(x,\gamma),$$
$$\gamma(æ+2\pi) = æ + 2\pi - x\sin æ = \gamma + 2\pi.$$

Окончательно
$$F(x,\gamma+2\pi) = F(x,\gamma).$$

Свойство 3. При фиксированном x функция $F(x,\gamma)$ есть бесконечно дифференцируемая функция переменной γ.

Доказательство. Из (38.7) следует

$$\frac{dF(x,\gamma)}{d\gamma} = \frac{dæ}{d\gamma}\frac{d\Phi(x,æ)}{dæ}.$$

Из (38.7) имеем

$$\frac{d\gamma}{dæ} = p(x,æ), \qquad p = p(x,æ) = 1 - x\cos æ, \tag{38.8}$$
$$0 < 1 - |x| \leqslant p \leqslant 1 + |x| < 2,$$
$$\frac{dæ}{d\gamma} = \frac{1}{p}, \qquad \frac{dp}{dæ} = x\sin æ, \qquad \frac{d}{d\gamma} = \frac{x\sin æ}{p}\frac{d}{dp}. \tag{38.9}$$

Поскольку из (38.7) следует

$$\Phi(x,æ) = \frac{1}{p}, \tag{38.10}$$

то из (38.8)–(38.10) найдем

$$\frac{dF(x,\gamma)}{d\gamma} = \frac{dæ}{d\gamma}\frac{dp}{dæ}\frac{d\Phi}{dp} = -\frac{x\sin æ}{p^3}. \tag{38.11}$$

Продолжив дифференцирование, получим

$$\frac{d^2F(x,\gamma)}{d\gamma^2} = -\frac{1}{p}\frac{d}{dæ}\frac{x\sin æ}{p^3} = -\frac{1}{p^4}x\cos æ + \frac{3x\sin æ}{p^5}\frac{dp}{dæ} =$$

$$= \frac{3x^2\sin^2 æ}{p^5} - \frac{x\cos æ}{p^4} = \frac{3[x^2-(1-p^2)]}{p^5} - \frac{1-p}{p^4} =$$
$$= -\frac{2p^2-5p+3(1-x^2)}{p^5}. \qquad (38.12)$$

Поскольку в силу (38.8) $p \neq 0$, то производные (38.11) и (38.12) существуют.

Из соотношений (38.9) несложно найти

$$\frac{d^2}{d\gamma^2} = \frac{d}{d\gamma}\frac{d}{d\gamma} = \frac{1}{p}\frac{d}{dæ}\frac{1}{p}\frac{d}{dæ} = \frac{1}{p}\frac{d}{dæ}\frac{x\sin æ}{p}\frac{d}{dp} =$$
$$= \frac{x\cos æ}{p^2} - \frac{x^2\sin^2 æ}{p^3}\frac{d}{dp} + \frac{x\sin æ}{p^2}\frac{d}{dæ}\frac{d}{dp} =$$
$$= \Big[\frac{1-p}{p^2} - \frac{x^2-(1-p)^2}{p^3}\Big]\frac{d}{dp} + \frac{x^2-(1-p)^2}{p^2}\frac{d^2}{dp^2}.$$

Окончательно имеем

$$\widehat{A} = \frac{d^2}{d\gamma^2} = \frac{x^2-(1-p)^2}{p^2}\frac{d^2}{dp^2} + \frac{1-x^2-p}{p^3}\frac{d}{dp}. \qquad (38.13)$$

С учетом этого найдем

$$\frac{d^{2n}F(x,\gamma)}{d\gamma^{2n}} = (\widehat{A})^n\frac{1}{p} = L_{2n+3}\Big(\frac{1}{p}\Big), \qquad (38.14)$$

где $L_{2n+3}(y)$ – полином степени $2n+3$ от $y = 1/p$. Продифференцировав еще раз по γ, в силу (38.9) получим

$$\frac{d^{2n+1}F(x,\gamma)}{d\gamma^{2n+1}} = \frac{x\sin æ}{p}\frac{d}{dp}L_{2n+3}\Big(\frac{1}{p}\Big) = M_{4n+3}\Big(\frac{1}{p}\Big)x\sin æ, \qquad (38.15)$$

где $M_{4n+3}(y)$ – полином степени $4n+3$ от y.

Таким образом, существование всех производных по γ при $p \neq 0$ доказано.

Перейдем к доказательству теоремы 38.1.

Доказательство. Соотношение (38.6) является тривиальным следствием (38.5). Найдем разложение $F(x,\gamma)$ при $|x| < 1$ в ряд Фурье по γ.

Поскольку функция $F(x,\gamma)$ при $|x| < 1$ является четной периодической с периодом 2π бесконечно дифференцируемой функцией γ, то она разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье по $\cos m\gamma$

$$F(x,\gamma) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m\cos m\gamma. \qquad (38.16)$$

Коэффициенты a_m убывают с ростом m быстрее, чем любая отрицательная степень m:

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi F(x,\gamma)\cos m\gamma d\gamma =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \Phi(x,æ)(1 - x\cos æ)\cos m(æ - x\sin æ)dæ =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos m(æ - x\sin æ)dæ = 2J_m(mx). \qquad (38.17)$$

Итак, окончательно имеем (38.5), что и требовалось доказать.

◊ Из свойств коэффициентов Фурье следует, что при любом $|x| < 1$ и любом a
$$\lim_{m\to\infty} m^a J_m(mx) = 0. \qquad (38.18)$$

Исследуем свойства сумм рядов (38.2) и (38.3) при произвольном ν. Для этого введем вспомогательные функции $R_\nu(x,p)$ и $S_\nu(x,p)$ соотношениями
$$\frac{1}{2}R_\nu(x,p) = \sum_{m=1}^\infty \frac{J_m(mx)}{m^{2\nu}}\cos m\gamma, \qquad (38.19)$$
$$\frac{x}{2}S_\nu(x,p)\sin æ = \sum_{m=1}^\infty \frac{J_m(mx)}{m^{2\nu+1}}\sin m\gamma, \qquad (38.20)$$
$$|x| < 1, \qquad 0 < 1 - |x| \leqslant p \leqslant 1 + |x| < 2. \qquad (38.21)$$

Здесь p определено в (38.10).

Ряды (38.19) и (38.20) при условиях (38.21) существуют для всех (комплексных) ν и сходятся по γ абсолютно и равномерно в силу (38.18).

◊ Из соотношения (38.6) следует, что
$$R_0(x,p) = \frac{1}{p} - 1. \qquad (38.22)$$

Свойства функций $R_\nu(x,p)$ и $S_\nu(x,p)$

Свойство 1. Справедливы соотношения
$$R_\nu(x,p) = R_\nu(-x,p), \qquad S_\nu(x,p) = S_\nu(-x,p). \qquad (38.23)$$

Доказательство. В формулах (38.19) и (38.20) проведем замену переменных $x \to -x$, $\gamma \to \gamma + \pi$ и учтем, что при такой замене справедливы соотношения
$$\cos m(\gamma+\pi) = (-1)^m\cos m\gamma, \qquad \sin m(\gamma+\pi) = (-1)^m \sin m\gamma,$$
$$J_m(mx) = (-1)^m J_m(-mx), \qquad æ \to æ + \pi.$$

Легко установить, что при такой замене выражения

$$p, \qquad x\sin æ, \quad x\cos æ, \quad J_m(mx)\sin m\gamma, \quad J_m(mx)\cos m\gamma$$

не меняются. Отсюда следует (38.23).

Свойство 2. Справедливы соотношения (штрихом обозначена производная по p)

$$R'_\nu(x,p) = -pS_{\nu-1}(x,p); \tag{38.24}$$

$$[x^2-(1-p)^2]S'_\nu(x,p) + (1-p)S_\nu(x,p) = pR_\nu(x,p); \tag{38.25}$$

$$\begin{aligned} p[x^2-(1-p)^2]S''_\nu(x,p) + (1-x^2+p-2p^2)S'_\nu(x,p) - \\ -S_\nu(x,p) = -p^3S_{\nu-1}(x,p); \end{aligned} \tag{38.26}$$

$$\begin{aligned} p[x^2-(1-p)^2]R''_\nu(x,p) + (1-x^2-p)R'_\nu(x,p) = \\ = -p^3R_{\nu-1}(x,p). \end{aligned} \tag{38.27}$$

Соотношения (38.24)–(38.27) справедливы при любых ν.

Доказательство. Продифференцировав (38.19) по γ и учтя (38.8) и (38.9), найдем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\gamma}R_\nu(x,p) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_m(mx)}{m^{2\nu-1}}\sin m\gamma = -\frac{x}{2}S_{\nu-1}(x,p)\sin æ,$$

$$\frac{d}{d\gamma}R_\nu(x,p) = \frac{x\sin æ}{p}\frac{d}{dp}R_\nu(x,p).$$

Отсюда немедленно следует (38.24).

Продифференцировав (38.20) по γ, с учетом (38.8) и (38.9) получим

$$\frac{x}{2}\frac{d}{d\gamma}S_\nu(x,p)\sin æ = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_m(mx)}{m^{2\nu}}\cos m\gamma = \frac{1}{2}R_\nu(x,p),$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\gamma}S_\nu(x,p)\sin æ &= S_\nu(x,p)\frac{1}{p}\frac{d}{dæ}\sin æ + \frac{x\sin^2 æ}{p}\frac{d}{dp}S_\nu(x,p) = \\ &= \frac{\cos æ}{p}S_\nu(x,p) + \frac{x\sin^2 æ}{p}S'_\nu(x,p) = \\ &= \frac{1}{x}\Big[\frac{1-p}{p}S_\nu(x,p) + \frac{x^2-(1-p)^2}{p}S'_\nu(x,p)\Big], \end{aligned}$$

откуда найдем (38.25).

Разделив правую и левую части (38.25) на p, продифференцировав по p и воспользовавшись (38.24), получим (38.26).

Заменив в (38.25) ν на $\nu-1$ и выразив из (38.24) $S_{\nu-1}(x,p)$ через $R'_\nu(x,p)$, приходим к (38.27).

Пример 38.1. Показать справедливость соотношения

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(mx)}{m} \sin[m(æ - x \sin æ)] = \frac{x}{2} \sin æ, \tag{38.28}$$

где æ определено в (38.4).

Решение. Из (38.28) следует, что для доказательства соотношения (38.28) достаточно показать справедливость равенства

$$S_0(x, p) = 1. \tag{38.29}$$

Проинтегрировав по γ равенство (38.19) при $\nu = 0$, с учетом (38.22) найдем

$$\sum_{m=1}^{\infty} J_m(mx) \int\limits_0^{\gamma} \cos m\gamma \, d\gamma = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\gamma} R_0(x, p) d\gamma = \frac{1}{2} \int\limits_0^{æ} R_0(x, p) p \, dæ =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{æ} (1 - p) dæ = \frac{x}{2} \int\limits_0^{æ} \cos æ \, dæ = \frac{x}{2} \sin æ,$$

$$\int\limits_0^{\gamma} \cos m\gamma \, d\gamma = \frac{\sin m\gamma}{m},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} J_m(mx) \int\limits_0^{\gamma} \cos m\gamma \, d\gamma = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(mx)}{m} \sin m\gamma =$$

$$= \frac{x}{2} S_0(x, p) \sin æ = \frac{x}{2} \sin æ.$$

Отсюда окончательно имеем (38.29), что и требовалось показать.

Свойство 3. Для $\nu = n$, $n = \overline{0, \infty}$, функции $S_n(x, p)$ являются полиномами по p степени $2n$.

Доказательство проведем методом математической индукции. Из (38.29) видно, что $S_0(x, p)$ есть полином нулевой степени по p. Положив в уравнении (38.26) $\nu = 1$ и подставив в правую часть выражения (38.29), найдем

$$p[x^2 - (1 - p)^2] S_1''(x, p) + (1 - x^2 + p - 2p^2) S_1'(x, p) - S_1(x, p) + p^3 = 0.$$

Общим решением этого уравнения будет функция

$$S_1(x, p) = S_1^0(x, p) + Y(x, p),$$

где

$$12S_1^0(x,p) = 2p^2 + 5(p+1-x^2),$$
$$Y(x,p) = A + \frac{B + A\arcsin[(1-p)/x]}{\sqrt{x^2-(1-p)^2}}, \qquad (38.30)$$

A и B – произвольные постоянные. Но функция $S_1(x,p)$ конечна при всех p, удовлетворяющих ограничению (38.21). Функция $Y(x,p)$, являющаяся общим решением однородного уравнения (38.26) (если в (38.26) положить правую часть равной нулю), обращается в бесконечность хотя бы в одной из точек $p = 1 \pm x$ при ненулевых A и B. Таким образом, единственным конечным при всех разрешенных значениях p решением является $S_1(x,p) = S_1^0(x,p)$, следующее из общего решения при $Y(x,p) = 0$, т.е. $A = B = 0$. Итак, окончательно получим

$$12S_1(x,p) = 2p^2 + 5(p+1-x^2), \qquad (38.31)$$

т.е. $S_1(x,p)$ является полиномом второго порядка по p.

Пусть теперь $S_{n-1}(x,p)$ найдено и является полиномом степени $2n-2$ по p. Докажем, что $S_n(x,p)$ является полиномом степени $2n$ по p. Запишем в общем случае

$$S_n(x,p) = \sum_{k=0}^{2n} a_k^{(n)} p^k \qquad (38.32)$$

и докажем, что коэффициенты $a_k^{(n)}$ однозначно выражаются из (38.26) через коэффициенты $a_k^{(n-1)}$, которые считаются уже известными. Тем самым функции $S_n(x,p)$ однозначно восстанавливаются по $S_{n-1}(x,p)$ с помощью уравнения (38.26), ибо все другие решения этого уравнения отличаются от найденного $S_n(x,p)$ слагаемым $Y(x,p)$ (общим решением однородного уравнения), которое при ненулевых коэффициентах A и B в (38.30) не является конечным при всех допустимых p, что противоречит конечности $S_n(x,p)$.

Подставив (38.32) в (38.26) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p в правой и левой частях (38.26), найдем следующую рекуррентную формулу:

$$(k-1)\left[(k+1)(1-x^2)a_{k+1}^{(n)} - (2k+1)a_k^{(n)} + k a_{k-1}^{(n)}\right] = a_{k-3}^{(n-1)}. \qquad (38.33)$$

Здесь полагаем

$$a_k^{(s)} = 0, \qquad k < 0, \qquad k > 2s. \qquad (38.34)$$

В (38.33) k меняется в пределах $0 \leqslant k \leqslant 2n+1$ (в правой и левой частях (38.26) степени p, если (38.32) справедливо, изменяются именно в этих пределах). При $k = 1$ (38.33) обращается в тождество и не является содержательным уравнением. Тем самым (38.33) есть система $2n+1$ уравнений относительно $2n+1$ неизвестных $a_k^{(n)}$ при условии, что $a_k^{(n-1)}$ известны.

Система (38.33) может быть записана в виде матричного уравнения

$$Ax = y, \tag{38.35}$$

где квадратная $(2n+1) \times (2n+1)$ матрица A имеет элементы A_{ks} $(k, s = \overline{0, 2n})$, причем отличны от нуля только элементы главной диагонали и следующих двух поддиагоналей:

$$\begin{aligned} &A_{00} = 1, \quad A_{kk} = k(k+1), \quad k > 0; \\ &A_{01} = x^2 - 1, \quad A_{k\,k+1} = -k(2k+3), \quad k > 0; \\ &A_{02} = 0, \quad A_{k\,k+2} = k(k+2)(1-x^2), \quad k > 0. \end{aligned} \tag{38.36}$$

Остальные элементы матрицы равны нулю. Элементы столбцов x_k и y_k имеют вид

$$x_k = a_k^{(n)}, \qquad y_k = a_{k-2}^{(n-1)} \tag{38.37}$$

при выполнении условия (38.34). Поскольку матрица A есть верхняя треугольная, то ее определитель Δ есть произведение диагональных элементов и равен

$$\Delta = (2n+1)(2n!)^2 \neq 0. \tag{38.38}$$

Следовательно, уравнение (38.35) (т.е. рекуррентные соотношения (38.33) при известных $a_k^{(n-1)}$) имеет единственное решение.

Прямым вычислением мы показали, что, согласно (38.29) и (38.31), $S_0(x,p)$ и $S_1(x,p)$ являются полиномами соответствующей степени, откуда следует справедливость утверждения (по только что доказанному), что $S_n(x,p)$ есть полином степени $2n$.

Таким образом, функции $S_\nu(x,p)$ при $\nu = n$, $n = \overline{1, \infty}$, можно вычислить в явном виде методом неопределенных коэффициентов, если рассматривать выражения (38.33) как рекуррентные соотношения.

Свойство 4. Справедливы соотношения

$$a_{2n}^{(n)} = \frac{1}{(2n+1)!}; \tag{38.39}$$

$$a_{2n-1}^{(n)} = \frac{r_n}{(2n)!}; \tag{38.40}$$

$$a_{2n-2}^{(n)} = \frac{1}{(2n-1)!}\Big[\sum_{k=2}^{n} \frac{4k-1}{2k(2k-1)} r_k + \frac{2n+3}{4(2n+1)}(1-x^2)\Big], \tag{38.41}$$

где

$$r_n = \sum_{s=1}^{2n} \frac{1}{1+s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1},$$

$$r_{n+1} = r_n + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3},$$

$$r_1 = \frac{5}{6}, \quad r_2 = \frac{77}{60}, \quad r_3 = \frac{223}{140}, \quad r_4 = \frac{4609}{2520}, \quad \ldots$$

Доказательство. Положив в (38.33) $k = 2n+1$, получим

$$(2n+1)2na_{2n}^{(n)} = a_{2(n-1)}^{(n-1)}. \tag{38.42}$$

Это соотношение является рекуррентной формулой для $a_{2m}^{(m)}$, связывающей два последовательных коэффициента. При $m = 0$ из (38.29) имеем $a_0^{(0)} = 1$, что немедленно приводит к (38.39).

Положив в (38.33) $k = 2n$, найдем

$$-(4n+1)(2n-1)a_{2n}^{(n)} + 2n(2n-1)a_{2n-1}^{(n)} = a_{2n-3}^{(n-1)}. \tag{38.43}$$

Подставив сюда (38.39), получим

$$2n(2n-1)a_{2n-1}^{(n)} = a_{2n-3}^{(n-1)} + \frac{(4n+1)(2n-1)}{(2n+1)!}. \tag{38.44}$$

Это есть рекуррентное соотношение, связывающее два последовательных коэффициента $a_{2m-1}^{(m)}$ с начальным условием

$$a_1^{(1)} = \frac{5}{12}, \tag{38.45}$$

следующим из (38.31). Решением (38.44) с начальным условием (38.45) является выражение (38.40).

Положив в (38.33) $k = 2n-1$, получим

$$\begin{aligned} 2n(2n-2)(1-x^2)a_{2n}^{(n)} - (4n-1)(2n-2)a_{2n-1}^{(n)} + \\ +(2n-1)(2n-2)a_{2n-2}^{(n)} = a_{2n-4}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Подставив сюда соотношения (38.39) и (38.44), получим рекуррентную формулу для $a_{2m-2}^{(m)}$

$$\begin{aligned} &(2n-1)(2n-2)a_{2n-2}^{(n)} = \\ &= a_{2n-4}^{(n-1)} + \frac{(4n-1)(2n-2)r_n}{(2n)!} - \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)!}(1-x^2) \end{aligned} \tag{38.46}$$

с начальным условием

$$a_0^{(1)} = \frac{5}{12}(1-x^2), \tag{38.47}$$

следующим из (38.31). Тогда из (38.46) получим (38.41).

Свойство 5. Функция $S_n(x,p)$ есть полином степени $2n$ как по p, так и по x, причем содержит только четные степени x.

Доказательство. Считая в (38.33) $k = 0, 2, 3$, найдем

$$a_0^{(n)} = (1-x^2)a_1^{(n)}, \tag{38.48}$$

$$3(1-x^2)a_3^{(n)} - 5a_2^{(n)} + 2a_1^{(n)} = 0, \tag{38.49}$$

$$8(1-x^2)a_4^{(n)} - 14(1-x^2)a_3^{(n)} + 6a_2^{(n)} = 2a_0^{(n-1)}. \tag{38.50}$$

Формулы (38.39), (38.40), (38.41), (38.48) позволяют записать следующий общий вид:

$$\begin{aligned} S_n(x,p) = &\frac{p^{2n}}{(2n+1)!} + \frac{p^{2n-1}r_n}{(2n)!} + \\ &+\frac{p^{2n-2}}{(2n-1)!}\Big[\sum_{k=2}^{n}\frac{4k-1}{2k(2k-1)}r_k + \frac{2n+3}{4(2n+1)}(1-x^2)\Big] + \\ &+a_{2n-3}^{(n)}p^{2n-3} + \cdots + a_2^{(n)}p^2 + a_1^{(n)}(p+1-x^2). \end{aligned} \qquad (38.51)$$

Из (38.33) легко видеть, что коэффициенты $a_{2n-2s}^{(n)}$ и $a_{2n-2s-1}^{(n)}$ есть полиномы степени s от x^2, что и требовалось доказать.

Свойство 6. Функция $R_\nu(x,p)$ при $\nu = n$, $n = \overline{1,\infty}$, есть полином степени $2n$ по p и по x и содержит только четные степени x.

Доказательство. Из (38.24) немедленно следует, что $R_n(x,p)$ при $n > 0$ действительно являются полиномами степени $2n$ по p, причем имеем

$$R_n(x,p) = \sum_{k=0}^{2n} b_k^{(n)}p^k, \qquad (38.52)$$

$$b_1^{(n)} = 0, \qquad b_{k+2}^{(n)} = -\frac{a_k^{(n-1)}}{k+2}, \quad k \geqslant 0. \qquad (38.53)$$

Коэффициент $b_0^{(n)}$ не может быть определен из (38.24). Однако, подставив (38.52) в (38.25), получим

$$b_0^{(n)} = (2+x^2)a_1^{(n)} - 2(1-x^2)a_2^{(n)}. \qquad (38.54)$$

Соотношения (38.53) также следуют из формулы (38.25) при учете условий (38.33). В частности, из (38.39) и (38.40) получим

$$\begin{gathered} b_{2n}^{(n)} = -\frac{1}{(2n)!}, \quad b_{2n-1}^{(n)} = -\frac{r_{n-1}}{(2n-1)!}, \\ 4R_1(x,p) = 2 + 3x^2 - 2p^2. \end{gathered} \qquad (38.55)$$

Пример 38.2. Найти явный вид полиномов $S_2(x,p)$ и $R_2(x,p)$.

Решение. Пользуясь соотношениями (38.39), (38.40), (38.41), найдем коэффициенты $a_4^{(2)}$, $a_3^{(2)}$, $a_2^{(2)}$, а из (38.49) получим $a_1^{(2)}$ и в соответствии с (38.32) запишем

$$\begin{aligned} 8640S_2(x,p) = &72p^4 + 462p^3 + (1582 - 504x^2)p^2 + \\ &+(3262 - 567x^2)(p+1-x^2). \end{aligned} \qquad (38.56)$$

Определив $b_4^{(2)}$, $b_3^{(2)}$, $b_2^{(2)}$ по формулам (38.53), (38.31) и $b_0^{(2)}$ по (38.54), получим

$$\begin{aligned} 576R_2(x,p) = &224 + 420x^2 - 105x^4 - \\ &-120(1-x^2)p^2 - 80p^3 - 24p^4. \end{aligned} \qquad (38.57)$$

Пример 38.3. Найти суммы рядов (38.2) и (38.3) при $\nu = 1, 2$.

Решение. 1. Подставив (38.55) в (38.19), с учетом (38.4) и (38.8) найдем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(mx)}{m^2} \cos[m(æ - x\sin æ)] = 1 + \frac{3}{2}x^2 - (1 - x\cos æ)^2. \quad (38.58)$$

2. Подставив (38.31) в (38.20), с учетом (38.4) и (38.8) получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(mx)}{m^3} \sin[m(æ - x\sin æ)] =$$
$$= \frac{1}{x\sin æ}\Big[\frac{1}{3}(1 - x\cos æ)^2 + \frac{5}{6}(2 - x\cos æ - x^2)\Big]. \quad (38.59)$$

3. Аналогично из (38.56) и (38.57) находятся суммы рядов (38.2), (38.3) при $\nu = 2$.

Свойство 7. Функция $R_\nu(x,p)$ при $\nu = -n$, $n = \overline{0,\infty}$, есть полином степени $4n+1$ от p^{-1}, а $S_{-n}(x,p)$ – полином степени $4n-1$ от p^{-1}.

Доказательство. Введем переменную $q = p^{-1}$. Для производных найдем

$$\frac{d}{dp} = -q^2\frac{d}{dq}, \qquad \frac{d^2}{dp^2} = q^4\frac{d^2}{dq^2} + 2q^3\frac{d}{dp}. \quad (38.60)$$

Перепишем дифференциальные соотношения (38.24)–(38.27), заменив в них n на $-n$, введя переменную q и обозначив штрихом производную по q:

$$q^3 R'_{-n}(x,q) = S_{-(n+1)}(x,q); \quad (38.61)$$

$$q[(1-x^2)q^2 - 2q + 1]S'_{-n}(x,q) + (q-1)S_{-n}(x,q) = \\ = R_{-n}(x,q); \quad (38.62)$$

$$q^4[(1-x^2)q^2 - 2q + 1]S''_{-n}(x,q) + q^3 S_{-n}(x,q) + \\ +3q^4[(1-x^2)q - 1]S'_{-n}(x,q) = S_{-(n+1)}(x,q); \quad (38.63)$$

$$q^4[(1-x^2)q^2 - 2q + 1]R''_{-n}(x,q) + \\ + q^3[3(1-x^2)q^2 - 5q + 2]R'_{-n}(x,q) = R_{-(n+1)}(x,q). \quad (38.64)$$

Если утверждение справедливо относительно полинома $R_{-n}(x,q)$, то, согласно (38.61), оно справедливо и относительно $S_{-n}(x,q)$.

Поскольку, согласно (38.22), имеем

$$R_0(x,q) = q - 1, \quad (38.65)$$

то по формуле (38.64) R_{-1} есть полином пятой степени, R_{-2} – полином девятой степени по q и т.д. Формула (38.64) дает возможность путем дифференцирований восстановить последовательно полиномы $R_{-n}(x,q)$, причем степень следующего полинома увеличивается на четыре, что и доказывает наше утверждение.

Пример 38.4. Найти суммы рядов (38.2), (38.3) при $\nu = -1$.

Решение. Найдем функции $R_{-1}(x,q)$ и $S_{-1}(x,q)$. Из (38.61) и (38.64) при $n = 0$ с учетом (38.65) получим

$$R_{-1}(x,q) = q^3[3(1-x^2)q^2 - 5q + 2], \qquad S_{-1}(x,q) = q^3. \tag{38.66}$$

Подставив (38.66) в (38.19) и (38.20), с учетом соотношения $q = 1/p$ получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 J_m(mx)\cos[m(æ - x\sin æ)] =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x\cos æ)^3}\Big[\frac{3(1-x^2)}{(1-x\cos æ)^2} - \frac{5}{1-x\cos æ} + 2\Big]. \tag{38.67}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} mJ_m(mx)\sin[m(æ - x\sin æ)] = \frac{1}{(1-x\cos æ)^3} \tag{38.68}$$

Свойство 8. Функции $R_\nu(x,q)$ и $S_\nu(x,q)$ при $\nu = -n$, $n = \overline{0,\infty}$, представимы в виде

$$\begin{aligned} R_{-n}(x,q) &= q^{2n+1}\bar{R}_n(x,q), \\ S_{-n}(x,q) &= q^{2n+1}\bar{S}_{n-1}(x,q), \end{aligned} \tag{38.69}$$

где $\bar{R}_n(x,q)$ и $\bar{S}_n(x,q)$ есть полиномы степени $2n$ от $q = p^{-1}$.

Доказательство. Проведем в (38.61)–(38.64) замены (38.69) и получим

$$(2n+1)\bar{R}_n(x,q) + q\bar{R}'_n(x,q) = \bar{S}_n(x,q); \tag{38.70}$$

$$\begin{aligned} &q\big[(1-x^2)q^2 - 2q + 1\big]\bar{S}'_{n-1}(x,q) + \big[(2n+1)(1-x^2)q^2 - \\ &\qquad -(4n+1)q + 2n\big]\bar{S}_{n-1}(x,q) = \bar{R}_n(x,q); \end{aligned} \tag{38.71}$$

$$\begin{aligned} &q^2\big[(1-x^2)q^2 - 2q + 1\big]\bar{S}''_{n-1}(x,q) + q\big[(4n+5)(1-x^2)q^2 - \\ &\qquad -(8n+7) + 2(2n+1)\big]\bar{S}'_{n-1}(x,q) + \\ &\qquad +\big[(2n+1)(2n+3)(1-x^2)q^2 - 2(n+1)(4n+1)q - \\ &\qquad -2n(2n+1)\big]\bar{S}_{n-1}(x,q) = \bar{S}_n(x,q); \end{aligned} \tag{38.72}$$

$$\begin{aligned} &q^2\big[(1-x^2)q^2 - 2q + 1\big]\bar{R}''_n(x,q) + q\big[(4n+5)(1-x^2)q^2 - \\ &\qquad -(8n+9)q + 4(n+1)\big]\bar{R}'_n(x,q) + \\ &\qquad +(2n+1)\big[(2n+3)(1-x^2)q^2 - (4n+5)q + \\ &\qquad +2(n+1)\big]\bar{R}_n(x,q) = \bar{R}_{n+1}(x,q). \end{aligned} \tag{38.73}$$

Из сравнения (38.69) и (38.66) найдем

$$\bar{S}_0(x,q) = 1, \qquad \bar{R}_1(x,q) = 3(1-x^2)q^2 - 5q + 2, \tag{38.74}$$

а из (38.70) или (38.72) получим

$$\bar{S}_1(x,q) = 15(1-x^2)q^2 - 20q + 6. \tag{38.75}$$

Формулы (38.70) и (38.71) [или формулы (38.72) и (38.73), являющиеся их дифференциальными следствиями, что устанавливается прямой проверкой] позволяют с помощью дифференцирования последовательно вычислить $\bar{R}_n(x,q)$ и $\bar{S}_n(x,q)$ в виде полиномов указанной степени по q с коэффициентами, зависящими от x^2. В частности, из (38.71) и (38.75) найдем

$$\begin{aligned}\bar{R}_2(x,p) = 105(1-x^2)^2q^4 - 315(1-x^2)q^3 + \\ +20(17-6x^2)q^2 - 154q + 24,\end{aligned} \tag{38.76}$$

а из (38.76), использовав (38.70), получим

$$\begin{aligned}\bar{S}_2(x,p) = 945(1-x^2)^2q^4 - 2520(1-x^2)q^3 + \\ +140(17-6x^2)q^2 - 924q + 120.\end{aligned} \tag{38.77}$$

Свойство 9. Полиномы $\bar{R}_n(x,q)$ и $\bar{S}_n(x,q)$ представимы в виде

$$\begin{aligned}\bar{S}_n(x,q) &= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\bar{a}_k^{(n)}q^k, \\ \bar{R}_n(x,q) &= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\bar{b}_k^{(n)}q^k,\end{aligned} \tag{38.78}$$

где коэффициенты $\bar{a}_k^{(n)}$ и $\bar{b}_k^{(n)}$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\bar{a}_k^{(n)} = (2n+1+k)\bar{b}_k^{(n)}, \tag{38.79}$$

$$\begin{aligned}\bar{b}_k^{(n+1)} = (2n+k-1)(2n+k+1)(1-x^2)\bar{b}_{k-2}^{(n)} + \\ +(4n+2k+3)(2n+k)\bar{b}_{k-1}^{(n)} + \\ +(2n+k+1)(2n+k+2)\bar{b}_k^{(n)}.\end{aligned} \tag{38.80}$$

Доказательство. Из (38.70) находим (38.79). Из (38.73), считая $\bar{b}_k^{(n)} = 0$ при $k < 0$, $k > 2n$, получим рекуррентные соотношения (38.80), позволяющие вычислить $\bar{b}_s^{(n+1)}$, если известны $\bar{b}_s^{(n)}$.

В принципе, формулы (38.80) позволяют вычислить коэффициенты $\bar{b}_s^{(n)}$ в общем виде, Например, положив в (38.80) $k = 2n+2$, получим

$$\bar{b}_{2n+2}^{(n+1)} = (4n+3)(4n+1)(1-x^2)\bar{b}_{2n}^{(n)}, \tag{38.81}$$

откуда с учетом начального условия $\bar{b}_2^{(1)} = 3(1-x^2)$, вытекающего из (38.74), следует общий вид

$$\bar{b}_{2n}^{(n)} = (4n-1)!!(1-x^2)^n. \tag{38.82}$$

Положив $k = 2n + 1$, из (38.80) находим

$$\bar{b}_{2n+1}^{(n+1)} = 8n(2n+1)(1-x^2)\bar{b}_{2n-1}^{(n)} + (8n+5)(4n+1)\bar{b}_{2n}^{(n)}, \quad (38.83)$$

Подставив сюда (38.82) и рассматривая (38.83) как рекуррентное соотношение для коэффициентов $\bar{b}_{2s-1}^{(s)}$, находим

$$3\bar{b}_{2n-1}^{(n)} = (4n+1)!!(1-x^2)^{n-1}. \quad (38.84)$$

Положив $k = 2n$, из (38.80) с учетом (38.82) и (38.84) получим

$$\begin{aligned} 3\bar{b}_{2n}^{(n+1)} = 3(4n+1)(4n-1)(1-x^2)\bar{b}_{2n-2}^{(n)}+ \\ +4n(8n+3)(4n+1)!!(1-x^2)^{n-1}+ \\ +6(2n+1)(4n+1)!!(1-x^2)^n, \end{aligned} \quad (38.85)$$

Отсюда запишем в общем виде

$$9\bar{b}_{2n-2}^{(n)} = 2n(4n-3)!!(1-x^2)^{n-2}[(8n+1)(2n-1) - 9nx^2]. \quad (38.86)$$

Положив $k = 0$, из (38.80) находим

$$\bar{b}_0^{(n+1)} = (2n+2)(2n+1)\bar{b}_0^{(n)}. \quad (38.87)$$

С учетом начального условия $\bar{b}_0^{(1)} = 2$, следующего из (38.74), получим общую формулу

$$\bar{b}_0^{(n)} = (2n)!. \quad (38.88)$$

При $k = 1$, подставив (38.88), из (38.80) находим

$$\bar{b}_1^{(n+1)} = (2n+3)(2n+2)\bar{b}_1^{(n)} + (4n+5)(2n+1)!. \quad (38.89)$$

Отсюда с учетом начального условия $\bar{b}_1^{(1)} = 5$ следует

$$\bar{b}_1^{(n)} = (2n+1)!r_n, \quad (38.90)$$

где величины r_n определены формулами (38.40). Положив в (38.80) $k = 2$ и подставив (38.88) и (38.90), получим рекуррентную формулу

$$\begin{aligned} \bar{b}_2^{(n+1)} = (2n+4)(2n+3)\bar{b}_2^{(n)}+ \\ +(2n+3)(2n+1)!(1-x^2) + (4n+7)(2n+2)!r_n, \end{aligned} \quad (38.91)$$

из которой находим ($n \geqslant 2$)

$$2\bar{b}_2^{(n)} = (2n+1)!\Big[n(1-x^2) + 2(n+1)\sum_{s=2}^{n}\frac{(4s+3)r_{s-1}}{(s+1)(2s+1)}\Big]. \quad (38.92)$$

Подобные вычисления можно продолжить, однако получающиеся общие формулы становятся все более громоздкими. Выражения (38.80) и (38.79) являются универсальными соотношениями, позволяющими вычислить последовательно все коэффициенты $\bar{b}_s^{(n)}$ и $\bar{a}_s^{(n)}$.

Итак, нами построен алгоритм явного вычисления функций $R_n(x,p)$ и $S_n(x,p)$ при целых n.

39. Ряд типа ряда Каптейна первого рода*

В этом разделе мы будем рассматривать ряды, аналогичные рядам (38.2), (38.3), в которых вместо функции Бесселя стоит ее производная

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J'_m(mx)}{m^{2\nu-1}} \cos m\gamma, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J'_m(mx)}{m^{2\nu}} \sin m\gamma. \tag{39.1}$$

Для исследования свойств этих рядов введем вспомогательные функции $L_\nu(x,p)$, $M_\nu(x,p)$ с помощью соотношений

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J'_m(mx)}{m^{2\nu-1}} \cos m\gamma = \frac{1}{2x} L_\nu(x,p), \tag{39.2}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J'_m(mx)}{m^{2\nu}} \sin m\gamma = \frac{1}{2} M_\nu(x,p) \sin x, \tag{39.3}$$

где p определено соотношением (38.10).

Очевидно, что если мы запишем явный вид функций $L_\nu(x,p)$ и $M_\nu(x,p)$, то мы найдем и суммы рядов (39.1). Поэтому рассмотрим некоторые свойства функций $L_\nu(x,p)$ и $M_\nu(x,p)$ и их связь с функциями $R_\nu(x,p)$ и $S_\nu(x,p)$.

Свойство 1. При любом комплексном ν справедливы соотношения

$$L_\nu(x,p) = x\frac{\partial R_\nu(x,p)}{\partial x} + (1-x^2-p) S_{\nu-1}(x,p); \tag{39.4}$$

$$M_\nu(x,p) = x\frac{\partial S_\nu(x,p)}{\partial x} + \frac{x^2 S_\nu(x,p) - (1-x^2-p)R_\nu(x,p)}{x^2-(1-p)^2}. \tag{39.5}$$

Доказательство. При постоянном γ из соотношений (38.4) и (38.8) запишем

$$\frac{\partial æ}{\partial x} = \frac{\sin æ}{p}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{x^2-1+p}{xp}. \tag{39.6}$$

Продифференцировав (38.19) по x при постоянном γ, найдем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J'_m(mx)}{m^{2\nu-1}} \cos m\gamma = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial R_\nu}{\partial x} + \frac{x^2-1+p}{xp}\frac{\partial R_\nu}{\partial p}\Big).$$

Учтя (38.24) и сравнив с (39.2), получим (39.4). Аналогично, продифференцировав по x при постоянном γ соотношение (38.20) и использовав (39.6) и (38.25), придем к (39.5).

Свойство 2. Справедливы соотношения

$$L'_\nu(x,p) = -pM_{\nu-1}(x,p), \tag{39.7}$$

$$[x^2-(1-p)^2]M'_\nu(x,p) + (1-p)M_\nu(x,p) = pL_\nu(x,p), \tag{39.8}$$

$$p[x^2-(1-p)^2]M''_\nu(x,p) + (1-x^2+p-2p^2)M'_\nu(x,p)-$$

$$-M_\nu(x,p) = -p^3 M_{\nu-1}(x,p), \tag{39.9}$$

$$p[x^2-(1-p)^2]L''_\nu(x,p) + (1-x^2-p)L'_\nu(x,p) = \\ = -p^3 L_{\nu-1}(x,p). \tag{39.10}$$

Доказательство аналогично доказательству свойства 2 предыдущего раздела (штрихом обозначена производная по p).

Пример 39.1. Найти суммы рядов (39.1) при $\nu = 0, \pm 1$.

Решение. Найдем явный вид функций $L_\nu(x,p)$, $M_\nu(x,p)$ при $\nu = 0, \pm 1$. Пользуясь выражениями (38.22), (38.29), (38.31), (38.55) и формулами (39.7), (39.8), найдем

$$L_0(x,p) = (1-x^2-p)p^{-3}, \quad M_0(x,p) = p^{-1}; \tag{39.11}$$

$$2L_1(x,p) = 2+x^2-2p, \quad 2M_1(x,p) = 1-x^2+p; \tag{39.12}$$

$$L_{-1}(x,p) = 15(1-x^2)^2p^{-7} - 35(1-x^2)p^{-6} + \\ +(26-12x^2)p^{-5} - 6p^{-4}, \tag{39.13}$$

$$M_{-1}(x,p) = 3(1-x^2)p^{-5} - 2p^{-4} = p^{-4}[3(1-x^2)p^{-1} - 2].$$

Следовательно, получим суммы

$$\sum_{m=1}^{\infty} mJ'_m(mx)\cos m(æ - x\sin æ) = \frac{1}{2x}\frac{x\cos æ - x^2}{(1-x\cos æ)^3};$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} J'_m(mx)\sin m(æ - x\sin æ) = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{1-x\cos æ};$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J'_m(mx)}{m}\cos m(æ - x\sin æ) = \frac{1}{4x}(x^2+2x\cos æ);$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J'_m(mx)}{m^2}\sin m(æ - x\sin æ) = \frac{1}{4}(2-x^2-\cos æ)\sin x.$$

Аналогично из (39.13) находим суммы рядов (39.1) при $\nu = -1$.

Свойство 3. Для $\nu = n$, $n = \overline{1,\infty}$, функции $L_n(x,p)$ и $M_n(x,p)$ есть полиномы по p степени $2n-1$, а для $\nu = -n$, $n = \overline{0,\infty}$, функции $L_{-n}(x,p)$ есть полиномы степени $4n+3$ по p^{-1}, функции $M_n(x,p)$ – полиномы степени $4n+1$ по p^{-1}.

Доказательство. При $n = 0, \pm 1$ справедливость утверждения вытекает из формул (39.11)–(39.13). Для $\nu = -n$, $n = \overline{2,\infty}$, это следует из формул (39.9), (39.10). Для $\nu = n$, $n = \overline{2,\infty}$, доказательство аналогично доказательству свойства 3 для функций $R_n(x,p)$, $S_n(x,p)$. В частности, проведя замену $q = p^{-1}$ и использовав (38.60), получим соотношения

$$q^3 L'_{-n}(x,q) = M_{-(n+1)}(x,q); \tag{39.14}$$

$$q[(1-x^2)q^2 - 2q + 1]M'_{-n}(x,q) + \\ +(q-1)M_{-n}(x,q) = L_{-n}(x,q); \tag{39.15}$$

$$q^4[(1-x^2)q^2 - 2q + 1]M''_{-n}(x,q) + \\ +3q^4[(1-x^2)q - 1]M'_{-n}(x,q) + \\ +q^3 M_{-n}(x,q) = M_{-(n+1)}(x,q); \tag{39.16}$$

$$q^4[(1-x^2)q^2 - 2q + 1]L''_{-n}(x,q) + \\ +q^3[3(1-x^2)q^2 - 5q + 2]L'_{-n}(x,q) = L_{-(n+1)}(x,q), \tag{39.17}$$

аналогичные (38.61)–(38.64). Здесь штрихом обозначена производная по q.

Пример 39.2. Из свойства 3 следует, что для $\nu = n$, $n = \overline{1,\infty}$, полиномы $L_n(x,p)$ и $M_n(x,p)$ можно представить в виде

$$M_n(x,p) = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k^{(n)} p^k, \tag{39.18}$$

$$L_n(x,p) = \sum_{k=0}^{2n-1} d_k^{(n)} p^k. \tag{39.19}$$

Найти рекуррентные соотношения для коэффициентов $c_k^{(n)}$ и $d_k^{(n)}$ и связь между ними.

Решение. Из формул (39.7), (39.11) находим связь, аналогичную (38.53):

$$d_1^{(1)} = -1, \quad d_1^{(n)} = 0; \qquad (k+2)d_{k+2}^{(n)} = -c_k^{(n-1)}, \tag{39.20}$$

где $n > 1$, $k \geqslant 0$. Для $d_0^{(n)}$ из (39.8) найдем аналог (38.54)

$$d_0^{(n)} = (2+x^2)c_1^{(n)} - 2(1-x^2)c_2^{(n)}. \tag{39.21}$$

Для коэффициентов $c_k^{(n)}$ из (39.9) получим аналог (38.33)

$$(k-1)[(k+1)(1-x^2)c_{k+1}^{(n)} - (2k+1)c_k^{(n)} + kc_{k-1}^{(n)}] = c_{k-3}^{(n-1)}, \tag{39.22}$$

причем, в отличие от (38.34), считаем

$$c_k^{(n)} = 0, \qquad k < 0, \quad k > 2n-1. \tag{39.23}$$

Положив, в частности, в (39.22) $k = 2n$, получим

$$2n(2n-1)c_{2n-1}^{(n)} = c_{2n-3}^{(n-1)}.$$

Из (39.12) следует $c_1^{(1)} = 1/2$, откуда найдем

$$c_{2n-1}^{(n)} = \frac{1}{(2n)!}, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{39.24}$$

В (39.22) положим $k = 2n-1$, учтем (39.23) и (39.24) и запишем

$$(2n-1)(2n-2)c_{2n-2}^{(n)} = c_{2n-4}^{(n-1)} + \frac{(2n-2)(4n-1)}{(2n)!}. \tag{39.25}$$

Из (39.12) следует $2c_0^{(1)} = 1 - x^2$, откуда немедленно получим

$$(2n-1)!c_{2n-2}^{(n)} = r_n - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2n+1}, \tag{39.26}$$

где r_n определено формулой (38.40). Подобные вычисления могут быть продолжены и далее, однако формулы становятся всё более громоздкими и лучше пользоваться непосредственно соотношениями (39.22).

Свойство 4. При $n = \overline{1,\infty}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} M_{-n}(x,q) &= q^{2(n+1)}\bar{M}_n(x,q), \\ L_{-n}(x,q) &= q^{2(n+1)}\bar{L}_{n+1}(x,q), \end{aligned} \tag{39.27}$$

где $\bar{M}_n(x,q)$, $\bar{L}_n(x,q)$ — полиномы по q степени $2n-1$.

Доказательство. Из (39.13) следует, что при $n = 1$ соотношения (39.27) справедливы и

$$\begin{aligned} &\bar{M}_1 = 3(1-x^2)q - 2, \\ &\bar{L}_2 = 15(1-x^2)^2q^3 - 35(1-x^2)q^2 + (26-12x^2)q - 6. \end{aligned} \tag{39.28}$$

Подставив в формулы (39.14), (39.15) выражения (39.27), найдем

$$2n\bar{L}_n(x,q) + q\bar{L}_n'(x,q) = \bar{M}_n(x,q), \tag{39.29}$$

$$\begin{aligned} &[(1-q)^2 - x^2q^2][2(n+1)\bar{M}_n(x,q) + q\bar{M}_n'(x,q)] + \\ &\quad + (q-1)\bar{M}_n(x,q) = \bar{L}_{n+1}(x,q). \end{aligned} \tag{39.30}$$

Из (39.29) следует, что $\bar{M}_n(x,q)$ вычисляется, если $\bar{L}_n(x,q)$ известно, причем если $\bar{L}_n(x,q)$ — полином по q, то и $\bar{M}_n(x,q)$ — полином той же степени по q. Из (39.30) следует, что $\bar{L}_{n+1}(x,q)$ определяется, если известно $\bar{M}_n(x,q)$, причем $\bar{L}_{n+1}(x,q)$ является полиномом по q, степень которого на два превышает степень $\bar{M}_n(x,q)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, при $\nu = n$, $n = \overline{-\infty,\infty}$, вычисление функций $L_n(x,p)$ и $M_n(x,p)$ возможно в явном виде.

40. Ряд Каптейна первого рода. Специальный случай*

В этом разделе мы рассмотрим ряды Каптейна вида

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(mx)}{m^{2\nu}}, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J'_m(mx)}{m^{2\nu-1}}, \quad |x|<1. \tag{40.1}$$

Аналогично предыдущим разделам введем вспомогательные функции $R_\nu(x)$ и $L_\nu(x)$:

$$\frac{x}{2}R_\nu(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(mx)}{m^{2\nu}}, \qquad \frac{1}{2}L_\nu(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J'_m(mx)}{m^{2\nu-1}}. \tag{40.2}$$

Рассмотрим простейшие свойства функций $R_\nu(x)$ и $L_\nu(x)$ и найдем их связь с функциями $R_\nu(x,p)$ (38.19) и $L_\nu(x,p)$ (39.2).

Свойство 1. Справедливы соотношения

$$xR_\nu(x) = R_\nu(x, 1-x), \qquad xL_\nu(x) = L_\nu(x, 1-x). \tag{40.3}$$

Доказательство. Из (38.19) и (39.2) при $\gamma = 0$ имеем

$$xR_\nu(x) = R_\nu(x,p)\big|_{\gamma=0}, \qquad xL_\nu(x) = L_\nu(x,p)\Big|_{\gamma=0},$$

но $\gamma = 0$ соответствует æ $= 0$ или $p = 1 - x$. Таким образом, приходим к (40.3).

Пример 40.1. Найти суммы рядов (40.1) при $\nu = 0, \pm 1$.

Решение. Вычислим $R_\nu(x)$ и $L_\nu(x)$ при $\nu = 0, \pm 1$. Из выражений (38.22), (38.55), (38.66), (39.11)–(39.13) найдем

$$\begin{array}{rl} R_0(x) = (1-x)^{-1}, & L_0(x) = (1-x)^{-2}, \\ R_1(x) = 1 + x/4, & L_1(x) = 1 + x/2, \\ R_{-1}(x) = (1-x)^{-4}, & L_{-1}(x) = (1+3x)(1-x)^{-5}. \end{array} \tag{40.4}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} J_m(mx) &= \frac{x}{2}\frac{1}{1-x}, & \sum_{m=1}^{\infty} mJ'_m(mx) &= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}; \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(mx)}{m^2} &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}, & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J'_m(mx)}{m} &= \frac{x}{4} + \frac{1}{2}; \\ \sum_{m=1}^{\infty} m^2 J_m(mx) &= \frac{1}{2}\frac{x}{(1-x)^4}, & \sum_{m=1}^{\infty} m^3 J'_m(mx) &= \frac{1}{2}\frac{1+3x}{(1-x)^5}. \end{aligned}$$

Пример 40.2. Найти три первых члена разложения функций $R_\nu(x)$ и $L_\nu(x)$ в ряд Тейлора по x при произвольных ν.

Решение. Для функций Бесселя справедливо разложение в ряд

$$J_m(mx) = \left(\frac{mx}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+m+1)} \left(\frac{mx}{2}\right)^k, \tag{40.5}$$

подставив которое в формулы (40.2) и ограничившись слагаемыми, содержащими переменную x в степени не выше третьей, найдем

$$\begin{aligned} R_\nu(x) &= 1 + x2^{-2\nu} + x^2(9^{1-\nu} - 1)/8 + \ldots \\ L_\nu(x) &= 1 + x2^{1-2\nu} + 3x^2(9^{1-\nu} - 1)/8 + \ldots \end{aligned} \tag{40.6}$$

Отсюда, в частности, следует

$$R_\nu(0) = L_\nu(0) = 1. \tag{40.7}$$

Свойство 2. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &L_\nu(x) = R_\nu(x) + xR'_\nu(x), \\ &(1 - x^2)R_{\nu-1}(x) = L_\nu(x) + xL'_\nu(x), \end{aligned} \tag{40.8}$$

$$R_\nu(x) = -\int\limits_0^1 R_{\nu-1}(xt)(1 - x^2t^2)\ln t\, dt, \tag{40.9}$$

$$L_\nu(x) = -\int\limits_0^1 \Big[\frac{x^2}{2}(1 - t^2) + \ln t\Big] L_{\nu-1}(xt)dt, \tag{40.10}$$

$$\begin{aligned} &x^2R''_\nu(x) + 3xR'_\nu(x) + R_\nu(x) = (1 - x^2)R_{\nu-1}(x), \\ &x^2(1 - x^2)L''_\nu(x) + x(3 - x^2)L'_\nu(x) + (1 + x^2)L_\nu(x) = \\ &\qquad = (1 - x^2)^2 L_{\nu-1}(x). \end{aligned} \tag{40.11}$$

Доказательство. 1. Продифференцировав (40.2) по x и учтя уравнение Бесселя

$$J''_m(mx) = \frac{1 - x^2}{x^2} J_m(mx) - \frac{1}{mx} J'_m(mx), \tag{40.12}$$

получим (40.8).

2. Из соотношений (40.8) с учетом (40.7) получим

$$R_\nu(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x L_\nu(t)dt = \int\limits_0^1 L_\nu(xt)dt, \tag{40.13}$$

$$L_\nu(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x (1 - t^2)R_{\nu-1}(t)dt = \int\limits_0^1 (1 - x^2t^2)R_{\nu-1}(xt)dt. \tag{40.14}$$

Подставив (40.14) в (40.13) и проинтегрировав по частям, получим рекуррентное соотношение (40.9). Аналогично для $L_\nu(x)$ получим (40.10).

3. Повторное дифференцирование (40.8) приводит к уравнениям (40.11).

Легко проверить, что (40.9) и (40.10) являются решениями этих уравнений.

Свойство 3. Справедливы следующие разложения:

$$R_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(\nu)} x^k, \qquad L_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) C_k^{(\nu)} x^k, \tag{40.15}$$

$$C_k^{(\nu)} = \frac{1}{2^k} \sum_{s=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^s (k+1-2s)^{k+1-2\nu}}{s!(k+1-s)!},$$

где $[k/2]$ — целая часть числа $k/2$.

Доказательство непосредственно следует из (40.5).

Пример 40.3. Найти суммы рядов (40.1) при $\nu = 2$.

Решение. Найдем явный вид функций $R_2(x)$ и $L_2(x)$. Положив $\nu = 2$ в (40.9) и в (40.10), после вычисления интегралов получим

$$\begin{aligned} R_2(x) &= 1 + \frac{x}{16} - \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{64}; \\ L_2(x) &= 1 + \frac{x}{8} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{16}. \end{aligned} \tag{40.16}$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(mx)}{m^4} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{32} - \frac{x^3}{18} - \frac{x^4}{128};$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J'_m(mx)}{m^3} = \frac{1}{2} + \frac{x}{16} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{32}.$$

Свойство 4. Функции $R_n(x)$ и $L_n(x)$ $(n = \overline{1, \infty})$ есть полиномы степени $2n-1$ по x.

Доказательство. Из (40.13) следует, что если $L_n(x)$ есть полином некоторой степени по x, то $R_n(x)$ также есть полином той же степени по x. Из (40.14) следует, что если $R_{n-1}(x)$ есть полином по x степени s, то $L_n(x)$ — полином по x степени $s+2$. Но из (40.4) следует, что $R_1(x)$ и $L_1(x)$ есть полиномы первой степени, что и доказывает утверждение. Формулы (40.9) и (40.10) позволяют рекурсией осуществить построение всех полиномов.

Свойство 5. Справедливы соотношения

$$R_{-n}(x) = \frac{1+3xA_{n-2}(x)}{(1-x)^{3n+1}}, \quad L_{-n}(x) = \frac{1+3xB_{n-1}(x)}{(1-x)^{3n+2}}, \tag{40.17}$$

где $n = \overline{0,\infty}$, а $A_n(x)$ и $B_n(x)$ — полиномы по x степени n (при $n < 0$ положим $A_n(x) = B_n(x) = 0$).

Доказательство. При $n = 0, 1$ из (40.4) следует, что (40.17) справедливо, причем $B_0(x) = 1$. Подставив (40.17) в (40.12), получим дифференциальные связи

$$\begin{gathered} B_n(x) = n+1+[2+(3n+2)x]A_{n-1}(x)+ \\ +x(1-x)A'_{n-1}(x), \end{gathered} \tag{40.18}$$

$$\begin{gathered} (1+x)A_n(x) = n+1+[2+3(n+1)x]B_n(x)+ \\ +x(1-x)B'_n(x), \end{gathered} \tag{40.19}$$

Из (40.19) следует, что если $A_n(x)$ и $B_n(x)$ — полиномы, то степени их одинаковы, а из (40.8) следует, что $B_n(x)$ имеет степень на единицу больше, чем $A_{n-1}(x)$, и восстанавливается по $A_{n-1}(x)$, что и доказывает свойство. В частности, из (40.18) и (40.19) последовательно находим

$$\begin{gathered} B_0(x) = 1, \quad A_0(x) = 3, \quad B_1(x) = 8+15x, \\ A_1(x) = 18+75x, \quad B_2(x) = 39+369x+525x^2, \\ A_2(x) = 81+1377x+3675x^2. \end{gathered} \tag{40.20}$$

Пример 40.4. Вычислить $A_n(0)$, $B_n(0)$; $A_n(1)$, $B_n(1)$.

Решение. Положив в (40.18) и в (40.19) $x = 0, 1$, найдем

$$\begin{gathered} B_n(0) = n+1+2A_{n-1}(0), \quad A_n(0) = n+1+2B_n(0); \\ B_n(1) = n+1+(3n+4)A_{n-1}(1), \\ 2A_n(1) = n+1+(3n+5)B_n(1); \end{gathered} \tag{40.21}$$

Отсюда следуют рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} &B_n(0) = 3n+1+4B_{n-1}(0), \\ &2B_n(1) = 3n^2+6n+2+(3n+4)(3n+2)B_{n-1}(1), \\ &B_0(0) = B_0(1) = 1. \end{aligned} \tag{40.22}$$

Разрешив эти рекуррентные соотношения, получим

$$3B_n(0) = 2\cdot 4^{n+1} - 3n - 5, \quad B_n(1) = \frac{2(3n+4)!}{6^{n+2}(n+1)!} - \frac{1}{3}. \tag{40.23}$$

Из (40.21) найдем

$$3A_n(0) = 4^{n+2} - 3n - 7, \quad A_n(1) = \frac{(3n+5)!}{6^{n+2}(n+1)!} - \frac{1}{3}. \tag{40.24}$$

Свойство 6. Справедливы соотношения

$$\begin{gathered} R_{-n}(x)=q^{2n+2}[1+2(q-1)Q_{n-2}(q)], \\ L_{-n}(x)=q^{2n+2}[1+2(q-1)P_{n-2}(q)], \\ q=(1-x)^{-1} \qquad n=\overline{1,\infty}, \end{gathered} \tag{40.25}$$

где $P_n(q)$, $Q_n(q)$ — полиномы степени n по q ($Q_{-1}=0$).

Доказательство. Из (40.8) найдем

$$\begin{aligned} P_n(q)=n+2+[2+(2n+5)(q-1)]Q_{n-1}(q)+ \\ +q(q-1)]Q'_{n-1}(q), \end{aligned} \tag{40.26}$$

$$\begin{aligned} (2q-1)Q_n(q)=n+1+[2+(2n+5)(q-1)]P_n(q)+ \\ +q(q-1)]P'_n(q), \end{aligned} \tag{40.27}$$

где штрихом обозначена производная по q. Из (40.27) следует, что если $P_n(q)$ и $Q_n(q)$ — полиномы, то степени их одинаковы, а из (40.26) имеем, что степень $P_n(q)$ на единицу больше, чем степень $Q_{n-1}(q)$, причем $P_n(q)$ восстанавливается по $Q_{n-1}(q)$, после чего восстанавливается и $Q_n(q)$. Из (40.4) следует

$$\begin{gathered} R_0(q)=q, \quad L_0(q)=q^2, \quad R_{-1}(q)=q^4, \\ L_{-1}(q)=q^4(4q-3), \end{gathered} \tag{40.28}$$

что совпадает при $n=1$ с (40.25), если считать $Q_{-1}=0$, $P_0=2$. Тогда из (40.26) и (40.27) последовательно восстановим

$$\begin{gathered} P_0(q)=2, \quad Q_0(q)=5, \quad P_1(q)=35q-22, \\ Q_1(q)=140q-112, \quad P_2(q)=4(350q^2-532q+197), \\ Q_2(q)=7700q^2-13090q+5513. \end{gathered} \tag{40.29}$$

Пример 40.5. Вычислить $P_n(0)$, $Q_n(0)$; $P_n(1)$, $Q_n(1)$.

Решение. Из (40.26) и (40.27) при $q=0,1$ найдем

$$\begin{aligned} &P_n(0)=n+2-(2n+3)Q_{n-1}(0), \\ &P_n(1)=n+2+2Q_{n-1}(1); \\ &Q_n(0)=(2n+3)P_n(0)-n-1, \\ &Q_n(1)=n+1+2P_n(1). \end{aligned} \tag{40.30}$$

Отсюда следуют рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} &P_n(0)=2(n+1)^2-(2n+1)(2n+3)P_{n-1}(0), \\ &P_n(1)=3n+2+4P_{n-1}(1), \\ &P_0(0)=P_0(1)=2. \end{aligned} \tag{40.31}$$

Разрешив эти рекуррентные соотношения, получим

$$2P_n(0)=1+(-1)^n(2n+3)[(2n+1)!]^2,$$

$$2Q_n(0) = 1 + (-1)^n[(2n+3)!!], \tag{40.32}$$
$$P_n(1) = 4^{n+1} - 2 - n, \quad Q_n(1) = 2\cdot 4^{n+1} - 3 - n.$$

Свойство 7. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2m}(2mx)}{(2m)^{2n}} &= \frac{x}{4}[R_n(x) - R_n(-x)], \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J'_{2m}(2mx)}{(2m)^{2n-1}} &= \frac{1}{4}[L_n(x) - L_n(-x)]. \end{aligned} \tag{40.33}$$

Доказательство. В (40.2) заменим x на $-x$ и учтем

$$J_m(-x) = (-1)^m J_m(x), \qquad J'_m(-x) = (-1)^{m+1} J'_m(x),$$

тогда получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{J_m(mx)}{m^{2n}} = -\frac{x}{2}R_n(-x);$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{J'_m(mx)}{m^{2n-1}} = -\frac{1}{2}L_n(-x).$$

Складывая эти выражения с (40.2), получим (40.33).

41. Ряд Каптейна второго рода*

♦ Ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m^{\nu,\mu} J_{(\nu+m)/2}\Big(\frac{\nu+\mu+2m}{2}x\Big) J_{(\mu+m)/2}\Big(\frac{\nu+\mu+2m}{2}x\Big) \tag{41.1}$$

называется рядом Каптейна второго рода.

В этом разделе мы ограничимся рассмотрением рядов вида

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m^2(mx)}{m^{2n}}, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[J'_m(mx)]^2}{m^{2n}}; \quad |x| < 1. \tag{41.2}$$

Для исследования свойств этих рядов введем вспомогательные функции $W_n(t)$ и $V_n(t)$ соотношениями

$$W_n(t) = 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m^2(mx)}{m^{2n}}, \qquad V_n(t) = 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{[J'_m(mx)]^2}{m^{2n}}, \tag{41.3}$$

где $t = x^2$.

Пример 41.1. Найти два первых ненулевых члена разложения функций $W_n(t)$ и $V_n(t)$ в ряд Тейлора по t.

Решение. Воспользовавшись рядом (40.5), для первых двух членов разложения получим

$$\begin{aligned} W_n(t) &= t\Big[1 + \Big(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{4}\Big)t + \ldots\Big], \\ V_n(t) &= 1 + \Big(\frac{1}{4^n} - \frac{3}{4}\Big)t + \ldots \end{aligned} \tag{41.4}$$

Свойство 1. Справедливы соотношения

$$W_n(t) = \frac{4^{n+1}}{\pi}\int\limits_0^\pi \Big[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2m}(2mx\sin\varphi)}{(2m)^{2n}}\Big]d\varphi =$$

$$= \frac{4^n x}{\pi}\int\limits_0^\pi [R_n(x\sin\varphi) - R_n(-x\sin\varphi)]\sin\varphi\, d\varphi. \tag{41.5}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Неймана (3.33)

$$J_m^2(mx) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi J_{2m}(2mx\sin\varphi)d\varphi. \tag{41.6}$$

Подставив (41.6) в (40.33) и изменив порядок суммирования и интегрирования, получим (41.5).

Свойство 2. Справедливы соотношения

$$tV_n'(t) + V_n(t) = (1-t)W_n'(t), \tag{41.7}$$

$$2t[tW_n''(t) + W_n'(t)] = tV_{n-1}(t) + (1-t)W_{n-1}(t), \tag{41.8}$$

$$V_n(t) = \frac{1-t}{t}W_n(t) + \frac{1}{t}\int\limits_0^t W_n(y)dy =$$

$$= \frac{1-t}{t}W_n(t) + \int\limits_0^1 W_n(ty)dy, \tag{41.9}$$

$$2W_n(t) = t\int\limits_0^1 [W_{n-1}(yt) - V_{n-1}(yt)]\ln y\, dy -$$

$$- \int\limits_0^1 y^{-1}W_{n-1}(yt)\ln y\, dy. \tag{41.10}$$

Здесь штрихом обозначена производная по t.

Доказательство. 1. Продифференцировав (41.3) по t с помощью формулы (40.12), получим соотношения (41.7) и (41.8).

2. С учетом начального условия $V_n(0) = 1$, следующего из (41.3), из (41.7) получим (41.9). Аналогично из (41.8) получим (41.10).

Пример 41.2. Найти суммы рядов (41.2) при $n = 0, \pm 1$.

Решение. Найдем явный вид функций $V_n(t)$ и $W_n(t)$ при $n = 0, \pm 1$. Из (40.4) и (41.5) после вычисления интегралов запишем

$$\begin{gathered} W_0(t) = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{1-t}} - 1\Big), \\ W_1(t) = t, \\ W_{-1} = \frac{t(1+t/4)}{(1-t)^{7/2}} = (q-1)q^{3/2}\Big[1 + \frac{5}{4}(q-1)\Big], \end{gathered} \tag{41.11}$$

где введена переменная

$$q = (1-t)^{-1}. \tag{41.12}$$

Воспользовавшись соотношением (41.9), получим

$$\begin{gathered} V_0(t) = 2(1 - \sqrt{1-t})t^{-1}, \\ V_1(t) = 1 - t/2, \\ V_{-1} = \frac{(1+3t/4)}{(1-t)^{5/2}} = q^{3/2}\Big[1 + \frac{7}{4}(q-1)\Big]. \end{gathered} \tag{41.13}$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{\infty} J_m^2(mx) = \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{41.14}$$

$$\begin{gathered} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m^2(mx)}{m^2} = \frac{x^2}{4}; \\ \sum_{m=1}^{\infty} m^2 J_m^2(mx) = \frac{x^2}{16}\frac{4+x^2}{(1-x^2)^{7/2}}; \end{gathered} \tag{41.15}$$

$$\begin{gathered} \sum_{m=1}^{\infty} [J'_m(mx)]^2 = \frac{1}{2x^2}(1 - \sqrt{1-x^2}); \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}[J'_m(mx)]^2 = -\frac{x^2}{8} + \frac{1}{4}; \\ \sum_{m=1}^{\infty} m^2[J'_m(mx)]^2 = \frac{1}{16}\frac{4+3x^2}{(1-x^2)^{5/2}}. \end{gathered} \tag{41.16}$$

Пример 41.3. Найти соотношение, связывающее функции $\bar V_n(t)$ и $\bar W_n(t)$, если они определяются формулами

$$W_n(t) = t[1 - t\bar W_{n-2}(t)], \qquad V_n(t) = 1 - t\bar V_{n-2}(t), \tag{41.17}$$

Решение. Сравнив (41.17) с (41.4), находим

$$4\bar{W}_n(0) = 1 - 4^{-n-1}, \qquad 4\bar{V}_n(0) = 3 - 4^{-n}. \tag{41.18}$$

Подставив (41.17) в (41.7) и (41.8) и заменив индекс суммирования n на $n+1$, получим

$$2\bar{V}_n(t) + t\bar{V}_n'(t) = \\ = 1 + 2(1-t)\bar{W}_{n-1}(t) + t(1-t)\bar{W}_{n-1}'(t), \tag{41.19}$$

$$8\bar{W}_n(t) + 10t\bar{W}_n'(t) + 2t^2\bar{W}_n''(t) = \\ = 1 + \bar{V}_n(t) + (1-t)\bar{W}_{n-1}'(t). \tag{41.20}$$

Поскольку, согласно (41.18), функции $\bar{V}_n(t)$ и $\bar{W}_n(t)$ при $t=0$ конечны, отсюда вытекают соотношения

$$\bar{V}_n(t) = \frac{1}{2} + (1-t)\bar{W}_{n-1}(t) + \frac{1}{t^2}\int\limits_0^t y^2\bar{W}_{n-1}(y)dy = \\ = \frac{1}{2} + (1-t)\bar{W}_{n-1}(t) + t\int\limits_0^1 y^2\bar{W}_{n-1}(yt)dy; \tag{41.21}$$

$$\bar{W}_n(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{t^2}\int\limits_0^t y[(1-y)\bar{W}_{n-1}(y) + \bar{V}_n(y)](\ln y - \ln t)dy = \\ = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y[(1-ty)\bar{W}_{n-1}(ty) + \bar{V}_n(ty)]\ln y\,dy. \tag{41.22}$$

Следовательно, $\bar{V}_n(t)$ однозначно восстанавливается по функции $\bar{W}_{n-1}(t)$, после чего однозначно восстанавливается и функция $\bar{W}_n(t)$, т.е. соотношения (41.21), (41.22) являются рекуррентными.

Пример 41.4. Доказать, что при целом $n \geqslant 0$ функции $\bar{V}_n(t)$ и $\bar{W}_n(t)$ являются полиномами степени n по t.

Решение. Из определения (41.17) при $n=1$ с использованием (41.11) найдем

$$\bar{W}_{-1}(t) = 0. \tag{41.23}$$

Отсюда с помощью (41.21) и (41.22) получим

$$\bar{V}_0(t) = \frac{1}{2}, \qquad \bar{W}_0(t) = \frac{3}{16}; \\ 16\bar{V}_1(t) = 11 - 2t, \qquad 576\bar{W}_1(t) = 5(27-2t), \tag{41.24}$$

что, в частности, согласуется с формулами (41.18). Таким образом, при $n = 0, 1$ утверждение верно. Но из (41.21) и (41.22) следует, что если $\bar{W}_{n-1}(t)$ есть полином по t степени $n-1$, то $\bar{V}_n(t)$ и $\bar{W}_n(t)$ есть полиномы по t степени n.

Пример 41.5. Представив полиномы $\bar{W}_n(t)$ и $\bar{V}_n(t)$, $n = \overline{0,\infty}$, в виде

$$\bar{W}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} t^k, \qquad \bar{V}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} t^k, \tag{41.25}$$

найти соотношение, связывающее коэффициенты $a_k^{(n)}$ и $b_k^{(n)}$.

Решение. Для удобства будем считать, что $a_k^{(n)} = b_k^{(n)} = 0$ при $k < 0$, $k > n$. Подставим (41.25) в (41.19) и (41.20) и найдем

$$\begin{aligned} &(k+2)b_k^{(n)} = (k+2)a_k^{(n-1)} - (k+1)a_{k-1}^{(n-1)}, \\ &2(k+2)^2 a_k^{(n)} = b_k^{(n)} + a_k^{(n-1)} - a_{k-1}^{(n-1)} \end{aligned} \tag{41.26}$$

с вытекающими из (41.18) начальными условиями

$$4a_0^{(n)} = 1 - 4^{-n-1}, \qquad 4b_0^{(n)} = 3 - 4^{-n}, \tag{41.27}$$

что также согласуется с (41.26). Из (41.26) находим

$$2(k+2)^3 a_k^{(n)} = 2(k+2)a_k^{(n-1)} - (2k+3)a_{k-1}^{(n-1)}. \tag{41.28}$$

Отсюда коэффициенты $a_k^{(n)}$ восстанавливаются по коэффициентам $a_s^{(n-1)}$, после чего из (41.26) восстанавливаются и $b_k^{(n)}$. В частности, при $k = n$ имеем

$$2(n+2)^3 a_n^{(n)} = -(2n+3)a_{n-1}^{(n-1)}. \tag{41.29}$$

Из этого рекуррентного соотношения с учетом (41.27) следует

$$a_n^{(n)} = (-1)^n \frac{(2n+3)!4^{-n-1}}{(n+2)^3[(n+1)!]^4}. \tag{41.30}$$

Тогда для $b_n^{(n)}$ из (41.26) найдем

$$b_n^{(n)} = (-1)^n \frac{(2n+1)!4^{-n}}{(n+2)(n+1)^2(n!)^4}. \tag{41.31}$$

Положив в (41.26) $k = 1$, с учетом (41.27) получим

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^6 a_1^{(n)} &= 2 \cdot 4^{1-n} - 3^{1-2n} - 5, \\ 3 \cdot 2^6 b_1^{(n)} &= 2 \cdot 4^{3-n} - 3^{3-2n} - 37. \end{aligned} \tag{41.32}$$

Свойство 3. Справедливы соотношения

$$G_n(q) = F_n(q) + \frac{\sqrt{q}}{q-1} \int_1^q y^{-3/2}(y-1)F_n(y)dy, \tag{41.33}$$

$$\widehat{A}^3 F_n(q) = 8\frac{d}{dq}(q-1)F_{n-1}(q), \tag{41.34}$$

где обозначено
$$\widehat{A} = 3q - 1 + 2q(q-1)\frac{d}{dq}, \tag{41.35}$$
а функции $G_n(q)$ и $F_n(q)$ определяются соотношениями
$$W_n(q) = \sqrt{q}(q-1)F_n(q), \quad V_n(q) = \sqrt{q}G_n(q). \tag{41.36}$$

Доказательство. Проведя в (41.7) и (41.8) замену переменных (41.12), получим (штрихом далее обозначаем производную по q)
$$q(q-1)V_n'(q) + V_n(q) = qW_n'(q), \tag{41.37}$$
$$2q^2(q-1)\frac{d}{dq}q(q-1)\frac{dW_n(q)}{dq} = \\ = (q-1)V_{n-1}(q) + W_{n-1}(q). \tag{41.38}$$

Из (41.37) следует аналог формулы (41.9)
$$(q-1)V_n(q) = W_n(q) + q\int\limits_0^q y^{-2}W_n(y)dy. \tag{41.39}$$

С помощью этого выражения приведем (41.38) к виду
$$2q^2(q-1)\frac{d}{dq}q(q-1)\frac{dW_n(q)}{dq} = \\ = 2W_{n-1}(q) + q\int\limits_0^q y^{-2}W_n(y)dy. \tag{41.40}$$

Поделив обе части этого выражения на q и продифференцировав, получим
$$2q^2(q-1)\frac{d}{dq}q(q-1)\frac{d}{dq}q(q-1)\frac{dW_n(q)}{dq} = \\ = 2qW_{n-1}'(q) - W_n(y) = 2q^{3/2}\frac{d}{dq}q^{-1/2}W_{n-1}(q).$$

Таким образом, возникает рекуррентное соотношение
$$q^{1/2}\frac{d}{dq}q(q-1)\frac{d}{dq}q(q-1)\frac{dW_n(q)}{dq} = \frac{d}{dq}q^{-1/2}W_{n-1}(q). \tag{41.41}$$

Произведем замену функций $V_n(q)$ и $W_n(q)$ на $F_n(q)$ и $G_n(q)$, согласно (41.36), и получим (41.33) и (41.34).

$\Diamond$ Из (41.34) также можно получить
$$8F_{n-1}(q) = 2q[\widehat{A}^2 - (q-1)\widehat{A} + (q-1)(3q-1)]F_n(q) + \\ + \frac{1}{q-1}\int\limits_1^q (y-1)(15y^2 - 12y + 1)F_n(y)dy. \tag{41.42}$$

Пример 41.6. Доказать, что справедливы соотношения

$$
\begin{aligned}
F_{-n}(q) &= q^n[1 + (q-1)\bar{F}_n(q)],\\
G_{-n}(q) &= q^n[1 + (q-1)\bar{G}_n(q)],
\end{aligned}
\tag{41.43}
$$

где $\bar{F}_n(q)$ и $\bar{G}_n(t)$, $n = \overline{1,\infty}$, есть полиномы по q степени $2n-2$, которые представимы в виде

$$
\begin{aligned}
\bar{F}_n(q) = {}&\frac{2n+3}{4} + [6 + (2n+5)(q-1)]Z_n(q) +\\
&+2q(q-1)Z'_n(q),\\
\bar{G}_n(q) = {}&\frac{2n+5}{4} + [6 + (2n+7)(q-1)]Z_n(q) +\\
&+2q(q-1)Z'_n(q).
\end{aligned}
\tag{41.44}
$$

Здесь $Z_n(q)$ — полиномы по q степени $2n-3$. Найти рекуррентные соотношения для полиномов $Z_n(q)$

Решение. При $n = 1$ из сравнения (41.43), (41.36) с (41.11) и (41.13) получим, что высказанные утверждения верны, причем

$$
\bar{F}_1(q) = 5/4, \qquad \bar{G}_1(q) = 7/4, \qquad Z_1(q) = 0. \tag{41.45}
$$

Соотношение (41.33) показывает, что если $F_n(q)$ есть полином некоторой степени по q, то и $G_n(q)$ есть полином той же степени по q. Из (41.42) следует, что если $F_{-n}(q)$ есть полином степени s по q, то $F_{-n+1}(q)$ есть полином степени $s+3$ по q. Поскольку $F_{-1}(q)$ есть полином второй степени по q, то $F_{-n}(q)$ и $G_{-n}(q)$ есть полиномы степени $3n-1$. Из соотношений (41.33) и (41.34) при $q = 1$ следует

$$
F_{-n}(1) = G_{-n}(1) = F_{-(n+1)}(1) = F_{-1}(1) = 1. \tag{41.46}
$$

Если при этом выражения (41.43) справедливы, то $\bar{F}_n(q)$ и $\bar{G}_n(q)$ действительно должны быть полиномами по q степени $2n-2$. Из (41.37) с учетом (41.36) и (41.43) для $\bar{F}_n(q)$ и $\bar{G}_n(q)$ получим уравнение

$$
\begin{aligned}
2 + [4 + (2n+5)(q-1)]\bar{F}_n(q) + 2q(q-1)\bar{F}'_n(q) &=\\
= [4 + (2n+3)(q-1)]\bar{G}_n(q) + 2q(q-1)\bar{G}'_n(q)&.
\end{aligned}
\tag{41.47}
$$

Функции (41.44) являются общим решением уравнения (41.47) при любых $Z_n(q)$ и n. Следовательно, $Z_n(q)$ должен быть полиномом по q степени $2n-3$ при целом положительном n. Наконец, подставив в (41.38) выражения (41.36) с учетом (41.43) и (41.44), для $Z_n(q)$ получим рекуррентные соотношения

$$
\begin{aligned}
&3(3n+4) + \frac{7}{4}(2n+3)(2n+5)(q-1) +\\
&+\frac{1}{8}(2n+3)(2n+5)(2n+7)(q-1)^2 +
\end{aligned}
$$

$$+\Big[48+48(2n+5)(q-1)+10(2n+5)(2n+7)(q-1)^2+$$
$$+\frac{1}{2}(2n+5)(2n+7)(2n+9)(q-1)^3\Big]Z_n+$$
$$+2q(q-1)\Big[48+20(2n+7)(q-1)+$$
$$+\frac{3}{2}(2n+7)(2n+9)(q-1)^2\Big]Z_n'+$$
$$+2q^2(q-1)^2\Big[20+3(2n+9)(q-1)\Big]Z_n''(q)+4q^3(q-1)^3Z_n'''(q)=$$
$$=4\Big[3+(n+4)(q-1)\Big]Z_{n+1}(q)+4q(q-1)Z_{n+1}'(q). \qquad (41.48)$$

Пример 41.7. Найти $Z_2(q)$ и $Z_3(q)$ и значения $Z_n(1)$.

Решение. Из (41.48) при $n=1$ и $Z_1(q)=0$ найдем

$$64Z_2(q)=7(1+15q). \qquad (41.49)$$

При $n=2$ с учетом (41.49) получим

$$\begin{aligned}2Z_3(q)=19&+3\cdot 11\cdot 53\cdot 2^{-4}(q-1)+\\&+3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 2^{-4}(q-1)^2+\\&+5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 2^{-8}(q-1)^3.\end{aligned} \qquad (41.50)$$

При $q=1$ из (41.48) следует

$$Z_{n+1}(1)=4Z_n(1)+1+\frac{3n}{4}, \qquad Z_1=0. \qquad (41.51)$$

Из этого рекуррентного соотношения найдем

$$12Z_n(1)=2\cdot 4^n-3n-5. \qquad (41.52)$$

42. Ряд Каптейна второго рода и равенство Парсеваля*

Существуют и другие методы вычисления приведенных ранее сумм. Рассмотрим несколько примеров, в которых суммы рядов Каптейна второго рода вычисляются с помощью равенства Парсеваля для рядов Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_n, \qquad (42.1)$$

где

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\tau}f(\tau)d\tau, \qquad b_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\tau}g(\tau)d\tau$$

– коэффициенты Фурье функций $f(t)$ и $g(t)$, соответственно.

Пример 42.1. С помощью равенства Парсеваля найти сумму ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} [J_n(nx)]^2.$$

Решение. Воспользовавшись соотношением (3.9) и тем, что $J_0(0) = 1$, запишем

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} [J_n(nx)]^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_n(nx)]^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} S_1 - \frac{1}{2}.$$

С учетом интегрального представления (10.7), справедливого для функций Бесселя целого индекса, представим сумму S_1 в виде

$$S_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_n(nx)]^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\eta - nx\sin\eta)} d\eta \Big)^2. \tag{42.2}$$

Сделаем в интеграле замену переменных $y = \eta - x\sin\eta$, $dy = (1 - x\cos\eta)d\eta$, $\varphi(y) = 1/(1 - x\cos\eta)$, $d\eta = \varphi(y)dy$. Тогда

$$S_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{iny} \varphi(y) dy \Big)^2 =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{iny} \varphi(y) dy \Big) \Big(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} \varphi(-y) dy \Big).$$

Положив в равенстве Парсеваля (42.1) $f(t) = \varphi(t)$, $g(t) = \varphi(-t)$, получим

$$S_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(y)\varphi(-y) dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - x\cos\eta} \frac{1}{1 + x\cos\eta} d\eta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\eta}{\sqrt{1 - x^2}} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

т.е.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_n(nx)]^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{42.3}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} [J_n(nx)]^2 = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}, \tag{42.4}$$

что совпадает с (41.14).

Пример 42.2. Используя равенство Парсеваля, найти сумму ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [J_n(nx)]^2.$$

Решение. Заметим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 J_n^2(nx) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 J_n^2(nx).$$

Обозначив

$$\gamma(\eta) = \gamma(x, \eta) = \eta - x \sin \eta, \qquad (42.5)$$

представим ряд, стоящий в правой части, в виде

$$2S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 J_n^2(nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \Big| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\gamma(\eta)n} d\eta \Big|^2.$$

Проинтегрируем один раз по частям, положив

$$dU = e^{in\gamma(\eta)} p(\eta) d\eta, \quad V = \frac{1}{p(\eta)},$$

$$U = -\frac{i}{n} e^{in\gamma(\eta)}, \quad dV = -\frac{\dot{p}(\eta)}{p^2(\eta)} d\eta.$$

Здесь точкой обозначена производная по η

$$p(\eta) = \dot{\gamma}(\eta) = 1 - x \cos \eta, \qquad \dot{p}(\eta) = x \sin \eta.$$

Внеинтегральное слагаемое равно нулю, поэтому

$$2S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \Big| -\frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\gamma(\eta)n} \frac{\dot{p}(\eta)}{p^2(\eta)} d\eta \Big|^2 =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \Big| -\frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\gamma n} \Big[\frac{\dot{p}(\gamma)}{p^2(\gamma)} \frac{d\eta}{d\gamma} \Big] d\gamma \Big|^2.$$

С учетом равенства Парсеваля (42.1) запишем

$$2S = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\frac{\dot{p}(\gamma)}{p^3(\gamma)} \Big]^2 d\gamma = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\dot{p}^2(\eta)}{p^5(\eta)} d\eta.$$

Заметим, что

$$\dot{p}^2(\eta) = x^2 \sin^2 \eta = (x^2 - 1) + 2p - p^2.$$

Тогда

$$2S = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\dot p^2(\eta)}{p^5(\eta)}d\eta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(x^2-1)+2p(\eta)-p^2(\eta)}{p^5(\eta)}d\eta.$$

Воспользовавшись интегралом

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\eta}{(1-x\cos\eta)^m} = (1-x^2)^{-m/2}P_{m-1}([1-x^2]^{-1/2}), \qquad (42.6)$$

где $|x|<1$ и $P_m(x)$ — полином Лежандра, получим

$$2S = \frac{x^2-1}{(1-x^2)^5}P_4\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big) + \frac{2}{(1-x^2)^{3/2}}P_3\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big) - \\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}P_2\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big).$$

С учетом явного вида полиномов Лежандра $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ (см. пример 16.3) запишем

$$2S = \frac{1}{8}\frac{1}{(1-x^2)^{7/2}}\{[-35+30(1-x^2)-3(1-x^2)^2] + \\ +8[5-3(1-x^2)]-4[3(1-x^2)-(1-x^2)^2]\} = \\ = \frac{1}{8}\frac{1}{(1-x^2)^{7/2}}[5-6(1-x^2)+(1-x^2)^2] = \\ = \frac{1}{8}\frac{1}{(1-x^2)^{7/2}}(4x^2+x^4) = \frac{x^2(4+x^2)}{8(1-x^2)^{7/2}}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\big[J_n(nx)\big]^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2\big[J_n(nx)\big]^2 = \frac{x^2(4+x^2)}{16(1-x^2)^{7/2}}, \qquad (42.7)$$

что совпадает с (41.15).

Пример 42.3. С помощью равенства Парсеваля найти сумму ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}n^2[J_n'(nx)]^2.$$

Решение. Аналогично примеру 42.2

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}n^2[J_n'(nx)]^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2[J_n'(nx)]^2.$$

Тогда

$$2S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2[J_n'(nx)]^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big| \frac{in}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\gamma(\eta)n} \sin\eta\, d\eta \Big|^2 =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big| \frac{in}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\gamma(\eta)n} \frac{p(\eta)\cos\eta - \sin\eta \dot p(\eta)}{p^2(\eta)} d\eta \Big|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{[p(\eta)\cos\eta - \sin\eta\dot p(\eta)]^2}{p^5(\eta)} d\eta.$$

С учетом соотношения

$$x\sin^2\eta = \frac{(x^2-1)+2p-p^2}{x}, \qquad \cos\eta = \frac{1-p}{x}$$

получим

$$2S = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{[p(\eta)\cos\eta - \sin\eta\dot p(\eta)]^2}{p^5(\eta)} d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi x^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{[p(\eta)(1-p(\eta) - (x^2-1) - 2p(\eta) + p^2(\eta)]^2}{p^5(\eta)} d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi x^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-x^2)^2 - 2(x^2-1)p(\eta) + p^2(\eta)}{p^5(\eta)} d\eta.$$

С учетом (42.6) получим

$$2S = \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^{5/2}} P_4\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big) - 2\frac{1-x^2}{(1-x^2)^{3/2}} P_3\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} P_2\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{8x^2(1-x^2)^{5/2}} \{[35 - 30(1-x^2) + 3(1-x^2)] -$$

$$-8[5 - 3(1-x^2)] + 4[3 - (1-x^3)]\} =$$

$$= \frac{1}{8x^2(1-x^2)^{5/2}} \{7 - 10(1-x^2) + 3(1-x^2)^2\} = \frac{4+3x^2}{8(1-x^2)^{5/2}}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2[J_n'(nx)]^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2[J_n'(nx)]^2 = \frac{4+3x^2}{16(1-x^2)^{5/2}}, \qquad (42.8)$$

что совпадает с (41.16). Аналогично с помощью равенства Парсеваля можно находить суммы рядов (41.2) при целых ν.

Задания для самоконтроля по курсу «Обобщенные и специальные функции»

Теоретические вопросы

1. Сформулировать задачу Штурма–Лиувилля для линейных дифференциальных уравнений. Самосопряженная форма уравнения задачи. Исследовать влияние граничных условий на свойства собственных значений и собственных функций.
2. Сформулировать основные свойства решений задачи Штурма–Лиувилля. Доказать любые два свойства.
3. С помощью обобщенного степенного ряда получить частные решения уравнения Бесселя. Дать определение функции Бесселя первого рода.
4. Вычислить вронскиан функций Бесселя $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$. Найти общее решение уравнения Бесселя с нецелым индексом.
5. Дать определение функции Неймана. Вычислить вронскиан функций $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ и найти общее решение уравнения Бесселя с произвольным индексом.
6. Доказать рекуррентные соотношения для функций Бесселя
$$\big[x^{-\nu}J_\nu(x)\big]' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x), \qquad \big[x^{\nu}J_\nu(x)\big]' = x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$$
и сформулировать следствия из них.
7. Выразить функции Бесселя и Неймана полуцелых индексов через элементарные функции.
8. Записать уравнение Бесселя с параметром и найти его частные решения. Дать определение функции Ханкеля.
9. Вычислить вронскиан модифицированных функций Бесселя $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ и найти общее решение модифицированного уравнения Бесселя.
10. Исходя из известных рекуррентных соотношений для функций Бесселя, доказать аналогичные соотношения для модифицированных функций.
11. Исследовать асимптотическое поведение цилиндрических функций (любых двух) в окрестности точек $x = 0$ и $x = \infty$.
12. С помощью обыкновенного дифференциального уравнения Лапласа доказать теорему об интегральном представлении частного решения уравнения Бесселя.
13. Исходя из интегрального представления решения уравнения Бесселя, доказать одну из формул (интегралов) Пуассона для функций Бесселя.
14. Исходя из производящей функции
$$F(z,t) = \exp\Big[\frac{z}{2}\Big(t - \frac{1}{t}\Big)\Big],$$
получить представление функций Бесселя в виде ряда и интеграла Бесселя.

15. Вывести один из интегралов Ломмеля.
16. Сформулировать основные свойства нулей бесселевых функций. Доказать любые два свойства.
17. Исходя из интегралов Ломмеля, вычислить норму и получить условие ортогональности функций Бесселя.
18. Дать определение и вычислить коэффициенты разложения рядов Фурье–Бесселя и Дини. Сформулировать теорему Гобсона.
19. Найти решение задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя.
20. С помощью производящей функции $\Psi(x,t) = (1+t^2-2tx)^{-1/2}$ получить формулу Родрига для полиномов Лежандра.
21. С помощью производящей функции $\Psi(x,t) = \exp(2tx - t^2)$ получить формулу Родрига для полиномов Эрмита.
22. С помощью производящей функции $\Psi(x,t) = \exp(2tx - t^2)$ получить формулу Родрига для полиномов Эрмита.
23. С помощью производящей функции
$$\Psi(x,t) = (1-t)^{-(\alpha+1)} \exp\Big(-\frac{xt}{1-t}\Big)$$
получить формулу Родрига для полиномов Лагерра.
24. С помощью производящей функции
$$\Psi(x,t) = \frac{\rho(\omega(x,t))}{\rho(x)[1 - t\beta'(\omega(x,t))]}$$
получить обобщенную формулу Родрига для классических ортогональных полиномов.
25. Для полиномов Лежандра доказать следующие рекуррентные соотношения:
$$\begin{gathered}(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,\\ nP_n(x) - xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0.\end{gathered} \tag{**}$$
26. Исходя из рекуррентных соотношений (**), получить уравнения для полиномов Лежандра и доказать их ортогональность.
27. Дать определение ряда Фурье–Лежандра. Вычислить норму и получить условие ортогональности полиномов Лежандра.
28. Найти решение задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Лежандра.
29. Дать определение присоединенных функций Лежандра. Найти частные решения уравнения Лежандра порядка m.
30. Получить условие ортогональности присоединенных функций Лежандра. Дать определение ряда Фурье по присоединенным функциям Лежандра.
31. Дать определение сферических функций и получить условие их ортогональности.
32. Доказать рекуррентные соотношения
$$\begin{gathered}H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,\\ H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) = 0\end{gathered}$$
и получить из них уравнение для полиномов Эрмита.

33. Найти решение задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Эрмита. Доказать ортогональность полиномов Эрмита.
34. Дать определение ряда Фурье–Эрмита. Вычислить норму полиномов Эрмита и получить явный вид коэффициентов ряда Фурье–Эрмита.
35. С помощью функций Эрмита решить задачу о квантовом гармоническом осцилляторе.
36. Доказать рекуррентные соотношения

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x) - (2n+1+\alpha-x)L_n^{\alpha}(x) + (n+\alpha)H_{n-1}^{\alpha}(x) = 0,$$

$$[L_n^{\alpha}(x)]' = \frac{1}{x}\big[nL_n^{\alpha}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x)\big]$$

и получить из них уравнение для полиномов Лагерра.
37. Решить задачу Штурма–Лиувилля для уравнения Лагерра и получить условие ортогональности полиномов Лагерра.
38. Дать определение ряда Фурье–Лагерра. Вычислить норму полиномов Лагерра и получить явный вид коэффициентов ряда Фурье–Лагерра.
39. С помощью уравнения Пирсона получить обобщенное дифференциальное уравнение для классических ортогональных полиномов.
40.* Дать понятие обобщенного гипергеометрического ряда, гипергеометрической и вырожденной гипергеометрической функций Гаусса.

Индивидуальные задания

Вариант № 1

1.1. Доказать, что при $z = iy$ справедливо соотношение

$$|\Gamma(z)| = \sqrt{\frac{\pi}{y \operatorname{sh} \pi y}}.$$

1.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + 2y' + (\lambda + 1)y = 0, \qquad y(0) = y(a) = 0;$

б) $y'' + \dfrac{2}{x}y' + \lambda y = 0, \qquad |y(0)| < \infty, \quad y'(1/3) + 3y(1/3) = 0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

1.3. Вычислить

$$\int xJ_0(x)dx.$$

1.4. Найти лапласовское изображение функции $J_1(t)$.

1.5. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^t (t - \tau)J_0(2\sqrt{\tau})d\tau.$$

1.6. Вычислить

$$\int\limits_0^t (t - \tau)^3 L_n(\tau)d\tau.$$

1.7. Функцию $f(x) = 1$ разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале $]0, \pi[$ при $\nu = 0$.

1.8. Доказать равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} = \sqrt{\pi}\delta(x).$$

1.9. Доказать, что

$$(\ln |x|)' = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

1.10. Доказать, что

$$F_{x\to p}\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Вариант № 2

2.1. Вычислить

$$\int\limits_0^a x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}dx, \qquad a>0, \qquad n=\overline{0,\infty}.$$

2.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y''+\lambda y=0, \qquad y'(\pi/2)=y(\pi)=0;$

б) $y''+2\dfrac{y'}{x}+\lambda y=0, \quad 0<x<1,\ |y(0)|<\infty, \quad y'(1)+y(1)=0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

2.3. Найти общее решение уравнения

$$y''+\Big(1+\frac{1}{x}\Big)y'+\Big(\frac{1}{2x}+\frac{4}{x^2}\Big)y=0.$$

Указание: сделать замену переменных $y=e^{-x/2}z$.

2.4. Найти лапласовское изображение функции $J_2(t)$.

2.5. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^t \cos(t-\tau)J_0(\tau)d\tau.$$

2.6. Вычислить

$$\int\limits_0^t (t-\tau)\tau^\alpha L_n^\alpha(\tau)d\tau.$$

2.7. Функцию $f(x)=x^p$ разложить в ряд Фурье на интервале $]0,\infty[$ по полиномам Лагерра.

2.8. Доказать равенство

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}=\pi\delta(x).$$

2.9. Доказать, что

$$\Big(\mathcal{P}\frac{1}{x}\Big)'=-\mathcal{P}\frac{1}{x^2}.$$

2.10. Доказать, что

$$F_{x\to p}\delta(x-x_0)=\frac{e^{-ipx_0}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Вариант № 3

3.1. Используя гамма-функцию, доказать, что

$$\int_0^1 x^k \ln x\,dx = -\frac{1}{(k+1)^2}, \qquad k > -1.$$

3.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(1/2) = y(1) = 0.$

б) $y'' + 2\dfrac{y'}{x} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad |y(0)| < \infty,\ y(\pi) = 0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

3.3. Вычислить

$$\int \frac{J_4(x)}{x^3}dx.$$

3.4. Найти лапласовское изображение функции $J_3(t)$.

3.5. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t \sin(t-\tau)J_0(\tau)d\tau.$$

3.6. Вычислить

$$\int_0^t (t-\tau)^2 L_n(\tau)d\tau.$$

3.7. Функцию $f(x) = x^\nu$ разложить в ряд Фурье на интервале $]0,1[$ по системе $(J_\nu(\lambda_n^\nu x))$, если λ_n^ν — нули $J_\nu(x)$.

3.8. Вычислить $(\operatorname{sign} x)'$.

3.9. Доказать, что

$$\left(\frac{1}{x+i0}\right)' = -\pi\delta'(x) - \mathcal{P}\frac{1}{x^2}.$$

3.10. Доказать, что

$$F_{x\to p}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta(p).$$

Вариант № 4

4.1. Вычислить

$$\int_0^{\pi/2} (\sin\varphi)^a(\cos\varphi)^b d\varphi, \qquad a > -1, \qquad b > -1.$$

4.2. Найти собственные значения и собственные функции задачи:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(\pi) = y(2\pi) = 0.$

б) $(xy')' - \dfrac{n^2}{x} y + \lambda x y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad |y(0)| < \infty, \quad y(1) = 0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

4.3. Вычислить

$$\int J_1(x) dx.$$

4.4. Найти лапласовское изображение функции $J_0(t)$.

4.5. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t \frac{J_0(t-\tau)J_1(\tau)}{\tau} d\tau.$$

4.6. Пользуясь теоремами смещения и дифференцирования оригинала, доказать, что

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

4.7. Функцию $f(x) = 1$ разложить в ряд Фурье на интервале $]0, 1[$ по ортогональной системе

$$\left\{ \frac{1}{x} \sin(\mu_n x),\, n = \overline{1, \infty} \right\},$$

где $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$ – все положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \mu = -\mu/2$.

4.8. Вычислить $[\theta(x)]'$.

4.9. Доказать, что

$$\left(\frac{1}{x - i0} \right)' = \pi \delta'(x) - \mathcal{P} \frac{1}{x^2}.$$

4.10. Доказать, что

$$F_{x \to p} \left(\frac{\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos p x_0.$$

Вариант № 5

5.1. Вычислить

$$\int_0^\infty e^{-x^b} dx, \qquad b = \mathrm{const}\,.$$

5.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(\pi/2) = y(\pi) = 0.$

б) $y'' + 2\dfrac{y'}{x} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad |y(0)| < \infty, \quad \pi y'(\pi) + y(\pi) = 0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

5.3. Записать общее решение уравнения

$$y'' + \Big(\frac{1}{x} + 2\operatorname{ctg} x\Big)y' - \Big(\frac{2}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\Big)y = 0.$$

Сделать замену переменных $y = z/\sin x$.

5.4. Найти лапласовское изображение функции $\sqrt{t}J_1(\sqrt{t})$.

5.5. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^t J_0(\tau)J_0(t-\tau)\tau d\tau.$$

5.6. С помощью преобразования Лапласа доказать, что

$$L_n^{1/2}(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^{2n+1}}H_{2n+1}(\sqrt{x}).$$

5.7. Функцию $f(x) = 5 - 2|x|$ разложить в ряд Фурье–Лежандра на интервале $]-1, 1[$.

5.8. Вычислить $([x])'$, где $[x]$ — целая часть числа x.

5.9. Доказать, что

$$\Big(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}\Big)' = -2\mathcal{P}\frac{1}{x^3}, \quad \text{при} \quad \Big\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^3}\Big|\varphi\Big\rangle = \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - x\varphi'(0)}{x^3}dx.$$

5.10. Доказать, что

$$F_{x\to p}\frac{\delta(x-x_0) - \delta(x+x_0)}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin px_0.$$

Вариант № 6

6.1. Вычислить

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx, \qquad a > 0, \quad n = \overline{0,\infty}.$$

6.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(\pi/2) = y(3\pi/2) = 0;$

б) $(2x+3)^2y'' + 4(2x+3)y' + (\lambda+1)y = 0, \quad y(0) = y(3) = 0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

6.3. Записать общее решение уравнения

$$y'' + \frac{5}{x}y' + xy = 0.$$

Сделать замену переменных $y = z/x^2$.

6.4. Найти лапласовское изображение функции $\sqrt{t}J_1(2\sqrt{at})$.

6.5. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^t \frac{J_0(t-\tau)J_1(\tau)}{\tau}d\tau.$$

6.6. С помощью преобразования Лапласа доказать, что

$$L_n^{-1/2}(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^{2n}}H_{2n}(\sqrt{x}).$$

6.7. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале $]0, 1[$ при $\nu = 0$.

6.8. Вычислить $(|x|)''$.

6.9. Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k).$$

6.10. Доказать, что

$$F_{x\to p}\delta^{(\alpha)}(x) = \frac{(-ip)^\alpha}{\sqrt{2\pi}}.$$

Вариант № 7

7.1. Доказать, что

$$\Gamma(n + 1/2)\Gamma(-n + 1/2) = (-1)^n\pi.$$

7.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y(-1) = 0 = y(1);$

б) $[(1 - x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad |y(-1)| < \infty, \quad |y(1)| < \infty.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

7.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \left(4 - \frac{6}{x^2}\right)y = 0.$$

Сделать замену переменных $y = z\sqrt{x}$.

7.4. Найти лапласовское изображение функции $[J_0(t) - 1]/t$.

7.5. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t (t-\tau)\sqrt{\tau} J_1(2\sqrt{\tau})d\tau.$$

7.6. Найти лапласовское изображение функции $H_{2n+1}(\sqrt{x})$.

7.7. Функцию $f(x) = e^{-x}$ разложить в ряд Фурье на интервале $]0, \infty[$ по полиномам Лагерра.

7.8. Вычислить $|\sin x|''$.

7.9. Доказать, что

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\cos(2k+1)x = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(x - \pi k).$$

7.10. Доказать, что

$$F_{x\to p}x^{\alpha} = \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\sqrt{2\pi}}\delta^{(\alpha)}(p).$$

Вариант № 8

8.1. Вычислить

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^a(1-x)^b dx, \qquad a < -1, \quad b > -1.$$

8.2. Найти собственные значения и собственные функции задачи:

$$\text{а)}\quad y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(\pi) = y(3\pi/2) = 0;$$

$$\text{б)}\quad y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad 3y'(3) + y(3) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

8.3. Записать общие решения уравнения

$$y'' + x^4 y = 0.$$

Сделать замену переменных $y = z\sqrt{x}$, $t = x^3$.

8.4. Найти лапласовское изображение функции $J_2(t)/t$.

8.5. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t (t-\tau)\tau J_2(2\sqrt{\tau})d\tau.$$

8.6. Найти лапласовское изображение функции $\dfrac{1}{\sqrt{x}}H_{2n}(\sqrt{x})$.

8.7. Разложить в ряд Фурье–Лежандра функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ -1, & -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

8.8. Вычислить $(e^{-a|x|})''$.

8.9. Доказать, что

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(at - |x|) = a\delta(at - |x|),$$

где, по определению, $\delta(at - |x|) = \theta(t)\delta(at + x) + \theta(t)\delta(at - x)$.

8.10. Доказать, что

$$F_{x\to p}\theta(x)e^{-ax} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a - ip}, \qquad a > 0.$$

Вариант № 9

9.1. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_E \sqrt{xy}\, dxdy,$$

где E — треугольник, ограниченный полуосями и прямой $x + y = 1$.

9.2. Найти собственные значения и собственные функции задачи

$$\text{а)}\ \ y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(1/2) = y(3/2) = 0;$$

$$\text{б)}\ \ (xy')' + \frac{4}{x}y' + \lambda xy = 0, \quad y(0) < \infty, \quad y(1) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

9.3. Записать общие решения уравнений

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0; \qquad x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0.$$

9.4. Найти лапласовское изображение функции $J_3(t)/t$.

9.5. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^t \sin(t - \tau)J_1(\tau)d\tau.$$

9.6. Найти лапласовское изображение функции $x^\alpha L_n^\alpha(x)$.

9.7. Функцию $f(x) = 1$ разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале $]0, \pi/2[$ при $\nu = 0$.

9.8. Вычислить $(e^{-|x+a|}\sin x)''$.

9.9. Доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(at-|x|) = \theta(t)\delta(at+x) - \theta(t)\delta(at-x).$$

9.10. Доказать, что

$$F_{x\to p}\theta(-x)e^{ax} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+ip}, \qquad a>0.$$

Вариант № 10

10.1. Показать, что

$$\int_0^\infty e^{-x^4}dx\int_0^\infty x^2e^{-x^4}dx = \frac{\pi/8}{\sqrt{2}}.$$

10.2. Найти собственные значения и собственные функции задачи:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(\pi) = y(3\pi/2) = 0;$

б) $y'' + \dfrac{2}{x}y' + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad 3y'(3/2) + 2y(3/2) = 0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

10.3. Показать, что

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sh}x, \qquad K_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-x}.$$

10.4. Найти лапласовское изображение функции $e^{-t}J_0(t)$.

10.5. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t J_0(a\tau)J_0(a(t-\tau))d\tau.$$

10.6. Найти лапласовское изображение функции $L_n(x)$.

10.7. Разложить функцию $f(x) = |x|$ в ряд Фурье–Лежандра.

10.8. Вычислить $\delta(x^2+2x-3)$.

10.9. Показать, что

$$\delta(x) * f(x) = f(x) * \delta(x) = f(x).$$

10.10. Доказать, что

$$F_{x\to p}e^{-a|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+p^2}, \qquad a>0.$$

Вариант № 11

11.1. Доказать, что

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

11.2. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(3/4) = y(5/4) = 0;$

б) $y'' + \dfrac{y'}{x} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi/3, \quad |y(0)| < \infty, \quad y'(\pi/3) = 0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций.

11.3. Найти общее решение уравнения $xy'' + 7y' + xy = 0$.

11.4. Найти лапласовское изображение функции $J_1(t)\,\mathrm{sh}\,t$.

11.5. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t \frac{J_1(\tau)J_3(t-\tau)}{\tau(t-\tau)} d\tau.$$

11.6. Из формулы Родрига получить представление полиномов Лагерра

$$L_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(-x)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)k!(n-k)!}.$$

11.7. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале $]0, \pi[$ при $\nu = 0$.

11.8. Вычислить

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{\varepsilon}.$$

11.9. Показать, что

$$\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b).$$

11.10. Доказать, что

$$F_{x\to p} \frac{2a}{a^2+x^2} = \frac{e^{-a|p|}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad a > 0.$$

Вариант № 12

12.1. Используя гамма-функцию, найти

$$\int_0^{\infty} x^8 e^{-x^2}\, dx.$$

12.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(3/4) = y(5/4) = 0;$

б) $y'' + 2\dfrac{y'}{x} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi/2, \quad |y(0)| < \infty, \quad y'(\pi/2) = 0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций.

12.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \Big(\frac{1}{x} - 2\operatorname{ch} x\Big)y' + \Big(1 - \frac{2}{x^2} + \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh} x - \frac{\operatorname{ch} x}{x}\Big)y = 0.$$

Сделать замену $y = e^{\operatorname{sh} x} z$.

12.4. Найти лапласовское изображение функции $J_0(t)\sin t$.

12.5. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^t \frac{J_1(\tau)J_1(t-\tau)}{\tau(t-\tau)}d\tau.$$

12.6. Вычислить

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{\pi} - |x|)P_n(x/\pi)dx.$$

12.7. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Дини на интервале $]0,1[$ при $\nu = 0$.

12.8. Вычислить

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\varepsilon}{\pi x^2}\sin^2\frac{x}{\varepsilon}.$$

12.9. Показать, что

$$\delta^{(m)}(x) * f(x) = f^{(m)}(x).$$

12.10. Доказать, что

$$F_{x\to p}\theta(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\delta(p) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{p}.$$

Вариант № 13

13.1. Вычислить

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-ax^2}dx, \qquad a > 0.$$

13.2. Найти собственные значения и собственные функции задачи:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(1/4) = y(1/2) = 0;$

б) $(xy')' - \dfrac{n^2}{x}y + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < 1,$

$$|y(0)| < \infty, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

13.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \Big(2 + \frac{1}{x}\Big)y' - \Big(4 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\Big)y = 0.$$

Сделать замену переменных $y = e^{-x}z$.

13.4. Найти лапласовское изображение функции $J_0(t)\cos t$.

13.5. Используя формулу Парсеваля, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{J_0(t) - \cos t}{t}\,dt.$$

13.6. Вычислить

$$\int\limits_0^\pi xP_n(x/\pi)\,dx.$$

13.7. Функцию $f(x) = x^\nu$ разложить в ряд Дини на интервале $]0,1[$ по системе $(J_\nu(\gamma_n^\nu x))$, если γ_n^ν — нули функции $J'_\nu(x)$.

13.8. Показать, что

$$x^m\mathcal{P}\frac{1}{x} = x^{m-1}.$$

13.9. Показать, что

$$\delta(x-a) * f(x) = f(x-a).$$

13.10. Доказать, что

$$F_{x\to p}\theta(-x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\delta(p) - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{p}.$$

Вариант № 14

14.1. Вычислить

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x^4}}{(1+x)^2}\,dx.$$

Сделать замену переменных $x = t/(1-t)$.

14.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(\pi/2) = y(3\pi/4) = 0;$

б) $y'' + \operatorname{ctg} x\, y' + \lambda y = 0, \qquad |y(0)| < \infty, \quad |y(\pi)| < \infty.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

14.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \left(4 + \frac{1}{x}\right)y' + \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}\right)y = 0.$$

Сделать замену переменных $y = e^{-2x}z$.

14.4. Найти лапласовское изображение функции $I_0(t)$.

14.5. Используя формулу Парсеваля, доказать, что

$$\int\limits_0^\infty t^{-1/2} J_{3/2}(t)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

14.6. Вычислить

$$\int\limits_0^3 x^2 P_n(x/3)dx.$$

14.7. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & -1 < x < 0 \\ 0 & 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

разложить в ряд Фурье на интервале $]-1, 1[$ по полиномам Лежандра.

14.8. Показать, что

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x).$$

14.9. Показать, что

$$\delta^{(m)}(x - a) * f(x) = f^{(m)}(x - a).$$

14.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $\delta'(x)$.

Вариант № 15

15.1. Вычислить

$$\int\limits_{-\infty}^\infty x^4 e^{-x^2} dx.$$

15.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(3/4) = y(1) = 0;$

б) $y'' + 2\dfrac{y'}{x} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi/6, \quad |y(0)| < \infty,$

$$\pi y'(\pi/6) + 6y(\pi/6) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

15.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' - \Big(\frac{1}{x} + 2\operatorname{ctg} x\Big)y' + \Big(\frac{\nu^2}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\Big)y = 0.$$

Сделать замену переменных $y = z/\sin x$.

15.4. Найти лапласовское изображение функции $I_1(t)$.

15.5. Используя формулу Парсеваля, доказать, что

$$\int\limits_0^\infty t^{1/2} J_{5/2}(t)dt = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

15.6. Вычислить

$$\int\limits_0^1 (1-x^2)[P_n'(x)]^2 dx.$$

15.7. Функцию $f(x) = 1$ разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале $]0, l[$ при $\nu = 0$.

15.8. Показать, что $\rho(x)\delta'(x) = \rho'(0)\delta(x) + \rho(0)\delta'(x)$, где $\rho(x)$, $\rho'(x)$ — гладкие функции.

15.9. Вычислить $\theta(x) * \theta(x)$.

15.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $\delta''(x)$.

Вариант № 16

16.1. Вычислить

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{1/6}dx}{(1+x)^2}.$$

Сделать замену переменных $x = t/(1-t)$.

16.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(\pi/4) = y(\pi/2) = 0;$

б) $y'' + 2\dfrac{y'}{x} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi/6, \quad |y(0)| < \infty, \quad y(\pi/6) = 0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

16.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + x^6 y = 0.$$

Сделать замену переменных $y = z\sqrt{x}$, $x^4 = t$.

16.4. Найти лапласовское изображение функции $I_2(t)$.

16.5. Пользуясь частным случаем теоремы Эфроса, вычислить интеграл
$$\int\limits_0^t J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\cos\tau d\tau.$$

16.6. Вычислить
$$\int\limits_0^2 x^2 P_n(x/2)dx.$$

16.7. Функцию
$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 2\pi] \\ \pi & x \in [-2\pi, 0[\end{cases}$$
разложить в ряд Фурье на интервале $]-2\pi, 2\pi[$ по полиномам Лежандра.

16.8. Показать, что $x\delta^{(m)}(x) = -m\delta^{(m-1)}(x)$, $m = \overline{1, \infty}$.

16.9. Вычислить $\theta(x) * \theta(x)x^2$.

16.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $\theta(x-a)$.

Вариант № 17

17.1. Вычислить интеграл
$$\int\limits_0^3 x^6\sqrt{9-x^2}dx.$$

17.2. Найти собственные значения и собственные функции задачи:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(3/2) = y(1/2) = 0;$

б) $y'' + \dfrac{y'}{x} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 2\pi, \quad |y(0)| < \infty, \quad y'(2\pi) = 0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

17.3. Найти общее решение уравнения
$$y'' + \left(6 - \frac{2}{x^2}\right)y = 0.$$
Сделать замену переменных $y = z\sqrt{x}$.

17.4. Найти лапласовское изображение функции $I_3(t)$.

17.5. Пользуясь частным случаем теоремы Эфроса, вычислить интеграл
$$\int\limits_0^t \tau J_0(2\sqrt{\tau(t-\tau)})d\tau.$$

17.6. Вычислить

$$\int_0^\pi (\cos^3\theta - \sin^2\theta) P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta.$$

17.7. Функцию $f(x) = 1$ разложить в ряд Фурье на интервале $]0, 2[$ по ортогональной системе

$$\left\{\frac{1}{x}\sin\left(\frac{\mu_n x}{2}\right),\ n = \overline{1,\infty}\right\},$$

где $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$ — все положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = -\mu/2$.

17.8. Показать, что $x^m\delta^{(m)}(x) = (-1)^m m!\delta(x)$, $m = \overline{0,\infty}$.

17.9. Вычислить $e^{-|x|} * e^{-|x|}$.

17.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $\operatorname{sign}(x)$.

Вариант № 18

18.1. Вычислить

$$\int_0^\infty \frac{x}{4+x^3}dx.$$

Сделать замену переменных $x^3 = 4t/(1-t)$.

18.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y(3\pi/4) = y'(5\pi/2) = 0;$

б) $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad 1 < x < 2, \quad y(1) = y(2) = 0.$

Уравнение привести к самосопряженному виду. Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

18.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 9xy = 0.$$

Сделать замену переменных $y = z\sqrt{x}$, $x^{3/2} = t$.

18.4. Найти лапласовское изображение функции $e^{-t}I_0(t)$.

18.5. Пользуясь частным случаем теоремы Эфроса, показать, что

$$\int_0^\infty J_1(2\sqrt{\tau})d\tau = \frac{1}{2}.$$

18.6. Вычислить

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\pi + |x|) P_n(x/\pi) dx.$$

18.7. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1 & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

в ряд по ортогональной системе функций $\{J_0(\gamma_k^0 \frac{x}{2})\}$, где γ_k^0 — нули функции $J_0'(\gamma) = 0$.

18.8. Показать, что $x^k \delta^{(m)}(x) = 0$, $m = \overline{0, k-1}$.

18.9. Вычислить $e^{-ax^2} * xe^{-ax^2}$.

18.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$.

Вариант № 19

19.1. Вычислить

$$\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{1/3} x\, dx.$$

Сделать замену переменных $\operatorname{tg}^2 x = t/(1-t)$.

19.2. Найти собственные значения и собственные функции задачи:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y(\pi/2) = y'(5\pi/4) = 0;$

б) $[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad |y(-1)| < \infty, \quad |y(1)| < \infty.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

19.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \Big(\frac{1}{x} - 2\operatorname{tg} x\Big)y' - \Big(\frac{2}{x^2} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\Big)y = 0.$$

Сделать замену переменных $y = z/\cos x$.

19.4. Найти лапласовское изображение функции $I_1(t)\operatorname{sh} t$.

19.5. Пользуясь частным случаем теоремы Эфроса, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^t e^{2\tau} J_0(2\sqrt{\tau(t-\tau)})d\tau.$$

19.6. Показать, что на интервале $]-1, 1[$ полином $P_n(x)$ ортогонален любому полиному степени меньше n.

19.7. Функцию $f(x) = x^\nu$ разложить в ряд Фурье на интервале $]0, 1[$ по системе $(J_\nu(\gamma_n^\nu x))$, если γ_n^ν — нули функции $J_\nu'(x)$.

19.8. Показать, что $(\rho(x)\theta(x))' = \rho(0)\delta(x) + \rho'(x)\theta(x)$, где $\rho(x)$, $\rho'(x)$ — гладкие функции.

19.9. Вычислить $\theta(x)x^2 * \theta(x)\sin x$.

19.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $|x|$.

Вариант № 20

20.1. Вычислить
$$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx.$$

20.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + 2y' + (\lambda+1)y = 0, \qquad y(0) = 0 = y(1);$

б) $y'' + \dfrac{2}{x}y' + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad y'(1/4) + 4y(1/4) = 0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

20.3. Показать, что $u(\rho,\varphi) = I_n(\mu\rho)\cos(n\varphi)$ удовлетворяет уравнению
$$\Delta u - \mu^2 u = 0,$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad n = \overline{0,\infty}.$$

20.4. Найти лапласовское изображение функции $I_0(t)\sin t$.

20.5. Пользуясь частным случаем теоремы Эфроса, вычислить интеграл
$$\int\limits_0^\infty J_{1/2}(\tau)d\tau.$$

20.6. С помощью дифференциального уравнения для полиномов Лагерра $L_n(x)$ доказать, что система функций $\{L_n(x)\}$ ортогональна на $]0,\infty[$ с весом $\rho(x) = e^{-x}$.

20.7. Функцию $f(x) = x^3$ разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале $]0,2[$ при $\nu = 3$.

20.8. Вычислить $(\theta(-x))'$.

20.9. Вычислить $\theta(x)\cos x * \theta(x)x^3$.

20.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $\mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}$.

Вариант № 21

21.1. Вычислить
$$\int\limits_0^1 x^3(1-x^3)^{1/3}dx.$$

21.2. Найти собственные значения и собственные функции задачи:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y(3/4) = y'(5/4) = 0;$

б) $[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad |y(-1)| < \infty, \quad |y(1)| < \infty.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

21.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \left(\frac{1}{x} - 2x^2\right)y' - \left(1 - \frac{2}{x^2} - 3x\right)y = 0.$$

Сделать замену переменных $y = e^{x^{2/3}}z$.

Выразить функции Бесселя $J_{3/2}(x)$, $N_{3/2}(x)$ через элементарные функции.

21.4. Найти лапласовское изображение функции $I_0(t)\cos t$.

21.5. Пользуясь частным случаем теоремы Эфроса, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty t\sin t^2 J_0(t)dt.$$

21.6. Показать, что

$$\int\limits_0^1 x^2 P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}.$$

21.7. Разложить функцию $f(x) = |x| - 2$ в ряд Фурье–Лежандра.

21.8. Вычислить $(\theta(x - x_0))^{(m)}$, $m = \overline{1, \infty}$.

21.9. Вычислить $\theta(x)\sin x * \theta(x)\,\mathrm{sh}\,x$.

21.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $\delta(kt)$.

Вариант № 22

22.1. Вычислить

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^3}dx.$$

Сделать замену переменных $x^3 = t/(1-t)$.

22.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + 2y' + (\lambda + 1)y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0;$

б) $y'' + \dfrac{2}{x}y' + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad 4y'(4) + y(4) = 0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

22.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \left(b^2 - \frac{3}{4x^2}\right)y = 0.$$

Сделать замену переменных $y = z\sqrt{x}$.

Показать, что

$$J_0'(x) = -J_1(x), \qquad J_0''(x) = \frac{1}{2}[J_2(x) - J_0(x)].$$

22.4. Найти лапласовское изображение функции $I_0(2\sqrt{t})$.

22.5. Пользуясь частным случаем теоремы Эфроса, вычислить интеграл

$$\int_0^\infty t\cos t^2 J_0(t)dt.$$

22.6. Вычислить

$$\int_0^\pi P_n(x/\pi)dx.$$

22.7. Функцию $f(x) = x^{2m+1}$ разложить в ряд Фурье по полиномам Эрмита на интервале $]-\infty,\infty[$.

22.8. Вычислить $\theta^{(m)}(x_0 - x)$, $m = \overline{1,\infty}$.

22.9. Вычислить $\theta(a - |x|) * \theta(a - |x|)$.

22.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $\delta(t - a)$.

Вариант № 23

23.1. Вычислить

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}dx.$$

23.2. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля:

$$\text{а)}\ \ y'' + \lambda y = 0, \qquad y(1/4) = y'(1/2) = 0.$$

$$\text{б)}\ \ y'' + \frac{y'}{x} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 3, \quad |y(0)| < \infty, \quad y'(3) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

23.3. Доказать, что

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}I_\nu(x).$$

23.4. Найти лапласовское изображение функции $\sqrt{t}I_1(2\sqrt{t})$.

23.5. Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty e^{-2t}J_0(t)dt.$$

23.6. Вычислить

$$\int_{-1}^1 (5 - |x|)P_n(x)dx.$$

23.7. Функцию $f(x)=e^{-x^2}$ разложить в ряд Фурье на интервале $]-\infty,\infty[$ по полиномам Эрмита.

23.8. Вычислить $(x\operatorname{sign}x)'$.

23.9. Вычислить производную порядка $3/2$ от функции $\theta(x)$.

23.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $\delta^{(n)}(t)$.

Вариант № 24

24.1. Вычислить
$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}dx.$$

24.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

$$\text{а)}\quad y''+\lambda y=0,\qquad y(\pi/2)=y'(3\pi/4)=0;$$
$$\text{б)}\quad x^2y''+xy'+\lambda y=0,\quad 1<x<3,\quad y(1)=y(3)=0.$$

Уравнение привести к самосопряженному виду. Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

24.3. Показать, что
$$J_0'(x)=-J_1(x),\qquad J_0''(x)=\frac{1}{2}[J_2(x)-J_0(x)].$$

24.4. Найти лапласовское изображение функции $I_0(2\sqrt{at})$.

24.5. Вычислить интеграл
$$\int\limits_0^\infty e^{-3t}J_0(2t)dt.$$

24.6. Вычислить
$$\int\limits_0^1 [xP_n(x)]^2dx.$$

24.7. Функцию $f(x)=x^3$ разложить в ряд Фурье по полиномам Эрмита на интервале $]-\infty,\infty[$.

24.8. Вычислить $(|x|)^{(m)}$, $m=\overline{2,\infty}$.

24.9. Вычислить первообразную порядка $3/2$ от функции $\theta(x)$.

24.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $\theta(t-a)$.

Вариант № 25

25.1. Вычислить интеграл
$$\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^2dx.$$

Сделать замену переменных $\ln(1/x) = t$.

25.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

$$\text{а)}\ \ y'' + \lambda y = 0, \qquad y(3/4) = y'(1) = 0;$$
$$\text{б)}\ \ y'' + y'\operatorname{ctg} x + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad |y(\pi)| < \infty.$$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

25.3. Выразить функции Бесселя $N_{1/2}(x)$, $N_{-1/2}(x)$, $K_{1/2}(x)$, $K_{-1/2}(x)$ через элементарные функции.

25.4. Найти лапласовское изображение функции $\sqrt{t}I_1(2\sqrt{at})$.

25.5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty J_0(2t)\sin t\,dt.$$

25.6. Вычислить

$$\int\limits_0^1 (1 - x^2)[P_n'(x)]^2 dx.$$

25.7. Функцию $f(x) = x^p$ разложить в ряд Фурье на интервале $]0, \infty[$ по полиномам Лагерра.

25.8. Вычислить $(\theta(x)\sin x)'$.

25.9. Вычислить производную порядка $1/2$ от функции $\theta(x)$.

25.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $\delta(t+a)+\delta(t-a)$.

Вариант № 26

26.1. Вычислить

$$\int\limits_0^2 x^8\sqrt{4 - x^2}\,dx.$$

26.2. Найти собственные значения и собственные функции задачи:

$$\text{а)}\ \ y'' + \lambda y = 0, \qquad y(\pi/4) = y'(\pi/2) = 0.$$
$$\text{б)}\ \ (xy')' - \frac{n^2}{x}y + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < 1,$$
$$|y(0)| < \infty, \quad 2y(1) + y'(1) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

26.3. Выразить функции Бесселя $J_{3/2}(x)$, $N_{3/2}(x)$ через элементарные функции.

26.4. Найти лапласовское изображение функции $J_n(t)$.

26.5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty J_1(2t)\sin t\,dt.$$

26.6. Показать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-x^2} H_n(x)dx = 0 \qquad 0 \leqslant m \leqslant n-1.$$

26.7. Разложить функцию $f(x) = |x|+\pi$ в ряд Фурье–Лежандра.
26.8. Вычислить $(\theta(x)\cos x)'$.
26.9. Вычислить первообразную порядка 1/2 от функции $\theta(x)$.
26.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $\delta(t+a)-\delta(t-a)$.

Вариант № 27

27.1. Вычислить

$$\int\limits_0^1 \Big(\ln\frac{1}{x}\Big)^4 dx.$$

Сделать замену переменных $\ln(1/x) = t$.
27.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y(-1) = 0 = y(1);$

б) $y'' + 2y'/x + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad 2y'(2) + y(2) = 0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.
27.3. Вычислить

$$\int\limits_0^\infty J_1(x)dx, \qquad \int\limits_0^\infty x^{-3}J_4(x)dx.$$

27.4. Найти лапласовское изображение функции $t^{n/2}J_n(2\sqrt{t})$.
27.5. Показать, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{J_0(t)\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

27.6. Вычислить

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-x^2} H_n(x)H_m(x)dx.$$

27.7. Функцию $f(x) = x^3$ разложить в ряд Дини на интервале $]0, 2[$ при $\nu = 3$.

27.8. Вычислить $(|x| \sin x)''$.

27.9. Вычислить $\theta(x) * \theta(x) \operatorname{sh} x$.

27.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $\delta(a^2t^2 - b^2)$.

Вариант № 28

28.1. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty e^{-x^n} dx = 1.$$

28.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y(3/2) = y'(0) = 0;$

б) $(2x+3)^2 y'' + 4(2x+3)y' + (\lambda+1)y = 0, \quad y(0) = y(3) = 0.$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

28.3. Вычислить

$$\int (x^3 + x) J_0(x) dx.$$

28.4. Найти лапласовское изображение функции $I_n(t)$.

28.5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty J_0(2t) \cos t \, dt.$$

28.6. Получить дифференциальное уравнение

$$y'' + (2n + 1 - x^2)y = 0$$

для функций Эрмита

$$u_n(x) = \|H_n(x)\|^{-1} H_n(x) e^{-x^2/2}.$$

28.7. Разложить в ряд Фурье–Лежандра функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ -1 - x, & -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

28.8. Вычислить $(|x| \cos x)''$.

28.9. Вычислить $\theta(x) \sin x * \theta(x)$.

28.10. Доказать, что

$$F_{x\to y}\big[\delta(\sin t)\big] \div \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n y}.$$

Вариант № 29

29.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $|x^3|+|y^3|=1$.
29.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

$$\text{а)}\quad y'' - 10y' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y'(3/2) = 0;$$
$$\text{б)}\quad x^2y'' + 2xy' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y(2) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.
29.3. Вычислить

$$\int x^3 J_0(x)dx.$$

29.4. Найти лапласовское изображение функции $t^{n/2}I_n(2\sqrt{t})$.
29.5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{J_0(t) - \cos t}{t}dt.$$

29.6. Вычислить

$$\int\limits_{-1}^0 (1+x)P_n(x)dx.$$

29.7. Функцию $y = x^2$ разложить в ряд Дини на интервале $]0,\pi[$ при $\nu = 2$.
29.8. Вычислить $(|x|\sin x)'$.
29.9. Вычислить $\theta(x) * \theta(x)x^3$.
29.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $\theta(x)x^k$, $k = \overline{1,\infty}$.

Вариант № 30

30.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x^4+y^4=1$.
30.2. Решить задачу Штурма–Лиувилля:

$$\text{а)}\quad y'' - 2y' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y'(2) = 0;$$
$$\text{б)}\quad xy'' + y' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y(2) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.
30.3. Вычислить

$$\int x^2 J_1(x)dx.$$

30.4. Найти лапласовское изображение функции $e^{-t}J_1(t)$.
30.5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{J_1(t)\cos t}{t}dt.$$

30.6. Вычислить

$$\int_0^\pi (\sin^2\theta + 5) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta.$$

30.7. Функцию $y = x^2$ разложить в ряд Дини на интервале $]0, \pi[$ при $\nu = 0$.

30.8. Вычислить $(|x| \cos x)'$.

30.9. Вычислить $\theta(x) x^2 * \theta(x)$.

30.10. Найти Фурье-образ обобщенной функции $x^k \mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}$, $k = \overline{1, \infty}$.