

ЧАСТЬ VII

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Данный раздел является центральным для всего курса математической физики. Подавляющее большинство физических задач удается математически сформулировать в виде различных дифференциальных или интегральных уравнений. Оказывается, что самые, на первый взгляд, непохожие физические задачи приводят к одинаковым по форме математическим уравнениям. Мы сочли полезным продемонстрировать это на большом числе самых разных примеров, проиллюстрировав не только способ получения уравнений, но и характер начальных и граничных условий. Наиболее типичные уравнения и являются предметом изучения в данном разделе курса. Свойства решений уравнений формулируются, как правило, в виде теорем, доказательства которых, за редким исключением, приводятся. Основные свойства решений иллюстрируются задачами. В большинстве случаев решения задач сопровождаются графиками, дающими наглядное представление о характере решения.

ГЛАВА 1

Уравнения в частных производных первого порядка

Введение

Мы будем рассматривать те дифференциальные уравнения в частных производных, которые описывают математические модели физических явлений. Именно эти уравнения и называются дифференциальными уравнениями математической физики.

◆ Уравнение, содержащее кроме независимых переменных $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ и искомой функции $u = u(\vec{x})$ частные производные этой функции, называют дифференциальным уравнением в частных производных.

Такое уравнение записывается в виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_k x_n \dots}, \dots) = 0, \quad (0.1)$$

где F – заданная функция от своих аргументов. Здесь и далее

мы используем обозначения

$$u_{x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad u_{x_k, x_l} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}, \dots$$

◆ Порядок уравнения равен порядку старшей производной, входящей в уравнение.

◆ Решением уравнения (0.1) называется любая функция $u = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, которая, будучи подставленной в уравнение (0.1), обращает его в тождество.

◆ Совокупность всех частных решений уравнения (0.1) называется общим решением уравнения (0.1).

Пример 0.1. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + x, \quad (0.2)$$

где $u = u(x, y)$.

Решение. Проинтегрируем (0.2) по x и получим

$$u(x, y) = xy + \frac{x^2}{2} + \Phi(y),$$

где $\Phi(y)$ – произвольная функция.

Пример 0.2. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = 0. \quad (0.3)$$

Решение. Проинтегрировав уравнение один раз по переменной x , получим

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция переменной y . Проинтегрировав еще раз по x , найдем

$$u(x, y) = x\varphi(y) + \psi(y),$$

где $\psi(y)$ – также произвольная функция.

◇ Из рассмотренных примеров видно, что общие решения уравнений (0.2) и (0.3) содержат произвольные функции.

В этом заключается отличие общего решения уравнения в частных производных от общего решения обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащего, как правило, лишь произвольные постоянные, количество которых равно порядку уравнения. Для уравнения в частных производных первого порядка обычно существует общее решение, зависящее от произвольной функции, а для уравнений второго порядка – от двух произвольных функций. Однако для многих уравнений более высокого порядка явное представление общего решения через произвольные функции затруднительно.

1. Линейные уравнения в частных производных первого порядка

◆ Дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение, содержащее неизвестную функцию и ее частные производные только первого порядка.

Общий вид дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) = 0 \quad (1.1)$$

или в векторной форме

$$F(\vec{x}, u, \nabla u) = 0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}_x^n. \quad (1.2)$$

Здесь F – заданная функция своих аргументов.

◇ Геометрически решение $u = u(\vec{x})$ уравнения (1.2) можно интерпретировать как поверхность в $n + 1$ -мерном пространстве $(\vec{x}, u) \in \mathbb{R}_{x,u}^{n+1}$, представляющем собой прямое произведение пространства \mathbb{R}_x^n на пространство \mathbb{R}_u ($\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_u$). Такая поверхность называется интегральной поверхностью уравнения (1.2).

◆ Уравнение вида

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} a_k(\vec{x}) + u a_0(\vec{x}) = b(\vec{x}), \quad (1.3)$$

где $b(\vec{x}) = b(x_1, \dots, x_n)$ и $a_k(\vec{x}) = a_k(x_1, \dots, x_n)$, $k = \overline{0, n}$, – заданные функции указанных аргументов, называется линейным уравнением в частных производных первого порядка. Уравнение (1.3) называется однородным, если $b(\vec{x}) \equiv 0$, и неоднородным в противном случае.

◆ Уравнение вида

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} a_k(\vec{x}, u) = a_0(\vec{x}, u) \quad (1.4)$$

называется квазилинейным (линейным относительно частных производных). Если $a_0(\vec{x}, u) = 0$, то уравнение (1.4) называется квазилинейным однородным, в противном случае – неоднородным.

Рассмотрим подробнее квазилинейные уравнения с двумя независимыми переменными

$$P(x, y, u)u_x + Q(x, y, u)u_y = R(x, y, u). \quad (1.5)$$

Функции P, Q, R будем считать непрерывно дифференцируемыми в некоторой области D пространства $\mathbb{R}_{x,y,u}^3$, причем P и Q не обращаются в нуль одновременно в области D .

Заданные функции (P, Q, R) определяют в области D векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$.

◆ Кривая L называется векторной линией поля \vec{a} , или интегральной кривой, соответствующей этому полю направлений, если в каждой точке этой кривой касательный вектор параллелен вектору \vec{a} .

Векторные линии поля \vec{a} определяются в результате интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x, y, u)} = \frac{dy}{Q(x, y, u)} = \frac{du}{R(x, y, u)} = dt. \quad (1.6)$$

Мы уже отмечали, что решение уравнения (1.5) определяет в пространстве x, y, u некоторую поверхность $u = u(x, y)$, называемую интегральной. Нормаль к этой поверхности параллельна вектору $\vec{n} = (u_x, u_y, -1)$. В этом случае уравнение (1.5) выражает условие ортогональности нормали к векторным линиям поля направлений

$$(\vec{n}, \vec{a}) = 0, \quad \vec{n} = (u_x, u_y, -1), \quad \vec{a} = (P, Q, R). \quad (1.7)$$

Система уравнений (1.6), записанная в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x, y, u), \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} = Q(x, y, u), \\ \frac{du}{dt} = \dot{u} = R(x, y, u), \end{cases} \quad (1.8)$$

задает в параметрической форме (t – параметр) векторные линии поля \vec{a} .

◆ Система уравнений (1.6) или (1.8) называется характеристической, а ее решения – характеристическими линиями, или характеристиками, уравнения (1.5).

◇ Если поверхность $u = u(x, y)$ – геометрическое место характеристических линий уравнения (1.5), т.е. образована линиями, удовлетворяющими системе (1.8), то любая плоскость, касательная к этой поверхности, ортогональна вектору \vec{n} . Следовательно, функция $u(x, y)$, задающая поверхность, удовлетворяет уравнению (1.5), и поверхность $u = u(x, y)$ является его интегральной поверхностью.

Рассмотрим первый интеграл характеристической системы уравнений (1.8).

◆ Первым интегралом системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, \dots, x_n, t), \quad j = \overline{1, n} \quad (1.9)$$

называется функция $\Psi(x_1, \dots, x_n, t)$, не равная тождественно постоянной, но сохраняющая постоянное значение на решениях $\vec{x} = \vec{x}(t)$ системы (1.9), т.е. $\Psi(x_1(t), \dots, x_n(t), t) = C$.

Теорема 1.1. Пусть

$$\Psi(x, y, u) = C \quad (1.10)$$

– первый интеграл системы (1.8), $\Psi(x, y, u)$ дифференцируема по всем своим аргументам и

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u}(x, y, u) \neq 0.$$

Тогда функция $u = \varphi(x, y)$, неявно определяемая соотношением (1.10), удовлетворяет уравнению (1.5).

Доказательство. Функция $\Psi(x, y, u) = C$ – первый интеграл системы (1.8). Следовательно,

$$\frac{d}{dt}[\Psi(x, y, u) - C] = 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{du}{dt} = 0.$$

Разделим полученное уравнение на $\partial\Psi/\partial u$. Учтя систему (1.8) и правила дифференцирования функций, заданных неявно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial\Psi/\partial x}{\partial\Psi/\partial u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi/\partial y}{\partial\Psi/\partial u},$$

получим

$$-\frac{\partial u}{\partial x}P(x, y, z) - \frac{\partial u}{\partial y}Q(x, y, u) + R(x, y, u) = 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Следствие. Пусть

$$\begin{aligned} \Psi_1(u, x, y) &= C_1, \\ \Psi_2(u, x, y) &= C_2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

– два линейно независимых первых интеграла системы (1.8). Тогда общее решение уравнения (1.5) неявным образом задается соотношением

$$\Phi(\Psi_1(u, x, y), \Psi_2(u, x, y)) = 0, \quad (1.12)$$

где $\Phi(C_1, C_2)$ – произвольная гладкая функция двух переменных.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.

Пример 1.1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1.$$

Решение. Заметим, что $\vec{a} = (1, 1, 1)$. Следовательно, характеристическая система имеет вид $dx = dy = du$ или

$$\begin{cases} dx = dy \\ dx = du \end{cases}, \quad \text{что дает} \quad \begin{cases} x - y = C_1, \\ x - u = C_2. \end{cases}$$

В силу приведенного выше следствия общее решение неявно задается уравнением

$$\Phi(x - y, x - u) = 0.$$

Так как функция u входит только в один первый интеграл, то общее решение уравнения можно записать в виде

$$\tilde{\Phi}(x - y) + x - u = 0$$

или

$$u(x, y) = \tilde{\Phi}(x - y) + x,$$

где $\tilde{\Phi}(\omega)$ – произвольная функция.

Пример 1.2. Найти общее решение уравнения

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Решение. В этом случае

$$P(x, y, u) = x, \quad Q(x, y, u) = -u, \quad Z(x, y, u) = 0.$$

Характеристическая система примет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-u} = \frac{du}{0}. \quad (1.13)$$

Из последнего соотношения найдем $u = C_1$ и

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{C_1},$$

$$y = -C_1 \ln x + \ln C_2 = \ln C_2 x^{-C_1}.$$

В результате для первых интегралов системы (1.13) получим

$$C_1 = u, \quad C_2 = e^y x^{C_1} = e^y x^u,$$

а общее решение исходной задачи неявным образом определяется соотношением

$$\Phi(u, e^y x^u) = 0.$$

◇ Задача Коши для дифференциального уравнения (1.5) формулируется следующим образом: определить интегральную поверхность уравнения (1.5), которая проходит через заданную кривую в пространстве (u, x, y) .

В неявной форме эта кривая задается системой уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(u, x, y) = 0, \\ \Phi_2(u, x, y) = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

при условии, что

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = 2.$$

◇ Полученные результаты легко обобщить на случай квазилинейного уравнения (1.4) с произвольным числом переменных. Полностью эти обобщения описаны теоремами (1.2) и (1.3), которые полезно предварить рядом примеров.

Пример 1.3. Найти общее решение уравнения

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - yz \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = u(x, y, z) \quad (1.15)$$

и выделить из общего решения частное, удовлетворяющее условию

$$u|_{z=1} = x^y. \quad (1.16)$$

Решение. 1. В нашем случае уравнение (1.15) представляется в виде

$$P(x, y, z)u_x + Q(x, y, z)u_y + R(x, y, z)u_z = Z(x, y, z),$$

где

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= x, & Q(x, y, z) &= 0, \\ R(x, y, z) &= -yz, & Z(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, характеристическая система

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} = \frac{du}{Z(x, y, z)}$$

примет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{-yz} = \frac{du}{0}. \quad (1.17)$$

Здесь нуль в знаменателе понимается в смысле пропорции, т.е. если записано $a/0 = b/c$, то $a = (b/c) \cdot 0 = 0$. Из (1.17) получим

$$dy = 0, \quad du = 0, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{-yz}$$

и найдем первые интегралы

$$y = C_1, \quad u = C_3, \quad \ln x = -\frac{\ln z}{C_1} + \ln C_2$$

или

$$C_2 = xz^{1/C_1} = xz^{1/y}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1.15) неявным образом определяется уравнением

$$\Phi(y, xz^{1/y}, u) = 0, \quad (1.18)$$

где $\Phi(y, \omega, u)$ – произвольная функция трех переменных. Разрешив уравнение (1.18) относительно u , получим

$$u = f(y, \omega) \Big|_{\omega=xz^{1/y}},$$

где $f(y, \omega)$ – произвольная функция двух переменных. Из условия (1.16) находим

$$u \Big|_{z=1} = f(y, \omega) \Big|_{\omega=x} = x^y.$$

Выразив правую часть соотношения через ω , получим, что

$$f(y, \omega) = \omega^y.$$

Следовательно, решение задачи (1.15), (1.16) имеет вид

$$u = \omega^y \Big|_{\omega=xz^{1/y}} = (xz^{1/y})^y = zx^y. \quad (1.19)$$

Пример 1.4. Найти общее решение уравнения

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial u}{\partial y} = u, \quad u = u(x, y) \quad (1.20)$$

и выделить из него частное, удовлетворяющее условию

$$u \Big|_{x=2} = y - 4. \quad (1.21)$$

Решение. В нашем случае

$$P(x, y, u) = x, \quad Q(x, y, u) = y + x^2, \quad Z(x, y, u) = u.$$

Следовательно, характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2} = \frac{du}{u}. \quad (1.22)$$

В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y+x^2}, \\ \frac{dx}{x} = \frac{du}{u}. \end{cases}$$

Из второго уравнения получим

$$\ln u = \ln x + \ln C_2. \quad (1.23)$$

Первое уравнение системы эквивалентно линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x,$$

решение которого имеет вид

$$y = (C_1 + x)x. \quad (1.24)$$

Разрешим уравнения (1.23) и (1.24) относительно C_1 и C_2 . Тогда первые интегралы системы (1.22) есть

$$C_1 = \frac{y}{x} - x, \quad C_2 = \frac{u}{x}, \quad (1.25)$$

а общее решение уравнения (1.20) неявным образом определяется соотношением

$$\Phi\left(\frac{y}{x} - x, \frac{u}{x}\right) = 0, \quad (1.26)$$

где $\Phi(p, q)$ – произвольная функция двух переменных. Разрешив (1.26) относительно u , найдем

$$u = xf(\omega)\Big|_{\omega=\frac{y}{x}-x}, \quad (1.27)$$

где $f(\omega)$ – произвольная функция. Перейдем к решению задачи Коши.

1. *Первый способ.* С учетом условия (1.21) из (1.27) запишем

$$u|_{x=2} = 2f(\omega)\Big|_{\omega=\frac{y}{2}-2} = y - 4.$$

Выразив правую часть через ω , получим

$$2f(\omega) = 2\omega + 4 - 4.$$

Следовательно, $f(\omega) = \omega$, и решение задачи (1.20) и (1.21) имеет вид

$$u = x\omega \Big|_{\omega = \frac{y}{x} - x} = y - x^2. \quad (1.28)$$

2. *Второй способ.* Записав первые интегралы (1.25) с учетом условия (1.21), получим

$$C_1 = \frac{y}{2} - 2, \quad C_2 = \frac{y-4}{2},$$

т.е.

$$C_1 = C_2.$$

Возвратившись в полученном равенстве к явному виду первых интегралов, найдем

$$\frac{y}{x} - x = \frac{u}{x},$$

что эквивалентно соотношению (1.28).

Обобщим полученные результаты на многомерный случай. Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x}, u), \quad \dot{u} = a_0(\vec{x}, u). \quad (1.29)$$

Будем предполагать, что функции $\vec{a}(\vec{x}, u)$ и $a_0(\vec{x}, u)$ непрерывно дифференцируемы в области $D \subset \mathbb{R}_{\vec{x}, u}^{n+1}$, а вектор $\vec{a}(\vec{x}, u)$ отличен от тождественного нуля в области D .

◇ Далее мы будем использовать обозначение

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

для евклидова скалярного произведения векторов в отличие от эрмитова скалярного произведения

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{k=1}^n a_k^* b_k.$$

Теорема 1.2. Пусть $w(\vec{x}, u)$ — первый интеграл системы (1.29). Тогда функция $u(\vec{x}, t)$, неявно определяемая уравнением $w(\vec{x}, u) = 0$, удовлетворяет квазилинейному уравнению

$$\langle \vec{a}(\vec{x}, u), \nabla u \rangle = a_0(\vec{x}, u). \quad (1.30)$$

Доказательство. По правилу дифференцирования сложных функций найдем

$$\nabla u = -\frac{\nabla w}{\partial w/\partial u}. \quad (1.31)$$

Продифференцируем первый интеграл системы (1.30) по t

$$\frac{dw}{dt} = \langle \nabla w, \dot{\vec{x}} \rangle + \frac{\partial w}{\partial u} \dot{u} = \langle \nabla w, \vec{a}(\vec{x}, u) \rangle + \frac{\partial w}{\partial u} a_0(\vec{x}, u) = 0.$$

Воспользуемся соотношением (1.31) и получим (1.30), что и требовалось доказать.

Теорема 1.3. Пусть $w_k(\vec{x}, u)$, $k = \overline{1, n}$ – независимые первые интегралы системы (1.29). Тогда общее решение уравнения (1.30) определяется соотношением

$$F(w_1(\vec{x}, u), w_2(\vec{x}, u), \dots, w_n(\vec{x}, u)) = 0, \quad (1.32)$$

где $F(w_1, w_2, \dots, w_n)$ – произвольная гладкая функция n переменных.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.

♦ Система (1.29) называется характеристической системой для уравнения (1.30).

2. Задача Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Рассмотрим уравнение

$$\langle \vec{a}(\vec{x}), \nabla u \rangle + a_0(\vec{x})u = f(\vec{x}). \quad (2.1)$$

Задача Коши для уравнения (2.1) ставится на поверхности размерности $n - 1$ в пространстве \mathbb{R}_x^n .

♦ Гладкой гиперповерхностью γ называется множество в \mathbb{R}^n , заданное уравнением

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(s_1, \dots, s_{n-1}), \quad (s_1, \dots, s_{n-1}) \in U,$$

где U – область в пространстве \mathbb{R}_s^{n-1} , а вектор-функция $\vec{\varphi}(s_1, \dots, s_{n-1})$ – непрерывно дифференцируемая в U и

$$\text{rang} \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_k} \right\| = n - 1.$$

◆ Задачей Коши для уравнения (2.1) называется задача о нахождении его решения, удовлетворяющего условию

$$u(\vec{x})|_{\gamma} = h(s_1, \dots, s_{n-1}), \quad (2.2)$$

где $h(s_1, \dots, s_{n-1})$ – функция, непрерывно дифференцируемая в U . Поверхность γ называется поверхностью Коши.

◆ Система

$$\dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x}) \quad (2.3)$$

называется характеристической системой для уравнения (2.1), а ее решение – характеристикой.

Теорема 2.1. Пусть гиперповерхность γ не касается характеристик. Тогда задача Коши (2.1), (2.2) однозначно разрешима в некоторой окрестности гиперповерхности γ .

Доказательство. 1. Выпустим из каждой точки поверхности γ характеристику системы (2.3), т.е. решим задачу Коши для системы (2.3):

$$\vec{x}|_{t=0} = \vec{\varphi}(s_1, \dots, s_{n-1}), \quad (s_1, \dots, s_{n-1}) \in U. \quad (2.4)$$

2. Пусть

$$\vec{x} = \vec{X}(t, s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (2.5)$$

– решение задачи Коши (2.3), (2.4). Тогда вдоль характеристик

$$\frac{du}{dt} = \langle \nabla u, \dot{\vec{x}} \rangle = \langle \nabla u, \vec{a}(\vec{x}) \rangle. \quad (2.6)$$

3. Для определения функции $u = U(t, s_1, \dots, s_{n-1})$ получим задачу Коши на характеристиках системы (2.3)

$$\frac{du}{dt} + a_0(\vec{x}(t))u = f(\vec{x}(t)), \quad u|_{t=0} = h(s_1, \dots, s_{n-1}). \quad (2.7)$$

Решив это уравнение, получим $u = U(t, s_1, \dots, s_{n-1})$ как гладкую функцию от t, s_1, \dots, s_{n-1} .

4. Разрешим систему (2.5) относительно t и s_k , т.е. найдем $t = T(\vec{x})$ и $s_k = S_k(\vec{x})$, $k = \overline{1, n-1}$. В результате решение задачи Коши (2.1)–(2.5) запишется в виде

$$u(\vec{x}) = U(T(\vec{x}), S_1(\vec{x}), \dots, S_{n-1}(\vec{x})).$$

Остается показать, что U есть гладкая функция переменной \vec{x} . Для этого достаточно убедиться, что из соотношения (2.5) можно выразить t, s_1, \dots, s_{n-1} как гладкие функции через \vec{x} .

Действительно, якобиан

$$J = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \vec{X}}{\partial s_{n-1}} \right|_{t=0} = \left| \vec{a}(\vec{x}), \frac{\partial \vec{x}}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial s_{n-1}} \right|_{\vec{x} \in \gamma} \neq 0,$$

так как, по условию, гиперповерхность γ не касается характеристик. Таким образом, существование решения задачи Коши доказано.

5. Предположим, что задача Коши (2.1), (2.2) имеет два решения $u_1(\vec{x})$ и $u_2(\vec{x})$. Введем $v = u_1 - u_2$, тогда

$$\langle \nabla v, \vec{a}(\vec{x}) \rangle + a_0(\vec{x})v = 0, \quad v|_{\gamma} = 0.$$

В силу уравнения (2.7) на характеристиках имеем

$$\frac{dv}{dt} + a_0(t)v = 0, \quad v|_{t=0} = 0,$$

По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений $v(t) = 0$. Следовательно, $u_1(\vec{x}) = u_2(\vec{x})$ и решение задачи Коши (2.1), (2.2) единственно. Таким образом, теорема доказана.

Из этого доказательства следует, что для решения задачи Коши (2.1), (2.2) достаточно:

- 1) построить характеристики системы (2.3), проходящие через поверхность γ , и найти $\vec{x} = \vec{X}(t, s_1, \dots, s_{n-1})$ – решение задачи Коши (2.3), (2.4);
- 2) решить семейство задач Коши (2.7), т.е. найти $u = U(t, s_1, \dots, s_{n-1})$;
- 3) найти решение системы (2.5)

$$t = T(\vec{x}), \quad s_k = S_k(\vec{x}), \quad k = \overline{1, n-1}; \quad (2.8)$$

- 4) используя (2.8), вычислить

$$u(\vec{x}) = U(T(\vec{x}), S_1(\vec{x}), \dots, S_{n-1}(\vec{x})).$$

Пример 2.1. Используя приведенную выше схему, найти решение задачи Коши

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - yz \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u|_{z=1} = x^y.$$

Решение. 1. В этом случае характеристическая система имеет вид

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = -yz. \quad (2.9)$$

Уравнение поверхности Коши $z = 1$ в параметрической форме запишется как

$$x = s_1, \quad y = s_2, \quad z = 1, \quad (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2,$$

начальные условия примут вид

$$x|_{t=0} = s_1, \quad y|_{t=0} = s_2, \quad z|_{t=0} = 1.$$

Из (2.9) найдем

$$\begin{aligned} x = X(t, s_1, s_2) &= s_1 e^t, & y = Y(t, s_1, s_2) &= s_2, \\ z = Z(t, s_1, s_2) &= e^{-s_2 t}. \end{aligned}$$

2. Задача Коши (2.7) примет вид

$$\dot{u} = 0, \quad u|_{t=0} = s_1^{s_2},$$

откуда

$$u = V(t, s_1, s_2) = s_1^{s_2}.$$

3. Разрешим систему уравнений

$$x = s_1 e^t, \quad y = s_2, \quad z = e^{s_2 t}$$

относительно t , s_1 и s_2 . Получим

$$s_2 = y, \quad s_1 = e^{-t} x, \quad s_2 t = -\ln z,$$

откуда

$$\begin{aligned} s_1 = S_1(x, y, z) &= x e^{(\ln z)/y}, & s_2 = S_2(x, y, z) &= y, \\ t = T(x, y, z) &= -\frac{\ln z}{y}. \end{aligned}$$

4. Окончательно получим

$$u = U(T(x, y, z), S_1(x, y, z), S_2(x, y, z)) = \left[x e^{(\ln z)/y} \right]^y = z x^y,$$

что совпадает с (1.19).

Пример 2.2. Используя приведенную выше схему, найти решение задачи Коши

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial u}{\partial z} = u, \quad u|_{x=2} = y - 4.$$

Решение. 1. Характеристическая система имеет вид

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y + x^2. \quad (2.10)$$

Уравнение поверхности Коши $x = 2$ в параметрической форме имеет вид

$$x = 2, \quad y = s_1, \quad s_1 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, для системы (2.10) необходимо поставить начальные условия

$$x|_{t=0} = 2, \quad y|_{t=0} = s_1.$$

Из (2.10) найдем

$$x = 2e^t, \quad y = s_1 e^t + 4e^{2t}. \quad (2.11)$$

2. Для определения функции $U(t, s_1)$ получим задачу Коши

$$\dot{u} = u, \quad u|_{t=0} = s_1 + 4,$$

откуда

$$u = V(t, s_1) = (s_1 + 4)e^t. \quad (2.12)$$

3. Разрешим систему уравнений (2.11) относительно t, s_1 :

$$t = \ln \frac{x}{2}, \quad s_1 = ye^{-t} - 4e^t = \frac{2y}{x} - 2x. \quad (2.13)$$

4. Подставив (2.13) в (2.12), окончательно получим

$$u(x, y) = \left(\frac{2y}{x} - 2x \right) \frac{x}{2} = y - x^2,$$

что совпадает с (1.28).

3. Уравнение Гамильтона–Якоби

◆ Уравнение в частных производных первого порядка, не содержащее явным образом неизвестную функцию, называется уравнением Гамильтона–Якоби. Уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(\nabla S, \vec{x}, t) = 0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}_x^n, \quad S = S(\vec{x}, t) \quad (3.1)$$

и

$$\mathcal{H}(\nabla S, \vec{x}) = E, \quad \nabla S = \frac{\partial S}{\partial \vec{x}}, \quad E = \text{const}, \quad S = S(\vec{x}) \quad (3.2)$$

называются нестационарным и стационарным уравнениями Гамильтона–Якоби, а их решения – функции $S(\vec{x}, t)$ и $S(\vec{x})$ – нестационарным и стационарным действием соответственно. Функция $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)$, $\vec{p} \in \mathbb{R}_p^n$, называется функцией Гамильтона или гамильтонианом; n -мерное пространство \mathbb{R}_x^n называется конфигурационным; $2n$ -мерное пространство $\mathbb{R}_{xp}^{2n} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_p^n$ – фазовым. Если гамильтониан не зависит от времени, то он называется стационарным.

◇ Уравнение Гамильтона–Якоби – основное уравнение классической механики и, кроме того, естественным образом возникает в теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, поскольку произвольное уравнение в частных производных первого порядка может быть сведено к уравнению (3.1) или (3.2), о чем говорит следующее утверждение, которое непосредственно следует из теоремы о дифференцировании неявных функций:

$$-\frac{\partial S}{\partial \vec{x}} / \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \vec{x}} = \nabla u.$$

Утверждение 3.1. Произвольное уравнение в частных производных первого порядка

$$F(\vec{x}, u, \nabla u) = 0 \quad (3.3)$$

для функции n переменных $u(\vec{x})$ эквивалентно уравнению Гамильтона–Якоби

$$F\left(\vec{x}, z, -\frac{\partial S}{\partial \vec{x}} / \frac{\partial S}{\partial z}\right) = 0 \quad (3.4)$$

для функции $n + 1$ переменных $S(\vec{x}, z)$. Решения уравнений (3.3) и (3.4) связаны соотношением

$$S(\vec{x}, u) = \text{const}.$$

3.1. Задача Коши для нестационарного уравнения Гамильтона–Якоби

♦ Задачей Коши для уравнения (3.1) называется задача об отыскании функции $S(\vec{x}, t)$, удовлетворяющей уравнению (3.1) при $t > t_0$ и условию

$$S(\vec{x}, t)|_{t=t_0} = S_0(\vec{x}) \quad (3.5)$$

при $t = t_0$. Здесь $S_0(\vec{x})$ – заданная гладкая функция переменной \vec{x} .

♦ Системой Гамильтона, соответствующей гамильтониану $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}_x^n$, $\vec{p} \in \mathbb{R}_p^n$, $t > 0$, называется система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)}{\partial \vec{p}}, \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)}{\partial \vec{x}}. \quad (3.6)$$

Система (3.6) также называется характеристической системой уравнения (3.1), а ее решения – характеристиками.

♦ Задачей Коши для системы Гамильтона называется задача об определении вектор-функций $\vec{p}(t)$ и $\vec{x}(t)$, удовлетворяющих при $t > t_0$ системе (3.1), а при $t = t_0$ – условиям

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad \vec{p}(t_0) = \vec{p}_0, \quad \vec{x}_0 \in \mathbb{R}_x^n, \quad \vec{p}_0 \in \mathbb{R}_p^n. \quad (3.7)$$

Для интегрирования систем с нестационарными гамильтонианами оказывается полезным следующее утверждение.

Утверждение 3.2. Пусть гамильтониан \mathcal{H} не зависит явно от переменной t . Тогда он является интегралом системы (3.6).

Действительно, пусть $\vec{x}(t)$ и $\vec{p}(t)$ – решения системы Гамильтона (3.6). Тогда, продифференцировав функцию $\mathcal{H}(\vec{p}(t), \vec{x}(t))$ по t , с учетом системы Гамильтона (3.6) найдем

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(\vec{p}(t), \vec{x}(t)) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} \right) = 0,$$

т.е. $\mathcal{H}(\vec{p}(t), \vec{x}(t)) = \text{const}$, что и требовалось показать.

Лемма 3.1. Пусть $S(\vec{x}, t)$ – решение задачи Коши (3.5) для уравнения Гамильтона–Якоби (3.1), а функция $\vec{x} = \vec{X}(t, \vec{x}_0)$ – решение задачи Коши

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}(\nabla S(\vec{x}, t), \vec{x}, t), \quad \vec{x}|_{t=t_0} = \vec{x}_0. \quad (3.8)$$

Тогда функции $\vec{X}(t, \vec{x}_0)$ и $\vec{P}(t) = \nabla S(\vec{X}(t, \vec{x}_0), t)$ удовлетворяют системе Гамильтона (3.6) с начальным условием

$$\vec{X}(t_0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0, \quad \vec{P}(t_0, \vec{x}_0) = \frac{\partial S_0(\vec{x}_0, t_0)}{\partial \vec{x}_0}. \quad (3.9)$$

Доказательство. Обозначим $\vec{p}(\vec{x}, t) = \nabla S(\vec{x}, t)$ и продифференцируем уравнение Гамильтона–Якоби по \vec{x} . Получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \mathcal{H}(\vec{p}, (\vec{x}, t), \vec{x}, t) = \\ & = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{p}(\vec{x}, t), \vec{x}, t)}{\partial p_k} \frac{\partial p_k(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{p}(\vec{x}, t), \vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Положим $\vec{x} = \vec{X}(t, \vec{x}_0)$, где $\vec{X}(t, \vec{x}_0)$ – решение уравнения (3.8). С другой стороны,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= \left\{ \frac{\partial \vec{p}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{p}(\vec{x}, t)}{\partial x_k} \dot{X}_k \right\} \Big|_{\vec{x}=\vec{X}(t, \vec{x}_0)} = \\ &= \left\{ \frac{\partial \vec{p}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_k(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{p}(\vec{x}, t), \vec{x}, t)}{\partial p_k} \right\} \Big|_{\vec{x}=\vec{X}(t, \vec{x}_0)} = \\ &= - \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{p}(\vec{x}, t), \vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \Big|_{\vec{x}=\vec{X}(t, \vec{x}_0)}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (3.10). Следовательно, лемма доказана.

Теорема 3.1. 1. Пусть при $t \in [0, T]$ существует решение

$$x_j = X_j(t, \vec{x}_0), \quad p_j = P_j(t, \vec{x}_0), \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.11)$$

задачи Коши (3.9) для системы Гамильтона (3.6), дифференцируемое по параметру $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}_x^n$.

2. Пусть при $t \in [0, T]$ существует единственное и гладкое решение системы уравнений

$$\vec{x} = \vec{X}(t, \vec{x}_0) \quad (3.12)$$

относительно \vec{x}_0 , $\vec{x}_0 = \vec{X}_0(t, \vec{x})$, т.е. якобиан

$$J(\vec{x}_0, t) = \det \left\| \frac{\partial X_j(t, \vec{x}_0)}{\partial x_{i0}} \right\|, \quad t \in [0, T], \quad (3.13)$$

отличен от нуля для $\vec{x} \in \mathbb{R}_x^n$.

3. Пусть

$$S(t, \vec{x}_0) = S_0(\vec{x}_0) + \int_{t_0}^t [\langle \vec{P}(\tau), \dot{\vec{X}}(\tau) \rangle - \mathcal{H}(\tau)] d\tau \quad (3.14)$$

– действие (см. разд. «Уравнения Эйлера–Лагранжа (многомерный случай)» части II) вдоль характеристики (3.11).

Тогда функция

$$S(\vec{x}, t) = S(t, \vec{x}_0)|_{\vec{x}_0 = \vec{X}_0(t, \vec{x})} \quad (3.15)$$

является решением задачи Коши (3.1), (3.5).

◇ Здесь и далее, где это не приводит к недоразумениям, зависимость функций \vec{P} и \vec{X} от \vec{x}_0 опускается и используется обозначение $\mathcal{H}(\tau) = \mathcal{H}(\vec{P}(\tau), \vec{X}(\tau), \tau)$.

Доказательство. 1. Найдем частную производную

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_{0j}} [S(t, \vec{x}_0) - S_0(\vec{x}_0)] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{0j}} \int_{t_0}^t [\langle \vec{P}(\tau, \vec{x}_0), \dot{\vec{X}}(\tau, \vec{x}_0) \rangle - \mathcal{H}(\tau)] d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t \left(\left\langle \frac{\partial \vec{P}(\tau)}{\partial x_{0j}}, \dot{\vec{X}}(\tau) \right\rangle + \left\langle \vec{P}(\tau), \frac{\partial \dot{\vec{X}}(\tau)}{\partial x_{0j}} \right\rangle - \right. \\ & \left. - \left\langle \mathcal{H}_{\vec{p}}(\tau), \frac{\partial \vec{P}(\tau)}{\partial x_{0j}} \right\rangle - \left\langle \mathcal{H}_{\vec{x}}(\tau), \frac{\partial \vec{X}(\tau)}{\partial x_{0j}} \right\rangle \right) d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^t \left(\left\langle \vec{P}(\tau), \frac{\partial \vec{X}(\tau)}{\partial x_{0j}} \right\rangle + \left\langle \dot{\vec{P}}(\tau), \frac{\partial \vec{X}(\tau)}{\partial x_{0j}} \right\rangle \right) d\tau = \\
&= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left\langle \vec{P}(\tau), \frac{\partial \vec{X}(\tau)}{\partial x_{0j}} \right\rangle d\tau = \left\langle \vec{P}(\tau), \frac{\partial \vec{X}(\tau)}{\partial x_{0j}} \right\rangle \Big|_{t_0}^t = \\
&= \left\langle \vec{P}(t), \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial x_{0j}} \right\rangle - \left\langle \vec{P}(t_0), \frac{\partial \vec{X}(t_0)}{\partial x_{0j}} \right\rangle,
\end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x_{0j}} [S(t, \vec{x}_0) - S_0(\vec{x}_0)] = \left\langle \vec{P}(t), \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial x_{0j}} \right\rangle - \left\langle \vec{P}(t_0), \frac{\partial \vec{X}(t_0)}{\partial x_{0j}} \right\rangle$$

и

$$\frac{\partial S(t, \vec{x}_0)}{\partial x_{0j}} = \left\langle \vec{P}(t), \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial x_{0j}} \right\rangle. \quad (3.16)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями

$$\frac{\partial X_i(t_0)}{\partial x_{0j}} = \delta_{ij} \quad \text{и} \quad \frac{\partial S_0(\vec{x}_0)}{\partial x_{0j}} = P_j(t_0). \quad (3.17)$$

2. Найдем

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial S(t, \vec{x}_0)}{\partial x_{0j}} \frac{\partial \vec{X}_{0j}(t, \vec{x})}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}_0 = \vec{X}_0(\vec{x}, t)}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \left\langle \vec{P}(t), \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial x_{0j}} \right\rangle \frac{\partial X_{0j}(t, \vec{x})}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}_0 = \vec{X}_0(\vec{x}, t)}. \quad (3.18)$$

Продифференцировав соотношение $\vec{X}(t, \vec{X}_0(t, \vec{x})) = \vec{x}$ по x_i , получим

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial X_k(t, \vec{X}_0(t, \vec{x}))}{\partial x_{0j}} \frac{\partial X_{0j}(t, \vec{x})}{\partial x_i} = \delta_{ik}.$$

Подставив последнее соотношение в (3.18), запишем

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial x_i} = P_i(t, \vec{x}_0) \Big|_{\vec{x}_0 = \vec{X}_0(\vec{x}, t)}. \quad (3.19)$$

3. В силу (3.16), (3.17) получим

$$\frac{\partial S(t, \vec{x})}{\partial t} = \left\{ \langle \vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t) \rangle - \mathcal{H}(t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_{0j}(t, \vec{x})}{\partial t} \frac{\partial S(t_0, \vec{x}_0)}{\partial x_{0j}} \right\} \Big|_{\vec{x}_0 = \vec{X}_0(\vec{x}, t)},$$

т.е.

$$\frac{\partial S(t, \vec{x})}{\partial t} = \left\{ \langle \vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t) \rangle - \mathcal{H}(t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_{0j}(t, \vec{x})}{\partial t} \left\langle \vec{P}(t), \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial x_{0j}} \right\rangle \right\} \Big|_{\vec{x}_0 = \vec{X}_0(\vec{x}, t)}. \quad (3.20)$$

Продифференцировав соотношение $\vec{X}(t, \vec{X}_0(t, \vec{x})) = \vec{x}$ по t , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} [\vec{X}(t, \vec{X}_0(t, \vec{x})) - \vec{x}] = \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial x_{0j}} \frac{\partial X_{0j}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial t} \right] \Big|_{\vec{x}_0 = \vec{X}_0(\vec{x}, t)} = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial x_{0j}} \frac{\partial X_{0j}}{\partial t} \Big|_{\vec{x}_0 = \vec{X}_0(\vec{x}, t)} = - \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial t} \Big|_{\vec{x}_0 = \vec{X}_0(\vec{x}, t)}. \quad (3.21)$$

Подставив (3.21) в (3.20), найдем

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\mathcal{H}(\vec{P}(t), \vec{X}(t), t) \Big|_{\vec{x}_0 = \vec{X}_0(\vec{x}, t)}.$$

Воспользовавшись соотношением (3.19) и тем, что

$$\vec{X}(t, \vec{X}_0(t, \vec{x})) = \vec{x},$$

получим

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} + \mathcal{H}(\nabla S(\vec{x}, t), \vec{x}, t) = 0,$$

что и доказывает теорему.

Теорема 3.2. *Решение задачи Коши (3.1), (3.5) единственно, если выполняются условия предыдущей теоремы.*

Доказательство следует непосредственно из единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Доказанные выше теоремы обосновывают следующую схему решения задачи Коши для нестационарного уравнения Гамильтона–Якоби

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{x}}, \vec{x}, t\right) = 0, & \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \\ S|_{t=0} = S_0(\vec{x}), & t > 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

1. Выписать характеристическую систему для (3.22) – систему Гамильтона в $2n$ -мерном фазовом пространстве \mathbb{R}^{2n} :

$$\begin{cases} \dot{\vec{p}} = -\mathcal{H}_{\vec{x}}(\vec{p}, \vec{x}, t), \\ \dot{\vec{x}} = \mathcal{H}_{\vec{p}}(\vec{p}, \vec{x}, t). \end{cases} \quad (3.23)$$

Функция Гамильтона (классический гамильтониан) определяется по виду (3.22).

2. Поставить для (3.23) задачу Коши

$$\begin{cases} \vec{p}|_{t=t_0} = \frac{\partial S(\vec{x}_0)}{\partial \vec{x}_0}, \\ \vec{x}|_{t=t_0} = \vec{x}_0, \end{cases} \quad \vec{x}_0 \in \mathbb{R}_x^n, \quad (3.24)$$

и найти n -параметрическое (\vec{x}_0 – параметр) семейство решений задачи (3.23), (3.24):

$$\ell_{x_0} : \begin{cases} \vec{x} = \vec{X}(t, \vec{x}_0), \\ \vec{p} = \vec{P}(t, \vec{x}_0), \end{cases} \quad (3.25)$$

$\ell_{x_0} \in \mathbb{R}^{2n}$ – характеристика или фазовая траектория, стартовая из точки $(\vec{p}_0 = S_{\vec{x}}(\vec{x}_0), \vec{x}_0)$. Проекция ℓ_{x_0} на \mathbb{R}_x^n : $\vec{x} = \vec{X}(t, \vec{x}_0)$, $t_0 \leq t < t_0 + T$, – «луч» или траектория классической частицы, начинающаяся из точки \vec{x}_0 с начальным импульсом $\vec{p}_0 = S_{\vec{x}}(\vec{x}_0)$.

3. Вычислить действие $S(t_0, \vec{x}_0)$ на характеристике ℓ_{x_0} :

$$S(t, \vec{x}_0) = S_0(\vec{x}_0) + \int_{t_0}^t (\langle \vec{P}(\tau), \dot{\vec{X}}(\tau) \rangle - \mathcal{H}(\tau)) d\tau. \quad (3.26)$$

4. Разрешить первое уравнение системы (3.25) относительно параметра \vec{x}_0 :

$$\vec{x}_0 = \vec{X}_0(\vec{x}, t) \quad (3.27)$$

в предположении, что якобиан не равен нулю:

$$J(t, \vec{x}_0) = \frac{D\vec{X}(t, \vec{x}_0)}{D\vec{x}_0} \neq 0, \quad t_0 \leq t < t_0 + T, \quad \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

5. Построить функцию

$$S(\vec{x}, t) = S(t, \vec{x}_0) \Big|_{\vec{x}_0 = \vec{X}_0(\vec{x}, t)}. \quad (3.28)$$

Пример 3.1. Решить задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (3.29)$$

при следующих начальных данных:

$$\begin{aligned} 1) \quad S|_{t=0} &= x\xi; & 2) \quad S|_{t=0} &= -\frac{x^2}{2}; \\ 3) \quad S|_{t=0} &= -\frac{x^3}{3}; & 4) \quad S|_{t=0} &= -x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

Здесь $\xi \in \mathbb{R}$ – некоторая постоянная. Указать, при каких значениях t решение существует.

Решение. Функция Гамильтона, отвечающая уравнению (3.29), имеет вид $\mathcal{H}(p, x, t) = p^2/(2m)$, поэтому система Гамильтона определяется выражением

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = 0,$$

откуда следует

$$x = X(t, x_0, p_0) = \frac{p_0}{m}t + x_0, \quad p = P(t, x_0, p_0) = p_0, \quad (3.30)$$

где (p_0, x_0) – начальные значения импульса и координаты.

1) При $S|_{t=0} = S_0(x) = \xi x$ начальными данными для системы Гамильтона являются

$$x|_{t=0} = x_0, \quad p|_{t=0} = \frac{\partial S_0}{\partial x} = \xi,$$

поэтому уравнения траектории есть

$$x = X(t, x_0) = \frac{\xi}{m}t + x_0, \quad p = P(t, x_0) = \xi.$$

В силу того, что якобиан $J(t, x_0) = \partial X(t, x_0)/\partial x_0 = 1$, решение $S(x, t)$ существует при любых $t \in [0, +\infty[$. Поскольку

$$x_0 = X_0(x, t) = x - \frac{\xi}{m}t, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2m}p^2,$$

то из формулы (3.26) получим

$$\begin{aligned} S(x, t, \xi) &= \left(\xi x_0 + \frac{1}{2m} \int_0^t P^2(\tau, x_0) d\tau \right) \Big|_{x_0=x-\xi t/m} = \\ &= \xi \left(x - \frac{\xi t}{m} \right) + \frac{1}{2m} \xi^2 t = \xi \left(x - \frac{t}{2m} \xi \right). \end{aligned}$$

2) При $S|_{t=0} = S_0(x) = -x^2/2$ начальные данные для системы Гамильтона есть

$$x|_{t=0} = x_0, \quad p|_{t=0} = \frac{\partial S_0}{\partial x_0} = -x_0.$$

Траектория задается уравнениями

$$x = X(t, x_0) = -x_0 t + x_0, \quad p = P(t, x_0) = -x_0.$$

Якобиан $J = \partial X/\partial x_0 = -t + 1$ обращается в нуль при $t = m$. Поэтому решение

$$\begin{aligned} S(x, t) &= \left(-\frac{x_0^2}{2} + \frac{1}{2m} \int_0^t x_0^2 d\tau \right) \Big|_{x_0=xm/(m-t)} = \\ &= \frac{1}{2} x_0^2 \left(-1 + \frac{t}{m} \right) \Big|_{x_0=xm/(m-t)} = \frac{m}{2} \frac{x^2}{t-m} \end{aligned}$$

существует при $t \in [0, m]$.

3) При $S|_{t=0} = S_0(x) = -x^3/3$ начальные условия для системы Гамильтона имеют вид

$$x|_{t=0} = x_0, \quad p|_{t=0} = -\frac{\partial S_0}{\partial x_0} = -x_0^2,$$

уравнения траекторий –

$$x = X(t, x_0) = -\frac{x_0^2}{m}t + x_0, \quad p = P(t, x_0) = -x_0^2$$

и якобиан определяется выражением

$$J = \frac{\partial X(t, x_0)}{\partial x_0} = -\frac{2x_0}{m}t + 1.$$

Нетрудно заметить, что для любого $t > 0$ существует такое $x_0 \in \mathbb{R}^1$, что условие единственности не выполняется. Следовательно, задача Коши не имеет решения в области $\Omega = \mathbb{R} \times [0, T]$ при любом T .

4) При $S|_{t=0} = -\arctg x + [\ln(1+x^2)]/3$ начальные условия для системы Гамильтона имеют вид

$$x|_{t=0} = x_0, \quad p|_{t=0} = -\frac{\partial S_0}{\partial x_0} = -\arctg x_0,$$

уравнения траекторий –

$$x = X(t, x_0) = -\frac{t}{m} \arctg x_0 + x_0, \quad p = P(t, x_0) = -\arctg x_0$$

и якобиан

$$J = \frac{\partial X(t, x_0)}{\partial x_0} = -\frac{t}{m(1+x_0^2)} + 1.$$

При $t > m$ якобиан $J > 0$, поэтому решение существует при $0 < t < 1$ и имеет вид

$$S(x, t) = \left[-x_0 \arctg x_0 + \frac{1}{2} \ln(1+x_0^2) + \frac{t}{2m} \arctg^2 x_0 \right] \Big|_{x_0=X_0(x,t)},$$

где $X_0(x, t)$ – решение уравнения

$$x = x_0 - \frac{t}{m} \arctg x_0, \quad 0 \leq t < m.$$

Пример 3.2. Решить задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби в постоянном и однородном электрическом поле

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - Ex = 0, \quad (3.31)$$

если $S|_{t=0} = S_0(x) = \alpha x$, где $\alpha = \text{const}$ – числовой параметр. Указать, при каких значениях t решение существует.

Решение. Функция Гамильтона, отвечающая уравнению (3.31), имеет вид $\mathcal{H}(p, x, t) = p^2/(2m) - E/x$, поэтому система Гамильтона определяется выражением

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = E.$$

Общее решение этой системы есть (см. разд. «Канонические уравнения Гамильтона» части II)

$$x = X(t, p_0, x_0) = \frac{Et^2}{2m} + \frac{p_0}{m}t + x_0, \quad p = P(t, p_0, x_0) = Et + p_0.$$

Траектории определяются уравнениями

$$x = X(t, x_0) = \frac{Et^2}{2m} + \frac{\alpha}{m}t + x_0, \quad p = P(t, x_0) = Et + \alpha.$$

Тогда

$$x_0 = X_0(x, t) = x - \frac{Et^2}{2m} - \frac{\alpha}{m}t.$$

В силу равенства

$$J = \frac{\partial X(t, x_0)}{\partial x_0} = 1$$

решение существует для всех $t > 0$ и имеет вид

$$\begin{aligned} S(x, t) &= \left\{ \alpha x_0 + \int_0^t \left[\frac{(E\tau + \alpha)^2}{2m} + \right. \right. \\ &\left. \left. + E \left(\frac{E\tau^2}{2m} + \frac{\alpha}{m}\tau + x_0 \right) \right] d\tau \right\} \Big|_{x_0=X_0(x,t)} = \\ &= \left(\alpha x_0 + \frac{E^2 t^3}{3m} + \frac{\alpha^2}{2m}t + \frac{E\alpha}{m}t^2 + Ex_0 t \right) \Big|_{x_0=X_0(x,t)} = \\ &= x(\alpha + Et) - \frac{\alpha^2 t}{2m} - \frac{E\alpha t^2}{2m} - \frac{E^2 t^3}{6m}. \end{aligned}$$

Пример 3.3. Решить задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{\omega^2 x^2}{2} = 0, \quad (3.32)$$

отвечающее одномерному гармоническому осциллятору, если

$$1) S|_{t=0} = S_0(x) = -\frac{\omega x^2}{2}; \quad 2) S|_{t=0} = S_0(x) = \xi x,$$

где ξ – числовой параметр, $x \in \mathbb{R}$. Указать, при каких значениях t решение существует.

Решение. Функция Гамильтона, удовлетворяющая уравнению (3.32), имеет вид

$$\mathcal{H}(p, x, t) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2}.$$

Ему соответствует система Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\omega^2 x.$$

Продифференцировав первое уравнение по t и подставив в него dp/dt из второго уравнения, получим $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$. Отсюда найдем общее решение системы Гамильтона

$$x = A \cos t + B \sin \omega t, \quad p = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t.$$

Выразив постоянные A и B через начальные значения координаты и импульса, получим

$$x = x_0 \cos \omega t + p_0 \sin \omega t, \quad p = -x_0 \omega \sin \omega t + p_0 \omega \cos \omega t.$$

1) Если $S_0(x) = -\omega x^2/2$, то $p_0 = -x_0 \omega$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} x &= X(t, x_0) = x_0(\cos \omega t - \sin \omega t) = \sqrt{2}x_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \\ p &= P(t, x_0) = -x_0 \omega(\sin \omega t + \cos \omega t) = \\ &= -\sqrt{2}x_0 \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Справедливо равенство

$$J = \frac{\partial X(t, x_0)}{\partial x_0} = \sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4).$$

Отсюда следует, что решение $S(x, t)$ задачи Коши существует при $t \in [0, \pi/(4\omega)[$. Из уравнения (3.33) найдем

$$x_0 = X_0(x, t) = \frac{x}{\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4)}.$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^t (P(\tau)\dot{X}(\tau) - \mathcal{H}(\tau)) d\tau &= \frac{1}{2} \int_0^t [P^2(\tau) - \omega^2 X^2(\tau)] d\tau = \\ &= -\omega^2 x_0^2 \int_0^t \cos(2\omega\tau + \pi/2) d\tau = \frac{\omega}{2} x_0^2 (1 - \cos 2\omega t). \end{aligned}$$

Тогда

$$S(t, x_0) = S_0(x_0) + \int_0^t (P(\tau)\dot{X}(\tau) - \mathcal{H}(\tau)) d\tau = -\frac{\omega}{2} x_0^2 \cos 2\omega t,$$

откуда следует

$$\begin{aligned} S(x, t) &= S(t, x_0)|_{x_0=X_0(x, t)} = -\frac{\omega}{4} x^2 \frac{\cos 2\omega t}{\cos^2(\omega t + \pi/4)} = \\ &= -\frac{\omega}{4} x^2 \frac{\sin(2\omega t + \pi/2)}{\cos^2(\omega t + \pi/4)} = -\frac{\omega}{2} x^2 \operatorname{tg}\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

для всех $0 \leq t < \pi/(4\omega)$.

2) Пусть $S|_{t=0} = S_0(x) = \xi x$. Тогда $p|_{t=0} = \partial S_0 / \partial x_0 = \xi$, $x|_{t=0} = x_0$ и

$$\begin{aligned} x &= X(t, x_0) = x_0 \cos \omega t + \frac{\xi}{\omega} \sin \omega t, \\ p &= P(t, x_0) = -x_0 \omega \sin \omega t + \xi \cos \omega t. \end{aligned}$$

Аналогично случаю 1)

$$x_0 = X_0(x, t) = \frac{\omega x - \xi \sin \omega t}{\omega \cos \omega t}$$

и

$$S(x, t) = -\frac{\omega^2 x^2 + \xi^2}{2\omega} \operatorname{tg} \omega t + \frac{\xi x}{\cos \omega t}, \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2\omega}.$$

Пример 3.4. Решить задачу Коши для уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{(\nabla S)^2} = 0 \quad (3.34)$$

с начальным условием

$$S|_{t=0} = S_0(\vec{x}) = \langle \vec{k}, \vec{x} \rangle, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.35)$$

Здесь c – некоторая постоянная, $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$. Указать, при каких значениях t решение существует.

Решение. Функция Гамильтона, отвечающая уравнению (3.34), имеет вид

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = c|\vec{p}|, \quad |\vec{p}| = \sqrt{\langle \vec{p}, \vec{p} \rangle}.$$

Запишем систему Гамильтона

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = c \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0.$$

Тогда

$$\vec{p} = \vec{P}(t, \vec{p}_0, \vec{x}_0) = \vec{p}_0, \quad \vec{x} = \vec{X}(t, \vec{p}_0, \vec{x}_0) = c \frac{\vec{p}_0}{|\vec{p}_0|} t + \vec{x}_0.$$

Из начальных условий получим

$$\vec{p}|_{t=0} = \frac{\partial S_0}{\partial \vec{x}_0} = \vec{k}.$$

Следовательно, уравнения траекторий имеют вид

$$\vec{p} = \vec{P}(t, \vec{x}_0) = \vec{p}_0 = \vec{k}, \quad \vec{x} = \vec{X}(t, \vec{x}_0) = c\vec{n}t + \vec{x}_0,$$

где \vec{n} – единичный вектор в направлении вектора \vec{k} . Отсюда видно, что решение существует при всех t и

$$S(\vec{x}, t) = \langle \vec{k}, \vec{x} - c\vec{n}t \rangle = \langle \vec{k}, \vec{x} \rangle - |\vec{k}|ct,$$

так как выражение под интегралом вдоль траектории (3.26) равно нулю.

◇ Уравнение (3.34) в геометрической оптике описывает распространение волнового фронта в однородной среде и называется уравнением Эйконала. В этом случае c – скорость света в среде, а начальные условия (3.35) описывают плоскую волну.

Пример 3.5. При исследовании разностных схем для волнового уравнения на устойчивость возникает задача о решении уравнения Гамильтона–Якоби с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(p, x) = \frac{2}{\gamma} \arcsin\left(\frac{\gamma}{2} \sin p\right),$$

где $\gamma = \tau/h$, τ , h – шаги разностной сетки соответственно по осям t и x . Указать, при каких значениях t существует решение уравнения Гамильтона–Якоби, удовлетворяющее условию $S|_{t=0} = x^2/2$.

Решение. Система Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{\cos p}{\sqrt{1 - (\gamma^2 \sin^2 p)/4}}, \quad \dot{p} = 0$$

с начальными данными

$$x(0) = x_0, \quad p(0) = \frac{\partial S_0}{\partial x_0} = x_0$$

легко интегрируется:

$$p = P(t, x_0) = x_0, \quad x = X(t, x_0) = \frac{\cos x_0}{\sqrt{1 - (\gamma^2 \sin^2 x_0)/4}} t + x_0.$$

Вычислим якобиан

$$J = \frac{\partial X(t, x_0)}{\partial x_0} = 1 - \frac{(1 - \gamma^2/4) \sin x_0}{[1 - (\gamma^2 \sin^2 x_0)/4]^{3/2}} t.$$

Уравнение $J = 0$ имеет решение

$$t(x_0) = \frac{[1 - (\gamma^2 \sin^2 x_0)/4]^{3/2}}{(1 - \gamma^2/4) \sin x_0},$$

так что в области $\Omega = \mathbb{R}_x^2 \times [0, T]$ ни при каком $T > 0$ не существует решения задачи Коши, если $\gamma^2/4 \geq 1$; при $\gamma^2/4 < 1$ решение $S(x, t)$ в Ω существует, если $T = \min t(x_0)$.

Пример 3.6. Решить задачу Коши для уравнения (3.29) при $m = 1$, если

$$S|_{t=0} = S_0(x) = -\frac{x^4}{12}, \quad x \in \Omega_0, \quad \Omega_0 = \{x, |x| < 1\} \subset \mathbb{R}.$$

Решение. Начальные условия для системы Гамильтона имеют вид

$$x|_{t=0} = x_0, \quad p|_{t=0} = \frac{\partial S_0}{\partial x_0} = \frac{x_0^3}{4}.$$

С учетом соотношения (3.30) система Гамильтона имеет решения

$$x = X(t, x_0) = x_0 - \frac{x_0^3}{3}t, \quad p = P(t, x_0) = -\frac{x_0^3}{3}. \quad (3.36)$$

Первое из уравнений (3.36) совместно с условием

$$J(t, x_0) = \frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 - x_0^2 t = 0$$

определяет две ветви огибающей $t = 4/(9x^2)$ семейства траекторий ℓ в пространстве (x, t) (рис. 34).

Как видно из рис. 34, решение задачи Коши существует только в области

$$I: 0 < t < 1, \quad -1 + \frac{1}{3}t < x < 1 - \frac{1}{3}t.$$

В каждую точку (x, t) области II приходят две траектории. В каждую точку области III приходит единственная траектория, но ранее якобиан J обращается в нуль в точке касания огибающей, и поэтому условия существования решения задачи Коши в области III не выполнены.

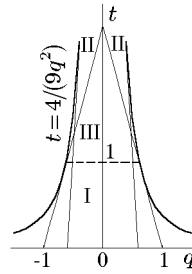


Рис. 34

Пример 3.7. Указать область существования решения для задачи Коши (3.22) с гамильтонианом $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = c|\vec{p}|$, $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$, и начальным условием $S|_{t=0} = S_0(|\vec{x}|)$, $0 < a < |\vec{x}| < b < \infty$.

Решение. Для решения задачи воспользуемся сферической системой координат $\vec{q} = (r, \theta, \varphi)$. Выразив производные от функции S по декартовым координатам через производные по r, θ, φ , получим соотношение

$$\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \right)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2.$$

Следовательно,

$$\vec{p}^2 = p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\varphi^2.$$

Уравнения Гамильтона в сферических переменных имеют вид

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{p_\theta^2 + p_\varphi^2 / (\sin^2 \theta)}{|\vec{p}| r^3}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{p_r}{|\vec{p}|}; \quad (3.37)$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{2p_\varphi^2 \cos \theta}{|\vec{p}| r^3 \sin^3 \theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{|\vec{p}| r^2}; \quad (3.38)$$

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{r^2 \sin^2 |\vec{p}| \theta}. \quad (3.39)$$

Из начальных условий

$$\vec{q}|_{t=0} = \vec{q}_0, \quad \vec{p}|_{t=0} = \frac{\partial S_0(\vec{q}_0)}{\partial \vec{q}_0}$$

получим начальные условия для уравнений (3.37)–(3.39) в явном виде:

$$\begin{aligned} r|_{t=0} &= r_0, & p_r|_{t=0} &= S'_0(r_0), & \theta|_{t=0} &= \theta_0, \\ p_\theta|_{t=0} &= 0, & \varphi|_{t=0} &= \varphi_0, & p_\varphi|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

Из уравнений (3.37)–(3.39) вытекает, что $p_\varphi(t) \equiv 0$, $p_\theta(t) \equiv 0$, $p_r(t) = S'_0(r_0)$, а поэтому из (3.38) и (3.39) следует, что $\varphi = \varphi_0$, $\theta = \theta_0$. Проинтегрировав второе уравнение в (3.37), получим

$$r = \text{sign } S'(r_0)t + r_0. \quad (3.40)$$

Отсюда следует, что решение задачи существует, если $S'(r_0) \neq 0$ при $a \leq r_0 \leq b$. Если же $S'(r_0)$ обращается в нуль в некоторой точке $c \in [a, b]$, то для существования решения достаточно выполнения условия $S''(c) > 0$ (рис. 35).

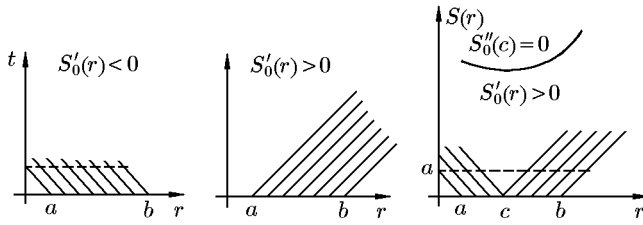


Рис. 35

3.2. Решение задачи Коши с помощью лагранжевых поверхностей*

С начальными данными (3.24) и решениями системы Гамильтона (3.23) можно связать следующие геометрические объекты в фазовом пространстве — *пространстве «координат» и «импульсов»* $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_p^n$:

1) поверхность $\Lambda_0^n \subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_p^n$, задаваемую уравнениями

$$\vec{x} = \vec{x}_0, \quad \vec{p} = \frac{\partial S_0(\vec{x}_0)}{\partial \vec{x}},$$

где $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ — параметры;

2) поверхности $\Lambda_t^n \subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_p^n$, полученные из поверхности Λ_0^n сдвигом точек $(\vec{p}_0, \vec{x}_0) \in \Lambda_0^n$ вдоль траекторий гамильтоновой системы (3.23) за время t . Поверхности Λ_t^n задаются системой уравнений

$$x_i = X_i(t, \vec{x}_0), \quad p_i = P_i(t, \vec{x}_0), \quad i = \overline{1, n},$$

и являются важным примером поверхностей, названных лагранжевыми.

Пусть в фазовом пространстве $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_p^n$ поверхность Λ^n локально задается уравнениями

$$\vec{x} = \vec{X}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \vec{p} = \vec{P}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad i = \overline{1, n}, \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V \subseteq \mathbb{R}^n.$$

◆ Поверхность Λ^n называется лагранжевой, если

$$\oint_{\Gamma} \langle \vec{P}, d\vec{X} \rangle = 0 \quad (3.41)$$

для любой гладкой кривой $\Gamma \subset \Lambda^n$, непрерывно стягиваемой на Λ^n в точку.

Понятие лагранжевой поверхности позволяет преобразовать формулу (3.26) для решения задачи Коши, связав ее с интегрированием по лагранжевой поверхности.

Если лагранжевы поверхности Λ_0^n и Λ_t^n , $t \in [0, T]$, взаимно однозначно проектируются на плоскость x ($p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$) и $\vec{p} = \vec{P}(\vec{x}, t)$ — уравнения, задающие Λ_t^n , то решение задачи Коши (3.22) можно найти по формуле

$$S(\vec{x}, t) = S_0(\vec{x}_0^*) + \int_0^t [\langle \vec{P}(\tau, \vec{x}_0^*), \dot{\vec{X}}(\tau, \vec{x}_0^*) \rangle - \\ - \mathcal{H}(\vec{P}(\tau, \vec{x}_0^*), \vec{X}(\tau, \vec{x}_0^*), \tau)] d\tau + \int_{\ell(\vec{x}_t^*, \vec{x})} \langle \vec{P}(t, \vec{x}), d\vec{x} \rangle, \quad (3.42)$$

где \vec{x}_0^* – произвольная фиксированная точка, $\vec{x}_t^* = \vec{X}(t, \vec{x}_0^*)$, $\vec{p}_t^* = \vec{P}(t, \vec{x}_0^*)$ – траектория, выходящая из $(\vec{p}_0^*, \vec{x}_0^*) \in \Lambda_0^n$, а последний интеграл в (3.42) вычисляется по любому пути $\ell(\vec{x}_t^*, \vec{x})$ на лагранжевой поверхности Λ_t^* от точки $(\vec{x}_t^*, \vec{p}_t^*)$ до произвольной точки $(\vec{x}, \vec{p}) \in \Lambda_t^*$. Формулой (3.42) удобно пользоваться, когда многообразия Λ_t^n , $t \in [0, T]$ имеют общую неподвижную точку (\vec{p}, \vec{x}) , т.е. точку, координаты которой не меняются при эволюции начальной лагранжевой поверхности. В этом случае, положив $\vec{x}_0^* = \vec{x}$, из формулы (3.42) получим

$$S(\vec{x}, t) = S_0(\vec{x}) - \int_0^t \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, \tau) d\tau + \int_{\ell(\vec{x}, \vec{x})} \langle \vec{p}(t, \vec{x}), d\vec{x} \rangle. \quad (3.43)$$

Между решением задачи Коши (3.22) и лагранжевыми поверхностями Λ_t^n , $0 \leq t \leq T$ существует тесная связь, когда Λ_t^n диффеоморфно проектируются на плоскость переменных, т.е.

$$J(t, \vec{x}_0) = \frac{D\vec{X}(t, \vec{x}_0)}{D\vec{x}_0} \neq 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

а именно: если $S(\vec{x}, t)$ – решение задачи Коши (3.22), то уравнения лагранжевых поверхностей Λ_t^n могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{P}(\vec{x}, t) = \frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}}, \quad \vec{x} \in \Omega; \\ \Omega &= \left\{ \vec{x} = \vec{X}(t, \vec{x}_0), J = \frac{D\vec{X}(t, \vec{x}_0)}{D\vec{x}_0} \neq 0, 0 \leq t \leq T \right\}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

♦ Функция $S(\vec{x}, t)$ в этом случае называется производящей функцией поверхности Λ_t^n .

Лемма 3.2. Условие (3.41) для поверхности $\Lambda^n \subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_p^n$ эквивалентно условиям для любой точки $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\{x, p\}_{k, m} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial X_j}{\partial \alpha_k} \frac{\partial P_j}{\partial \alpha_m} - \frac{\partial X_j}{\partial \alpha_m} \frac{\partial P_j}{\partial \alpha_k} \right) = 0, \quad k, m = \overline{1, n}.$$

Выражение $\{x, p\}_{k, m}$ называется скобками Лагранжа.

Доказательство. Пусть гладкая кривая Γ целиком лежит в окрестности $U(\vec{x}) \subset \Lambda^n$ некоторой точки $\vec{x} \in \Lambda^n$ и пусть часть $U(\vec{x}) \cap \Lambda^n$ поверхности Λ^n задается уравнениями

$$\vec{x} = \vec{X}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \vec{p} = \vec{P}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (3.45)$$

где $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – локальные координаты на Λ^n :

$$\text{rang} \left\| \frac{\partial(\vec{p}, \vec{x})}{\partial \alpha} \right\| = n.$$

Тогда криволинейный интеграл

$$I = \oint_{\Gamma} \langle \vec{p}, d\vec{x} \rangle$$

в координатах $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ запишется в виде

$$I = \oint_{\Gamma} \langle \vec{p}, d\vec{x} \rangle = \oint_{\bar{\Gamma}} \left\langle \vec{P}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \frac{\partial \vec{X}}{\partial \alpha_j} \right\rangle d\alpha_j, \quad (3.46)$$

где $\bar{\Gamma}$ – прообраз кривой Γ при отображении (3.45). Преобразуем интеграл (3.46) по формуле Стокса:

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\bar{\Gamma}} \sum_{j=1}^n \left\langle \vec{P}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \alpha_j} \right\rangle d\alpha_j = \\ &= \iint_D \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left\langle \vec{P}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \alpha_m} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \left\langle \vec{P}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \alpha_j} \right\rangle \right) d\alpha_j d\alpha_m = \\ &= \iint_D \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \left\{ \left\langle \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_j}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \alpha_m} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_m}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \alpha_j} \right\rangle \right\} d\alpha_j d\alpha_m. \quad (3.47) \end{aligned}$$

Здесь D – двумерная область в пространстве параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_\alpha^n$, границей которого является $\bar{\Gamma}$.

Из равенства (3.47) следует утверждение леммы.

Пример 3.8. Найти уравнения поверхностей Λ_0^n и Λ_t^n в задачах 3.1 – 3.4 и с их помощью – решение этих задач, используя формулы (3.42) или (3.43).

Решение. 1. Пример 3.1, 1). Уравнение лагранжевой поверхности имеет вид (рис. 36 при $m = 1$)

$$\Lambda_t^1 = \left\{ (p, x), x = X(t, x_0) = \frac{\xi}{m}t + x_0, p = P(t, x_0) = \xi \right\}.$$

Выберем $x_0^* = 0$, тогда действие $S(x, t)$ определяется формулой (3.42)

$$S(x, t) = \frac{\xi^2 t}{2m} + \int_{\xi t/m}^x \xi dx = \xi x - \frac{\xi^2 t}{2m}.$$

2. Пример 3.1, 2). Уравнение лагранжевой поверхности имеет вид (рис. 37 при $m = 1$)

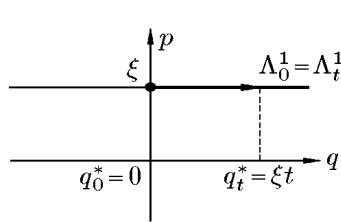


Рис. 36

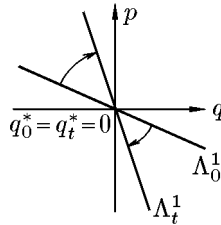


Рис. 37

$$\Lambda_t^1 = \left\{ (p, x), p = P(x, t) = \frac{mx}{t-m} \right\}.$$

Неподвижная точка имеет координаты $x_0^* = 0$, $p_0^* = 0$, поэтому

$$S(x, t) = m \int_0^t \frac{x}{t-m} dx = \frac{m}{2} \frac{x^2}{t-m}, \quad 0 \leq t < 1.$$

3. Пример 3.2. Уравнение лагранжевой поверхности имеет вид (рис. 38 при $m = 1$)

$$\Lambda_t^1 = \left\{ (p, x), p = P(t, x_0) = Et + \alpha, \right. \\ \left. x = X(t, x_0) = \frac{Et^2}{2m} + \frac{\alpha}{m}t + x_0, x_0 \in \mathbb{R}^1 \right\}.$$

Неподвижных точек нет. Воспользуемся формулой (3.42), выбрав $x_0^* = 0$, $p_0^* = \alpha$, тогда

$$S(x, t) = \int_0^t \left[\frac{(E\tau + \alpha)^2}{2m} + E \left(\frac{E\tau^2}{2} + \frac{\alpha\tau}{m} \right) \right] d\tau + \\ + \int_{\ell(x, X(t, x_0))} (Et + \alpha) dx = \\ = \frac{E^2 t^3}{3m} + \frac{\alpha E t^2}{m} + \frac{\alpha^2 t}{2m} + (Et + \alpha) \left(x - \frac{Et^2}{2m} - \frac{\alpha t}{m} \right) = \\ = x(\alpha + Et) - \frac{\alpha^2 t}{2m} - \frac{E\alpha t^2}{2m} - \frac{E^2 t^3}{6m}.$$

4. Пример 3.3. 1) Уравнение лагранжевой поверхности имеет вид (рис. 37 при $\omega = 1$)

$$\Lambda_t^1 = \left\{ (p, x), p = P(x, t) = -x\omega \operatorname{tg} \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) \right\}.$$

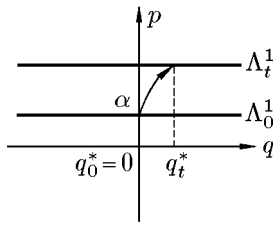


Рис. 38

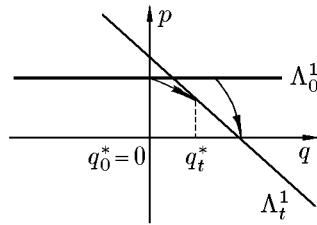


Рис. 39

Неподвижная точка имеет координаты $x_0^* = 0$, $p_0^* = 0$, поэтому

$$S(x, t) = - \int_0^x x \omega \operatorname{tg} \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) dx = - \frac{\omega x^2}{2} \operatorname{tg} \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right).$$

5. Пример 3.3. 2) Уравнение лагранжевой поверхности имеет вид (рис. 39 при $\omega = 1$)

$$\Lambda_t^1 = \left\{ (p, x), p = P(x, t) = \frac{\xi - x \omega \sin \omega t}{\cos \omega t} \right\}.$$

Воспользуемся формулой (3.42), положив $x_0^* = 0$, тогда

$$\begin{aligned} S(x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \xi^2 \cos 2\omega\tau d\tau + \int_{(\xi/\omega) \sin \omega t}^x \frac{\xi - \omega x \sin \omega t}{\cos \omega t} dx = \\ &= - \frac{\omega^2 x^2 + \xi^2}{2\omega} \operatorname{tg} \omega t + \frac{\xi x}{\cos \omega t}. \end{aligned}$$

6. Пример 3.4. Лагранжевы поверхности Λ_t^3 задаются соотношениями $p_j = k_j$, $j = 1, 2, 3$. неподвижных точек на многообразиях нет, поэтому положим $\vec{x}_0^* = 0$ и воспользуемся формулой (3.42):

$$S(\vec{x}, t) = \int_{c\vec{n}t}^{\vec{x}} \langle \vec{P}(x, t), d\vec{x} \rangle = \langle \vec{k}, (\vec{x} - c\vec{n}t) \rangle, \quad \vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}.$$

Пример 3.9. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}) &= \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_1 x_1^2}{2} + \frac{\omega_2 x_2^2}{2}, \\ S|_{t=0} &= \xi x_1 - \frac{\omega_2 x_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Найти решение задачи Коши с помощью формулы (3.42).

Решение. Система Гамильтона в данной задаче распадается на две независимые системы с независимыми начальными данными. Эти системы такие же, как в примерах 3.3, 1) и 3.3, 2), поэтому лагранжевы многообразия Λ_t^2 задачи представляют собой прямые произведения многообразий, приведенных в этих примерах:

$$\Lambda_t^2 = \Lambda_{t,1}^1 \times \Lambda_{t,2}^1 = \left\{ (\vec{p}, \vec{x}), \begin{aligned} x_1 &= x_{01} \cos \omega_1 t + \frac{\xi}{\omega_1} \sin \omega_1 t, \\ p_1 &= -x_{01} \omega_1 \sin \omega_1 t + \xi \cos \omega_1 t, \quad x_2 = \sqrt{2} \cos(\omega_2 t + \pi/4), \\ p_2 &= -\omega_2 \sqrt{2} \sin(\omega_2 t + \pi/4) \end{aligned} \right\}.$$

Формула (3.42) распадается в сумму двух слагаемых, и поэтому

$$S(\vec{x}, t) = S_1(\vec{x}, t) + S_2(\vec{x}, t),$$

где $S_1(\vec{x}, t)$, $S_2(\vec{x}, t)$ – решения примеров 3.3, 1) и 3.3, 2) соответственно.

3.3. Задача Коши для стационарного уравнения Гамильтона–Якоби*

Рассмотрим стационарное уравнение Гамильтона–Якоби

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial S(\vec{x})}{\partial \vec{x}}, \vec{x}\right) = E, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.48)$$

где $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x})$ – гладкая функция на $\mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_x^n$ и $|\mathcal{H}_{\vec{p}}(\vec{p}, \vec{x})| \neq 0$.

Задача Коши для стационарного уравнения Гамильтона–Якоби формулируется аналогично задаче Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных (см. разд. <Задача Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных>).

Пусть γ^{n-1} – гладкая гиперповерхность в \mathbb{R}_x^n ,

$$\gamma^{n-1} = \{\vec{x}, \vec{x} = \vec{X}^0(\alpha), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \tilde{D}\},$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} X_i^0 \\ \alpha_j \end{pmatrix}(\alpha) = n - 1.$$

Начальные данные Коши на γ^{n-1} :

$$S|_{\gamma^{n-1}} = S_0(\alpha), \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \vec{x}} \Big|_{\gamma^{n-1}} = \vec{P}^0(\alpha), \quad (3.50)$$

где S_0 и \vec{P}^0 – заданные гладкие функция и вектор-функция, подчиненные условиям:

а) согласования с уравнением (3.22)

$$\mathcal{H}(\vec{P}^0(\alpha), \vec{X}^0(\alpha)) = E; \quad (3.51)$$

б) согласования \vec{P}^0 с дифференциалом функции S_0

$$dS_0(\alpha) = \sum_{i=1}^n P_i^0(\alpha) dX_i^0(\alpha). \quad (3.52)$$

Решение задачи Коши для стационарного уравнения Гамильтона–Якоби аналогично решению задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Приведем схему решения.

1. Выписать характеристическую систему для (3.48) – систему Гамильтона

$$\dot{\vec{p}} = -\mathcal{H}_{\vec{x}}(\vec{p}, \vec{x}), \quad \dot{\vec{x}} = \mathcal{H}_{\vec{p}}(\vec{p}, \vec{x}), \quad (\vec{p}, \vec{x}) \in \mathbb{R}_{px}^{2n}, \quad (3.53)$$

где точкой обозначены производные по τ , с начальными данными

$$\begin{cases} \vec{x}|_{\tau=0} = \vec{X}^0(\alpha), \\ \vec{p}|_{\tau=0} = \vec{P}^0(\alpha). \end{cases} \quad (3.54)$$

2. Найти $(n-1)$ -параметрическое семейство решений задачи Коши (3.53)–(3.54) – характеристику ℓ_α (α – параметр)

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{X}(\tau, \alpha), \\ \vec{p} = \vec{P}(\tau, \alpha); \end{cases} \quad |\tau| < \tau_0. \quad (3.55)$$

3. Вычислить действие $S(\tau, \alpha)$ на характеристике ℓ_α

$$S(\tau, \alpha) = S_0(\alpha) + \int_0^\tau \langle \vec{P}(\tau', \alpha), \dot{\vec{X}}(\tau', \alpha) \rangle d\tau'. \quad (3.56)$$

4. Разрешить первое уравнение системы (3.55) относительно τ и α

$$\begin{cases} \alpha = A(\vec{x}), \\ \tau = T(\vec{x}), \end{cases} \quad (3.57)$$

считая, что

$$J = \frac{D\vec{X}(\alpha, \tau)}{D(\alpha, \tau)} \neq 0, \quad \alpha \in \tilde{D}, \quad |\tau| < \tau_0.$$

5. Построить функцию

$$S(\vec{x}) = S(T(\vec{x}), A(\vec{x})). \quad (3.58)$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3.3. Пусть выполнено условие

$$J(0, \alpha) \neq 0.$$

Тогда формула (3.58) определяет единственное гладкое решение задачи Коши (3.48)–(3.52) в окрестности $V(\gamma) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} = \vec{X}(\tau, \alpha), |\tau| < \tau_0, \alpha \in \tilde{D} \cap J(\tau, \alpha) \neq 0\}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.

3.4. Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби

◆ Непрерывно дифференцируемое решение $S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ уравнения Гамильтона–Якоби (3.1), содержащее n произвольных постоянных $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, называется полным интегралом этого уравнения, если выполняется условие

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \alpha_j} \right\| \neq 0. \quad (3.59)$$

Полный интеграл $S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ позволяет найти общее решение уравнения Гамильтона–Якоби.

Теорема 3.4. Пусть $f(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ – полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби и

$$S(\vec{x}, t, \vec{\alpha}) = f(\vec{x}, t, \vec{\alpha}) + C(\vec{\alpha}),$$

где $C(\vec{\alpha})$ – произвольная функция от $\vec{\alpha}$. Тогда функция

$$S(\vec{x}, t) = S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})|_{\vec{\alpha}=\vec{A}(\vec{x}, t)}, \quad (3.60)$$

где функции координат и времени $\vec{A}(\vec{x}, t)$ неявным образом определяются уравнениями

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.61)$$

является общим решением уравнения Гамильтона–Якоби.

Доказательство. Действительно, так как $f(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ – полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, то для произвольной функции $C(\vec{\alpha})$, не зависящей от \vec{x} и t , функция

$$S(\vec{x}, t, \vec{\alpha}) = f(\vec{x}, t, \vec{\alpha}) + C(\vec{\alpha})$$

– также полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби. Заменяем здесь величины $\vec{\alpha}$ функциями $\vec{A}(\vec{x}, t)$, которые являются решениями уравнения (3.61). Тогда для функции $S(\vec{x}, t) = S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})|_{\vec{\alpha}=\vec{A}(\vec{x}, t)}$ справедливо

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial x_j} &= \left[\frac{\partial S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})}{\partial \alpha_j} + \left\langle \frac{\partial S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})}{\partial \vec{\alpha}}, \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial x_j} \right\rangle \right] \Big|_{\vec{\alpha}=\vec{A}(\vec{x}, t)} = \\ &= \frac{\partial S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})}{\partial x_j} \Big|_{\vec{\alpha}=\vec{A}(\vec{x}, t)}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})}{\partial t} \Big|_{\vec{\alpha}=\mathbf{A}(\vec{x}, t)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} + \mathcal{H}(\nabla S(\vec{x}, t), \vec{x}, t) = \\ & = \left[\frac{\partial S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})}{\partial t} + \mathcal{H}(\nabla S(\vec{x}, t, \vec{\alpha}), \vec{x}, t) \right] \Big|_{\vec{\alpha}=\mathbf{A}(\vec{x}, t)} = 0, \end{aligned}$$

поскольку функция $S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ является решением уравнения Гамильтона–Якоби. Так как $S(\vec{x}, t)$ содержит произвольную функцию $C(\vec{\alpha})$ и удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби, теорема доказана.

◇ Как правило, интегрирование системы Гамильтона является более простой задачей, чем интегрирование уравнения Гамильтона–Якоби. Однако для некоторых типов гамильтонианов метод разделения переменных позволяет сравнительно просто находить полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби. Поэтому рассмотрим метод, позволяющий по функции $S(\vec{x}, t)$ находить решение системы Гамильтона.

Теорема 3.5 (Якоби). Пусть $S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ – полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби. Тогда

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad \frac{\partial S}{\partial x_i} = p_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.62)$$

– независимые первые интегралы соответствующей системы Гамильтона.

Доказательство. 1. Пусть S есть полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби (3.1). Обозначив $\nabla S = \vec{p}$, запишем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(\nabla S, \vec{x}, t) \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial x_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = 0. \quad (3.63)$$

Считая β_j , $j = \overline{1, n}$, постоянными, найдем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} - \beta_j \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial x_k} \dot{x}_k = 0. \quad (3.64)$$

Поскольку $S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ непрерывно дифференцируема, можно поменять порядок дифференцирования. Вычтя (3.63) из (3.62), получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial x_k} \left(\dot{x}_k - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \right) = 0 \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.65)$$

Согласно формулировке теоремы, выполняется условие (3.59), следовательно,

$$\dot{x}_k - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = 0, \quad k = \overline{1, n},$$

для всех $x_k(t)$, удовлетворяющих первой системе уравнений в (3.62).

2. Найдем полную производную по времени от второго соотношения в (3.62). Получим

$$-\frac{dp_j}{dt} + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_k} \dot{x}_k = 0. \quad (3.66)$$

Учтем, что S – полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, т.е.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(\nabla S, \vec{x}, t) \right) = \\ & = \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Вычтем из (3.67) соотношение (3.66) и получим

$$\left(\dot{p}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_k} \left(\dot{x}_k - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \right) = 0.$$

Следовательно, соотношения (3.62) сохраняются в силу уравнений Гамильтона, т.е. они являются первыми интегралами этих уравнений. Независимость первых интегралов следует из условия (3.59), что и доказывает теорему.

◇ Теорема Якоби обосновывает следующее правило построения общего решения системы Гамильтона $\vec{x}(t)$ и $\vec{p}(t)$ по известному полному интегралу $S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ уравнения Гамильтона–Якоби:

1) разрешаем систему n уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j, \quad j = \overline{1, n},$$

относительно переменных x_k , $k = \overline{1, n}$, и находим функции

$$x_k = X_k(t, \vec{\alpha}, \vec{\beta}), \quad k = \overline{1, n},$$

зависящие от $2n$ произвольных постоянных β_j ;

2) подставляем функции $x_k = X_k(t, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$, $k = \overline{1, n}$, во второе уравнение (3.62) и находим

$$p_j = P_j(t, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\partial S}{\partial x_j}(X(t, \vec{\alpha}, \vec{\beta}), t, \vec{\alpha}).$$

Пример 3.10. Найти полный интеграл стационарного уравнения Гамильтона–Якоби (3.2) с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(p, x) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2}.$$

Соответствующая механическая система называется двумерным осциллятором.

Решение. В уравнении Гамильтона–Якоби, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2} = E,$$

переменные полностью разделяются, поэтому

$$S(x_1, x_2, \alpha_1, E) = S_1(x_1, \alpha_1) + S_2(x_2, \alpha_1, E),$$

где $S_1(x_1)$ и $S_2(x_2)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} &= \alpha_1, \quad \alpha_1 > 0; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2} &= E - \alpha_1. \end{aligned}$$

Проинтегрировав эти уравнения, находим полный интеграл

$$S(x_1, x_2, \alpha_1, E) = \frac{1}{2} \left(x_1 \sqrt{2\alpha_1 - \omega_1^2 x_1^2} + \frac{2\alpha_1}{\omega_1} \arcsin \frac{\omega_1 x_1}{\sqrt{2\alpha_1}} + x_2 \sqrt{2(E - \alpha_1) - \omega_2^2 x_2^2} + \frac{2(E - \alpha_1)}{\omega_2} \arcsin \frac{\omega_2 x_2}{\sqrt{2(E - \alpha_1)}} \right).$$

Пример 3.11. Используя результаты предыдущего примера и формулу (3.62), найти общий вид траекторий частиц в конфигурационном пространстве.

Решение. Общее решение уравнений Гамильтона для двумерного осциллятора можно найти из системы (3.5). В силу результата предыдущей задачи для определения $X_1(t, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ и $X_2(t, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ справедлива система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(x_1, x_2, \alpha_1, E)}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{\omega_1} \arcsin \frac{\omega_1 x_1}{\sqrt{2\alpha_1}} - \\ &- \frac{1}{\omega_2} \arcsin \frac{\omega_2 x_2}{\sqrt{2(E - \alpha_1)}} = \beta_1; \\ \frac{\partial S(x_1, x_2, \alpha_1, E)}{\partial E} &= \frac{1}{\omega_2} \arcsin \frac{\omega_2 x_2}{\sqrt{2(E - \alpha_1)}} = t + \beta_2. \end{aligned}$$

Решением этой системы являются функции

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1(t, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, E) = \frac{\sqrt{2\alpha_1}}{\omega_1} \sin \omega_1(t + \beta_1 + \beta_2); \\ x_2 &= X_2(t, \alpha_1, \beta_2, E) = \frac{\sqrt{2(E - \alpha_1)}}{\omega_2} \sin \omega_2(t + \beta_2). \end{aligned}$$

Пример 3.12 (проблема Кеплера). Методом Якоби найти траектории движения нерелятивистского электрона в поле ядра.

Решение. Гамильтониан задачи имеет вид

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{e}{r} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \frac{e}{r}. \quad (3.68)$$

Уравнение Гамильтона–Якоби для кулоновского поля в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} + \frac{e}{r} = 0. \quad (3.69)$$

Решение уравнения (3.69) будем искать методом разделения переменных

$$S(r, \theta, \varphi, t) = -\alpha_1 t + S_1(r) + S_2(\theta) + \alpha_3 \varphi.$$

Здесь мы учли, что переменные t и φ циклические. Тогда

$$\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2me}{r} = \alpha_1 r m.$$

Домножив это уравнение на r^2 и разделив переменные, найдем

$$r^2 \left\{ \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + 2mer - 2m\alpha_1 r^2 \right\} = - \left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \theta} = -\alpha_2^2.$$

Тогда для $S_1(r)$ получим уравнение

$$r^2 \left\{ \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + 2mer - 2m\alpha_1 r^2 \right\} = -\alpha_2^2,$$

из которого

$$S_1(r) = \int \sqrt{\frac{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}{r^2}} dr.$$

Аналогично для функции $S_2(r)$

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_2^2,$$

откуда

$$S_2(\theta) = \int \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \theta}} d\theta.$$

Окончательно для полного интеграла уравнения (3.69) получим

$$\begin{aligned} S(r, \theta, \varphi, t) = & -\alpha_1 t + \alpha_3 \varphi + \int \sqrt{2m\alpha_1 r^2 - \frac{2me}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr + \\ & + \int \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \theta}} d\theta. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Согласно теореме Якоби, общее решение канонических уравнений в неявной форме определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial r} &= p_r, & \frac{\partial S}{\partial \theta} &= p_\theta, & \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= p_\varphi; \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} &= -\beta_1, & \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} &= -\beta_2, & \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} &= -\beta_3. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} p_r &= \sqrt{2m\alpha_1 r^2 - \frac{2me}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}, & p_\theta &= \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \theta}}, & p_\varphi &= \alpha_3; \\ m \int \frac{1}{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - \frac{2me}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} dr &= t - \beta_1. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Вычислим интеграл (3.72)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - \frac{2me}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} dr &= \int \frac{r dr}{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}} = \\ &= \int \frac{\frac{1}{4m\alpha_1}(4m\alpha_1 r - 2me) + \frac{e}{2\alpha_1}}{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}} dr = \\ &= \frac{1}{4m\alpha_1} \int \frac{d(2m\alpha_1 r^2 - 2mer)}{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}} + \\ &+ \frac{e}{2\alpha_1} \int \frac{dr}{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}}{2m\alpha_1} + \\ &+ \frac{e}{2\alpha_1 \sqrt{2m\alpha_1}} \int \frac{dr}{\sqrt{\left(r - \frac{e}{r\alpha_1}\right)^2 - \frac{e^2}{4\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2^2}{2m\alpha_1}}} = \\ &= \frac{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}}{2m\alpha_1} + \\ &+ \frac{e}{\sqrt{8m\alpha_1^3}} \ln \left| r - \frac{e}{2\alpha_1} + \sqrt{\left(r - \frac{e}{2\alpha_1}\right)^2 - \frac{e^2}{4\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2^2}{2m\alpha_1}} \right|. \end{aligned}$$

Следовательно, зависимость радиуса от времени задается уравнением

$$t - \beta_1 = \frac{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}}{2m\alpha_1} + \frac{e}{\sqrt{8m\alpha_1^3}} \ln \left| r - \frac{e}{2\alpha_1} + \sqrt{\left(r - \frac{e}{r\alpha_1}\right)^2 - \frac{e^2}{4\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2^2}{2m\alpha_1}} \right|.$$

Из уравнений (3.71) найдем

$$\alpha_2 \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \theta}}} - \alpha_2 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{2me}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = -\beta_2, \quad (3.73)$$

$$\alpha_3 \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \theta}}} = \varphi + \beta_3. \quad (3.74)$$

Интеграл (3.72) позволяет найти зависимость полярного радиуса r от времени; интегралы (3.73) и (3.74) – пространственные интегралы.

Вычислим интегралы (3.74), положив $\operatorname{tg} \theta = x$. Тогда

$$\theta = \operatorname{arctg} x, \quad d\theta = \frac{dx}{1+x^2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{x^2}{1+x^2}$$

и

$$J_1 = \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \theta}}} = \int \frac{x dx}{x^2 \sqrt{\alpha_2^2 x^2 - \alpha_3^2(1+x^2)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t \sqrt{\alpha_2^2 t - \alpha_3^2(1+t)}}.$$

Сделаем замену $\sqrt{t(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) - \alpha_3^2} = y$, $y^2 = t(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) - \alpha_3^2$,

$$t = \frac{y^2 + \alpha_3^2}{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}, \quad dt = \frac{2y}{\alpha_2^2 - \alpha_3^2} dy$$

и получим

$$J_1 = \int \frac{y}{\alpha_2^2 - \alpha_3^2} \frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{y^2 + \alpha_3^2} \frac{dy}{y} = \int \frac{dy}{y^2 + \alpha_3^2} = \frac{1}{\alpha_3} \operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha_3} + C.$$

Вернувшись к исходным переменным, последовательно найдем

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{\alpha_3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t}{\alpha_3^2} (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) - 1} + C = \\ &= \frac{1}{\alpha_3} \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 \left(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} - 1 \right) - 1} + C = \\ &= \frac{1}{\alpha_3} \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta \left(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} - 1 \right) - 1} + C. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}^2(\varphi + \beta_3) = \left(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} - 1 \right) \operatorname{tg}^2 \theta - 1.$$

Окончательно получим

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} - 1}}{\cos(\varphi + \beta_3)}. \quad (3.75)$$

Рассмотрим теперь в (3.73) интеграл

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \theta}}} = \int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - \alpha_3^2}} = \\ &= -\frac{1}{\alpha_2} \int \frac{d(\cos \theta)}{\sqrt{(1 - \cos^2 \theta) - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}} = -\frac{1}{\alpha_2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_2^2} - x^2}} = \\ &= -\frac{1}{\alpha_2} \operatorname{arcsin} \left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}} \cos \theta \right) + C_2. \end{aligned}$$

В интеграле по r в (3.73) проведем замену переменных $x = 1/r$, $dr = -dx/x^2$, и тогда

$$J_3 = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{2me}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = - \int \frac{dx}{\sqrt{2m\alpha_1 - 2mex - \alpha_2^2 x^2}}.$$

Рассмотрим подкоренное выражение

$$\begin{aligned} & \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2^2} - \frac{2me}{\alpha_2^2} - x^2 = \\ &= \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2^2} - \left(x^2 + 2\frac{me}{\alpha_2^2} + \frac{m^2e^2}{\alpha_2^4} - \frac{m^2e^2}{\alpha_2^4} \right) = \\ &= \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2^2} + \frac{m^2e^2}{\alpha_2^4} - \left(x + \frac{me}{\alpha_2^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} J_3 &= -\frac{1}{\alpha_2} \int \frac{dx}{\gamma^2 - \left(x + \frac{me}{\alpha_2^2} \right)^2} = \\ &= -\frac{1}{\alpha_2} \arcsin \frac{x + \frac{me}{\alpha_2^2}}{\sqrt{\frac{2m\alpha_1\alpha_2^2 + m^2e^2}{\alpha_2^4}}} + C_3. \end{aligned}$$

Возвратившись к исходным переменным, запишем

$$J_3 = -\frac{1}{\alpha_2} \arcsin \frac{\alpha_2^2 + mer}{r\sqrt{2m\alpha_1\alpha_2^2 + m^2e^2}} + C_3.$$

Следовательно, выражение (3.73) примет вид

$$-\arcsin\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}} \cos \theta\right) + \arcsin\left(\frac{\alpha_2^2 + mer}{r\sqrt{2m\alpha_1\alpha_2^2 + m^2e^2}}\right) = -\beta_2$$

или

$$\frac{\alpha_2^2 + mer}{r\sqrt{2m\alpha_1\alpha_2^2 + m^2e^2}} = \sin\left[\arcsin\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}} \cos \theta\right) - \beta_2\right]$$

или

$$\frac{\alpha_2^2 + mer}{r\sqrt{2m\alpha_1\alpha_2^2 + m^2e^2}} = \cos\left[\arcsin\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}} \cos \theta\right) + \beta_2\right]$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= -\frac{me}{\alpha_2^2} + \frac{\sqrt{m^2e^2 + 2m\alpha_1\alpha_2^2}}{\alpha_2^2} \times \\ &\times \cos\left[\arcsin\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}} \cos \theta\right) + \beta_2\right]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Пример 3.13. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби в двумерном поле кулоновских сил.

Решение. Гамильтониан системы в полярных координатах имеет вид

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t) = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}} - m_0 c^2 - \frac{m_0 e}{r} = 0, \quad \vec{q} \in \mathbb{R}^2.$$

Запишем уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2} - m_0 c^2 - \frac{m_0 e}{r} = 0.$$

Обозначим постоянную энергию через α_3 , постоянный импульс p_φ через α_2 и разделим переменные, положив

$$S(\vec{q}, t) = -\alpha_3 t + \alpha_2 \varphi + f(r).$$

Тогда для определения функции $f(r)$ получим уравнение

$$c\sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2}} = m_0 c^2 - \frac{m_0 e}{r} + \alpha_3.$$

Отсюда

$$\left(\frac{df}{dr}\right)^2 = \left(\frac{m_0^2 e^2}{c^2} - \alpha_2^2\right) \frac{1}{r^2} + 2m_0 e \left(m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\right) \frac{1}{r} + \alpha_3 \left(m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\right).$$

Полный интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} S(\vec{q}, t) = & -\alpha_3 t + \alpha_2 \varphi + \\ & + \int \sqrt{\left(\frac{m_0^2 e^2}{c^2} - \alpha_2^2\right) \frac{1}{r^2} + 2m_0 e \left(m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\right) \frac{1}{r} + \alpha_3 \left(m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\right)} dr. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Пример 3.14. Методом Якоби найти траектории релятивистского электрона в двумерном кулоновском поле.

Решение. По теореме Гамильтона–Якоби находим

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\beta_2, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = -\beta_3, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = p_\varphi = \alpha_2, \quad \frac{\partial S}{\partial r} = p_r.$$

Обратимся к геометрическому интегралу

$$\int \frac{\alpha_2 dr}{r^2 \sqrt{\left(\frac{m_0^2 e^2}{c^2} - \alpha_2^2\right) \frac{1}{r^2} + 2m_0 e \left(m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\right) \frac{1}{r} + \alpha_3 \left(m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\right)}} =$$

$$= \varphi + \beta_2,$$

следующему из (3.77). Вычислим его, предположив, что

$$\frac{m_0^2 e^2}{c^2} - \alpha_2^2 < 0, \quad \alpha_3 < 0.$$

Положим

$$\frac{1}{r} = u = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2} S,$$

где u_1, u_2 – корни уравнения

$$\left(\frac{m_0^2 e^2}{c^2} - \alpha_2^2\right) u^2 + 2m_0 e \left(m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\right) u + \alpha_3 \left(m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\right) = 0.$$

Проинтегрировав, найдем

$$\frac{1}{r} = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2} \cos \left[\sqrt{1 - \frac{m_0^2 e^2}{\alpha_2^2 c^2}} (\varphi + \beta_2) \right].$$

Здесь c – скорость света в вакууме, поэтому

$$\frac{m_0^2 e^2}{\alpha_2^2 c^2} \ll 1.$$

Найдем приближенное выражение для периода

$$\tau_r = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{m_0^2 e^2}{\alpha_2^2 c^2}}} \equiv 2\pi \left(1 + \frac{m_0^2 e^2}{\alpha_2^2 c^2}\right).$$

Видно, что $\tau_r > 2\pi$. Траекторию электрона можно приближенно представить в виде вращающегося эллипса ($\alpha_3 < 0$).

Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду

4. Классификация уравнений второго порядка

◆ Уравнением в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными x и y будем называть соотношение между неизвестной функцией u и ее частными производными до второго порядка включительно

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \quad (4.1)$$

◆ Уравнение (4.1) называется линейным относительно старших производных, если его можно представить в виде

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (4.2)$$

где $a_{ik} = a_{ik}(x, y)$, $i, k = 1, 2$.

◇ Если $a_{ik} = a_{ik}(x, y, u)$, то уравнение называется квазилинейным.

◆ Уравнение в частных производных второго порядка называется линейным, если оно линейно как относительно старших производных, так и относительно самой функции u и ее первых производных

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0. \quad (4.3)$$

Если $f \equiv 0$, то уравнение называется однородным.

Рассмотрим уравнение (4.2), линейное относительно старших производных. Сделаем в нем замену переменных

$$\alpha = \varphi(x, y), \quad \beta = \psi(x, y). \quad (4.4)$$

◇ Мы хотим выбрать такие α, β , чтобы в новых переменных уравнение (4.2) имело наиболее простой вид.

Найдем выражения для производных функции u по новым переменным

$$\begin{aligned} u_x &= \alpha_x u_\alpha + \beta_x u_\beta, & u_y &= \alpha_y u_\alpha + \beta_y u_\beta; \\ u_{xx} &= \alpha_x^2 u_{\alpha\alpha} + 2\alpha_x \beta_x u_{\alpha\beta} + \beta_x^2 u_{\beta\beta} + u_\alpha \alpha_{xx} + u_\beta \beta_{xx}; \\ u_{xy} &= \alpha_x \alpha_y u_{\alpha\alpha} + (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) u_{\alpha\beta} + \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$+ \beta_y \beta_x u_{\beta\beta} + u_\alpha \alpha_{xy} + u_\beta \beta_{xy};$$

$$u_{yy} = \alpha_y^2 u_{\alpha\alpha} + 2\alpha_y \beta_y u_{\alpha\beta} + \beta_y^2 u_{\beta\beta} + u_\alpha \alpha_{yy} + u_\beta \beta_{yy}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (4.2) и получим

$$\bar{a}_{11} u_{\alpha\alpha} + 2\bar{a}_{12} u_{\alpha\beta} + \bar{a}_{22} u_{\beta\beta} + \bar{F}(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) = 0, \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2, \\ \bar{a}_{12} &= a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y, \\ \bar{a}_{22} &= a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Потребуем, например, чтобы $\bar{a}_{11} = 0$ (или $\bar{a}_{22} = 0$). Тогда для определения функций $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ необходимо решить следующее дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0. \quad (4.8)$$

◆ Уравнение (4.8) называется характеристическим уравнением для квазилинейного уравнения второго порядка (4.2), а кривая $z(x, y) = C$, где $z = z(x, y)$ – непрерывно дифференцируемое решение (4.8), называется характеристической линией, или характеристикой, уравнения (4.2).

Лемма 4.1. Если $z = z(x, y)$ – частное решение уравнения (4.8), удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial z}{\partial y} \neq 0,$$

то $z(x, y) = C$ – общий интеграл уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}dx^2 = 0. \quad (4.9)$$

Доказательство. Пусть $z(x, y)$ – решение уравнения (4.8). Тогда если уравнение $z(x, y) = C$ разрешимо относительно $y = f(x, C)$, то по правилу дифференцирования функций, заданных неявно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{z_x}{z_y} \Big|_{y=f(x,C)}.$$

Подставим эту производную в уравнение (4.9) и получим

$$\begin{aligned} & a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = \\ & = \left[a_{11} \left(-\frac{z_x}{z_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{z_x}{z_y} \right) + a_{22} \right] \Big|_{y=f(x,C)} = 0, \end{aligned}$$

так как уравнение (4.8) справедливо для всех x, y в области, где существует решение. Таким образом, лемма доказана.

Справедлива и обратная лемма.

Лемма 4.2. Если $\varphi(x, y) = C$ – общий интеграл уравнения (4.9), то функция $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения (4.8).

Доказательство аналогично.

Разрешив уравнение (4.9) относительно dy/dx , видим, что оно распадается на два уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{D}}{a_{11}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{D}}{a_{11}}, \quad D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}, \quad (4.10)$$

которые называются дифференциальными уравнениями характеристик для (4.2).

В силу доказанных выше лемм общие интегралы уравнений (4.10) $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$ определяют два семейства характеристик уравнения (4.2).

◇ Непосредственной проверкой найдем

$$\bar{D} = \bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = DJ^2,$$

где

$$J = \alpha_x \beta_y - \beta_x \alpha_y = \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

– якобиан перехода к новым координатам. Следовательно, замена переменных (4.4) не меняет знака D .

◆ Уравнение (4.2) в точке M называется:

- 1) гиперболическим, если в этой точке $D > 0$;
- 2) эллиптическим, если в этой точке $D < 0$;
- 3) параболическим, если в этой точке $D = 0$.

◆ Уравнение (4.2) в области G называется гиперболическим (эллиптическим, параболическим), если оно принадлежит к гиперболическому (эллиптическому, параболическому) типу в каждой точке области G .

◇ Одно и то же уравнение может принадлежать к различным типам в разных точках области его определения (см. пример 5.3).

5. Каноническая форма дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

◇ Рассмотрим область G , во всех точках которой уравнение принадлежит к одному и тому же типу. Тогда из (4.10) следует, что через каждую точку области G проходит две характеристики, причем для гиперболического типа характеристики действительны и различны, для эллиптического типа комплексны и различны, а для параболического типа действительны и совпадают.

1. Уравнения гиперболического типа

$D > 0$. Общие интегралы

$$\varphi(x, y) = C_1 \quad \text{и} \quad \psi(x, y) = C_2$$

определяют действительное семейство характеристик. Выберем новые переменные следующим образом:

$$\alpha = \varphi(x, y), \quad \beta = \psi(x, y),$$

тогда $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0$ и $\bar{D} = \bar{a}_{12}^2 = DJ^2 > 0$. Разделим левую и правую части уравнения (4.6) на $\bar{a}_{12} \neq 0$ и получим

$$u_{\alpha\beta} + \bar{F}(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) = 0. \quad (5.1)$$

◆ Уравнение (5.1) называется уравнением гиперболического типа в первой канонической форме.

Сделаем в (5.1) замену

$$\beta = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \alpha = \frac{\xi - \eta}{2}.$$

Тогда

$$u_\alpha = \frac{u_\xi + u_\eta}{2}, \quad u_\beta = \frac{u_\xi - u_\eta}{2}, \quad u_{\alpha\beta} = \frac{u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta}}{4}.$$

Следовательно, (5.1) примет вид

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + F(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) = 0. \quad (5.2)$$

◆ Уравнение (5.2) называется уравнением гиперболического типа во второй канонической форме.

2. Уравнения эллиптического типа

$D < 0$. Уравнения (4.9) имеют два комплексно сопряженных общих интеграла. Положим

$$\alpha = \varphi(x, y), \quad \beta = \varphi^*(x, y),$$

что дает

$$u_{\alpha\beta} + \bar{F} = 0.$$

Введем вещественные переменные

$$\beta = \frac{\xi + i\eta}{2}, \quad \alpha = \frac{\xi - i\eta}{2}.$$

Получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) = 0. \quad (5.3)$$

◆ Уравнение (5.3) называется эллиптическим уравнением в канонической форме.

3. Уравнения параболического типа

$D = 0$. Уравнения (4.10) совпадают, и существует только один общий интеграл $\varphi(x, y) = C$. Положим

$$\alpha = \varphi(x, y), \quad \beta = \psi(x, y),$$

где $\psi(x, y)$ – произвольная функция, не зависящая от $\varphi(x, y)$. В силу определения $\bar{a}_{11} = 0$, но так как из условия $D = 0$ следует, что

$$\bar{D} = \bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = 0,$$

то

$$\bar{a}_{12} = \sqrt{\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}} = 0.$$

Таким образом, имеем

$$u_{\beta\beta} + F(\alpha, \beta, u_{\alpha}, u_{\beta}) = 0. \quad (5.4)$$

◆ Уравнение (5.4) называется параболическим уравнением в канонической форме.

◇ Если F не зависит от u_α , то уравнение (5.4) – обыкновенное дифференциальное уравнение, зависящее от α как от параметра.

◇ В случае многих переменных классификация уравнений не столь проста (более подробно см. [35]). Уравнения вида

$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(\vec{x}, u, \nabla u) = 0, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \quad (5.5)$$

называются квазилинейными уравнениями второго порядка от n переменных.

Вообще говоря, при $n \geq 3$ не существует замены переменных, приводящей коэффициенты g_{ij} к диагональному виду во всем пространстве \mathbb{R}_x^n (т.е. $g_{ij}(\vec{x}) = g_i(\vec{x})\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера). Однако в любой наперед заданной точке области изменения переменной \vec{x} приведение к диагональному виду возможно. Причем число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов $g_i(\vec{x})$ не зависит от способа приведения (закон инерции квадратичной формы). На этой основе можно построить классификацию уравнения (5.5) в различных областях.

В дальнейшем нам встретятся уравнения трех типов:

1) эллиптического

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + F(\vec{x}, u, \nabla u) = 0;$$

2) гиперболического

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + F(\vec{x}, u, \nabla u) = 0;$$

3) параболического

$$\sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + F(\vec{x}, u, \nabla u) = 0.$$

В заключение сформулируем **схему приведения уравнения (4.2) к каноническому виду**:

- ⇒ определить коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} в соответствии с видом уравнения (4.2);
- ⇒ определить области знакопостоянства дискриминанта $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$, в которых тип уравнения (4.2) сохраняется, и выяснить тип заданного уравнения в этих областях;
- ⇒ записать характеристическое уравнение (4.9) по коэффициентам исходного уравнения $a_{11}dy^2 - 2a_{12}dy dx + a_{22}dx^2 = 0$ и найти его первые интегралы $\varphi(x, y) = C_1$, $\psi(x, y) = C_2$;
- ⇒ записать формулы перехода от старых переменных (x, y) к новым $\alpha = \varphi(x, y)$, $\beta = \psi(x, y)$ по решениям характеристического уравнения с учетом его типовых особенностей;
- ⇒ выразить производные по старым переменным через производные по новым переменным, согласно (4.5), и подставить их в исходное уравнение;
- ⇒ выразить из (5.4) старые переменные через новые, т.е. найти $x = \bar{\varphi}(\alpha, \beta)$, $y = \bar{\psi}(\alpha, \beta)$;
- ⇒ исключить в полученном выражении старые переменные с помощью (5.4) и привести подобные слагаемые, что и приводит исходное уравнение к одной из канонических форм. После вышеописанных упрощающих преобразований исходного уравнения получается каноническая форма, допускающая в частных случаях нахождение общего решения. Частные методы нахождения общих решений рассмотрены ниже на конкретных примерах.

Пример 5.1. Найти общее решение уравнения

$$3u_{xx} + 14u_{xy} + 8u_{yy} = 0. \quad (5.6)$$

Решение. 1. Составим характеристическое уравнение

$$3dy^2 - 14dy dx + 8dx^2 = 0$$

или

$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 14\frac{dy}{dx} + 8 = 0.$$

Разрешив полученное уравнение относительно dy/dx , найдем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{14 \pm \sqrt{D}}{6}, \quad D = 196 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 100 > 0.$$

Следовательно, уравнение (5.6) – гиперболического типа на всей плоскости. Проинтегрировав полученные характери-

ческие уравнения, найдем

$$\frac{dy}{dx} = 4, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}, \quad C_1 = y - 4x, \quad C_2 = y - \frac{2}{3}x.$$

2. Сделаем замену переменных

$$\alpha = y - 4x, \quad \beta = y - \frac{2}{3}x.$$

Получим

$$\begin{aligned} \alpha_x = -4, \quad \alpha_y = 1, \quad \alpha_{xx} = \alpha_{xy} = \alpha_{yy} = 0, \\ \beta_x = -\frac{2}{3}, \quad \beta_y = 1, \quad \beta_{xx} = \beta_{xy} = \beta_{yy} = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_x &= u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x = -4u_\alpha - \frac{2}{3}u_\beta, \\ u_y &= u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y = u_\alpha + u_\beta, \\ u_{xx} &= u_{\alpha x} \alpha_x + u_\alpha \alpha_{xx} + u_{\beta x} \beta_x + u_\beta \beta_{xx} = \\ &= \alpha_x (u_{\alpha\alpha} \alpha_x + u_{\alpha\beta} \beta_x) + u_\alpha \alpha_{xx} + \\ &+ \beta_x (u_{\beta\alpha} \alpha_x + u_{\beta\beta} \beta_x) + u_\beta \beta_{xx} = \\ &= 16u_{\alpha\alpha} + \frac{16}{3}u_{\alpha\beta} + \frac{4}{3}u_{\beta\beta}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} u_{xy} &= -4u_{\alpha\alpha} - \frac{14}{3}u_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}u_{\beta\beta}, \\ u_{yy} &= u_{\alpha\alpha} + 2u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}. \end{aligned}$$

3. Подставим полученные выражения для частных производных в исходное уравнение и получим

$$-\frac{100}{3}u_{\beta\alpha} = 0$$

или

$$u_{\beta\alpha} = 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (5.6) имеет вид

$$u(\alpha, \beta) = p(\alpha) + q(\beta),$$

где $p(\alpha)$, $q(\beta)$ – произвольные функции. Возвратившись к исходным переменным, запишем

$$u(x, y) = p(y - 4x) + q(y - 2x/3).$$

Пример 5.2. Привести к каноническому виду и найти общее решение уравнения

$$yu_{xx} + x(2y - 1)u_{xy} - 2x^2u_{yy} - \frac{y}{x}u_x = 0.$$

Решение. Задача разбивается на две части:

1) *Приведение к каноническому виду*

Сравнив исходное уравнение с уравнением общего вида (4.2), находим коэффициенты

$$a_{11} = y, \quad a_{12} = 0,5x(2y - 1), \quad a_{22} = -2x^2.$$

Так как

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2(y - 0,5)^2 + 2x^2y = x^2(y + 0,5)^2 > 0$$

на всей плоскости (за исключением $x = 0$ или $y = -0,5$), то исходное уравнение относится к гиперболическому типу. Согласно (4.10), запишем два характеристических уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{x(y - 0,5) \pm x(y + 0,5)}{y}.$$

Разделим переменные в каждом уравнении. После интегрирования имеем два общих интеграла

$$C_1 = y - x^2, \quad C_2 = y^2 + x^2,$$

которые и определяют новые переменные

$$\alpha = \varphi(x, y) = y - x^2, \quad \beta = \psi(x, y) = y^2 + x^2. \quad (5.7)$$

По формулам (4.5) выразим все производные от функции u по старым переменным через производные от u по новым переменным. Подставив их в исходное уравнение, получим достаточно громоздкое выражение. Однако, если все выкладки сделаны правильно, то большая часть слагаемых взаимно уничтожится и останется очень простое уравнение

$$u_{\alpha\beta} + \frac{2}{1 + 4y + 4y^2}u_\beta = 0.$$

Последнее, что необходимо, – выразить оставшуюся старую переменную y через новые. В данном случае это легко сделать с помощью соотношения (5.7). Действительно,

$$\alpha + \beta = y + y^2.$$

Тогда

$$u_{\alpha\beta} + \frac{2}{1 + 4(\alpha + \beta)}u_{\beta} = 0. \quad (5.8)$$

Это и есть искомая каноническая форма исходного уравнения. Заметим, что из всех производных второго порядка осталась только смешанная производная, как и должно быть для уравнения гиперболического типа.

2) *Нахождение общего решения*

По некоторой аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями можно заметить, что уравнение (5.8) допускает понижение порядка, если ввести новую функцию v следующим образом:

$$v = u_{\beta}.$$

Тогда (5.8) относительно новой функции переписется в виде

$$v_{\alpha} + \frac{2}{1 + 4(\alpha + \beta)}v = 0.$$

Для нахождения общего решения полученного дифференциального уравнения первого порядка в частных производных запишем, согласно (1.6), систему характеристических уравнений

$$\frac{d\alpha}{0} = \frac{d\beta}{1} = \frac{dv}{-2v/[1 + 4(\alpha + \beta)]}$$

или

$$\begin{aligned} d\alpha &= 0, \\ \frac{d\beta}{1 + 4(\alpha + \beta)} &= -\frac{1}{2} \frac{dv}{v}. \end{aligned}$$

Интегрирование первого уравнения дает $\alpha = a_1$, где a_1 – произвольная постоянная. С учетом этого второе уравнение примет вид

$$\frac{d\beta}{1 + 4(a_1 + \beta)} = -\frac{1}{2} \frac{dv}{v}.$$

При его интегрировании появляется вторая произвольная константа a_2

$$\frac{1}{2} \ln(1 + 4[a_1 + \beta]) = -\ln v + \ln a_2.$$

Таким образом, характеристическая система имеет два первых интеграла

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha, \\ a_2 &= v\sqrt{1 + 4(\alpha + \beta)}, \end{aligned}$$

и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$\Phi(\alpha, v\sqrt{1 + 4(\alpha + \beta)}) = 0,$$

где $\Phi(\alpha, \omega)$ – произвольная функция двух переменных. Поскольку функция $v(\alpha, \beta)$ входит только в одну переменную функции $\Phi(\alpha, v\sqrt{1 + 4(\alpha + \beta)})$, решение можно записать в явной форме

$$v\sqrt{1 + 4(\alpha + \beta)} = C_1(\alpha) \quad \text{или} \quad v(\alpha, \beta) = \frac{C_1(\alpha)}{\sqrt{1 + 4(\alpha + \beta)}},$$

где $C_1(\alpha)$ – произвольная функция переменной α . С учетом этого уравнение (4.8) можно записать в виде

$$u_\beta = v = \frac{C_1(\alpha)}{\sqrt{1 + 4(\alpha + \beta)}}.$$

Для нахождения решения этого уравнения вновь запишем характеристическую систему уравнений

$$\frac{d\alpha}{0} = \frac{d\beta}{1} = \frac{du}{C_1(\beta)/\sqrt{1 + 4(\alpha + \beta)}}$$

или

$$\begin{aligned} d\beta &= 0, \\ \frac{C_1(\alpha)d\alpha}{1 + 4(\alpha + \beta)} &= du. \end{aligned}$$

Интегрирование первого уравнения дает $\beta = b_1$, где b_1 – произвольная постоянная. В результате второе уравнение примет вид

$$\frac{C_1(\alpha)d\alpha}{1 + 4(\alpha + b_1)} = du.$$

Интегрирование этого уравнения дает вторую произвольную константу b_2 :

$$\int_0^\alpha \frac{C_1(z)dz}{\sqrt{1+4(z+b_1)}} = u + b_2.$$

Таким образом, характеристическая система имеет два первых интеграла

$$b_1 = \beta, \\ b_2 = \int_0^\alpha \frac{C_1(z)dz}{\sqrt{1+4(z+\beta)}} - u,$$

и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$\Phi\left(\beta, \int_0^\alpha \frac{C_1(z)dz}{\sqrt{1+4(z+\beta)}} - u\right) = 0,$$

где $\Phi(\beta, \omega)$ – произвольная функция двух переменных. Поскольку функция $u(\alpha, \beta)$ входит только в одну переменную функции Φ , то решение можно записать в явной форме

$$\int_0^\alpha \frac{C_1(z)dz}{\sqrt{1+4(\beta+z)}} - u = C_2(\beta)$$

или

$$u(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha \frac{C_1(z)dz}{\sqrt{1+4(\beta+z)}} + C_2(\beta)$$

где $C_2(\beta)$ – произвольная функция переменной β . Возвращаясь к исходным переменным (4.7), получим общее решение

$$u(x, y) = \int_0^{x^2+y^2} \frac{C_1(z)dz}{\sqrt{1+4(y-x^2+z)}} + C_2(y-x^2).$$

Описанная выше процедура нахождения общего решения уравнения (5.8) может быть упрощена, если использовать аналогию с обыкновенным дифференциальным уравнением пер-

вого порядка при условии постоянства β . Действительно, разделив переменные в уравнении

$$v_\beta + \frac{2}{1 + 4(\alpha + \beta)}v = 0$$

и проинтегрировав последнее уравнение при условии $\alpha = \text{const}$, получим

$$v(\alpha, \beta) = \frac{C_1(\alpha)}{\sqrt{1 + 4(\alpha + \beta)}},$$

где C_1 – постоянная интегрирования, т. е. не зависит от переменной интегрирования α , но может произвольным образом зависеть от параметра β . Возвратившись к функции $u(\alpha, \beta)$, получим

$$u_\beta = \frac{C_1(\beta)}{\sqrt{1 + 4(\alpha + \beta)}}.$$

Проинтегрировав это равенство по β при фиксированном α , найдем

$$u(\alpha, \beta) = \int_0^\beta \frac{C_1(z)dz}{\sqrt{1 + 4(\alpha + z)}} + C_2(\alpha).$$

Возвратившись к исходным переменным, получим общее решение

$$u(x, y) = \int_0^{x^2+y^2} \frac{C_1(z)dz}{\sqrt{1 + 4(y - x^2 + z)}} + C_2(y - x^2).$$

Пример 5.3. Привести к каноническому виду и найти общее решение уравнения

$$\text{sign } y u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0, \quad \text{sign } y = \begin{cases} 1, & y > 0; \\ 0, & y = 0; \\ -1, & y < 0. \end{cases}$$

Решение. Поскольку коэффициенты $a_{11} = \text{sign } y$, $a_{12} = 1$, $a_{22} = 1$, то

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 - \text{sign } y = \begin{cases} 0, & y > 0; \\ 1, & y = 0; \\ 2, & y < 0, \end{cases}$$

и исходное уравнение параболично в верхней полуплоскости ($y > 0$) и гиперболично в оставшейся области ($y \leq 0$). В силу этого приходится рассматривать эти области отдельно. Случаи гиперболического типа рассматриваются аналогично примеру 1. Рассмотрим случай параболического типа ($y > 0$, $\text{sign } y = 1$, $a_{11} = 1$, $\Delta = 0$).

1) *Приведение к каноническому виду*

Согласно (4.10), имеем одно характеристическое уравнение с общим интегралом $C = y - x$, который и определяет одну из двух новых переменных, например $\alpha = y - x$. Тогда в качестве другой новой переменной β может быть выбрана любая функция от x, y , независимая от $\alpha = y - x$. Для простоты выберем $\beta = x$. Тогда, согласно (4.5), получаем каноническую форму уравнения в области параболичности

$$u_{\beta\beta} = 0.$$

2) *Нахождение общего решения*

Применим подстановку $v = u_\beta$, понижающую порядок уравнения, тогда $v_\beta = 0$, решением которого является произвольная функция от α , откуда $v = p(\alpha)$. Проинтегрировав последнее уравнение по переменной β , получим

$$u(\alpha, \beta) = p(\alpha)\beta + q(\alpha),$$

где $q(\alpha)$ – еще одна произвольная функция по переменной α . Возвратившись к исходным переменным, получим общее решение в виде

$$u(x, y) = xp(y - x) + q(y - x).$$

Отметим, что в области параболичности имеется только одно характеристическое уравнение. Поэтому однозначно определяется только одна переменная, тогда как другая может быть выбрана произвольно. Такой произвол порождает целый набор решений $u(x, y)$, например выбор $\alpha = y - x$, $\beta = y + x$ приводит к общему решению вида

$$u(x, y) = (x + y)p(y - x) + q(y - x).$$

Пример 5.4. Найти общее решение уравнения

$$u_{xy} + u_x + u_y + u = 0.$$

Решение. Поскольку уравнение уже записано в канонической форме, задача сводится только к нахождению общего решения. Порядок уравнения можно понизить, введя новую функцию

$v = u_y + u$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$v_x + v = 0.$$

Его решение записывается как

$$v(x, y) = \varphi(y)e^{-x},$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция от y . Возвратившись к функции $u(x, y)$, имеем

$$u_y + u = e^{-x}\varphi(y), \quad (5.9)$$

т.е. линейное по u , u_y уравнение. По аналогии с методом Бернулли для обыкновенных дифференциальных уравнений решение уравнения (5.9) будем искать в виде

$$u(x, y) = a(x, y)b(x, y), \quad (5.10)$$

где $a(x, y)$ и $b(x, y)$ – некоторые функции, одну из которых можно выбрать произвольно. Подставив (5.10) в (5.9), получим

$$a_y b + a b_y + a b = e^{-x}\varphi(y).$$

Положив

$$a_y + a = 0,$$

для определения функции $b(x, y)$ найдем

$$a b_y = e^{-x}\varphi(y).$$

Из первого уравнения имеем

$$a = e^{-y},$$

а из второго

$$b_y = e^{y-x}\varphi(y).$$

После интегрирования получим

$$b(x, y) = \int e^{y-x}\varphi(y)dy + g(x).$$

Здесь $g(x)$ – произвольная функция. Возвратившись к функции $u(x, y)$, находим

$$u(x, y) = a(x, y)b(x, y) = e^{-y} \left[e^{-x} \int e^y \varphi(y) dy + g(x) \right]$$

или

$$u(x, y) = e^{-x} q(y) + e^{-y} g(x).$$

Здесь вместо $\varphi(y)$ введена новая произвольная функция

$$q(y) = e^{-y} \int e^y \varphi(y) dy.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$u(x, y) = e^{-x} q(y) + e^{-y} g(x),$$

где $q(y)$ и $g(x)$ – произвольные функции переменных y и x соответственно.

Пример 5.5. Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} yu_{xx} + x(2y - 1)u_{xy} - 2x^2u_{yy} - \frac{y}{x}u_x &= 0, \\ u(x, 0) = x^2, \quad u_y(x, 0) &= 1. \end{aligned}$$

Решение. Общее решение этого уравнения получено в примере 5.2 и имеет вид

$$u(x, y) = \int_0^{y^2+x^2} \frac{p(z)dz}{\sqrt{1/4 + y - x^2 + z}} + q(y - x^2), \quad (5.11)$$

где $p(z)$ и $q(\omega)$ – произвольные функции. Начальные условия позволяют конкретизировать эти функции. Найдем частную производную $u_y(x, y)$. Для этого нам потребуется формула дифференцирования интегралов, зависящих от параметра:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left(\int_{g(y)}^{f(y)} p(y, z) dz \right) &= \int_{g(y)}^{f(y)} \frac{\partial p(y, z)}{\partial y} dz + \\ &+ f'(y)p(y, f(y)) - g'(y)p(y, g(y)). \end{aligned} \quad (5.12)$$

В нашем случае это дает

$$u_y(x, y) = \int_0^{y^2+x^2} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{p(z)dz}{(1/4 + y - x^2 + z)^{3/2}} + 2y \frac{p(y^2 + x^2)}{\sqrt{1/4 + y - x^2 + z}} + q'(y - x^2). \quad (5.13)$$

Здесь и ниже штрих означает производную по аргументу соответствующей функции. Положив $y = 0$ в самой функции $u(x, y)$ и производной $u_y(x, y)$ и приравняв их, согласно начальным условиям, x^2 и 1, получим систему для определения функций p, q , т.е.

$$\int_0^{x^2} \frac{p(z)dz}{\sqrt{1/4 - x^2 + z}} + q(-x^2) = x^2, \quad (5.14)$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{p(z)dz}{(1/4 + y - x^2 + z)^{3/2}} + q'(-x^2) = 1. \quad (5.15)$$

Для нахождения решения продифференцируем уравнение (5.14) по переменной x . С учетом (5.12) получим

$$x \int_0^{x^2} \frac{p(z)dz}{(\frac{1}{4} + y - x^2 + z)^{3/2}} + 2x \frac{p(x^2)}{\sqrt{1/4 - x^2 + x^2}} - 2xq'(-x^2) = 2x$$

или

$$\frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{p(z)dz}{(1/4 + y - x^2 + z)^{3/2}} + 2p(x^2) - q'(-x^2) = 1.$$

Последнее уравнение сложим с уравнением (5.15) и получим

$$2p(x^2) = 2,$$

откуда $p(x^2) = 1$ и соответственно $p(z) = 1$. Подставив най-

денное значение $p(z)$ в (5.14), находим функцию

$$\begin{aligned} q(-x^2) &= x^2 - \int_0^{x^2} \frac{dz}{\sqrt{1/4 - x^2 + z}} = x^2 - 2\sqrt{\frac{1}{4} - x^2 + z} \Big|_0^{x^2} = \\ &= x^2 - 1 \left[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \right] = x^2 - 1 + \sqrt{1 - 4x^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$q(y - x^2) = -(y - x^2) - 1 + \sqrt{1 - 4(y - x^2)}.$$

Возвратившись к общему решению $u(x, y)$ и подставив вычисленные значения

$$p(z) = 1, \quad q(y - x^2) = -(y - x^2) - 1 + \sqrt{1 - 4(y - x^2)},$$

после интегрирования найдем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \\ &= \int_0^{y^2+x^2} \frac{p(z)dz}{\sqrt{1/4 + y - x^2 + z}} - (y - x^2) - 1 + \sqrt{1 - 4(y - x^2)} = \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{4} + y - x^2 + z} \Big|_0^{y^2+x^2} - y + x^2 - 1 + \sqrt{1 - 4(y - x^2)} = \\ &= 1 + 2y - \sqrt{1 - 4(y - x^2)} - y + x^2 - 1 + \sqrt{1 - 4(y - x^2)}, \end{aligned}$$

т.е. получили частное решение

$$u(x, y) = x^2 + y,$$

удовлетворяющее начальным условиям.

Окончательно решение задачи Коши имеет вид

$$u(x, y) = x^2 + y.$$

Легко проверить, что данная функция удовлетворяет как уравнению, так и начальным условиям.

Пример 5.6. Найти решение задачи Коши

$$\begin{aligned} u_{xy} + u_x + u_y + u &= 0, \\ u(x, y) \Big|_{y=3x} &= 0, \quad u_y(x, y) \Big|_{y=3x} = e^{-4x}. \end{aligned}$$

Решение. Общее решение уравнения получено в примере 5.4 и имеет вид

$$u(x, y) = e^{-x}q(y) + e^{-y}g(x). \quad (5.16)$$

Из начальных условий определим функции $p(x)$, $q(x)$. Предварительно вычислим u_y :

$$u_y(x, y) = e^{-x}q'(y) - e^{-y}g(x).$$

Затем, положив $y = 3x$ и подставив u и u_y в начальные условия, получим систему уравнений для определения функций $g(y)$, $q(x)$

$$u(x, y)|_{y=3x} = e^{-x}q(3x) + e^{-3x}g(x) = 0; \quad (5.17)$$

$$u_y(x, y)|_{y=3x} = e^{-x}q'(3x) - e^{-3x}g(x) = e^{-4x}. \quad (5.18)$$

Здесь штрих означает производную по аргументу $3x$, т.е.

$$q'(3x) = \frac{dq(3x)}{d(3x)}.$$

Сложив уравнения (5.17) и (5.18), имеем

$$e^{-x}[q(3x) + q'(3x)] = e^{-4x},$$

откуда

$$q(3x) = e^{-3x}(3x + C),$$

где C – произвольная константа. Соответственно

$$q(z) = (z + C)e^{-z}. \quad (5.19)$$

Подставив (5.19) в (5.16), находим

$$g(x) = -e^{-x}[3x + C]. \quad (5.20)$$

Возвратившись к $u(x, y)$ (5.12), с учетом (5.20) получим

$$u(x, y) = e^{-(x+y)}(y+C) - e^{-y}e^{-x}(3x+C) = e^{-(x+y)}(y+C-3x-C).$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид

$$u(x, y) = e^{-(x+y)}(y - 3x).$$

Уравнения с частными производными в физических задачах

6. Линейная цепочка

Рассмотрим предельный переход от механики системы материальных точек к механике распределенной массы.

В качестве примера представим себе линейную цепочку, состоящую из N одинаковых материальных точек массы m каждая, соединенных пружинами. Пусть эти пружины обладают одинаковыми коэффициентами жесткости k (рис. 40). Предположим, что в состоянии равновесия цепочка имеет длину l , а расстояния между соседними точками одинаковы и равны a . При отклонении от положения равновесия допускаются только одномерные движения по отрезку. Граничные точки будем считать неподвижными. На j -ю точку действуют силы упругости \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , направленные в противоположные стороны и, согласно закону Гука, по модулю равные (см. рис. 40) $F_1 = k(u_{j+1} - u_j)$ и $F_2 = k(u_j - u_{j-1})$, где u_j — смещение j -й точки. В результате второй закон Ньютона для j -й точки имеет вид

$$m\ddot{u}_j = k(u_{j+1} - u_j) - k(u_j - u_{j-1}), \quad j = \overline{2, N-1}, \quad (6.1)$$

$$u_1 = u_N = 0.$$

Для того чтобы перейти к непрерывному распределению массы по цепи, рассмотрим предел $a \rightarrow 0$, $m \rightarrow 0$ при условии, что линейная плотность $\rho = m/a$ и модуль Юнга $E = ka$ остаются конечными. Поскольку размер цепи при этом не меняется, то число точек N стремится к бесконечности. В этом пределе номер точки j заменяется непрерывной величиной x , задающей положение точки на отрезке, т.е. $j \rightarrow x$. Расстояние a между соседними точками заменяется дифференциалом, т.е. $a \rightarrow dx$. В результате смещение $u_j(t)$ становится функцией двух пере-

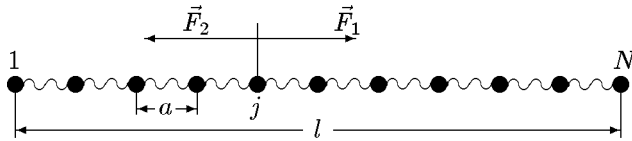


Рис. 40

менных x и t . При этом

$$u_j - u_{j-1} \rightarrow a \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$(u_{j+1} - u_j) - (u_j - u_{j-1}) \rightarrow a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Система уравнений (6.1) в этом пределе переходит в уравнение в частных производных для функции $u(x, t)$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (6.2)$$

Полученное уравнение описывает продольные волны, распространяющиеся в стержне со скоростью $\sqrt{E/\rho}$ (подробности см. в разделе, посвященном продольным колебаниям упругого стержня).

7. Уравнения колебаний струны

Рассмотрим твердое тело, продольные размеры которого значительно больше поперечных ($l \gg a$, где l – длина, а a – максимальный поперечный размер тела). Пренебрегая поперечными размерами тела, приходим к понятию струны как идеального одномерного объекта. Если сила натяжения, действующая на это тело, значительно больше силы сопротивления при изгибе, то последней можно пренебречь, т.е. струну можно считать идеально гибкой.

Пусть положение струны в состоянии покоя совпадает с осью Ox . Допустим, что струна под влиянием поперечных сил движется в одной плоскости xOy , где под y будем понимать отклонение струны от положения равновесия в точке с координатой x в момент времени t . Тогда соотношение $y = y(x, t)$ определяет профиль струны в плоскости xOy в момент времени t . Наша задача состоит в том, чтобы составить уравнение, которому удовлетворяет функция $y = y(x, t)$. Будем предполагать, что струна является упругой, т.е. подчиняется закону Гука: изменение силы натяжения пропорционально изменению длины струны.

Обозначим через $\rho(x)$ и $F(x, t)$ линейную плотность струны и линейную плотность внешних поперечных сил соответственно. Так как струна не сопротивляется изгибу, то сила натяжения $\vec{T}(x, t)$ в точке x в момент времени t направлена по касательной к струне (см. рис. 41).

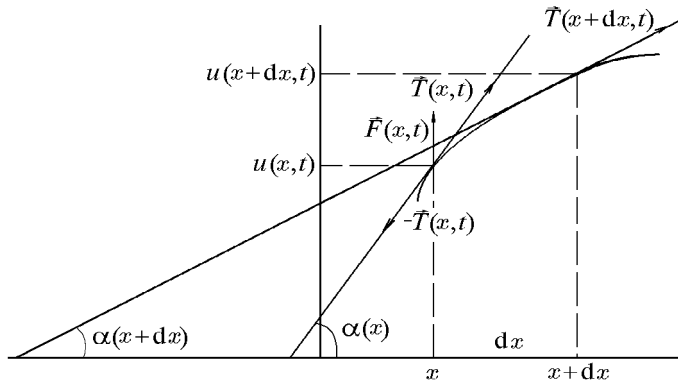


Рис. 41

Связь между длиной элемента струны в положении равновесия dx и длиной dl элемента струны, выведенной из положения равновесия, выражается известным соотношением

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx.$$

Если в этом соотношении величину

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha(x)$$

считать малой и пренебречь величинами высшего порядка малости по сравнению с ней, то $dl \approx dx$. Это означает, что в рамках сделанных предположений длина струны в процессе колебания практически не изменяется, так как удлинение струны пренебрежимо мало (бесконечно малая более высокого порядка) по сравнению с первоначальной длиной, и мы им пренебрегаем. Отсюда, согласно закону Гука, сразу следует утверждение, что сила натяжения $\vec{T}(x, t)$ может изменять только свое направление (по касательной), тогда как модуль $|\vec{T}(x, t)|$ – величина постоянная, не зависящая от x и t , т.е. $|\vec{T}(x, t)| = T_0 = \text{const}$.

Заметим, что в рамках сделанных предположений справед-

ливы соотношения

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\partial u}{\partial x} / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = 1 / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx 1.\end{aligned}\quad (7.1)$$

На элемент струны $(x, x + dx)$ массой $dm = \rho(x)dx$ действуют силы натяжения $\vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$ и внешние силы $\vec{F}(x, t)dx$ [плотность $\vec{F}(x, t)$ на интервале dx можно считать постоянной (см. рис. 41)]. Их сумма, согласно второму закону Ньютона, определяет ускорение $\partial^2 u(x, t)/\partial t^2$ этого элемента струны. Проекция действующих сил на ось Ox с учетом (7.1) дает

$$T_0 \cos(\alpha(x + dx)) - T_0 \cos(\alpha(x)) \approx T_0 - T_0 = 0,$$

а на ось Ou

$$T_0 \sin(\alpha(x + dx)) - T_0 \sin(\alpha(x)) + F(x, t)dx = \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx,$$

откуда с учетом соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\alpha(x + dx)) - \sin(\alpha(x))}{dx} &\approx \\ \approx \frac{\partial u(x + dx, t)/\partial x - \partial u(x, t)/\partial x}{dx} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\end{aligned}$$

получим уравнение

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (7.2)$$

которое называется *уравнением малых поперечных колебаний струны*. При $F(x, t) \neq 0$ колебания называют вынужденными, а при $F(x, t) \equiv 0$ – свободными.

Если плотность струны постоянна, то, обозначив

$$a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho},$$

можно записать уравнение (7.2) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (7.3)$$

в котором его рассматривали Эйлер и Даламбер еще в 18-м веке. Позднее мы увидим, что уравнения вида (7.3) будут возникать при решении других физических задач, поэтому независимо от физического смысла величины $u(x, t)$ уравнение (7.3) будем также называть одномерным волновым уравнением.

Отметим, что решение уравнения (7.2) как уравнения в частных производных второго порядка не единственно, поскольку обычно содержит две произвольные функции. Для однозначного описания процесса колебаний струны уравнение (7.2) дополняется некоторыми условиями, вытекающими из физической постановки задачи. При этом, как правило, для уравнения колебания струны (7.2) ограничиваются следующими условиями.

1. Задача Коши

Если из физических соображений поведение граничных точек струны заранее не оговаривается (например, струна бесконечно длинная), то однозначное решение может быть получено при задании начальных условий

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad (7.4)$$

определяющих смещения и скорости (импульсы) всех точек струны в начальный момент времени.

◆ Задача о нахождении решения уравнения (7.2), удовлетворяющего начальным условиям (7.4), называется задачей Коши.

2. Смешанная задача

Если поведение граничных точек струны (расположенных, например, в точках a и b , так что длина струны $l = b - a$) оговорено заранее, то задача Коши должна быть дополнена граничными условиями. Рассмотрим три основных (классических) типа граничных условий:

- а) **граничные условия первого рода:** граничная точка струны движется по определенному закону, т.е. $u(x, t)|_{x=a} = \mu(t)$; естественно, что $\mu(t) = 0$ соответствует жесткому закреплению точки a (т.е. точка a неподвижна);
- б) **граничные условия второго рода:** на граничную точку действует заданная сила $\nu(t)$, тогда

$$T_0 \sin \alpha|_{x=a} \approx T_0 \partial u / \partial x|_{x=a} = \nu(t),$$

откуда

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = \frac{\nu(t)}{T_0},$$

т.е. при $\nu(t) = 0$ конец $x = a$ струны движется свободно (не закреплен);

- в) **граничные условия третьего рода:** граничная точка струны закреплена упруго с коэффициентом жесткости закрепления h , тогда в соответствии с законом Гука

$$\left(T_0 \frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\Big|_{x=a} = 0.$$

Аналогично задается поведение второй граничной точки $x = b$. Если $x = b \rightarrow \infty$, получается задача для полубесконечной струны $]a, \infty[$ с одним только граничным условием.

◆ Задача о нахождении решения уравнения (7.2) с учетом начальных (7.4) и любого из граничных а), б), в) условий называется смешанной задачей.

◇ Приведенная классификация граничных условий является классической и исчерпывает большую часть физических задач. Аналогичные граничные условия возникают в других физических задачах, приводящих к одномерному волновому уравнению. Поэтому независимо от физического смысла условия а), б), в) называют граничными условиями первого, второго и третьего вида соответственно.

Граничные условия, не укладывающиеся в классическую схему, могут быть получены выделением отрезков, примыкающих к концам стержня $]a, a + dx[$ или $]b - dx, b[$, и записью уравнений движения для них, как это делалось при выводе уравнения.

3. Краевая задача

Влияние начальных условий в процессе колебаний струны может со временем ослабевать (например, за счет сил сопротивления), и с некоторого момента этот процесс практически полностью определяется только граничными условиями. Таким образом, на больших временах начальные условия (7.4) становятся несущественными, и задача о нахождении решения уравнения (7.3) для $a \leq x \leq b$, $t \rightarrow \infty$, становится чисто краевой. Краевые задачи в зависимости от выбора граничных условий а), б) или в) называются первой, второй и третьей краевой задачей.

В такой постановке можно выделить три типа важных задач: нахождение уравнения равновесия струны под действием стационарных внешних сил и задачи о собственных и вынужденных колебаниях струны. В первом случае задача сводится

к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$a^2 \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + f(x) = 0.$$

Если решение задачи о свободных колебаниях искать в виде периодической функции

$$u(x, t) = v(x) \sin \omega t \quad \text{или} \quad u(x, t) = v(x) \cos \omega t,$$

то для амплитуды $v(x)$ получим уравнение

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{a^2} v(x) = 0, \quad (7.5)$$

называемое уравнением на собственные колебания струны, для однозначного решения которого достаточно только граничных условий. Задача о нахождении нетривиальных решений уравнения (7.5), удовлетворяющих заданным граничным условиям, является частным случаем краевой задачи. Легко заметить, что в математическом плане она сводится к задаче на собственные значения (собственные частоты ω_n) и собственные функции (см. разд. «Задача Штурма–Лиувилля»), определяющей амплитуды $v_n(x)$.

Для вынужденных колебаний струны, когда вынуждающая сила $f(x, t)$ является периодической с частотой ν и амплитудой $a^2 f(x)$, т.е.

$$f(x, t) = a^2 f(x) \sin \nu t, \quad f(x, t) = a^2 f(x) \cos \nu t, \quad (7.6)$$

решение можно искать как функцию с неизвестной амплитудой $v(x)$ и частотой, равной частоте вынуждающей силы, т.е.

$$u(x, t) = v(x) \sin \nu t \quad \text{или} \quad u(x, t) = v(x) \cos \nu t. \quad (7.7)$$

После подстановки соотношений (7.6) и (7.7) в уравнение (7.3) получаем для функции $v(x)$ стационарное уравнение

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \frac{\nu^2}{a^2} v(x) = -f(x), \quad (7.8)$$

описывающее вынужденные колебания струны и являющееся, как мы увидим в дальнейшем, одномерным аналогом уравнения Гельмгольца. Естественно, что однозначное решение уравнения (7.8) определяется только граничными условиями, однако характер решения существенным образом зависит от соотношения частоты вынуждающей силы ν и собственных частот

струны ω_n . В случае совпадения ν с одной из собственных частот ω_n возникает хорошо известный из курса общей физики эффект резонанса.

В заключение отметим, что учет конкретных внешних сил (сопротивления среды, силы тяжести и др.) может быть естественным образом проведен при выводе уравнения колебаний в полном соответствии с физической постановкой задачи. С другой стороны, трудности построения гладких решений дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными распределениями физических характеристик ($\rho(x)$, $F(x)$ и др.), могут быть преодолены на основе понятия обобщенных решений в классе обобщенных функций (см. разд. «Обобщенные функции»).

◇ Вывод уравнения колебаний струны сопровождается рядом механических и геометрических предположений. Вопрос о том, насколько точно уравнение описывает физический процесс, может быть решен только сравнением результатов, полученных при решении уравнения, и экспериментальных данных. Аналогичная ситуация имеет место и для других дифференциальных уравнений.

8. Уравнение продольных колебаний струн и стержней

Уравнения продольных колебаний для пружин, струн и стержней записываются одинаково. Однако более наглядно эта задача может быть рассмотрена на примере упругого стержня. Стержнем мы будем называть твердое тело, поперечные размеры которого достаточно малы по сравнению с продольными (для струны они пренебрежимо малы). При выводе уравнения будем предполагать, что натяжения, возникающие в процессе колебаний, подчиняются закону Гука. По сути дела, условия, обеспечивающие выполнение закона Гука (упругое растяжение), и определяют область применения искомого уравнения.

Пусть координатная ось Ox совпадает с направлением продольной оси упругого стержня. Под продольными колебаниями будем понимать смещение поперечных (перпендикулярных оси Ox) сечений стержня $S(x)$ вдоль оси Ox (рис. 42), причем рассматриваемые поперечные сечения в процессе смещения остаются плоскими и ортогональными оси Ox . Последнее допущение вполне оправдано в предположении о линейных размерах стержня.

Обозначим через $u(x, t)$ отклонение в момент времени t то-

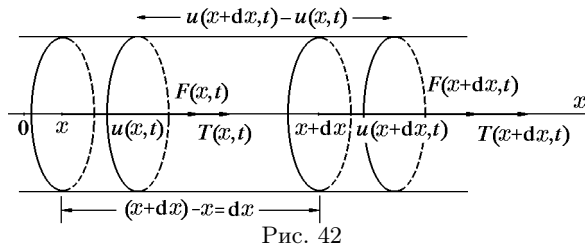


Рис. 42

го сечения стержня $S(x)$, которое, находясь в покое, имело абсциссу x . Выбранная таким образом геометрическая координата x называется переменной Лагранжа. Такой выбор вполне естественен, но не единствен. Так, например, в качестве геометрической координаты можно выбрать величину $X = x + u$, называемую эйлеровой координатой (о связи лагранжевых и эйлеровых координат см. [62]).

Пусть $\rho = \rho(x)$ – плотность стержня в невозмущенном состоянии; $F = F(x, t)$ – объемная плотность внешних сил, действующих строго вдоль оси Ox ; $E = E(x)$ – модуль упругости Юнга; $T = T(x, t)$ – натяжение.

Подсчитаем относительное удлинение элемента $(x, x + dx)$ в момент времени t . Поскольку координаты концов этого отрезка в момент времени t имеют значения

$$[x + u(x, t); x + dx + u(x + dx, t)],$$

то относительное удлинение равно (см. рис. 42)

$$\begin{aligned} & \frac{\{[x + dx + u(x + dx, t)] - [x + u(x, t)]\} - \{(x + dx) - x\}}{dx} = \\ & = \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Учтя, что натяжение $T(x, t)$ пропорционально относительному удлинению, находим

$$T(x, t) = E(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (8.1)$$

Рассмотрим элемент стержня $dV = S(x)dx$, заключенный между сечениями $S(x)$ и $S(x + dx)$. Пусть приращение dx таково, что в этом элементе функции $S(x)$, $F(x, t)$, $\rho(x)$ можно

считать постоянными. Тогда вдоль оси Ox действуют силы натяжения $\mathcal{F}_1(x, t) = T(x, t)S(x)$ и $\mathcal{F}_2(x, t) = T(x+dx, t)S(x+dx)$, направленные в противоположные стороны, и внешняя сила $\mathcal{F}_3(x, t) = F(x, t)S(x)dx$. Согласно закону Ньютона, элемент стержня dV массой $dm = \rho(x)S(x)dx$ приобретает ускорение $\partial^2 u(x, t)/\partial t^2$ такое, что величина

$$\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}dx$$

равна сумме всех сил, действующих на него в направлении перемещения, т.е.

$$\begin{aligned} \rho(x)S(x)\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}dx &= \\ &= [T(x+dx, t)S(x+dx, t) - T(x, t)S(x, t)] + S(x, t)F(x, t)dx. \end{aligned}$$

Тогда с учетом (8.1)

$$\begin{aligned} \frac{(TS)(x+dx, t) - (TS)(x, t)}{dx} &= \\ &= \frac{(ES\frac{\partial u}{\partial x})(x+dx, t) - (ES\frac{\partial u}{\partial x})(x, t)}{dx} = \frac{\partial \left(E(x)S(x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)}{\partial x} \end{aligned}$$

получим дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня

$$\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(S(x)E(x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + S(x)F(x, t). \quad (8.2)$$

Для стержня или струны постоянного сечения $S(x) = \text{const}$ из уравнения (8.2) получим

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + F(x, t). \quad (8.3)$$

Если к тому же стержень или струна однородны, т.е. $\rho(x)$, $E(x)$ постоянны, то уравнение (8.3) упростится еще больше и примет вид

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (8.4)$$

где $a^2 = E/\rho$, $f(x, t) = F(x, t)/\rho$, полностью совпадающий с видом (7.3) одномерного волнового уравнения. Поэтому постановка дополнительных условий для нахождения однозначного решения уравнения (8.4) полностью совпадает с постановкой аналогичных условий для уравнения (7.3).

Уравнения (7.3), (8.4) как уравнения в частных производных второго порядка могут быть записаны в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Действительно, положив в (8.4)

$$W(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad T(x, t) = E(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

получим

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{E} \frac{\partial T}{\partial t}, \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \rho \frac{\partial W}{\partial t}. \end{cases} \quad (8.5)$$

Как уже упоминалось, область применимости уравнения (8.4), ограниченная применимостью закона Гука, может быть расширена посредством использования более общей зависимости

$$T = E \left(x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x},$$

приводящей к квазилинейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[E \left(x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F(x, t).$$

9. Уравнения электрических колебаний в проводах (телеграфные уравнения)

Расположим провод, по которому проходит переменный ток $i(x, t)$ и напряжение на котором $v(x, t)$, вдоль оси Ox . Через R , L , C , G обозначим соответственно распределенные, рассчитанные на единицу длины омическое сопротивление, индуктивность, емкость и потери заряда через несовершенную изоляцию, причем величину потерь будем считать пропорциональной напряжению в рассматриваемой точке. Для определенности предположим, что направление тока совпадает с направлением оси Ox .

Согласно закону Ома для участка цепи с координатами $(x, x+dx)$, можно записать, что падение напряжения на участке цепи длиной dx равно сумме электродвижущих сил, т.е.

$$v(x, t) - v(x + dx, t) = Ri(x, t)dx + L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} dx,$$

а с учетом соотношения

$$\frac{v(x + dx, t) - v(x, t)}{dx} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$$

это равенство приобретает вид

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = Ri(x, t) + L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}. \quad (9.1)$$

Приравняв заряд

$$[i(x, t) - i(x + dx, t)]dt = - \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx dt,$$

притекающий на элемент цепи $(x, x+dx)$ за время от t до $t+dt$, к заряду

$$\begin{aligned} C[v(x, t + dt) - v(x, t)]dx + Gv(x, t)dx dt = \\ = \left[C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + Gv(x, t) \right] dx dt, \end{aligned}$$

расходуемому на зарядку элемента цепи $(x, x+dx)$ и утечку через несовершенную изоляцию, находим

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} + C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + Gv(x, t) = 0. \quad (9.2)$$

Соотношения (9.1), (9.2) называются системой телеграфных уравнений и представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Ее можно свести к одному уравнению в частных производных второго порядка для тока $i(x, t)$

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} + (CR + GL) \frac{\partial i}{\partial t} + GRi(x, t) \quad (9.3)$$

или для напряжения

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + (CR + GL) \frac{\partial v}{\partial t} + GRv(x, t). \quad (9.4)$$

Уравнения (9.3) и (9.4) имеют совершенно одинаковый вид и носят название телеграфных уравнений. В рамках теории электромагнитного поля полученные уравнения можно рассматривать как достаточно хорошие приближения, не учитывающие электромагнитные колебания в среде, окружающей провод.

Если в уравнениях (9.1)–(9.4) пренебречь потерями через изоляцию и омическим сопротивлением $G = R \approx 0$, то (9.1), (9.2) принимают вид

$$\begin{cases} -\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}, \end{cases} \quad (9.5)$$

а уравнения (9.3), (9.4) приводятся к известным уравнениям для колебательного контура

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (9.6)$$

по форме полностью совпадающим с одномерным волновым уравнением.

Общая схема постановки начальных и краевых задач для телеграфных уравнений полностью совпадает со схемой, приведенной в разд. «Уравнения колебаний струны» (задача Коши для бесконечно длинного провода, смешанные задачи для конечного и полубесконечного провода и т.д.). Следует лишь помнить о том, что при формулировке граничных условий для участков $]a, a + dx[$ и $]b - dx, b[$ необходимо вместо уравнений движения рассматривать падение напряжения и приток заряда. Если в цепи имеются последовательно включенные сосредоточенные омическое сопротивление R , индуктивность L_c и емкость C_c , то падение напряжения дается формулой

$$\Delta v = R_c i + L_c \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{C_c} \int i dt.$$

Представляется интересным сравнить систему уравнений, описывающих продольные колебания стержня (8.5), с системой телеграфных уравнений (9.5):

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E} \frac{\partial T}{\partial t}, \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}. \end{cases} \quad (9.7)$$

Очевидна физическая аналогия между электрическим напряжением v и натяжением стержня T , между электрическим током i и механической скоростью w . Аналогичная связь может быть установлена между механическими и электрическими характеристиками физических процессов. Так, индуктивность электрической цепи L является аналогом плотности твердого тела, а емкость C – аналогом обратной величины коэффициента упругости $1/E$. Если учесть, что обе системы (9.7) получены в предположениях, не учитывающих омическое сопротивление и сопротивление среды, то механическое сопротивление является аналогом омического сопротивления (см. [42]). Такое совпадение математического описания задач различного физического содержания позволяет моделировать и изучать механические системы с помощью электрических систем и наоборот.

10. Уравнение поперечных колебаний мембраны

Под мембраной будем понимать твердое тело, толщина которого пренебрежимо мала по сравнению с другими размерами, не сопротивляющееся изгибу или, другими словами, идеально гибкую пленку.

Предположим, что мембрана натянута равномерно по всем направлениям и в состоянии равновесия занимает некоторую область S с границей L в плоскости xOy . Обозначим через $u(x, y, t)$ отклонение точки мембраны с координатами (x, y) в момент времени t в направлении, ортогональном плоскости xOy , под действием внешних сил с плотностью $F(x, y, t)$, направленных перпендикулярно плоскости xOy . Тогда выражение $u = u(x, y, t)$ в фиксированный момент времени t можно рассматривать как уравнение поверхности, соответствующей форме мембраны в процессе колебаний.

Пусть $d\sigma$ – элемент площади этой поверхности с единичным вектором нормали $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, а dS – проекция $d\sigma$ на плоскость xOy . Тогда

$$d\sigma = \frac{dS}{\cos \theta} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (10.1)$$

На элемент dl границы $d\sigma$ действует натяжение, равное $\vec{T}(x, y, t)dl$. Поскольку мембрана не сопротивляется изгибу, вектор натяжения $\vec{T}(x, y, t)$ расположен в плоскости, ортогональ-

ной вектору нормали \vec{n} (касательной плоскости к $u = u(x, y, t)$). Если вектор $\vec{T}(x, y, t)$ образует с плоскостью угол θ' , то этот угол не превосходит угла θ между нормалью \vec{n} и осью Ou , т.е.

$$\cos \theta' \geq \cos \theta = 1 / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}. \quad (10.2)$$

Если в соотношениях (10.1), (10.2) пренебречь бесконечно малыми высшего порядка по отношению к $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$, то $d\sigma \approx dS$. Таким образом, площадь мембраны в процессе колебаний практически не меняется, а это, в свою очередь, означает, что вектор натяжения $\vec{T}(x, y, t)$, согласно закону Гука, может менять только направление, оставаясь постоянным по абсолютной величине: $|\vec{T}(x, y, t)| = T_0 = \text{const}$.

С учетом этого проекции вектора натяжения T_{xOy} и T_{Ou} на плоскость xOy и ось Ou можно записать в виде

$$T_{xOy} = T_0 \cos \theta' \approx T_0, \quad T_{Ou} = T_0 \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Обозначим через $\rho(x, y)$ поверхностную плотность мембраны, через S_1 – проекцию произвольного участка изогнутой поверхности мембраны на плоскость xOy с границей L и приравняем импульсы вертикальных сил натяжения и импульсы внешних сил за время $t_2 - t_1$ изменению количества движения выделенного участка мембраны:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_{L_1} T_0 \frac{\partial u}{\partial n} dl + \iint_{S_1} F dx dy \right\} = \\ = \iint_{S_1} \left[\frac{\partial u(x, y, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, y, t_1)}{\partial t} \right] \rho(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Считая $t_2 - t_1$ малым: $t_2 - t_1 \approx dt$, по теореме Лагранжа о среднем запишем

$$\frac{\partial u(x, y, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, y, t_1)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} dt$$

и, воспользовавшись формулой Грина

$$\int_{L_1} \frac{\partial u}{\partial n} dl = \iint_{S_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy,$$

получим интегральное уравнение колебаний

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{S_1} \left[\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - F(x, y, t) \right] dx dy = 0.$$

Отсюда в силу произвольности S_1 и $t_2 - t_1$ получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(x, y, t). \quad (10.3)$$

В случае однородной мембраны $\rho(x, y) = \rho = \text{const}$ приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (10.4)$$

где $a^2 = T_0/\rho$ и $f(x, y, t) = F(x, y, t)/\rho$, называемому двумерным волновым уравнением.

Постановка задач о нахождении однозначных решений двумерного волнового уравнения и их классификация полностью совпадают со схемой, рассмотренной для одномерного волнового уравнения. Изменения, возникающие при формулировке граничных условий для плоской кривой L , не приводят к принципиальным затруднениям.

Отметим, что выбор конкретных моделей (струна, мембрана и т.п.) и их рассмотрение обусловлены стремлением наиболее просто и наглядно продемонстрировать основную схему вывода уравнений математической физики, иллюстрирующую органичное сочетание и взаимодополняемость математического и физического аспектов задач.

Действительно, все выведенные уравнения можно получить из уравнения Ламэ

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot}(\text{rot } \vec{u}) + \vec{F} \quad (10.5)$$

для трехмерного вектора смещения $\vec{u} = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$, являющегося специальным предметом изучения теории упругости. Однако его вывод, несмотря на понятную громоздкость выкладок, основывается на законе Гука и схеме, изложенной выше. Во-первых, в однородном изотропном

твердом теле с плотностью ρ выделяется элемент объема с координатами граней $x, x + dx, y, y + dy, z, z + dz$, который под действием внутренних сил (напряжений) и внешних сил с плотностью $\vec{F} = (X(x, y, z, t), Y(x, y, z, t), Z(x, y, z, t))$ смещается на величину $\vec{u}(x, y, z, t)$. Затем для выделенного элемента составляются три соотношения в проекциях на каждую координатную ось, в которых изменения количества движения приравниваются к импульсу внутренних и внешних сил за момент времени dt . В результате для смещений получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= G \left(\Delta u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{u}) \right) + X, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= G \left(\Delta v + \frac{m}{m-2} \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{div} \vec{u}) \right) + Y, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= G \left(\Delta w + \frac{m}{m-2} \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \vec{u}) \right) + Z,\end{aligned}\quad (10.6)$$

где G – модуль сдвига; m – коэффициент Пуассона, характеризующий отношение соответствующего поперечного сжатия к продольному растяжению (см. [30]). С помощью коэффициентов Ламэ $\mu = G$, $\lambda = 2G/(m-2)$ систему (10.6) можно записать в виде векторного уравнения (10.5).

Если решение уравнения (10.5) искать в виде

$$\vec{u} = \operatorname{grad} A_0 + \operatorname{rot} \vec{A},$$

то скалярный A_0 и векторный \vec{A} потенциалы удовлетворяют трехмерным волновым уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} &= a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_0 + \frac{1}{\rho} \Phi_0, \\ \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= b^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{A} + \frac{1}{\rho} \vec{\Phi},\end{aligned}\quad (10.7)$$

где $\Phi_0, \vec{\Phi}$ – скалярный и векторный потенциалы векторного поля \vec{F}

$$\vec{F} = \operatorname{grad} \Phi_0 + \operatorname{rot} \vec{\Phi}$$

и

$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Наряду с вышеизложенным в классической механике достаточно успешно используются вариационные методы (см. разд. «Обобщенные функции»). Приведем для простоты вариационный метод получения, например, уравнения равновесия упругой мембраны под действием стационарных внешних сил $F(x, y)$. Пусть $A[u]$ – функционал, определяющий работу внешних сил и сил упругости по перемещению мембраны из положения равновесия $u = 0$ в положение изогнутой поверхности $u = u(x, y)$. Поскольку работа внешней силы равна

$$\iint_S F(x, y)u(x, y)dx dy,$$

а работа сил упругости, согласно (10.1),

$$\begin{aligned} -T_0 \iint_S \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - 1 \right] dx dy &\approx \\ &\approx -\frac{T_0}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy, \end{aligned}$$

то $A[u]$ имеет вид

$$A[u] = \iint_S \left\{ Fu - \frac{T_0}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad (10.8)$$

и, следовательно, вариация функционала (10.8) определяется выражением

$$\delta A[u] = \iint_S \left\{ F\delta u - T_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \right] \right\} dx dy. \quad (10.9)$$

В положении равновесия $\delta A(u) = 0$. Тогда с учетом того, что

$$\delta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u), \quad \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\delta u)$$

и вариация на границе обращается в нуль $\delta u|_L = 0$, получим

$$\begin{aligned} \iint_S \left\{ F + T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right\} \delta u dx dy - T_0 \int_L \frac{\partial u}{\partial n} \delta u dl = \\ = \iint_S \left\{ F + T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right\} \delta u dx dy = 0, \end{aligned}$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к кривой L . Вследствие произвольности δu в соответствии с основной леммой вариационного исчисления получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{F(x, y)}{T_0} = 0.$$

Естественно, что аналогичное уравнение следует из (10.4) и (10.5).

11. Уравнения гидродинамики и акустики

Рассмотрим движение жидкости, занимающей некоторый объем. Выделим часть жидкости – «капельку», заключенную в некотором объеме ΔV . Если объем ΔV мал по сравнению с размерами системы и силы, действующие на части жидкости, заключенные в этом объеме, можно считать постоянными, то приходим к понятию материальной точки жидкости. Если в рассматриваемом пространстве силами трения между частицами жидкости, или, другими словами, вязкостью, можно пренебречь, то приходим к понятию идеальной жидкости.

Пусть в декартовой системе координат $\vec{v}(t) = (v_1, v_2, v_3)$,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3). \quad (11.1)$$

– вектор скорости движения жидкости, определяющий траекторию движения каждой материальной точки жидкости. Пусть $\rho(\vec{x}, t)$, $p(\vec{x}, t)$ – ее плотность и давление в точке \vec{x} в момент времени t ; $G(\vec{x}, t)$, $F(\vec{x}, t)$ – интенсивность источников массовых сил.

Выделим некоторую замкнутую поверхность S с внешним вектором нормали \vec{n} , охватывающую объем V . Изменение количества жидкости в единицу времени равно потоку жидкости через границу S и притоку вещества от внутренних источников

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\vec{x}, t) dV = - \iint_S (\vec{v}(\vec{x}, t), d\vec{S}) \rho(\vec{x}, t) + \iiint_V G(\vec{x}, t) dV,$$

где $d\vec{S} = \vec{n} dS$. Преобразуя поверхностный интеграл в объемный по формуле Остроградского–Гаусса, получим

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\vec{x}, t) \vec{v}) - G(\vec{x}, t) \right] dV = 0.$$

В силу произвольности объема V приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = G(\vec{x}, t). \quad (11.2)$$

◆ Уравнение (11.2) называется уравнением неразрывности, или уравнением переноса.

Другое уравнение, характеризующее движение жидкости, можно получить, рассмотрев все силы (внешние силы, силы давления), действующие на элемент dV объема V . Так, результирующая сила давления равна

$$\vec{F}_1(t) = \iint_S p(\vec{x}, t) \vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{grad} p(\vec{x}, t) dV,$$

а равнодействующая всех массовых сил $\vec{F}(\vec{x}, t)$ равна

$$\vec{F}_2(t) = \iiint_V \rho(\vec{x}, t) \vec{F}(\vec{x}, t) dV.$$

Поскольку из (11.1) следует, что

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \operatorname{grad}) \vec{v}, \quad (11.3)$$

то изменение количества движения вещества в выделенном объеме запишется в виде

$$\iiint_V \rho(\vec{x}, t) \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iiint_V \rho(\vec{x}, t) \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \operatorname{grad}) \vec{v} \right] dV.$$

Отсюда в соответствии со вторым законом Ньютона получим

$$\begin{aligned} & \iiint_V \rho(\vec{x}, t) \left\{ \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \operatorname{grad}) \vec{v} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho(\vec{x}, t)} \operatorname{grad} p(\vec{x}, t) - \vec{F}(\vec{x}, t) \right\} dV = 0. \end{aligned} \quad (11.4)$$

В силу произвольности V из (11.4) получим дифференциальное уравнение движения жидкости

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \operatorname{grad}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p(\vec{x}, t) = \vec{F}(\vec{x}, t). \quad (11.5)$$

◆ Уравнение (11.5) называется уравнением движения идеальной жидкости, или уравнением Эйлера.

Система четырех уравнений, состоящая из уравнения неразрывности (11.2) и уравнения Эйлера (11.5), содержит пять неизвестных функций \vec{v} , p , ρ и не является замкнутой. Поэтому для полного и однозначного описания процесса движения идеальной жидкости систему (11.2), (11.5) необходимо дополнить уравнением состояния, задающим связь между давлением $p(\vec{x}, t)$ и плотностью $\rho(\vec{x}, t)$. В общем случае уравнение состояния содержит абсолютную температуру T (например, для идеального газа

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

где R – газовая постоянная). В этом случае замкнутая система уравнений должна включать и уравнение теплопроводности (см. ниже), описывающее изменение температуры системы.

В ряде случаев уравнение состояния не содержит температурной зависимости, т.е.

$$\rho = f(p). \quad (11.6)$$

Например, для несжимаемой жидкости

$$\rho = \text{const}. \quad (11.7)$$

Температурной зависимостью можно пренебречь для адиабатических процессов, т.е. процессов, протекающих настолько быстро, что тепло не успевает передаваться от одной части жидкости к другой и

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}. \quad (11.8)$$

Здесь $\gamma = c_p/c_V$ – отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме.

Движение несжимаемой жидкости будет подробно рассмотрено в разд. 29. Здесь же мы остановимся на адиабатическом движении газов. Система уравнений гидродинамики в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = G \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \text{grad})\vec{v} + \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \vec{F} \\ \rho = f(p) = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \end{cases} \quad (11.9)$$

и представляет собой нелинейную систему уравнений, которую можно «линеаризовать», если ввести некоторые упрощающие предположения. Пусть $G(\vec{x}, t) \equiv 0$, $\vec{F}(\vec{x}, t) \equiv 0$ и движение молекул газа представляет собой малые колебания вокруг положения равновесия, характеризуемого постоянными значениями плотности ρ_0 и давления p_0 . Отбросив квадраты, произведения и высшие степени величин \vec{v} , $\rho - \rho_0$, $p - p_0$ и их производных, получаем «линеаризованные» уравнение адиабаты

$$\rho = \rho_0 + \frac{\rho_0}{\gamma p_0}(p - p_0) + \dots \approx \rho_0 + \frac{1}{a^2}(p - p_0), \quad (11.10)$$

$$\gamma \frac{p_0}{\rho_0} = a^2;$$

уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p \quad (11.11)$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{v} = 0, \quad (11.12)$$

которое с учетом (11.10) может быть представлено как

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{v} = 0. \quad (11.13)$$

Нас интересует потенциальное (безвихревое) течение идеальной жидкости, при котором каждый малый объем деформируется и перемещается поступательно, но не вращается. В этом случае

$$\vec{v} = -\text{grad } \varphi. \quad (11.14)$$

Функция $\varphi(\vec{x}, t)$ называется потенциалом скоростей. Покажем, что хотя соотношение (11.14) определяет потенциал с точностью до произвольной функции от времени, знания его достаточно для полного описания всего процесса движения. Действительно, подставив (11.14) в (11.11), имеем

$$-\text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p$$

или

$$p = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (11.15)$$

Подставив (11.15) и (11.14) в (11.13), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \Delta \varphi = 0, \quad (11.16)$$

которому должен удовлетворять потенциал φ . Оно является трехмерным волновым уравнением, и его решение с помощью соотношений (11.15), (11.14) и (11.10) полностью определяет функции \vec{v} , ρ , p . С другой стороны, продифференцировав уравнение (11.16) по t , x_1 , x_2 , x_3 , видим, что эти величины сами удовлетворяют уравнениям, совпадающим с (11.16), т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - a^2 \Delta \vec{v} &= 0, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a^2 \Delta p &= 0, \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - a^2 \Delta \rho &= 0. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Уравнения (11.16), (11.17) называют уравнениями акустики или гидродинамики в акустическом приближении, поскольку в рамках сделанных предположений они достаточно хорошо описывают процессы с малыми колебаниями плотности и давления, например распространение звука. (Как будет показано ниже, в физике коэффициент $a = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ соответствует скорости распространения колебаний, что при нормальных атмосферных условиях дает численное значение скорости звука $a = 335$ м/с.) Краевые условия для волновых уравнений (11.17) формируются по стандартной схеме. Например, для непроницаемой границы S с внешней нормалью \vec{n}

$$(\vec{v}, \vec{n})|_S = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = 0.$$

Для процессов, характеризующихся большими скоростями и градиентами давления (сверхзвуковое обтекание, взрывные волны и т.д.), «акустическое приближение» невозможно и необходимо обращаться к нелинейным уравнениям гидродинамики (или газодинамики), выходящим за рамки рассматриваемого курса.

12. Уравнение распространения тепла в стержне

Пусть продольная ось стержня направлена вдоль оси Ox и $u(x, t)$ – температура всех точек поперечного сечения стержня, проходящего через точку с координатой x . Рассмотрим элемент стержня, заключенный между поперечными сечениями с координатами x и $x + dx$ (рис. 43).

Обозначим через Q_1 количество тепла, расходуемое на нагревание выделенного участка, через Q_2 – количество тепла, поступившее через боковую поверхность этого участка. Согласно закону Ньютона, Q_2 пропорционально разности температур на боковой поверхности, причем знак Q_2 обусловлен ее знаком. Обозначим также через Q_3 количество тепла, поступающее через поперечное сечение стержня и определяемое законом Фурье, а через Q_4 – количество тепла, поступившее от внутренних тепловых источников (например, в результате химических реакций). Тогда уравнение теплового баланса этого элемента стержня за время dt имеет вид

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_4. \quad (12.1)$$

Пусть $S(x)$ и $p(x)$ – площадь и периметр поперечного сечения стержня; $\rho(x)$, $c(x)$, $k(x)$ – плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности стержня соответственно; $F(x, t)$ – объемная плотность мощности внутренних источников тепла; u_0 и k_0 – температура и коэффициент теплопроводности внешней среды.

С учетом введенных обозначений величины Q_i , $i = \overline{1, 4}$,

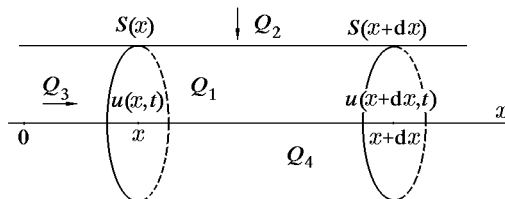


Рис. 43

можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= c(x)\rho(x)S(x)[u(x, t + dt) - u(x, t)]dx = \\
 &= c(x)\rho(x)S(x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}dxdt, \\
 Q_2 &= p(x)k_0(x)[u_0(x, t) - u(x, t)]dxdt, \\
 Q_3 &= [(kSu_x)(x + dx, t) - (kSu_x)(x, t)]dt = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)S(x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right)dxdt, \\
 Q_4 &= F(x, t)S(x)dxdt.
 \end{aligned} \tag{12.2}$$

Подставив (12.2) в (12.1), получим дифференциальное уравнение распространения тепла в стержне

$$c\rho S\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(kS\frac{\partial u}{\partial x}\right) + pk_0(u_0 - u) + FS. \tag{12.3}$$

Если сечение стержня постоянно, это уравнение приводится к виду

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F + \frac{pk_0}{S}(u_0 - u). \tag{12.4}$$

Если стержень однороден, т.е. ρ , c , k постоянны, уравнение (12.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu + f. \tag{12.5}$$

Здесь $a^2 = k/(c\rho)$ – постоянная, называемая коэффициентом температуропроводности; $h = k_0p/S$ – коэффициент теплообмена с окружающей средой через боковую поверхность;

$$b = \frac{h}{c\rho}, \quad f = \frac{F}{c\rho} + bu_0.$$

Если теплообмен с окружающей средой через боковую поверхность отсутствует (боковая поверхность теплоизолирована), т.е. $h = 0$, то уравнение (12.5) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \tag{12.6}$$

называемому одномерным уравнением теплопроводности.

Для нахождения однозначного решения уравнения (12.6) необходимо задать начальное распределение температуры и тепловой режим на концах стержня.

Рассмотрим классические постановки начальных и краевых задач для уравнения (12.6).

1. *Задача Коши*

В отличие от одномерного волнового уравнения, уравнение теплопроводности достаточно дополнить одним начальным условием

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(t). \quad (12.7)$$

Задача о нахождении температуры, описываемой уравнением (12.6) в совокупности с начальным условием (12.7), называется задачей Коши. Такие задачи достаточно хорошо описывают реальные физические процессы, в которых требуется определить распределение температуры в стержне либо за малый промежуток времени (т.е. граничные условия не успевают оказать существенного влияния на процесс), либо для очень длинного (в идеале – бесконечно длинного) стержня, где граничные условия не оказывают влияния на изменение температуры в рассматриваемой (центральной) части стержня. Хотя следует заметить, что по умолчанию граничные условия в таких задачах имеют вид

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0,$$

вытекающий из закона сохранения энергии.

2. *Смешанная задача*

Рассмотрим стержень, концы которого расположены в точках с координатами $x = a$ и $x = b$. В этом случае начальное условие должно быть дополнено граничными условиями. Рассмотрим три основных (классических) типа граничных условий.

а) **Граничные условия первого рода.** На конце стержня в точке $x = a$ задается искомая функция $u(x, t)$, т.е.

$$u(x, t)|_{x=a} = \mu(t),$$

которая может быть постоянной величиной. В частности, если на торце стержня поддерживается нулевая температура, то $\mu(t) = 0$.

б) **Граничные условия второго рода.** На конце стержня задается значение частной производной функции $u(x, t)$, т.е.

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=a} = \nu(t).$$

Рассмотрим физический смысл этого условия. Если вместо температуры на границе стержня, например в точке $x = a$,

задать тепловой поток, тогда, согласно закону Фурье,

$$Q(t) = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=a}.$$

Обозначив $\nu(t) = Q(t)/k$, приходим к условию для производной. При $\nu(t) \equiv 0$ конец стержня теплоизолирован.

- в) **Граничные условия третьего рода.** На границе стержня задается линейная комбинация функции $u(x, t)$ и ее производной

$$\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \alpha u(x, t) \right) \Big|_{x=a} = \gamma(t). \quad (12.8)$$

Это условие отвечает теплообмену (по закону Ньютона) с внешней средой заданной температуры $T_0(t)$ на конце стержня $x = a$. Действительно, тепловой поток на границе можно записать как

$$Q = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=a},$$

так и $Q = h[T_0(t) - u(x, t)] \Big|_{x=a}$. Тогда

$$k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=a} = h[T_0(t) - u(x, t)] \Big|_{x=a}.$$

Заметим, что, в отличие от предыдущего случая, тепловой поток «саморегулируется» в зависимости от разности $[T_0(t) - u(x, t)] \Big|_{x=a}$, уменьшаясь по мере выравнивания температур с внешней и внутренней сторон границы. Вводя обозначения $\alpha = h/k$, $\gamma(t) = hT_0/k$, приходим к условию (12.8).

Аналогично рассматриваются граничные условия в точке $x = b$. Граничные условия в точках $x = a$ и $x = b$ могут принадлежать к разным типам. При $x = b \rightarrow \infty$ получаем задачу для полубесконечного стержня.

Задача о нахождении решения уравнения (12.6) с начальным условием (12.7) и граничными условиями а), б), в) называется *смешанной* задачей для уравнения теплопроводности. Граничные условия, не укладывающиеся в классическую схему а, б, в, могут быть получены описанием теплового баланса для граничных участков стержня $]a, a + dx[$ и $]b - dx, b[$ так же, как это делалось при выводе уравнения теплопроводности. Пусть, например, конец стержня $x = a$ зажат в массивную клемму, обладающую большой теплопроводностью и

имеющую теплоемкость c_0 . Тогда граничное условие запишется как

$$\left[u_x(x, t) - \frac{c_0}{k} u_t(x, t) \right] \Big|_{x=a} = 0.$$

Помимо постановки задач с линейными граничными условиями возможна постановка задач с нелинейными граничными условиями. Так, например, учет излучения по закону Стефана–Больцмана с торца $x = a$ в среду с температурой $u_0(t)$ приводит к следующему граничному условию:

$$k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=a} = H[u^4(t) - u_0^4(x, t)] \Big|_{x=a}.$$

3. Краевая задача

За счет перераспределения тепла влияние начальных условий в стержне со временем ослабевает. Если время наблюдения t можно считать достаточно большим (много больше времени релаксации), то температура стержня в пределах точности измерений определяется практически только граничными условиями. Тем самым вклад начальных условий (12.7) становится несущественным, и мы приходим к чисто краевой задаче о нахождении решения уравнения (12.6) для $a \leq x \leq b$, $t \rightarrow \infty$: первой краевой, если заданы граничные условия первого рода; второй, если граничные условия второго рода; третьей, если граничные условия третьего рода.

В такой постановке можно выделить две интересные задачи: задачу Фурье о температурных волнах и задачу о стационарном распределении тепла. В первом случае рассматривается первая краевая задача для полубесконечного стержня с периодическим граничным условием. Во втором – все краевые задачи в предположении, что плотность внутренних источников тепла и граничные условия не зависят от времени. Одномерное уравнение теплопроводности в этом случае сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$a^2 \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + f(x) = 0$$

или в более общей постановке [см. уравнение (12.3)] – к уравнению

$$\frac{d}{dx} \left(kS \frac{du}{dx} \right) + pk_0(u_0 - u) + FS = 0.$$

В заключение отметим, что учет зависимости физических характеристик ρ , c , k от температуры приводит к квазилиней-

ному уравнению

$$c(x, u)\rho(x, u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t), \quad (12.9)$$

существенно расширяющему границы области применения уравнения теплопроводности.

13. Уравнение диффузии и теплопроводности в пространстве

К задаче о распространении тепла примыкает задача о диффузии – изменении концентрации вещества. Если в растворе или газе вещество распределено неравномерно, то начинается его перераспределение из областей с большей концентрацией в области с меньшей концентрацией. Этот процесс называется диффузией и подчиняется закону Нернста, который аналогичен закону Фурье для теплопроводности.

Пусть $u(\vec{x}, t)$ – концентрация вещества в точке $\vec{x} = (x, y, z)$ в момент времени t , распределенного в неподвижной изотропной среде, занимающей некоторый объем с коэффициентом пористости $\gamma(\vec{x})$ (отношение объема пор к полному объему) и коэффициентом диффузии $D(\vec{x})$. (В анизотропной среде последние являются тензорами, а не скалярами.) Если диффузия происходит с поглощением или выделением данного вещества, например за счет химических реакций, то пусть $F(\vec{x}, t)$ – объемная плотность мощности его источников и стоков.

Выделим внутри рассматриваемого объема произвольную поверхность S с единичной внешней нормалью \vec{n} , ограничивающую некоторый объем V .

Составим уравнение баланса диффундирующего вещества. Обозначим через dQ_1 количество вещества, проходящего через элемент поверхности dS за единицу времени. Согласно закону Нернста,

$$dQ_1 = -D(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial n}dS = -(\vec{n}, \nabla u)D(\vec{x})dS.$$

Тогда количество вещества, поступающего в объем V через поверхность S за время от t_1 до t_2 , с учетом формулы Остроградского–Гаусса можно записать

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_S (\vec{n}, \nabla u)D(\vec{x})dS = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \operatorname{div}(D(\vec{x})\nabla u)d\vec{x}.$$

Количество вещества Q_2 , поступающего от внутренних источников, определится как

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V F(\vec{x}, t) d\vec{x}.$$

Общий приток вещества Q_3 вследствие изменения концентрации $u(\vec{x}, t)$ за малое время Δt по теореме Лагранжа

$$u(\vec{x}, t + \Delta t) - u(\vec{x}, t) \approx \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} \Delta t$$

будет равен

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \gamma(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial t} d\vec{x}.$$

Поскольку

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0,$$

имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left[\operatorname{div}(D(\vec{x})\nabla u) + F(\vec{x}, t) - \gamma(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial t} \right] d\vec{x} = 0.$$

В силу произвольности объема V и времени $t_2 - t_1$ подынтегральное выражение должно быть равно нулю, т.е.

$$\gamma(\vec{x}) \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(D(\vec{x})\nabla u(\vec{x}, t)) + F(\vec{x}, t). \quad (13.1)$$

Уравнение (13.1) называется уравнением диффузии.

Если среда однородна, то величины $\gamma(\vec{x})$, $D(\vec{x})$ постоянны и уравнение (13.1) принимает вид

$$\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u(\vec{x}, t) + f(\vec{x}, t), \quad (13.2)$$

где

$$a^2 = \frac{D}{\gamma}, \quad f(\vec{x}, t) = \frac{F(\vec{x}, t)}{\gamma}.$$

При сравнении одномерного уравнения диффузии, следующего из (13.2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

с одномерным уравнением теплопроводности (12.6) видно, что они полностью совпадают по форме, причем коэффициент температуропроводности соответствует коэффициенту диффузии при $\gamma = 1$. Более того, их размерности одинаковы. Для газов даже численные значения обоих коэффициентов довольно близки, так как кинетическая теория газов дает приближенную связь $k = D\rho c$, откуда $D = k/(\rho c) = a^2$. Таким образом, в задачах диффузии количество диффундирующего вещества и его концентрация играют такую же роль, как количество тепла и температура в задачах теплопроводности. Тогда уравнение распространения тепла в пространстве в обозначениях, принятых в предыдущем разделе,

$$c(\vec{x})\rho(\vec{x})\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(k(\vec{x})\nabla u) + F(\vec{x}, t) \quad (13.3)$$

сразу следует либо из уравнения (13.1) при замене $\gamma(\vec{x}) \rightarrow c(\vec{x})\rho(\vec{x})$, $D(\vec{x}) \rightarrow k(\vec{x})$, либо выводится из уравнения теплового баланса аналогично выводу уравнения диффузии из уравнения баланса диффундирующего вещества. Рассмотрим этот вывод.

Степень нагрева тела характеризуется его температурой. Пусть $u(\vec{x}, t)$ – температура в точке \vec{x} в момент времени t ; $\rho(\vec{x})$ – плотность тела; $k(\vec{x})$ – коэффициент теплопроводности и $c(\vec{x})$ – удельная теплоемкость в точке \vec{x} ; в теле есть источник тепла $F(\vec{x}, t)$ и пусть V – некоторый объем с границей S_V .

Составим уравнение теплового баланса. Обозначим через dQ_1 количество тепла, проходящего через элемент поверхности dS

$$dQ_1 = k(\vec{x}) dS dt \frac{\partial u}{\partial n} = k(\vec{x}) dt (\nabla u, d\vec{S}). \quad (13.4)$$

Тогда через поверхность S_V за время t пройдет количество тепла

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_{S_V} k(\vec{x})(\nabla u, d\vec{S}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \operatorname{div}(k(\vec{x})\nabla u) d\vec{x}. \quad (13.5)$$

Количество тепла, выделяемого или поглощаемого в объеме V за время $t_2 - t_1$, определяется как

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V F(\vec{x}, t) d\vec{x}. \quad (13.6)$$

На изменение $\Delta u = u_2(\vec{x}, t) - u_1(\vec{x}, t)$ температуры элемента объема $dV = d\vec{x}$ за время dt нужно израсходовать тепла

$$dQ_3 = [u(\vec{x}, t + dt) - u(\vec{x}, t)]c(\vec{x})\rho(\vec{x})dV = \frac{\partial u}{\partial t}c(\vec{x})\rho(\vec{x})d\vec{x}dt.$$

Расход тепла на нагрев объема V за время $t_2 - t_1$ равен

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \frac{\partial u}{\partial t}c(\vec{x})\rho(\vec{x})d\vec{x}. \quad (13.7)$$

Таким образом, тепло Q_3 , затраченное за время $t_2 - t_1$ на нагревание объема V , равно сумме тепла Q_2 , полученного от внутренних источников, и тепла Q_1 , полученного от внешних источников:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2$$

или

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left[\frac{\partial u}{\partial t} \rho(\vec{x})c(\vec{x}) - \operatorname{div}(k(\vec{x})\nabla u) - F(\vec{x}, t) \right] dV = 0.$$

В силу произвольности объема V и времени $t_2 - t_1$ должно быть равно нулю подинтегральное выражение, т.е.

$$\rho(\vec{x})c(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k(\vec{x})\nabla u) + F(\vec{x}, t). \quad (13.8)$$

◆ Уравнение (13.8) называется уравнением теплопроводности.

Для однородного вещества c , ρ , k – постоянные величины и уравнение (13.3) принимает вид, аналогичный (13.2):

$$u_t = a^2 \Delta u + f(\vec{x}, t). \quad (13.9)$$

Это уравнение есть уравнение теплопроводности для однородной среды.

Здесь

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(\vec{x}, t) = \frac{F(\vec{x}, t)}{c\rho}$$

и $f(\vec{x}, t)$ называется плотностью источников.

Для однозначного решения задач диффузии и теплопроводности по уже упоминавшейся схеме задаются начальное и граничные (краевые) условия. Начальное условие $u(\vec{x}, t)|_{t=0} = \varphi(\vec{x})$ определяет первоначальное распределение температуры (концентрации). Мы будем рассматривать краевые условия трех типов:

первого типа – если на границе S поддерживается заданное распределение температуры (концентрации) u_0 :

$$u(\vec{x}, t)|_S - u_0 = 0;$$

второго типа – если на границе S поддерживается заданный поток тепла (вещества) u_1 :

$$\left(k \frac{\partial u}{\partial n} + u_1\right)|_S = 0, \quad \left(\left[D \frac{\partial u}{\partial n} + u_1\right]\right)|_S = 0;$$

третьего типа – если на границе S происходит обмен тепла (вещества) согласно закону Ньютона:

$$\left[k \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0)\right]|_S = 0, \quad \left(\left[D \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0)\right]\right)|_S = 0,$$

где h – коэффициент теплообмена (проницаемости) и u_0 – температура окружающей среды (концентрация диффундирующего вещества в окружающей среде).

14. Уравнения переноса

Как следует из рассмотренных выше примеров, уравнения гиперболического типа в общем случае описывают некоторые волновые процессы (распространение волнового поля). С уравнениями параболического типа более естественно связать описание поведения некоторых макроскопических характеристик системы частиц. Действительно, если под величиной $u(\vec{x}, t)$, введенной в предыдущем разделе, понимать концентрацию некоторых частиц (молекул, ионов и др.), то уравнение

диффузии для разреженного газа можно получить, приписав частицам некоторую массу, так что сам процесс диффузии можно будет рассматривать как процесс переноса массы частицами в результате их перераспределения. Аналогично теплопередачу можно рассматривать как перенос энергии, течение вязкой жидкости – как перенос импульса, электрический ток – как перенос заряда и т.д.

Чтобы получить уравнение переноса нейтронов в ядерном реакторе, имеющее большое практическое значение, следует рассматривать модели, отличные от использованных ранее при выводе уравнений диффузии и теплопроводности.

Обозначим через $N(\vec{x}, \vec{n}, t)$ концентрацию нейтронов в точке \vec{x} , лежащих в направлении единичного вектора \vec{n} , в момент времени t . Все нейтроны имеют одинаковые скорости v , а длина свободного пробега нейтронов l значительно больше их размеров. Обозначим через Ω полную группу непересекающихся событий: A_1 – столкновение нейтрона с другим нейтроном, A_2 – упругое рассеяние нейтрона неподвижным ядром (нейтрон отскакивает от него как упругий шарик), A_3 – поглощение нейтрона ядром, A_4 – деление ядра нейтроном с коэффициентом размножения нейтронов $k(\vec{x})$. Распределение нейтронов по направлениям до и после рассеяния и размножения равномерно (изотропно). Пусть вероятности указанных событий есть $P(A_1) \approx 0$, $P(A_2) = P_2$, $P(A_3) = P_3$, $P(A_4) = 1 - P_2 - P_3$, а $F(\vec{x}, \vec{n}, t)$ – плотность источников. Тогда поток частиц $U = Nv$ удовлетворяет односкоростному уравнению переноса с изотропным рассеянием

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{n}, \text{grad } u) + \frac{\lambda}{l} u = \\ & = \frac{P_2 + k(1 - P_2 - P_3)}{4\pi l} \int_{S_1} u(\vec{x}, \vec{n}', t) d\vec{n}' + F(\vec{x}, \vec{n}, t), \end{aligned} \quad (14.1)$$

где λ – вероятность распада ядер в единицу времени. Уравнение (14.1) является интегродифференциальным.

В диффузионном приближении указанный процесс описывается уравнением диффузии (13.1), где $u(\vec{x}, t)$ – концентрация нейтронов в активной зоне, D – коэффициент эффективной диффузии нейтронов, а плотность источников нейтронов $F(\vec{x}, \vec{n}, t)$ пропорциональна их концентрации, т.е.

$$F = \alpha u - \beta u = ku,$$

где α – коэффициент рождения, β – коэффициент поглощения,

а $k = \alpha - \beta$ – коэффициент размножения (α и β определяются экспериментально).

Отметим, что если $k > 0$, то процесс объемной генерации преобладает и возможно возникновение цепной ядерной реакции. В результате уравнение (13.2) (при коэффициенте $C = 1$) примет вид

$$u_t - D\Delta u - ku = 0. \quad (14.2)$$

Это уравнение лежит в основе математической модели цепных ядерных реакций.

15. Уравнения квантовой механики

Основные положения квантовой механики, в том числе и уравнение Шрёдингера, постулируются. Обоснованность этих положений проверяется соответствием предсказаний квантовой механики экспериментальным данным. Поэтому уравнение Шрёдингера, в отличие от уравнений диффузии, теплопроводности, колебаний и др., не может быть выведено из неких более общих положений.

Приведем основные постулаты квантовой механики.

Постулат 1. В координатном представлении состояния квантовой системы описываются нормированным (лучом) вектором $\Psi(\vec{x}, t)$ некоторого гильбертова пространства \mathcal{L} . Функция $\Psi(\vec{x}, t)$ называется вектором состояния, а пространство \mathcal{L} – пространством состояний. Каждому ненулевому вектору $\Psi(\vec{x}, t)$ соответствует некоторое состояние.

Постулат 2. Каждой физической величине A (называемой наблюдаемой) системы ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор \hat{A} , действующий в пространстве состояний \mathcal{L} .

Постулат 3. Эволюция изолированной квантовой системы описывается уравнением Шрёдингера

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \hat{\mathcal{H}}(t)\Psi = 0, \quad (15.1)$$

где $\hat{\mathcal{H}}(t)$ – линейный эрмитов оператор, называемый гамильтонианом.

Обычно из физических соображений на волновую функцию накладывается следующее граничное условие:

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \Psi(\vec{x}, t) = 0,$$

согласованное с постулатом 1.

Постулат 4. При измерении величины A можно получить лишь те значения α_n , которые являются собственными значениями оператора \hat{A}

$$\hat{A}\Psi_n = \alpha_n\Psi_{\alpha_n}. \quad (15.2)$$

Если производится измерение величины A и результат измерения равен α_n , то после измерения квантовая система будет находиться в состоянии Ψ_{α_n} .

Постулат 5. Для операторов координат \hat{x}_l и импульсов \hat{p}_j справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$[\hat{x}_l, \hat{x}_j]_- = [\hat{p}_l, \hat{p}_j]_- = 0, \quad [\hat{x}_l, \hat{p}_j]_- = i\hbar\delta_{lj}, \quad l, j = \overline{1, n}, \quad (15.3)$$

где $[\hat{A}, \hat{B}]_{\mp} = \hat{A}\hat{B} \mp \hat{B}\hat{A}$ – коммутатор (антикоммутатор) операторов \hat{A} , \hat{B} .

Например, в координатном представлении

$$\hat{x}_l = x_l, \quad \hat{p}_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad l, j = \overline{1, n}.$$

Хотя математическая схема классической механики может быть получена из квантовой (квантовая механика в пределе $\hbar \rightarrow 0$ содержит классическую), взаимоотношения между ними как физическими теориями более сложны и не сводятся к взаимоотношениям их формальных математических аппаратов. В этом проявляется коренное отличие квантовой механики от специальной теории относительности, которая в пределе $c \rightarrow \infty$ содержит нерелятивистскую классическую механику и в ней не нуждается. Это связано с тем, что релятивистская (специальная теория относительности) и нерелятивистская классические механики математически формулируются на одном языке, от которого язык квантовой механики отличается принципиально. И сложности их взаимоотношений связаны со сложностью перевода и интерпретации.

Заметим, что вопрос о взаимно однозначном сопоставлении физической величине самосопряженного оператора в общем случае остается открытым. Однако для величин, имеющих классический аналог, такое сопоставление можно провести (например, по правилу Вейля), поскольку классические величины выражаются через обобщенные координаты и импульсы. Поэтому операторы таких величин выражаются через операторы координат и импульсов.

Так, например, функция Гамильтона классической частицы в потенциальном поле имеет вид

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{x}, t), \quad (15.4)$$

где m – масса частицы. Проведем в (15.4) формальную замену $x_k \rightarrow x_k$, $p_k \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}$ и, подставив в (15.1), получим

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi - U(\vec{x}, t) \Psi. \quad (15.5)$$

Уравнение Шрёдингера часто называют нерелятивистским волновым уравнением, а его решение Ψ – волновой функцией. Уравнение (15.5) позволяет по значениям волновой функции в начальный момент времени определить её значения в последующие моменты, являясь, тем самым, выражением принципа причинности в квантовой механике.

Для заряженной частицы в электромагнитном поле с потенциалами $\mathcal{A}_0(\vec{x}, t)$, $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)$ уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\mathcal{A}_0 \right) \Psi = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \vec{\mathcal{A}} \right)^2 \Psi. \quad (15.6)$$

Здесь c – скорость света, e – заряд электрона.

Чтобы получить волновое уравнение для описания движения релятивистской частицы, необходимо воспользоваться релятивистским соотношением между энергией и импульсом

$$\frac{E^2}{c^2} = \vec{p}^2 + m_0^2 c^2.$$

Здесь m_0 – масса покоя частицы. Проведем формальную замену

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla,$$

получим релятивистское волновое уравнение

$$\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = (\hbar^2 \nabla^2 - m_0^2 c^2) \Psi. \quad (15.7)$$

Уравнение (15.7) называется уравнением Клейна–Гордона. Полагая здесь $m_0 = 0$, получим волновое уравнение для фотона.

Уравнение Шрёдингера получается из (15.7), если мы положим $E = E + m_0c^2$ и предположим, что $|\vec{p}| \ll m_0c$. Тогда можно отбросить нелинейные слагаемые по v/c .

Во внешнем электромагнитном поле уравнение Клейна–Гордона примет вид

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\mathcal{A}_0\right)^2\Psi = c^2\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}\right)^2\Psi + m_0^2c^4\Psi. \quad (15.8)$$

Вопрос об интерпретации решений уравнения Клейна–Гордона долгое время оставался открытым. Расщепление уровней энергии атома водорода, предсказанное на основе уравнения Клейна–Гордона, отличается от экспериментального. Поэтому считалось, что уравнение (15.7) является нефизическим. Позднее выяснилось, что уравнение Клейна–Гордона описывает релятивистские бесспиновые частицы, например π -мезоны, которые могут быть как заряженными (волновая функция комплексна), так и нейтральными (волновая функция вещественна).

Релятивистское волновое уравнение для электрона (частицы спина 1/2), играющее фундаментальную роль в релятивистской квантовой механике и квантовой теории поля, было предложено Дираком и имеет вид

$$\left\{-i\hbar\partial_t + e\mathcal{A}_0 + c\left(\vec{\alpha}, \left[-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}\right]\right) - \rho_3m_0c^2\right\}\Psi = 0.$$

Здесь

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– матрицы Дирака в стандартном блочном представлении;
 $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– матрицы Паули. Решением уравнения Дирака является четырехмерный столбец – волновая функция $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)$.

16. Уравнения Максвелла

Пусть в некоторой среде существует переменное электромагнитное поле. Пусть $\vec{H}(\vec{x}, t)$ – напряженность магнитного

поля, $\vec{E}(\vec{x}, t)$ – напряженность электрического поля, ε – диэлектрическая постоянная, μ – коэффициент магнитной проницаемости среды, $\vec{j}(\vec{x}, t)$ – ток проводимости, а $\rho(\vec{x}, t)$ – плотность электрических зарядов. Тогда эти поля удовлетворяют системе уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) &= 4\pi\rho(\vec{x}, t), \\ \operatorname{div}(\mu \vec{H}) &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu \vec{H})}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon \vec{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (16.1)$$

В дальнейшем мы ограничимся средами с постоянными ε , μ . Причем вакуум будет соответствовать $\varepsilon = \mu = 1$.

Рассмотрим случай, когда внешние токи и заряды отсутствуют, т.е. $\vec{j}(\vec{x}, t) = 0$, $\rho(\vec{x}, t) = 0$. Применим к третьему и четвертому уравнениям операцию rot и получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{H}) = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{E}) = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$, с учетом первых двух уравнений из (16.1) получим

$$\begin{aligned} \Delta \vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Отсюда видно, что каждая декартова компонента векторов $\vec{E}(\vec{x}, t)$ и $\vec{H}(\vec{x}, t)$ удовлетворяет уравнению Даламбера и скорость распространения электромагнитных волн в однородной диэлектрической среде есть

$$a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Электромагнитное поле можно задавать не только напряженностями $\vec{E}(\vec{x}, t)$ и $\vec{H}(\vec{x}, t)$, но и электромагнитными потенциалами. Будем искать решение уравнений Максвелла (16.1)

в виде

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{x}, t) &= \text{rot } \vec{A}(\vec{x}, t), \\ \vec{E}(\vec{x}, t) &= -\text{grad } \mathcal{A}_0(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t},\end{aligned}\quad (16.3)$$

где $\vec{A}(\vec{x}, t)$ – векторный, а $\mathcal{A}_0(\vec{x}, t)$ – скалярный потенциалы электромагнитного поля. Подставим (16.3) в (16.1). Второе и третье уравнения становятся тождествами, два других в однородной среде приводят к следующим уравнениям для потенциалов:

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{A}_0 - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_0}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho(\vec{x}, t), \\ \Delta \vec{A} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}, t).\end{aligned}\quad (16.4)$$

При этом мы предполагаем выполненным калибровочное условие Лоренца

$$\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0.$$

17. Стационарные физические процессы и уравнения эллиптического типа

В случае стационарных процессов, когда внешние возмущения $[f(\vec{x}, t) = f(\vec{x})]$ и граничные условия не зависят от времени $[\alpha(\vec{x}, t) = \alpha(\vec{x}), \beta(\vec{x}, t) = \beta(\vec{x}), \mu(\vec{x}, t) = \mu(\vec{x})]$, решение уравнения теплопроводности или уравнения колебаний можно искать в виде

$$u(\vec{x}, t) = u(\vec{x}).$$

Тогда из уравнений теплопроводности или колебаний приходим к уравнению

$$\text{div } [k(\vec{x}) \text{grad } u] - q(\vec{x})u = f(\vec{x}),\quad (17.1)$$

граничные условия для которого вытекают из физической постановки задачи. Рассмотрим несколько примеров стационарных процессов.

17.1. Стационарное волновое уравнение

Мы уже отмечали, что волновые процессы описываются уравнениями гиперболического типа. Основные свойства та-

ких уравнений проявляются при изучении волнового уравнения (уравнения Даламбера)

$$\Delta u - \frac{1}{a^2(\vec{x})} u_{tt} = 0, \quad (17.2)$$

где $a(\vec{x})$ – скорость распространения волны.

Во многих задачах, например в задаче об установившихся монохроматических колебаниях в упругой среде, естественно искать решение уравнения (17.2) в виде

$$u(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} v_\omega(\vec{x}). \quad (17.3)$$

Тогда функция $v_\omega(\vec{x})$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta v_\omega + \lambda(\vec{x}) v_\omega = 0, \quad (17.4)$$

где

$$\lambda(\vec{x}) = k^2(\vec{x}) = \frac{\omega^2}{a^2(\vec{x})}.$$

Граничные условия для уравнения (17.4) вытекают из граничных условий для уравнения (17.2), рассмотренных ранее.

В результате приходим к задаче о нахождении собственных значений ω , при которых существуют отличные от нуля решения уравнения (17.2).

◆ Уравнение (17.4) называется уравнением Гельмгольца.

Если в волновом уравнении

$$\Delta u - \frac{1}{a^2(\vec{x})} u_{tt} = f(\vec{x}, t) \quad (17.5)$$

внешнее возмущение $f(\vec{x}, t)$ – периодическое с частотой ω и амплитудой $g(\vec{x})$:

$$f(\vec{x}, t) = e^{i\omega t} g(\vec{x}),$$

то можно искать периодическое решение $u(\vec{x}, t)$ с той же частотой, но неизвестной амплитудой:

$$u(\vec{x}, t) = e^{i\omega t} v(\vec{x}). \quad (17.6)$$

Подставив (17.6) в (17.5), получим неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta v + k^2(\vec{x}) v = g(\vec{x}), \quad k(\vec{x}) = \frac{\omega}{a(\vec{x})}. \quad (17.7)$$

◇ В данном случае ω задана и речь идет о краевой задаче для уравнения (17.7), а не о задаче Штурма–Лиувилля (17.4), где ω является спектральным параметром, подлежащим определению.

17.2. Уравнения электростатики и магнитостатики

Рассмотрим уравнения Максвелла (16.1). Если процесс стационарен, то система уравнений Максвелла распадается на две независимые системы

$$\operatorname{div} \varepsilon(\vec{x}) \vec{E} = 4\pi\rho(\vec{x}), \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (17.8)$$

и

$$\operatorname{div} \mu(\vec{x}) \vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (17.9)$$

◆ Уравнения (17.8) и (17.9) называются уравнениями электростатики и магнитостатики соответственно.

Поскольку $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, то можно положить $\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\Phi(\vec{x})$. Тогда при $\varepsilon(\vec{x}) = \text{const}$ для электромагнитного потенциала получим уравнение

$$\Delta\Phi = f(\vec{x}), \quad f(\vec{x}) = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho(\vec{x}). \quad (17.10)$$

◆ Уравнение (17.10) называется уравнением Пуассона.

17.3. Стационарное уравнение Шрёдингера

Уравнение Шрёдингера квантовой системы имеет вид

$$\{-i\hbar\partial_t + \hat{\mathcal{H}}\}\Psi = 0. \quad (17.11)$$

Пусть гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ не зависит от времени явно. Найдём решение уравнения (17.11) $\Psi(\vec{x}, t)$, представляющее собой динамическое состояние с определенной энергией E . Функцию $\Psi(\vec{x}, t)$ будем искать в виде

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{-iEt/\hbar} \Psi_E(\vec{x}), \quad (17.12)$$

где функция $\Psi_E(\vec{x})$ не зависит от времени. Подставив (17.12) в (17.11), получим уравнение для функции $\Psi_E(\vec{x})$

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi_E = E\Psi_E. \quad (17.13)$$

◆ Уравнение (17.13) называется стационарным уравнением Шрёдингера.

При движении нерелятивистской частицы в потенциальном поле $U(\vec{x})$ уравнение (17.13) примет вид

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{x}) \right] \Psi_E = E\Psi_E. \quad (17.14)$$

Для волновой функции $\Psi(\vec{x})$ предполагаются выполненными условия, рассмотренные в разд. «Уравнения квантовой механики».

◇ С математической точки зрения, задача о нахождении решений нестационарного уравнения Шрёдингера (17.12) и (17.13) представляет собой задачу Штурма–Лиувилля на собственные значения и собственные функции оператора $\hat{\mathcal{H}}$.

17.4. Рассеяние на неподвижной мишени с потенциалом конечного радиуса действия

Рассмотрим рассеяние нерелятивистской бесспиновой частицы на неподвижной мишени с потенциалом конечного радиуса действия. Пусть направленный пучок частиц с определенной энергией падает на мишень и рассеивается ею. Будем предполагать, что взаимодействием частиц в пучке можно пренебречь. Тогда можно рассматривать рассеяние одиночной частицы из пучка.

Пусть исходное состояние падающих частиц представляет собой плоскую волну $\Psi_k = N e^{i(\vec{k}, \vec{x})}$. В общем случае исходный волновой пакет удобно рассматривать как суперпозицию плоских волн

$$\Psi(\vec{x}, 0) = \int e^{i(\vec{k}, \vec{x})} \Phi(\vec{k}) d\vec{k}. \quad (17.15)$$

В результате приходим к уравнению

$$[\Delta + k^2 - \tilde{U}(\vec{x})]\Psi = 0, \quad \tilde{U}(\vec{x}) = \frac{2m}{\hbar^2}U(\vec{x}), \quad k^2 = \vec{k}^2, \quad (17.16)$$

решение которого при больших $|\vec{x}|$ удовлетворяет следующему условию:

$$\Psi(\vec{x}) \underset{|\vec{x}| \rightarrow \infty}{\sim} N e^{i(\vec{k}, \vec{x})} + \frac{e^{i(\vec{k}, \vec{x})}}{|\vec{x}|} f_{\vec{k}}\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right), \quad (17.17)$$

т.е. представляет собой суперпозицию плоской волны $e^{i(\vec{k}, \vec{x})}$ и расходящейся сферической волны. При этом предполагается, что $\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} U(\vec{x}) = 0$.

Условие (17.17) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} |r v(\vec{x})| < \infty, \quad r = |\vec{x}|; \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\partial v(\vec{x})}{\partial r} - i|\vec{k}|v(\vec{x}) \right\} = 0, \quad v(\vec{x}) = \Psi(\vec{x}) - N e^{i(\vec{k}, \vec{x})}. \end{aligned} \quad (17.18)$$

◆ Соотношения (17.18) называются условиями излучения Зоммерфельда.

В частности, если потенциал $U(\vec{x})$ представляет собой бесконечный потенциальный барьер

$$U(\vec{x}) = \begin{cases} \infty, & \vec{x} \in \mathcal{D}; \\ 0, & \vec{x} \notin \mathcal{D}, \end{cases}$$

то уравнение (17.16) для функции $v(\vec{x}) = \Psi(\vec{x}) - N e^{i(\vec{k}, \vec{x})}$ трансформируется в уравнение Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)v = 0, \quad \Psi|_S = 0 \quad (17.19)$$

с условием Зоммерфельда (17.18) на бесконечности. Здесь S – граница области \mathcal{D} .

17.5. Скалярное поле

Как известно, ядро атома состоит из нуклонов (протонов и нейтронов), взаимодействующих между собой посредством ядерных сил. С точки зрения квантовой теории поля, ядерные силы обусловлены обменом мезонами между нуклонами ядра. Такое взаимодействие называется сильным взаимодействием элементарных частиц. Структура ядра в значительной степени определяется поведением ядерных сил на малых расстояниях, где они недостаточно хорошо известны. Поэтому в теории ядра широко используется модельный подход. Число моделей очень велико. С их помощью описывают свойства ядер и ядерные реакции. Одной из таких моделей является модель скалярного поля, в основу которой положено уравнение Клейна–Гордона

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\varphi_{tt} - k_0^2\varphi = -4\pi\rho(\vec{x}, t), \quad k_0 = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}, \quad (17.20)$$

где по аналогии с уравнением Пуассона в правую часть добавляется слагаемое, характеризующее источники поля φ . Ядерные силы – короткодействующие, поэтому решения уравнения (17.20) должны быстро (как минимум, экспоненциально) убывать на больших расстояниях. Уравнение (17.20) описывает поле частиц с массой покоя $m_0 = \hbar k_0/c$, создаваемое источником $\rho(\vec{x}, t)$. В стационарном случае, когда источник можно считать неподвижным, приходим к уравнению Гельмгольца для функции $\varphi(\vec{x})$

$$(\Delta - k_0^2)\varphi = f(\vec{x}), \quad f(\vec{x}) = 4\pi\rho(\vec{x}), \quad (17.21)$$

которое отличается от уравнения (17.7) только знаком перед слагаемым с k_0^2 .

18. Постановка начальных и краевых задач для уравнений математической физики

Выше мы рассмотрели некоторые физические процессы, математическое описание которых после ряда физических и геометрических предположений сводится к линейным уравнениям (системам уравнений) в частных производных. При этом оказывается, что различные явления описываются одинаковыми по форме уравнениями, например, процессы диффузии и теплопроводности, механические и электрические колебания и т.д. Это связано с тем, что в их основе лежат фундаментальные законы природы.

Все рассмотренные нами уравнения можно отнести к одному из следующих типов:

а) уравнения колебаний (гиперболического типа)

$$\rho(\vec{x}, t)u_{tt} = \widehat{L}u + f(\vec{x}, t); \quad (18.1)$$

б) уравнение теплопроводности (параболического типа)

$$\rho(\vec{x}, t)u_t = \widehat{L}u + f(\vec{x}, t); \quad (18.2)$$

в) стационарное уравнение (эллиптического типа)

$$\widehat{L}u + f(\vec{x}) = 0. \quad (18.3)$$

Здесь обозначено

$$\widehat{L}u = \operatorname{div}(k(\vec{x}) \operatorname{grad} u) - q(\vec{x}) = (\nabla, k(\vec{x})\nabla u) - q(\vec{x}) \quad (18.4)$$

и предполагается, что $k(\vec{x}) > 0$, $q(\vec{x}) \geq 0$.

Мы уже отмечали, что общее решение уравнений в частных производных второго порядка, как правило, содержит две произвольные функции. Из физических соображений обычно требуется найти единственное решение. Поэтому, помимо дифференциальных уравнений, математическая постановка физической задачи должна включать дополнительные условия, которым должна удовлетворять искомая функция на границах области ее определения.

Рассмотрим постановку основных задач, включающих такие условия.

I. Задача Коши: найти функцию $u(\vec{x}, t)$, удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению (18.1) или (18.2) в любой точке $\vec{x} \in E$ (в этом случае область E совпадает со всем пространством), а также начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \quad u_t|_{t=0} = \psi(\vec{x}) \quad (18.5)$$

для уравнения (18.1) и начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}) \quad (18.6)$$

для уравнения (18.2).

◇ Обычно искомую функцию подчиняют еще некоторым ограничениям общего характера, например требуют, чтобы на бесконечности выполнялось следующее условие:

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |u(\vec{x}, t)| \leq \infty \quad (18.7)$$

или

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |u(\vec{x}, t)| = 0. \quad (18.8)$$

Как правило, такие условия естественно вытекают из физической постановки задачи. Искомую функцию можно подчинить другим ограничениям, например потребовать, чтобы

$$\int_E |u(\vec{x}, t)|^2 \rho(\vec{x}) d\vec{x} < \infty \quad (18.9)$$

или

$$\int_E |\text{grad } u(\vec{x}, t)|^2 \rho(\vec{x}) d\vec{x} < \infty,$$

где $\rho(\vec{x}) > 0$, $\vec{x} \in E \subset \mathbb{R}^n$. В этом случае искомую функцию можно рассматривать как элемент гильбертова пространства \mathcal{L} , $u(\vec{x}, t) \in \mathcal{L}$, в котором норма определена соотношениями

$$\|u(\vec{x}, t)\|^2 = \int_E |u(\vec{x}, t)|^2 \rho(\vec{x}) d\vec{x} \quad (18.10)$$

или

$$\|u(\vec{x}, t)\|^2 = \int_E |\text{grad } u(\vec{x}, t)|^2 \rho(\vec{x}) d\vec{x}$$

соответственно. Такие требования возникают, в частности, в квантовой механике. В более общей ситуации функцию $u(\vec{x}, t)$ считают элементом некоторого функционального пространства. В последующих главах мы будем предполагать (если не оговорено противное) выполнение условия (18.7) или (18.9).

II. Смешанная задача: найти функцию $u(\vec{x}, t)$, удовлетворяющую при $t > 0$, $\vec{x} \in E$ уравнению (18.1) [или (18.2)], начальным условиям (18.5) [или (18.6)] и граничному условию

$$\left[\alpha(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(\vec{x}) u \right] \Big|_S = \mu(\vec{x}, t) \Big|_S, \quad (18.11)$$

$$[\alpha^2(\vec{x}) + \beta^2(\vec{x})] \Big|_S \neq 0.$$

Здесь S – граница области E , $\partial u / \partial n$ – производная по внешней нормали к поверхности S . При этом предполагается выполнение условия согласования

$$\left[\alpha(\vec{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \beta(\vec{x}) \varphi \right] \Big|_S = \mu(\vec{x}, 0) \Big|_S. \quad (18.12)$$

◆ Граничные условия (18.11) называются граничными условиями первого рода (условиями Дирихле), если $\alpha(\vec{x})|_S \equiv 0$; второго рода (условиями Неймана), если $\beta(\vec{x})|_S \equiv 0$, и третьего рода (условиями Робина) в противном случае.

III. Краевая задача (задача определения стационарного режима): найти функцию $u(\vec{x}, t)$, удовлетворяющую в области E уравнению (18.1) [или (18.2)] и граничному условию (18.11) (без начальных условий).

Для уравнений эллиптического типа: найти функцию, удовлетворяющую в области E ($\vec{x} \in E$) уравнению (18.3) и граничному условию

$$\left[\alpha(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(\vec{x}) u \right] \Big|_{S_E} = \mu(\vec{x}) \Big|_{S_E}, \quad [\alpha^2(\vec{x}) + \beta^2(\vec{x})] \Big|_{S_E} \neq 0. \quad (18.13)$$

◆ Краевая задача при $\alpha(\vec{x})|_S \equiv 0$ называется задачей Дирихле, а при $\beta(\vec{x}) \equiv 0$ – задачей Неймана.

До сих пор мы рассматривали внутренние задачи $\vec{x} \in E$.

◇ Если нужно найти решение $u(\vec{x}, t)$, удовлетворяющее условиям (18.11), (18.13), в бесконечной области E^* , внешней по отношению к поверхности S , то требуют выполнения условия регулярности на бесконечности (18.7) или (18.8). Такая задача называется внешней краевой задачей.

IV. Задача Штурма–Лиувилля. В разделе, посвященном специальным функциям, мы рассматривали задачу Штурма–Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений. Такая задача может быть естественным образом обобщена на случай уравнений в частных производных.

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\widehat{L}v + \lambda\rho(\vec{x})v = 0, \quad \vec{x} \in E \quad (18.14)$$

с однородными граничными условиями

$$\left(\alpha \frac{\partial v}{\partial n} + \beta v \right) \Big|_{S_E} = 0. \quad (18.15)$$

Здесь обозначено

$$\widehat{L}v = \operatorname{div}(k(\vec{x})\nabla v) - q(\vec{x})v. \quad (18.16)$$

◆ Задача об определении значений параметра λ , при которых существует нетривиальное решение уравнения (18.14) с краевыми условиями (18.15), называется задачей Штурма–Лиувилля. Значения параметра λ , при которых существует решение задачи Штурма–Лиувилля, называются собственными значениями, а отвечающие им функции $v_\lambda(\vec{x})$ – собственными функциями.

◆ Совокупность всех собственных значений $\{\lambda_n\}$ задачи Штурма–Лиувилля называется спектром, а совокупность собственных значений и отвечающих им собственных функций $[\lambda_n, v_n(\vec{x})]$, $n = \overline{1, \infty}$, – спектральной серией.

◇ В последующих разделах мы будем рассматривать главным образом методы решения этих классов задач.

V. Корректность постановки задач математической физики. Перечисленные выше типы постановки задач, отличаясь друг от друга, преследуют, тем не менее, одну и ту же цель: обеспечить единственность решения поставленной задачи. Если принять

во внимание, что данные задачи: начальные и (или) граничные условия, коэффициенты и неоднородность уравнения – определяются, как правило, из экспериментов, то возникает вопрос о влиянии погрешности измерений на полученное решение. Другими словами, как и насколько сильно решение задачи меняется при варьировании значений перечисленных выше параметров. Ответ очевиден: всякий физически определенный процесс не должен существенным образом зависеть от погрешностей измерений. Малым изменениям начальных и краевых условий задачи должно соответствовать малое изменение решения, т.е. решение задачи должно непрерывно зависеть от исходных данных. В противном случае практически одинаковым условиям задачи (в пределах точности измерения) могут соответствовать два существенно различных решения.

♦ Задачу, решение которой непрерывно зависит от ее исходных данных, будем называть устойчивой.

Требование устойчивости решения замыкает перечень требований, предъявляемых к математической постановке задачи, корректно определяющей ее решение.

♦ Математическую задачу будем называть поставленной корректно, если она удовлетворяет одновременно следующим трем требованиям: а) решение задачи существует; б) решение задачи единственно; в) решение задачи устойчиво.

Остановимся более подробно на третьем требовании – устойчивости решения. Обозначим через \mathcal{F} класс функций, к которому принадлежат исходные данные задачи, содержащий последовательность $\{\varphi_n(\vec{x})\}$, $n = \overline{1, \infty}$, сходящуюся к функции $\varphi(\vec{x})$ при $n \rightarrow \infty$. Соответственно через \mathcal{U} обозначим класс функций – решений задачи u , к которой стремится последовательность решений $\{u_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$ при $n \rightarrow \infty$. Если при заданном n данные задачи φ_n определяют решение u_n , то для устойчивого решения из сходимости

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \quad (\varphi_n - \varphi \rightarrow 0) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (18.17)$$

следует сходимость

$$u_n \rightarrow u \quad (u_n - u \rightarrow 0) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (18.18)$$

♦ Классом корректности задачи будем называть совокупность классов \mathcal{F} и \mathcal{U} , задающих ее корректное решение. Задача, некорректная в одном классе, может быть корректной в другом.

Формулы (18.17) и (18.18) чисто формально определяют устойчивость решения задачи. Для того чтобы это понятие приобрело определенный смысл, необходимо конкретизировать понятие сходимости в классах \mathcal{F} и \mathcal{U} . Наиболее распространенными в математической физике являются понятия равномерной сходимости и сходимости в среднем (см. разд. «Основные и обобщенные функции» части II). Их естественность характеризуется, например, краевой задачей для уравнения теплопроводности, где роль u играет температура тела Ω , а роль φ – температура на границе тела S . В этом случае малое изменение температуры на границе вызовет малое

ее изменение во внутренних точках тела. Таким образом, классом корректности в данном случае является совокупность двух классов $\mathcal{C}(\Omega)$ и $\mathcal{C}(S)$ непрерывных на Ω и S функций.

Помимо указанных выше существуют и другие определения сходимости, которых мы касаться не будем. Отметим лишь, что более строгий подход к проблеме устойчивости решения основан на введении двух метрических пространств $\mathcal{P}(\Phi)$ и $\mathcal{P}(U)$ с нормами $\|\Phi\|$ и $\|U\|$ элементов \mathcal{F} и \mathcal{U} соответственно. В терминах пространств $\mathcal{P}(\Phi)$ и $\mathcal{P}(U)$ определение корректности формулируется следующим образом.

♦ Математическую задачу будем называть корректной в совокупности пространств $\mathcal{P}(\Phi)$, $\mathcal{P}(U)$, если решение задачи единственно в $\mathcal{P}(U)$ и существует при любых данных из $\mathcal{P}(\Phi)$, причем малому изменению начальных данных по норме пространства $\mathcal{P}(\Phi)$ соответствует малое изменение решения по норме пространства $\mathcal{P}(U)$.

К примеру, в пространстве $\mathcal{C}(a, b)$ [или $\mathcal{C}^0(a, b)$] функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с нормой

$$\|f(x)\|_c = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (18.19)$$

последовательность $f_n(x)$, $n = \overline{1, \infty}$, из $\mathcal{C}(a, b)$ будет сходиться по норме к функции $f(x) \in \mathcal{C}(a, b)$, если $\|f_n(x) - f(x)\|_c \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Определенная таким образом сходимость в пространстве $\mathcal{C}(a, b)$ будет эквивалентна указанной выше равномерной сходимости последовательности $f_n(x)$, $n = \overline{1, \infty}$, к функции $f(x)$ из класса $\mathcal{C}(a, b)$. Сходимость последовательности $f_n(x)$, $n = \overline{1, \infty}$, в среднем, или сходимость по норме

$$\|f(x)\|_\rho = \left(\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx \right)^{1/2}$$

в пространстве $L_2(a, b, \rho)$ [или $L_2(a, b)$] определена в разд. <Дельта-функция Дирака и ортонормированные системы функций> части II.

◇ Возможно введение и других метрических пространств, продиктованных требованием конкретности постановки математической задачи.

Если обратиться к задаче Коши для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, то ее решение, если оно существует, всегда корректно. Для уравнений более высоких порядков это утверждение уже не всегда справедливо. Например, решение задачи Коши для уравнений более высоких порядков может быть неустойчивым относительно начальных данных. Обратимся к примеру, приведенному Адамаром. Рассмотрим последовательность задач Коши для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

с начальными условиями для n -й задачи

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = \varphi_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Функциональная последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно стремится к функции $\varphi(x) = 0$. Легко убедиться, что n -я задача Коши имеет единственное решение

$$u_n(x, y) = \frac{\operatorname{sh} ny \sin nx}{n^2}.$$

Однако при возрастании n последовательность $\{u_n(x, y)\}$ не стремится к решению $u(x, y) = 0$, соответствующему начальному условию $\varphi(x) = 0$, а, напротив, неограниченно возрастает, поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\operatorname{sh} ny \sin nx}{n^2} \right| = \infty.$$

Таким образом, хотя решение задачи существует и единственно, оно не является устойчивым по отношению к начальным условиям. Следовательно, указанная задача поставлена некорректно.

Отметим, что требование корректности постановки задачи обусловлено идеализацией рассматриваемых физических явлений в классической физике. Исследования, основанные на отказе от такой идеализации (квантовая теория, нелинейные явления, обратные задачи), показывают, что корректно поставленные задачи – далеко не единственные задачи, отражающие физические явления. В последнее время некорректно поставленные задачи становятся объектом интенсивного исследования (см., например, [61]).

VI. Классические и обобщенные решения. Как правило, мы будем предполагать, что во всех рассматриваемых случаях требуется найти решение $u(\vec{x}, t)$, непрерывное вместе со своими частными производными соответствующего порядка (например, для уравнений второго порядка решение непрерывно вместе с частными производными второго порядка по всем переменным). Такие решения называются классическими, а постановка соответствующей краевой задачи в этом классе функций – классической постановкой. Однако в ряде интересных случаев начальные и(или) краевые условия могут задаваться негладкими (разрывными) функциями, и решения задач такого сорта уже не являются гладкими функциями. В частности, именно такие задачи привели к понятию обобщенного решения.

Рассмотрим линейное уравнение в частных производных второго порядка

$$\widehat{L}u = f(\vec{x}), \quad \widehat{L}u = (\nabla, k(\vec{x})\nabla u) - q(\vec{x})u, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (18.20)$$

где $k(\vec{x})$ и $q(\vec{x})$ — гладкие функции.

◆ Обобщенным решением уравнения (18.20) в области $E \subset \mathbb{R}^n$ называется обобщенная функция $u(\vec{x})$, удовлетворяющая в этой области уравнению (18.20) в обобщенном смысле, т.е.

$$\langle \widehat{L}u(\vec{x}) | \varphi(\vec{x}) \rangle = \langle f(\vec{x}) | \varphi(\vec{x}) \rangle, \quad (18.21)$$

где $\varphi(\vec{x})$, $\vec{x} \in E \subset \mathbb{R}^n$, принадлежит пространству основных функций $\mathcal{D}(E)$ [для неограниченных областей — пространству Шварца $\mathcal{S}(E)$ (см. разд. «Основные и обобщенные функции» части II)].

◇ Всякое классическое решение является и обобщенным.

Рассмотрим несколько постановок начальных и краевых задач, приводящих к обобщенным функциям.

VII. Фундаментальные решения. Понятие фундаментального решения, введенное для линейного оператора одной переменной (см. разд. «Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов» части II), естественным образом обобщается на случай нескольких переменных.

◆ Фундаментальным решением (функцией влияния) уравнения в частных производных $\widehat{L}u(\vec{x}) = 0$ или фундаментальным решением линейного дифференциального оператора \widehat{L} (18.20) называется обобщенная функция $\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y})$, которая при каждом фиксированном $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет в \mathbb{R}^n уравнению

$$\widehat{L}_x \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (18.22)$$

где по определению $\delta(\vec{x} - \vec{y}) = \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2) \dots \delta(x_n - y_n)$.

Фундаментальное решение $\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y})$ позволяет найти частное решение неоднородного уравнения (18.20) по формуле

$$u(\vec{x}) = \int_E \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y} \quad (18.23)$$

в предположении, что интеграл, стоящий в правой части, существует. В справедливости соотношения (18.23) можно убедиться, если подействовать на него оператором \widehat{L} . Тогда получим

$$\widehat{L}u(\vec{x}) = \int_E \widehat{L}_x \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y} = \int_E \delta(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y} = f(\vec{x}).$$

◇ Если оператор \widehat{L} – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то под фундаментальным решением оператора \widehat{L} часто понимается обобщенная функция $\mathcal{E}(\vec{x})$, которая является решением уравнения

$$\widehat{L}\mathcal{E}(\vec{x}) = \delta(\vec{x}). \quad (18.24)$$

Очевидно, что эти фундаментальные решения связаны соотношением

$$\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{E}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (18.25)$$

В этом случае, если функция $f(\vec{x})$ такова, что свертка $f * g$ (см. разд. «Свертка обобщенных функций» части II) существует, то соотношение (18.23) принимает вид

$$u(\vec{x}) = f * g = \int g(\vec{x} - \vec{y})f(\vec{y})d\vec{y}. \quad (18.26)$$

Само решение в виде (18.26) иногда называют решением в форме потенциала.

Второе название – функция влияния – становится понятным, если неоднородность $f(\vec{x})$ в уравнении (18.20) представить в виде «суммы» точечных источников $f(\vec{y})\delta(\vec{x} - \vec{y})$, т.е.

$$f(\vec{x}) = \int_E \delta(\vec{x} - \vec{y})f(\vec{y})d\vec{y}.$$

В силу соотношений (18.22) и (18.23) каждый точечный источник $f(\vec{y})\delta(\vec{x} - \vec{y})$ влияет на объект, помещенный в точку \vec{x} , в соответствии с формулой $f(\vec{y})\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y})$. Поэтому решение

$$u(\vec{x}) = \int_E \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y})f(\vec{y})d\vec{y}$$

представляет собой суперпозицию этих влияний.

◇ Можно показать, что фундаментальное решение существует для любого дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, а также для любых эллиптических дифференциальных уравнений (см. [?]).

Ниже приведены фундаментальные решения основных операторов, встречающихся в математической физике.

а) Оператор Лапласа $\Delta_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$:

$$\Delta_n \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}),$$

$$\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{(\delta_{2n} + n - 2)\sigma_n} e_n(\vec{x} - \vec{y}).$$

Здесь δ_{2n} – дельта-символ Кронекера, σ_n – площадь поверхности единичной сферы в \mathbb{R}^n ,

$$\sigma_n = \int_{|\vec{x}|=1} dS = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad \sigma_2 = 2\pi, \quad \sigma_3 = 4\pi$$

и

$$e_n(\vec{x}) = \begin{cases} \ln \frac{1}{|\vec{x}|}, & n = 2, \\ \frac{1}{|\vec{x}|^{n-2}}, & n \geq 2. \end{cases}$$

б) Оператор Гельмгольца $\Delta_n + k^2$:

$$(\Delta_n + k^2)\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}),$$

$$\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} \pm \frac{i}{4} H_0^{(1,2)}(k|\vec{x} - \vec{y}|), & n = 2; \\ -\frac{e^{\pm k|\vec{x} - \vec{y}|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}, & n = 3. \end{cases}$$

Здесь $H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$ – функции Ханкеля нулевого индекса, k – в общем случае комплексная величина.

в) Оператор теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta_n$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta_n\right) \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}, t) = \delta(t)\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

$$\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \exp\left(-\frac{|\vec{x} - \vec{y}|^2}{4a^2 t}\right).$$

г) Волновой (Даламбера) оператор $\square_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n$:

$$\square_n \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}, t) = \delta(t) \delta(\vec{x} - \vec{y}),$$

$$\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}, t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \theta(at - |\vec{x} - \vec{y}|), & n = 1; \\ \frac{\theta(at - |\vec{x} - \vec{y}|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2}}, & n = 2; \\ \frac{\theta(t) \delta(a^2 t^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2)}{2\pi a}, & n \geq 3. \end{cases}$$

Фундаментальное решение $\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y})$ оператора \widehat{L} не единственно и определяется с точностью до слагаемого $g_0(\vec{x}, \vec{y})$, являющегося при каждом фиксированном \vec{y} произвольным решением однородного уравнения

$$\widehat{L}g_0(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

Это позволяет находить фундаментальные решения, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, в том числе решения уравнений (18.22) с краевыми, начальными и смешанными (начально-краевыми) условиями. Фундаментальные решения соответствующих задач называются также функциями Грина этих задач. Для функций Грина будем использовать обозначения $g(\vec{x}, \vec{y})$ и $G(\vec{x}, \vec{y})$.

VIII. Обобщенная задача Коши

◆ Обобщенной задачей Коши для уравнения (18.1) или (18.2) называется задача о нахождении обобщенной функции $\tilde{u}(\vec{x}, t)$, обращающейся в нуль при $t < 0$ и удовлетворяющей волновому уравнению

$$\rho(\vec{x}) \tilde{u}_{tt} = \widehat{L}\tilde{u} + F(\vec{x}, t) \quad (18.27)$$

или

$$\rho(\vec{x}) \tilde{u}_t = L\tilde{u} + F(\vec{x}, t). \quad (18.28)$$

Можно показать, что решение классической задачи Коши (18.1), (18.5) и обобщенной (18.27) связаны соотношениями (см. [?])

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\vec{x}, t) &= \theta(t)u(\vec{x}, t), \\ F(\vec{x}, t) &= f(\vec{x}, t) + \varphi(\vec{x})\delta'(t) + \psi(\vec{x})\delta(t). \end{aligned} \quad (18.29)$$

Аналогично для задачи Коши (18.1), (18.6)

$$\tilde{u}(\vec{x}, t) = \theta(t)u(\vec{x}, t), \quad F(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) + \varphi(\vec{x})\delta(t). \quad (18.30)$$

Задача Штурма–Лиувилля для уравнений в частных производных

19. Постановка задачи

В разделе, посвященном специальным функциям, мы рассматривали задачу Штурма–Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. разд. III.2). Понятие о задаче Штурма–Лиувилля может быть естественным образом обобщено на случай уравнений в частных производных.

Пусть E – ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^n и S_E – ее граница (гладкая поверхность). Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\widehat{L}v + \lambda\rho(\vec{x})v = 0, \quad \vec{x} \in E \quad (19.1)$$

с однородными граничными условиями

$$\left(\alpha(\vec{x}) \frac{\partial v}{\partial n} + \beta(\vec{x})v \right) \Big|_{S_E} = 0. \quad (19.2)$$

Здесь обозначено

$$\widehat{L}v = \operatorname{div}(k(\vec{x}) \operatorname{grad} v) - q(\vec{x})v = (\nabla, k(\vec{x})\nabla v) - q(\vec{x})v, \quad (19.3)$$

$\partial v / \partial n$ – производная вдоль внутренней нормали к поверхности S_E и $\rho(\vec{x})$ – заданная знакоположительная функция.

♦ Задача об определении значений параметра λ , при которых существует нетривиальное решение $v_\lambda(\vec{x})$ уравнения (19.1) с краевыми условиями (19.2), называется задачей Штурма–Лиувилля. Значения параметра λ , при которых существует решение задачи Штурма–Лиувилля, называются собственными значениями, а отвечающие им функции $v_\lambda(\vec{x})$ – собственными функциями.

♦ Совокупность всех собственных значений $\{\lambda_n\}$ задачи Штурма–Лиувилля называется спектром, а совокупность собственных значений и отвечающих им собственных функций $[\lambda_n, v_n(\vec{x})]$, $n = 0, \infty$, – спектральной серией.

Перечислим основные свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.

Свойство 1. Существует бесконечное счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}$ и собственных функций $\{v_n(\vec{x})\}$; можно так выбрать нумерацию собственных значений λ_n , что при

увеличении номера n они неограниченно возрастают. Каждому собственному значению соответствует конечное число линейно независимых собственных функций.

◇ В отличие от задачи Штурма–Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений, для уравнений в частных производных собственные значения могут быть вырожденными, т.е. собственному значению может соответствовать несколько линейно независимых собственных функций. Количество таких функций называется кратностью собственного значения, или кратностью вырождения. В дальнейшем мы будем предполагать, что в спектре задачи Штурма–Лиувилля каждое собственное значение присутствует столько раз, какова его кратность.

Свойство 2. При $q(\vec{x}) \geq 0$ и $\alpha = 0, \beta = 1$ (краевое условие Дирихле) собственные значения задачи Штурма–Лиувилля положительны:

$$\lambda_n > 0, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Свойство 3. Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (19.1), (19.2) удовлетворяют условию ортогональности

$$\langle v_n(\vec{x}) | v_m(\vec{x}) \rangle_\rho = \|v_n(\vec{x})\|^2 \delta_{nm}, \quad n, m = \overline{0, \infty}, \quad (19.4)$$

где обозначено

$$\langle v | u \rangle_\rho = \langle v(\vec{x}) | u(\vec{x}) \rangle_\rho = \int_E v(\vec{x}) u(\vec{x}) \rho(\vec{x}) d\vec{x}; \quad (19.5)$$

$$\|v\| = \|v(\vec{x})\| = \sqrt{\langle v(\vec{x}) | v(\vec{x}) \rangle_\rho}. \quad (19.6)$$

◇ В дальнейшем мы будем предполагать, что собственные функции, соответствующие вырожденному собственному значению, выбраны ортогональными. Последнее всегда можно сделать, например, методом ортогонализации Шмидта (см. разд. «Ортогональные классические полиномы» части III).

Свойство 4 (теорема разложения В.А. Стеклова). Если функция $f(\vec{x})$ дважды непрерывно дифференцируема в замкнутой области \bar{E} и удовлетворяет граничному условию (19.2), то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям задачи (19.1) и (19.2)

$$f(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n v_n(\vec{x}), \quad (19.7)$$

где

$$C_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \langle f(\vec{x}) | v_n(\vec{x}) \rangle_\rho. \quad (19.8)$$

Ряд (19.7) называется рядом Фурье функции $f(\vec{x})$ по ортогональной системе функций $\{v_n(\vec{x})\}$, $n = \overline{0, \infty}$. Коэффициенты (19.8) называются коэффициентами Фурье.

Следствие. Система собственных функций $\{v_n(\vec{x})\}$ задачи Штурма–Лиувилля удовлетворяет условию полноты

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2} \rho(\vec{y}) v_n(\vec{x}) v_n(\vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (19.9)$$

в классе дважды непрерывно дифференцируемых в области \bar{E} функций, для которых выполняется однородное граничное условие (19.2).

Доказательство. Подставим (19.8) в (19.7) и поменяем порядок суммирования и интегрирования. Получим

$$\int_E f(\vec{y}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2} \rho(\vec{y}) v_n(\vec{x}) v_n(\vec{y}) d\vec{y} = f(\vec{x}),$$

откуда в соответствии с определением дельта-функции следует (19.9).

◇ Доказательства свойств 1–4 полностью аналогичны доказательствам соответствующих свойств задачи Штурма–Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений.

20. Задача Штурма–Лиувилля и начально-краевые задачи для уравнений математической физики

20.1. Редукция задачи

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\rho(\vec{x}) \hat{P}_t u = \hat{L}u + f(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in E, \quad (20.1)$$

где

$$\hat{P}_t u = \sum_{j=0}^2 a_j(t) \frac{\partial^j u}{\partial t^j}, \quad (20.2)$$

а оператор \widehat{L} определен формулой (19.3). Уравнение (20.2) является уравнением гиперболического типа, если $a_2 \neq 0$, и параболического типа, если $a_2 = 0$, а $a_1 \neq 0$.

В частности, при

$$a_2 = \frac{1}{a^2}, \quad a_0 = a_1 = 0 \quad \text{и} \quad \widehat{P}_t u = \frac{1}{a^2} u_{tt}$$

уравнение (20.2) переходит в волновое уравнение, а если при этом $\widehat{L} = \Delta$, то в уравнение Даламбера

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} = \Delta u.$$

Если в уравнении (20.2)

$$a_0 = a_2 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{a^2} \quad \text{и} \quad \widehat{P}_t u = \frac{1}{a^2} u_t,$$

то оно переходит в уравнение теплопроводности. В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда $\widehat{L} = \Delta$ и уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{1}{a^2} u_t = \Delta u.$$

Поставим для уравнения (20.1) начальные условия

$$u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \quad u_t|_{t=0} = \psi(\vec{x}) \quad (20.3)$$

и граничные условия

$$\left(\alpha(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(\vec{x}) u \right) \Big|_{S_E} = \mu(\vec{x}, t) \Big|_{S_E}, \quad |\alpha(\vec{x})| + |\beta(\vec{x})| \neq 0. \quad (20.4)$$

◇ В случае уравнения теплопроводности начальное условие имеет вид

$$u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}). \quad (20.5)$$

◆ Классическим решением задачи (20.1)–(20.5) называется функция $u(\vec{x}, t)$, определенная и непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно в области E и $t \in [0, T]$ и удовлетворяющая граничному условию (20.4) и начальным условиям (20.3) или (20.5).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что справедливо следующее

Утверждение 20.1. Пусть функции $u_1(\vec{x}, t)$, $u_2(\vec{x}, t)$ и $u_3(\vec{x}, t)$ являются классическими решениями следующих задач:

$$\begin{cases} \rho(\vec{x})\widehat{P}_t u_1 = \widehat{L}u_1, & \vec{x} \in E, \\ \left(\alpha \frac{\partial u_1}{\partial n} + \beta u_1\right)\Big|_S = 0, & u_1|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(\vec{x}); \end{cases} \quad (20.6)$$

$$\begin{cases} \rho(\vec{x})\widehat{P}_t u_2 = \widehat{L}u_2 + f(\vec{x}, t), & \vec{x} \in E, \\ \left(\alpha \frac{\partial u_2}{\partial n} + \beta u_2\right)\Big|_S = 0, & u_2|_{t=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0; \end{cases} \quad (20.7)$$

$$\begin{cases} \rho(\vec{x})\widehat{P}_t u_3 = \widehat{L}u_3, & \vec{x} \in E, \\ \left(\alpha \frac{\partial u_3}{\partial n} + \beta u_3\right)\Big|_S = \mu(\vec{x}, t)|_S, & u_3|_{t=0} = \frac{\partial u_3}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (20.8)$$

тогда решение $u(\vec{x}, t)$ задачи (20.1), (20.3) и (20.4) имеет вид

$$u(\vec{x}, t) = u_1(\vec{x}, t) + u_2(\vec{x}, t) + u_3(\vec{x}, t). \quad (20.9)$$

Процедура сведения начально-краевой задачи (20.1), (20.3) и (20.4) к более простым задачам (20.6)–(20.8) называется редукцией общей задачи.

◇ Задача (20.6) представляет собой смешанную задачу с однородным граничным и неоднородным начальным условиями для однородного линейного уравнения в частных производных второго порядка; задача (20.7) – смешанную задачу с однородными граничными и начальными условиями для неоднородного линейного уравнения; задача (20.8) – смешанную задачу с неоднородными граничными и однородными начальными условиями для однородного линейного уравнения.

20.2. Неоднородные начальные условия

Рассмотрим задачу (20.6). Ее решение будем искать в виде

$$u_1(\vec{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)v_n(\vec{x}), \quad (20.10)$$

где $v_n(\vec{x})$ – решение задачи Штурма–Лиувилля (19.1), (19.2).

Подставим (20.10) в (20.6) и получим

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\vec{x}) \widehat{P}_t T_n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{L} T_n(t) v_n(\vec{x}) = \\ &= \rho(\vec{x}) \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_n) T_n(t) v_n(\vec{x}). \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях $v_n(\vec{x})$, для определения функций $T_n(t)$ получим следующую задачу Коши:

$$\widehat{P}_t T_n + \lambda_n T_n = 0, \quad T_n(0) = \varphi_n, \quad T'_n(0) = \psi_n, \quad (20.11)$$

где φ_n и ψ_n – коэффициенты (19.8) разложения функций $\varphi(\vec{x})$ и $\psi(\vec{x})$ в ряд Фурье по функциям $v_n(\vec{x})$

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n v_n(\vec{x}), \quad \psi(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n v_n(\vec{x}); \quad (20.12)$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \langle \varphi(\vec{x}) | v_n(\vec{x}) \rangle_{\rho}, \quad \psi_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \langle \psi(\vec{x}) | v_n(\vec{x}) \rangle_{\rho}. \quad (20.13)$$

В частности, задача Коши (20.11) для уравнения теплопроводности примет вид

$$\frac{1}{a^2} T'_n + \lambda_n T_n = 0, \quad T_n(0) = \varphi_n, \quad (20.14)$$

и ее решением являются функции

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t}. \quad (20.15)$$

Аналогично задача Коши для волнового уравнения

$$\frac{1}{a^2} T''_n + \lambda_n T_n = 0, \quad T_n(0) = \varphi_n, \quad T'_n(0) = \psi_n \quad (20.16)$$

будет иметь решение

$$T_n(t) = \varphi_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin(a\sqrt{\lambda_n}t). \quad (20.17)$$

Таким образом, решение смешанной задачи (20.6) для уравнения теплопроводности имеет вид

$$u_1(\vec{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t} v_n(\vec{x}), \quad (20.18)$$

а для волнового уравнения

$$u_1(\vec{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varphi_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin(a\sqrt{\lambda_n}t) \right] v_n(\vec{x}). \quad (20.19)$$

◆ Функция $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$ называется функцией Грина, или фундаментальным решением смешанной задачи, для уравнения теплопроводности, если для произвольного фиксированного $\vec{y} \in E$ справедливо

$$\rho(\vec{x}) g_t(\vec{x}, \vec{y}, t) = \widehat{L}_x g(\vec{x}, \vec{y}, t), \quad \vec{x} \in E; \quad (20.20)$$

$$\left[\alpha(\vec{x}) \frac{\partial g(\vec{x}, \vec{y}, t)}{\partial n_x} + \beta(\vec{x}) g(\vec{x}, \vec{y}, t) \right] \Big|_{S_E} = 0; \quad (20.21)$$

$$g|_{t=0} = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad |\alpha(\vec{x})| + |\beta(\vec{x})| \neq 0. \quad (20.22)$$

Если область E совпадает со всем пространством, то функция $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$, удовлетворяющая условиям (20.20), (20.22), называется функцией Грина задачи Коши для уравнения (20.6) и обозначается через $G(\vec{x}, \vec{y}, t)$.

Подставив (20.22) в (20.13), из (20.18) получим

Утверждение 20.2. *Функцию Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности (20.1) $\widehat{P}_t = a^{-2} \partial_t$ можно представить в виде*

$$g(\vec{x}, \vec{y}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2} \rho(\vec{y}) e^{-\lambda_n a^2 t} v_n(\vec{x}) v_n(\vec{y}). \quad (20.23)$$

Утверждение 20.3. *Пусть $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$ – функция Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Тогда решение задачи (20.6) имеет вид*

$$u_1(\vec{x}, t) = \int_E g(\vec{x}, \vec{y}, t) \varphi(\vec{y}) d\vec{y}. \quad (20.24)$$

Действительно, подставив коэффициенты Фурье (20.13) в соотношение (20.18), с учетом явного вида функции Грина (20.23) приходим к (20.24).

◆ Функции $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$ и $\mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t)$ называются функциями Грина смешанной задачи для волнового уравнения, если для произвольного фиксированного $\vec{y} \in E$ справедливы условия

$$\rho(\vec{x})g_{tt}(\vec{x}, \vec{y}, t) = \widehat{L}_x g(\vec{x}, \vec{y}, t), \quad \vec{x} \in E; \quad (20.25)$$

$$\left[\alpha(\vec{x}) \frac{\partial g(\vec{x}, \vec{y}, t)}{\partial n_x} + \beta(\vec{x})g(\vec{x}, \vec{y}, t) \right] \Big|_{S_E} = 0; \quad (20.26)$$

$$g|_{t=0} = 0, \quad g_t|_{t=0} = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (20.27)$$

$$\rho(\vec{x})\mathfrak{g}_{tt}(\vec{x}, \vec{y}, t) = \widehat{L}_x \mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t), \quad \vec{x} \in E; \quad (20.28)$$

$$\left[\alpha(\vec{x}) \frac{\partial \mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t)}{\partial n_x} + \beta(\vec{x})\mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t) \right] \Big|_{S_E} = 0; \quad (20.29)$$

$$\mathfrak{g}|_{t=0} = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \mathfrak{g}_t|_{t=0} = 0. \quad (20.30)$$

Когда область E совпадает со всем пространством, функции $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$ и $\mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t)$, отвечающие условиям (20.27)–(20.30), называются функциями Грина задачи Коши для волнового уравнения (20.1) $\widehat{P}_t = a^{-2}\partial_t^2$ и обозначаются $G(\vec{x}, \vec{y}, t)$ и $\mathfrak{G}(\vec{x}, \vec{y}, t)$.

Аналогично для волнового уравнения приходим к утверждению

Утверждение 20.4. *Функции Грина смешанной задачи для волнового уравнения $\widehat{P}_t = a^{-2}\partial_t^2$ (20.1) можно представить в виде*

$$g(\vec{x}, \vec{y}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \frac{1}{\|v_n\|^2} \rho(\vec{y}) \sin(a\sqrt{\lambda_n}t) v_n(\vec{x}) v_n(\vec{y}); \quad (20.31)$$

$$\mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2} \rho(\vec{y}) \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) v_n(\vec{x}) v_n(\vec{y}). \quad (20.32)$$

Подставив коэффициенты Фурье (20.13) в соотношение (20.19), с учетом явного вида функций Грина (20.31) и (20.32) убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Утверждение 20.5. *Пусть $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$ и $\mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t)$ – функции Грина смешанной задачи для волнового уравнения. Тогда ре-*

шение задачи (20.6) можно представить в виде

$$u_1(\vec{x}, t) = \int_E g(\vec{x}, \vec{y}, t) \psi(\vec{y}) d\vec{y} + \int_E \mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t) \varphi(\vec{y}) d\vec{y}. \quad (20.33)$$

◇ Если $\widehat{P}_t = a^{-2} \partial_t^2$ – волновой оператор, то из (20.31) и (20.32) следует

$$\mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t) = g_t(\vec{x}, \vec{y}, t). \quad (20.34)$$

20.3. Линейное неоднородное уравнение

Рассмотрим теперь задачу (20.7). Ее решение будем искать в виде

$$u_2(\vec{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(t) v_n(\vec{x}). \quad (20.35)$$

Подставим (20.35) в (20.7):

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\vec{x}) \widehat{P}_t T_n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{L} T_n(t) v_n(\vec{x}) + f(\vec{x}, t) = \\ &= \rho(\vec{x}) \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_n) T_n(t) v_n(\vec{x}) + \rho(\vec{x}) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) v_n(\vec{x}). \end{aligned}$$

Здесь

$$f_n(t) = \frac{1}{\|v_n(\vec{x})\|^2} \left\langle \frac{f(\vec{x}, t)}{\rho(\vec{x})} \middle| v_n(\vec{x}) \right\rangle_{\rho}. \quad (20.36)$$

Приравняв коэффициенты рядов Фурье, стоящих в левой и правой частях, получим следующее уравнение для $\Theta_n(t)$:

$$\widehat{P}_t \Theta_n + \lambda_n \Theta_n = f_n(t), \quad \Theta_n(0) = \Theta_n'(0) = 0. \quad (20.37)$$

Решение уравнения (20.37) можно представить в виде

$$\Theta_n(t) = \int_0^t \mathcal{K}_n(t, \tau) f_n(\tau) d\tau, \quad (20.38)$$

где $\mathcal{K}_n(t, \tau)$ – функция Грина задачи Коши (20.37) (см. разд. «Фундаментальные решения линейных операторов» части II).

В случае уравнения теплопроводности получим

$$\Theta_n(t) = e^{-a^2\lambda_n t} \int_0^t e^{a^2\lambda_n\tau} f_n(\tau) d\tau \quad (20.39)$$

и

$$\mathcal{K}_n(t, \tau) = e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)}. \quad (20.40)$$

В случае волнового уравнения для определения функции $\Theta_n(t)$ получим следующее уравнение:

$$\Theta_n'' + \lambda_n a^2 \Theta_n = f_n(t) \quad (20.41)$$

с начальными условиями (20.37).

Решение уравнения (20.41) будем искать методом Лагранжа:

$$\Theta_n(t) = p_n(t) \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + q_n(t) \sin(a\sqrt{\lambda_n}t),$$

где функции $p_n(t)$ и $q_n(t)$ определяются системой уравнений

$$\begin{cases} p_n'(t) \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + q_n'(t) \sin(a\sqrt{\lambda_n}t) = 0, \\ p_n'(t)(-a\sqrt{\lambda_n}) \sin(a\sqrt{\lambda_n}t) + q_n'(t)a\sqrt{\lambda_n} \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) = f_n(t). \end{cases}$$

В результате получим

$$p_n(t) = -\frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) \sin(a\sqrt{\lambda_n}\tau) d\tau + p_n^0,$$

$$q_n(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) \cos(a\sqrt{\lambda_n}\tau) d\tau + q_n^0.$$

Из начальных условий (20.37) найдем $q_n^0 = p_n^0 = 0$. Тогда

$$\Theta_n(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) [-\sin(a\sqrt{\lambda_n}\tau) \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) +$$

$$+ \cos(a\sqrt{\lambda_n}\tau) \sin(a\sqrt{\lambda_n}t)] d\tau = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) \sin[a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)] d\tau.$$

Таким образом, для волнового уравнения

$$\mathcal{K}_n(t, \tau) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin[a\sqrt{\lambda_n}(t - \tau)]. \quad (20.42)$$

♦ Обобщенная функция $\mathfrak{E}(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau)$ называется фундаментальным решением, или функцией Грина, смешанной задачи, если она при фиксированных $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}$, удовлетворяет уравнению

$$\rho(\vec{x}) \widehat{P}_t \mathfrak{E} = \widehat{L}_x \mathfrak{E} + \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(t - \tau) \quad (20.43)$$

и однородному начально-краевому условию

$$\left[\alpha(\vec{x}) \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n} + \beta(\vec{x}) \mathfrak{E} \right] \Big|_{S_E} = 0, \quad \mathfrak{E}|_{t=0} = \mathfrak{E}_t|_{t=0} = 0, \quad (20.44)$$

$$\{\alpha^2(\vec{x}) + \beta^2(\vec{x})\} \Big|_{S_E} \neq 0.$$

Утверждение 20.6. Фундаментальное решение $\mathfrak{E}(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau)$ смешанной задачи (20.1) можно представить в виде

$$\mathfrak{E}(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n(t, \tau) v_n(\vec{x}) v_n(\vec{y}). \quad (20.45)$$

Действительно, положив в (20.36)

$$f(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(t - \tau),$$

из (20.35) получим (20.45).

Подставив коэффициенты Фурье (20.36) в (20.35) и поменяв местами суммирование и интегрирование, с учетом явного вида функции $\mathfrak{E}(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau)$ приходим к следующему утверждению.

Утверждение 20.7. Пусть $\mathfrak{E}(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau)$ – фундаментальное решение смешанной задачи (20.43) и (20.44). Тогда решение задачи (20.7) можно представить в виде

$$u_2(\vec{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_E \mathfrak{E}(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) f(\vec{y}, \tau) d\vec{y}. \quad (20.46)$$

Утверждение 20.8. Функции Грина $\mathfrak{E}(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau)$ (20.43) и $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$ (20.25), (20.20) связаны соотношением

$$\mathfrak{E}(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) = \frac{1}{a_2(\tau)} g(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau). \quad (20.47)$$

В случае уравнения теплопроводности в соотношении (20.47) коэффициент $a_2(\tau)$ необходимо заменить на $a_1(\tau)$.

Действительно, рассмотрим функцию

$$u_2(\vec{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_E \frac{1}{a_2(\tau)} g(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) f(\vec{y}, \tau) d\vec{y}, \quad (20.48)$$

где функция $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$ – решение задачи (20.25). Тогда

$$\widehat{L}u_2(\vec{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_E \frac{1}{a_2(\tau)} \widehat{L}_x g(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) f(\vec{y}, \tau) d\vec{y}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \widehat{P}_t u_2(\vec{x}, t) &= \int_0^t d\tau \int_E \frac{1}{a_2(\tau)} \widehat{P}_t g(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) f(\vec{y}, \tau) d\vec{y} + \\ &+ a_2(t) \int_E \frac{1}{a_2(t)} g_t(\vec{x}, \vec{y}, 0) f(\vec{y}, t) d\vec{y} + \\ &+ a_2(t) \frac{\partial}{\partial t} \int_E \frac{1}{a_2(t)} \widehat{g}(\vec{x}, \vec{y}, 0) f(\vec{y}, t) d\vec{y} + \\ &+ a_1(t) \int_E \frac{1}{a_2(t)} g(\vec{x}, \vec{y}, 0) f(\vec{y}, t) d\vec{y}. \end{aligned}$$

С учетом определения (20.27) получим

$$\widehat{P}_t u_2(\vec{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_E \frac{1}{a_2(\tau)} \widehat{P}_t g(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) f(\vec{y}, \tau) d\vec{y} + f(\vec{x}, t).$$

Отсюда в силу произвольности функции $f(\vec{y}, \tau)$ следует, что представление (20.46) эквивалентно представлению (20.48) и соотношение (20.47) справедливо. Для уравнения теплопроводности доказательство аналогично.

20.4. Неоднородные граничные условия

Рассмотрим, наконец, задачу (20.8). Покажем, что ее можно свести к рассмотренным ранее. Действительно, пусть $v(\vec{x}, t)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$\left[\alpha(\vec{x}) \frac{\partial v}{\partial n} + \beta(\vec{x})v \right] \Big|_{S_E} = \mu(\vec{x}, t) \Big|_{S_E}. \quad (20.49)$$

Решение уравнения (20.8) будем искать в виде

$$u_3(\vec{x}, t) = v(\vec{x}, t) + w(\vec{x}, t). \quad (20.50)$$

Тогда для определения функции $w(\vec{x}, t)$ имеем задачу:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}) \widehat{P}_t w &= \widehat{L}w + \tilde{f}(\vec{x}, t), \\ \left(\alpha(\vec{x}) \frac{\partial w}{\partial n} + \beta(\vec{x})w \right) \Big|_{S_E} &= 0, \\ w|_{t=0} &= -v|_{t=0}, \quad w_t|_{t=0} = -v_t|_{t=0}, \end{aligned} \quad (20.51)$$

где

$$\tilde{f}(\vec{x}, t) = \widehat{L}v(\vec{x}, t) - \rho(\vec{x}) \widehat{P}_t v(\vec{x}, t),$$

т.е. для функции $w(\vec{x}, t)$ получим задачи, рассмотренные выше. Тогда ее можно записать в виде

$$\begin{aligned} w(\vec{x}, t) &= \int_0^t d\tau \int_E \mathfrak{E}(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) \tilde{f}(\vec{y}, \tau) d\vec{y} - \\ &- \int_E \mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t) v(\vec{y}, 0) d\vec{y} - \int_E g(\vec{x}, \vec{y}, t) v_t(\vec{y}, 0) d\vec{y}. \end{aligned} \quad (20.52)$$

Соответственно для уравнения теплопроводности вместо (20.52) получим

$$\begin{aligned} w(\vec{x}, t) &= \int_0^t d\tau \int_E \mathfrak{E}(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) \tilde{f}(\vec{y}, \tau) d\vec{y} - \int_E g(\vec{x}, \vec{y}, t) v(\vec{y}, 0) d\vec{y} = \\ &= \int_0^t \frac{d\tau}{a_1(\tau)} \int_E g(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) \tilde{f}(\vec{y}, \tau) d\vec{y} - \int_E g(\vec{x}, \vec{y}, t) v(\vec{y}, 0) d\vec{y}. \end{aligned}$$

Для оператора $\widehat{P}_t = a^{-2}$ формулу (20.52) можно записать с помощью одной функции Грина $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$:

$$w(\vec{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_E g(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) \tilde{f}(\vec{y}, \tau) d\vec{y} - \int_E g_t(\vec{x}, \vec{y}, t) v(\vec{y}, 0) d\vec{y} - \int_E g(\vec{x}, \vec{y}, t) v_t(\vec{y}, 0) d\vec{y}.$$

21. Задача Штурма–Лиувилля и краевые задачи для стационарных уравнений

Рассмотрим следующую задачу:

$$\widehat{L}u = f(\vec{x}); \quad (21.1)$$

$$\left[\alpha(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(\vec{x}) u \right] \Big|_{S_E} = \varphi(\vec{x}) \Big|_{S_E}. \quad (21.2)$$

Решение задачи (21.1), (21.2) будем искать в виде

$$u(\vec{x}) = w(\vec{x}) + v(\vec{x}), \quad (21.3)$$

где $v(\vec{x})$ – произвольная гладкая вместе со своими производными второго порядка функция, удовлетворяющая условию

$$\left[\alpha(\vec{x}) \frac{\partial v}{\partial n} + \beta(\vec{x}) v \right] \Big|_{S_E} = \varphi(\vec{x}) \Big|_{S_E},$$

например, $v(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$, если функция $\varphi(\vec{x})$ удовлетворяет перечисленным условиям. Тогда для функции $w(\vec{x})$ получим уравнение

$$\widehat{L}w = \bar{f}(\vec{x}) \quad (21.4)$$

с однородными граничными условиями

$$\left[\alpha(\vec{x}) \frac{\partial w}{\partial n} + \beta(\vec{x}) w \right] \Big|_{S_E} = 0. \quad (21.5)$$

Здесь обозначено

$$\bar{f}(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \widehat{L}v(\vec{x}).$$

Решение уравнения (21.4) будем искать в виде

$$w(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n v_n(\vec{x}), \quad (21.6)$$

где $v_n(\vec{x})$ – собственные функции оператора \widehat{L} в области E . Подставим (21.6) в уравнение (21.4):

$$\begin{aligned} \widehat{L} \sum_{n=0}^{\infty} w_n v_n(\vec{x}) &= \bar{f}(\vec{x}); \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_n) \rho(\vec{x}) w_n v_n(\vec{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho(\vec{x}) \alpha_n v_n(\vec{x}), \end{aligned} \quad (21.7)$$

где

$$\alpha_n = -\frac{1}{\|v_n(x)\|^2} \left\langle \frac{\bar{f}(\vec{x})}{\rho(\vec{x})} \middle| v_n(\vec{x}) \right\rangle_{\rho}, \quad (21.8)$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых функциях $v_n(\vec{x})$. Получим

$$\lambda_n w_n = -\alpha_n, \quad n = \overline{0, \infty},$$

где λ_n – собственные числа задачи (19.1), (19.2). Предположим, что $\lambda_n \neq 0$, и, следовательно, функция $w(\vec{x})$ есть

$$w(\vec{x}) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n} v_n(\vec{x}) \quad (21.9)$$

и решение исходной задачи имеет вид

$$u(\vec{x}) = v(\vec{x}) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n} v_n(\vec{x}). \quad (21.10)$$

♦ Обобщенная функция $g(\vec{x}, \vec{y})$ называется функцией источника, или функцией Грина внутренней краевой задачи, если она при фиксированных $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет уравнению

$$\widehat{L}_x g(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (21.11)$$

и однородному граничному условию

$$\begin{aligned} \left\{ \alpha(\vec{x}) \frac{\partial g(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_x} + \beta(\vec{x}) g(\vec{x}, \vec{y}) \right\} \Big|_{S_E} &= 0, \\ \{ \alpha^2(\vec{x}) + \beta^2(\vec{x}) \} \Big|_{S_E} &\neq 0, \end{aligned} \quad (21.12)$$

где \vec{n} – единичный вектор, нормальный к поверхности S и внутренний по отношению к области E (внутренняя нормаль). В случае граничных условий первого ($\alpha(\vec{x})|_S \equiv 0$), второго ($\beta(\vec{x})|_S \equiv 0$) и третьего рода функция $g(\vec{x}, \vec{y})$ называется функцией Грина (функцией источника) первой, второй и третьей краевой задачи соответственно.

Утверждение 21.1. *Функцию источника, или функцию Грина, $g(\vec{x}, \vec{y})$ внутренней краевой задачи (21.11), (21.12) можно представить в виде*

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\rho(\vec{y})}{\lambda_n \|v_n(\vec{x})\|^2} v_n(\vec{x}) v_n(\vec{y}). \quad (21.13)$$

Действительно, подставив $f(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{y})$ в (21.8), из (21.9) получим (21.13).

Утверждение 21.2. *Пусть $g(\vec{x}, \vec{y})$ – функция Грина внутренней краевой задачи (21.11), (21.12). Тогда решение однородной задачи (21.1), (21.2) [$\varphi(\vec{x}) = 0$] можно представить в виде*

$$u(\vec{x}) = \int_E g(\vec{x}, \vec{y}) \bar{f}(\vec{y}) d\vec{y}. \quad (21.14)$$

Действительно, подставив коэффициенты α_n (21.8) в (21.9) и поменяв местами суммирование и интегрирование, с учетом (21.13) и $\varphi(\vec{x}) = 0$ убеждаемся в справедливости утверждения.

◇ Из явного вида функции Грина (21.13) следует, что она определена, если соответствующая задача Штурма–Лиувилля не имеет тривиальных собственных значений. В противном случае можно ввести обобщенные функции Грина, аналогичные тем, которые возникали в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. разд. «Краевая задача для линейных дифференциальных уравнений с параметром» части II). Например, для второй краевой задачи ($\beta(\vec{x})|_{S_E} = 0$)

$$(\nabla, k(\vec{x}) \nabla u) = f(\vec{x}), \quad \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} \Big|_{S_E} = 0 \quad (21.15)$$

существует обобщенная функция Грина, удовлетворяющая вместо (21.11) условию

$$\left\{ \frac{\partial g(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_x} \right\} \Big|_{S_E} = -\frac{1}{S_0}, \quad (21.16)$$

где S_0 – площадь поверхности S_E . Такая функция Грина называется функцией Неймана (см. также [55]). Подробно такая задача будет рассмотрена ниже.

Уравнения эллиптического типа

22. Формулы Грина

Теорема 22.1. Пусть E – область в пространстве \mathbb{R}^3 , граница которой S_E – кусочно-гладкая замкнутая поверхность. Тогда, если функции $u(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$ непрерывны вместе со своими первыми и вторыми производными в области E вплоть до границы S_E , справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \int_E [u(\vec{x})\Delta v(\vec{x}) + (\nabla u(\vec{x}), \nabla v(\vec{x}))] d\vec{x} = \\ = \oint_{S_E} u(\vec{x})(\nabla v(\vec{x}), d\vec{S}). \end{aligned} \quad (22.1)$$

$$\begin{aligned} \int_E [u(\vec{x})\Delta v(\vec{x}) - v(\vec{x})\Delta u(\vec{x})] d\vec{x} = \\ = \oint_{S_E} ([u(\vec{x})\nabla v(\vec{x}) - v(\vec{x})\nabla u(\vec{x})], d\vec{S}). \end{aligned} \quad (22.2)$$

Соотношения (22.1) и (22.2) называются соответственно первой и второй формулой Грина.

Доказательство. Формула Остроградского в случае трех переменных имеет вид

$$\int_E \operatorname{div} \vec{A}(\vec{x}) d\vec{x} = \oint_{S_E} (\vec{A}(\vec{x}), d\vec{S}). \quad (22.3)$$

В правой части стоит поверхностный интеграл второго рода, где $d\vec{S} = \vec{n} dS$ и нормаль \vec{n} является внешней по отношению к замкнутой поверхности S_E . Положим в (22.3)

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= u(\vec{x})\nabla v(\vec{x}), \\ \nabla v(\vec{x}) &= \operatorname{grad} v(\vec{x}) = \left(\frac{\partial v(\vec{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial v(\vec{x})}{\partial x_2}, \frac{\partial v(\vec{x})}{\partial x_3} \right), \end{aligned}$$

где $u(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$ – функции, непрерывные вместе со своими первыми производными в области E , тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{x}) &= (\nabla, \vec{A}(\vec{x})) = (\nabla, (u(\vec{x}), \nabla v(\vec{x}))) = \\ &= u(\vec{x})\Delta v(\vec{x}) + (\nabla u(\vec{x}), \nabla v(\vec{x})), \end{aligned}$$

т.е.

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{x}) = u(\vec{x})\Delta v(\vec{x}) + (\nabla u(\vec{x}), \nabla v(\vec{x})).$$

Подставив в (22.3), получим (22.1). Заменяем в (22.1) $u(\vec{x})$ на $v(\vec{x})$, а $v(\vec{x})$ на $u(\vec{x})$, тогда

$$\int_E [v(\vec{x})\Delta u(\vec{x}) + (\nabla u(\vec{x}), \nabla v(\vec{x}))]d\vec{x} = \oint_{S_E} v(\vec{x})(\nabla u(\vec{x}), d\vec{S}). \quad (22.4)$$

Вычтем полученное соотношение из (22.1) и получим (22.2). Таким образом, теорема доказана.

◊ Условия, которые накладываются теоремой 22.1 на функции $u(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$, определяются типом поверхности S_E , для которой справедлива формула Остроградского. Ниже будет показано, что эти требования можно ослабить, если усилить ограничения на поверхность S_E .

◊ Формулы Грина (22.3) и (22.1) остаются справедливыми, когда область E ограничена несколькими поверхностями (т.е. имеет многосвязную границу). В этом случае нормаль \vec{n} , внешняя по отношению к области E на поверхностях, ограничивающих эту область изнутри, будет направлена внутрь этих поверхностей.

◊ Формулы Грина (22.3) и (22.1) остаются справедливыми в пространствах \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. При этом под S_E подразумевается замкнутая плоская кривая для $n = 2$ и замкнутая гиперповерхность для $n > 3$.

23. Фундаментальные решения уравнений Гельмгольца и Лапласа

◆ Уравнение

$$\Delta u - \lambda u = f(\vec{x}), \quad \lambda = \text{const}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (23.1)$$

называется уравнением Гельмгольца.

◆ Фундаментальным решением уравнения Гельмгольца (23.1), или функцией Грина уравнения Гельмгольца, называется обобщенная функция $\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y})$, удовлетворяющая уравнению

$$[\Delta_x - \lambda]\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (23.2)$$

где $\delta(\vec{x} - \vec{y}) = \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2) \cdots \delta(x_n - y_n)$ – дельта-функция Дирака, \vec{x} – переменная, \vec{y} – параметр.

В случае $n = 3$ и положительных λ , $\lambda = k_0^2$, уравнение Гельмгольца используют в ядерной физике (модель Юкавы). Когда λ отрицательно, $\lambda = -k_0^2$, уравнение Гельмгольца возникает в теории дифракции.

Теорема 23.1. *Функция Грина $\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y})$ позволяет найти частное решение уравнения (23.1) при произвольной $f(\vec{x})$*

$$u(\vec{x}) = \int_E \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y}, \quad E \subset \mathbb{R}^n. \quad (23.3)$$

Доказательство. Действительно, домножим уравнение (23.2) на $f(\vec{y})$ и проинтегрируем по \vec{y} в области E . Тогда

$$\begin{aligned} [\Delta_x - \lambda] \int_E \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y} &= \int_E [\Delta_x - \lambda]\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y} = \\ &= \int_E f(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} = f(\vec{x}). \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к (23.1), где $u(r)$ определяем из (23.3), что и требовалось доказать.

◆ Функция Грина определена с точностью до слагаемого $g_0(\vec{x}, \vec{y})$, которое при фиксированном \vec{y} является произвольным решением однородного уравнения

$$[\Delta_x - \lambda]g_0(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \quad (23.4)$$

но если потребовать, чтобы функция Грина убывала на бесконечности, то решение такой задачи для положительных λ единственно. Чтобы решение было единственным для отрицательных λ , необходимо потребовать также выполнения условий Зоммерфельда (17.18).

◆ Функция $f(\vec{x})$ имеет смысл плотности источников данного процесса (например, плотности электростатических зарядов), распределенных в рассматриваемой среде. А так как

дельта-функция Дирака $\delta(\vec{x} - \vec{y})$ является локальной и сосредоточенной в точке $\vec{x} = \vec{y}$, то $\delta(\vec{x} - \vec{y}) = 0$, если $\vec{x} \neq \vec{y}$. Следовательно, решение уравнения (23.2) (функция Грина) описывает влияние точечного источника, находящегося в точке \vec{y} .

Теорема 23.2. *Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца имеет вид*

$$\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm\sqrt{\lambda}|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} & \text{при } n = 3; \\ \pm \frac{i}{4} H_0^{(1,2)}[\sqrt{-\lambda}|\vec{x}-\vec{y}|] & \text{при } n = 2. \end{cases} \quad (23.5)$$

Доказательство. 1. Сделаем в уравнении (23.2) замену переменных $\vec{x} - \vec{y} = \vec{R}$, тогда уравнение (23.2) примет вид

$$(\Delta_R - \lambda)\mathcal{E}_n(\vec{R}, \vec{y}) = \delta(\vec{R}).$$

Так как правая часть уравнения не зависит от \vec{y} , то его решение можно искать в виде

$$\mathcal{E}_n(\vec{R}, \vec{y}) = \mathcal{E}_n(\vec{R}),$$

в результате чего приходим к уравнению

$$(\Delta_R - \lambda)\mathcal{E}_n(\vec{R}) = \delta(\vec{R}). \quad (23.6)$$

Разложим функцию $\mathcal{E}_n(\vec{R})$ в интеграл Фурье

$$\mathcal{E}_n(\vec{R}) = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\mathcal{E}}(\vec{p}) e^{i(\vec{p}, \vec{R})} d\vec{p}, \quad n = 2, 3.$$

Тогда

$$\Delta_R \mathcal{E}_n(\vec{R}) = - \int_{\mathbb{R}^n} p^2 \bar{\mathcal{E}}(\vec{p}) e^{i(\vec{p}, \vec{R})} d\vec{p}, \quad \vec{p}^2 = p^2.$$

Подставив в (23.2), получим

$$- \int_{\mathbb{R}^n} (p^2 + \lambda) \bar{\mathcal{E}}(\vec{p}) e^{i(\vec{p}, \vec{R})} d\vec{p} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\vec{p}, \vec{R})} d\vec{p}.$$

Здесь мы воспользовались разложением δ -функции в интеграл Фурье (см. разд. «Дельта-функция Дирака» части II)

$$\delta(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\vec{p}, \vec{R})} d\vec{p}.$$

Следовательно,

$$\bar{\mathcal{E}}_n(\vec{p}) = -\frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{p^2 + \lambda}. \quad (23.7)$$

Сделав обратное преобразование Фурье, найдем

$$\mathcal{E}_n(\vec{R}) = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i(\vec{p}, \vec{R})}}{p^2 + \lambda} d\vec{p}. \quad (23.8)$$

2. Вычислим интеграл (23.8) при $n = 3$ и $\lambda = k_0^2$. Для этого перейдем в нем к сферической системе координат, направив вектор p_3 по вектору \vec{R} , тогда $(\vec{p}, \vec{R}) = pR \cos \theta$, $\vec{p}^2 = p^2$, $d\vec{p} = p^2 dp \sin \theta d\theta d\varphi$, $p_1 = p \sin \theta \cos \theta$, $p_2 = p \sin \theta \sin \varphi$, $p_3 = p \cos \theta$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3(\vec{R}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty p^2 dp \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{ipR \cos \theta}}{p^2 + k_0^2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{p^2 + k_0^2} \int_0^\pi e^{ipR \cos \theta} d(\cos \theta). \end{aligned}$$

Вычислив интеграл

$$\int_0^\pi e^{ipR \cos \theta} d(\cos \theta) = \frac{e^{ipR \cos \theta}}{ipR} \Big|_0^\pi = -\frac{2}{pR} \sin pR,$$

получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3(\vec{R}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(\vec{p}, \vec{R})}}{p^2 + k_0^2} d\vec{p} = -\frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^\infty \frac{p \sin pR}{p^2 + k_0^2} dp = \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^\infty dx \frac{x \sin x}{x^2 + (k_0 R)^2} = -\frac{1}{4\pi R} e^{-k_0 R}, \quad (23.9) \end{aligned}$$

так как (см. пример 23.5 разд. «Приложения теории вычетов» части I)

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad a > 0.$$

3. При $n = 2$ в интеграле (23.8) перейдем к полярной системе координат: $p_1 = p \cos \varphi$, $p_2 = p \sin \varphi$, $p = |\vec{p}|$, $(\vec{p}, \vec{R}) = \rho R \cos \varphi$. Тогда

$$\mathcal{E}_2(\vec{R}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} p dp \int_0^{2\pi} \frac{e^{ipR \cos \varphi}}{p^2 + k^2} d\varphi.$$

Воспользовавшись представлением функции Бесселя (III.10.7) с помощью интеграла Бесселя, найдем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(\vec{R}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{p J_0(Rp) dp}{p^2 + k^2} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} K_0(Rk) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(ikR). \end{aligned} \quad (23.10)$$

Здесь использованы формула (6.4) и соотношение (III.10.24).

Аналогично или методом аналитического продолжения доказываются остальные формулы (23.5). Выбор фундаментального решения из (23.5) в каждом конкретном случае обусловлен постановкой задачи.

◆ Функция $\mathcal{E}_n(\vec{p})$ (23.7) (фурье-образ функции Грина) называется пропагатором уравнения (23.2).

Пример 23.1. Найти общее решение уравнения (23.4), зависящее только от $|\vec{x}|$.

Решение. Уравнение (23.4) для функции $g_0(\vec{x}) = g_0(|\vec{x}|)$, $|\vec{x}| = r$, имеет вид:

при $n = 3$ (в сферической системе координат)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg_0}{dr} \right) - \lambda g_0 = 0; \quad (23.11)$$

при $n = 2$ (в полярной системе координат)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dg_0}{dr} \right) - \lambda g_0 = 0. \quad (23.12)$$

Приняв во внимание, что

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg_0}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rg_0),$$

уравнение (23.11) можно записать

$$\frac{d^2}{dr^2} (rg_0) - \lambda(rg_0) = 0.$$

Общее решение последнего имеет вид

$$g_0(|\vec{x}|) = g_0(r) = \frac{1}{r} [C_1 e^{r\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-r\sqrt{\lambda}}]. \quad (23.13)$$

В свою очередь, уравнение (23.12) представляет собой уравнение Бесселя индекса $\nu = 0$ с параметром $-\lambda$:

$$r^2 \frac{d^2 g_0}{dr^2} + r \frac{dg_0}{dr} - \lambda r^2 g_0 = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$g_0(|\vec{x}|) = g_0(r) = C_1 H_0^{(1)}(r\sqrt{-\lambda}) + C_2 H_0^{(2)}(r\sqrt{-\lambda}). \quad (23.14)$$

Поскольку однородное уравнение (23.4) всюду вне точки $\vec{x} = \vec{y}$ совпадает с (23.2), то полученные решения (23.13), (23.14) с точностью до постоянных множителей совпадают с соответствующими фундаментальными решениями (23.5).

Следствие. Функция Грина уравнения Лапласа имеет вид

$$\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}, & \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3; \\ -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}, & \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (23.15)$$

Доказательство. Положив в соотношении (23.5) $\lambda = 0$ и приняв во внимание поведение функций Ханкеля $H_0^{(1,2)}(z)$ в окрестности точки $z = 0$ (см. разд. «Асимптотическое поведение функций Бесселя» части III)

$$H_0^{(1,2)}(z) \sim \pm \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{|z|}, \quad z \rightarrow 0,$$

получим функцию Грина уравнения Лапласа (23.15).

◇ Соотношения (23.15) можно получить из уравнения Лапласа с помощью преобразования Фурье аналогично тому, как были получены соотношения (23.5).

◇ Очевидно, что функция Грина (23.15) удовлетворяет уравнению

$$\Delta_x \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \Delta_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (23.16)$$

а частное решение уравнения Пуассона $\Delta u = f(\vec{x})$ имеет вид

$$u(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\vec{y})d\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (23.17)$$

◇ Функция Грина уравнения Лапласа (23.15) в электростатике представляет собой кулоновский потенциал точечного заряда или заряженной линии, а функция Грина уравнения Гельмгольца (23.5) в ядерной физике – потенциал Юкавы.

24. Гармонические функции

24.1. Гармонические функции и их свойства

◆ Функция $u(\vec{x})$ называется гармонической в области $E \subset \mathbb{R}^n$, если она непрерывна в E вместе со своими частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta_n u = 0$ во всех внутренних точках области E .

◇ Определение гармонической функции дано для открытой области. Если в дальнейшем мы будем говорить о гармонической функции в замкнутой области \bar{E} , то это означает, что она гармоническая в более широкой открытой области G ($\bar{E} \subset G$).

◇ Данное выше определение справедливо как для ограниченных, так и для неограниченных областей. Иногда для неограниченных областей его дополняют условием

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}|^{n-2} u(\vec{x}) = \text{const} < \infty, \quad n \geq 2. \quad (24.1)$$

Ниже будет показано, что это требование выполняется, если гармоническую функцию подчинить условиям регулярности (18.7) или (18.8). Такие функции будем называть регулярными на бесконечности гармоническими функциями.

◇ Регулярная гармоническая функция в неограниченной области $E \subset \mathbb{R}^n$ стремится к нулю при стремлении $|\vec{x}|$ к бесконечности вдоль любой кривой, принадлежащей E , при $n > 2$ и является ограниченной при $n = 2$.

◇ Отметим, что при $n = 1$ гармонические функции удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

и сводятся к линейным функциям, которые графически изображаются прямыми линиями. Теория таких функций рассмотрена в курсе математического анализа и в нашем случае интереса не представляет. Тем не менее, поведение прямой, заданной на границе области E , т.е. в точках a и b отрезка $[a, b]$, хорошо иллюстрирует и, более того, позволяет предсказать некоторые свойства гармонических функций размерности $n \geq 2$. Действительно, задание значений прямой в двух точках (т.е. на границе) однозначно определяет, во-первых, явный вид линейной функции, т.е. поведение функции во всех внутренних точках отрезка, что соответствует теореме об интегральном представлении; во-вторых, среднее значение линейной функции на отрезке $[a, b]$, что соответствует теореме о среднем. Кроме того, прямая не может достигать наибольшего или наименьшего значения во внутренних точках отрезка $[a, b]$, что соответствует теореме об экстремуме или принципу максимума. К рассмотрению этих теорем мы и перейдем, доказав предварительно следующую лемму.

Лемма 24.1. *Если функция $u(\vec{x})$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно в области E вплоть до границы S_E , т.е. $u(\vec{x}) \in C^2(\bar{E})$, то имеют место формулы*

$$h(\vec{x}, E)u(\vec{x}) = \int_E \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) \Delta u(\vec{y}) d\vec{y} + \oint_{S_E} \{ [u(\vec{y}) \nabla \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) - \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) \nabla u(\vec{y})], d\vec{S} \}, \quad (24.2)$$

где

$$h(\vec{x}, E) = \begin{cases} 1 & \text{для } \vec{x} \in E, \\ 0 & \text{для } \vec{x} \notin E \end{cases}$$

– характеристическая функция области E и

$$\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} & \text{для } n = 3, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} & \text{для } n = 2. \end{cases}$$

◆ Соотношение (24.2) называется третьей формулой Грина.

Доказательство. Для удобства во второй формуле Грина положим $\vec{x} = \vec{y}$:

$$\begin{aligned} & \int_E [u(\vec{y})\Delta_y v(\vec{y}) - v(\vec{y})\Delta_y u(\vec{y})] d\vec{y} = \\ & = \oint_{S_E} ([u(\vec{y})\nabla v(\vec{y}) - v(\vec{y})\nabla u(\vec{y})], d\vec{S}_y). \end{aligned}$$

1. Выберем $v(\vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}|^{-1}$ и учтем, что

$$\Delta_y v(\vec{y}) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{y}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & -4\pi \int_E u(\vec{y})\delta(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} = \\ & = \int_E \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \Delta_y u(\vec{y}) d\vec{y} + \oint_{S_E} \left([u(\vec{y})\nabla \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{\nabla u(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}], d\vec{S}_y \right). \end{aligned}$$

Учтя, что

$$\int_E u(\vec{y})\delta(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} = \begin{cases} u(\vec{x}), & \vec{x} \in E; \\ 0, & \vec{x} \notin E, \end{cases}$$

получим утверждение леммы для $E \subset \mathbb{R}^3$.

2. Выбрав $v(\vec{y}) = \ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$ и учтя, что

$$\Delta_y \ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -2\pi\delta(\vec{x} - \vec{y}),$$

получим утверждение леммы для $E \subset \mathbb{R}^2$.

Теорема 24.1 (об интегральном представлении). Если функция $u(\vec{x})$ – гармоническая в области E , то имеет место формула

$$u(\vec{x}) = - \oint_{S_E} ([u(\vec{y}) \nabla \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) - \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) \nabla u(\vec{y})], d\vec{S}_y); \quad (24.3)$$

$$\vec{x} \in E \subset \mathbb{R}^n, \quad n = 2, 3,$$

причем эта функция бесконечно дифференцируема во всех внутренних точках области E .

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 24.1, если в формуле (24.2) учесть, что $\Delta u = 0$. Бесконечная дифференцируемость следует из соответствующей дифференцируемости интеграла, стоящего в правой части соотношения (24.3), по параметру \vec{x} .

◇ Таким образом, гармоническая функция в области E определяется только значениями $u(\vec{x})$ и $\nabla u(\vec{x})$ на поверхности S_E .

Теорема 24.2 (о нормальной производной). Если функция $u(\vec{x})$ – гармоническая в области $E \subset \mathbb{R}^3$, то

$$\oint_S (\nabla u(\vec{x}), d\vec{S}) = \oint_S \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} dS = 0, \quad (24.4)$$

где S – произвольная замкнутая поверхность, целиком лежащая в E . Иными словами, если функция $u(\vec{x})$ – гармоническая в области, ограниченной замкнутой поверхностью S , то поток $\nabla u(\vec{x})$ через эту поверхность равен нулю.

Доказательство. В первой формуле Грина

$$\int_E [v(\vec{x}) \Delta u(\vec{x}) + (\nabla v(\vec{x}), \nabla u(\vec{x}))] d\vec{x} = \oint_S v(\vec{x}) (\nabla u(\vec{x}), d\vec{S})$$

положим $v(\vec{x}) = 1$, а функцию $u(\vec{x})$ гармонической. С учетом $\Delta u(\vec{x}) = 0$, $v(\vec{x}) = 1$ и $\nabla v(\vec{x}) = 0$ получим (24.4), что и требовалось доказать.

Заметим, что теорема 24.2 остается справедливой и в том случае, когда $u(\vec{x})$ гармонична в E и непрерывна в \bar{E} . В этом случае поверхность S совпадает с S_E .

Теорема 24.3 (о среднем). Для функций $u(\vec{x})$, гармонических внутри сферы (окружности) радиуса R , справедливо соотношение

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{\pi(2R)^{n-1}} \oint_{|\vec{x}-\vec{y}|=R} u(\vec{y})dS_y, \quad n = 2, 3. \quad (24.5)$$

Доказательство. При $n = 3$ будем считать S_E в (24.3) сферой радиуса $R = |\vec{x} - \vec{y}|$. Тогда

$$\oint_{|\vec{x}-\vec{y}|=R} \left(\frac{\nabla u(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}, d\vec{S}_y \right) = \frac{1}{R} \oint_{|\vec{x}-\vec{y}|=R} (\nabla u(\vec{y}), d\vec{S}_y) = 0.$$

Последний интеграл равен нулю в силу формулы (24.4). Заметим, что

$$\nabla \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \Big|_{|\vec{x}-\vec{y}|=R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}.$$

Для сферы

$$d\vec{S}_y = \vec{n} dS_y = \frac{\vec{R}}{R} dS_y.$$

Следовательно, из (24.3) получим

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{|\vec{x}-\vec{y}|=R} u(\vec{y})dS_y.$$

Доказательство для случая $n = 2$ аналогично.

◇ Теорема о среднем утверждает, что значение гармонической функции в некоторой точке \vec{x} равно среднему значению этой функции на сфере с центром в точке \vec{x} , если сфера не выходит из области гармоничности.

Теорема 24.4 (об экстремуме). Если $u(\vec{x})$ гармонична в замкнутой области $\bar{E} = E + S_E$, где S_E — граница E , то она не может достигать экстремального значения во внутренних точках области E , т.е.

$$\min_{\vec{x} \in S_E} u(\vec{x}) \leq u(\vec{x}) \leq \max_{\vec{x} \in S_E} u(\vec{x}), \quad \vec{x} \in E. \quad (24.6)$$

Соотношение (24.6) называется принципом максимума.

Доказательство. Проведем доказательство от противного в предположении, что $u(\vec{x})$ гармонична в \bar{E} . Пусть функция $u(\vec{x})$ не равна тождественно постоянной, а точка $\vec{x}_0 \in E$ – точка максимума. Тогда

$$u_0 = u(\vec{x}_0) \geq u(\vec{x})$$

в некоторой окрестности точки \vec{x}_0 , принадлежащей области гармоничности. Возьмем малую сферу радиуса ε , целиком лежащую в этой окрестности, тогда

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \oint_{|\vec{x}-\vec{x}_0|=\varepsilon} u(\vec{x})dS.$$

Поскольку $u(\vec{x}) \leq u_0$, должно выполняться неравенство

$$u(\vec{x}_0) \leq \frac{u_0}{4\pi\varepsilon^2} \oint_{|\vec{x}-\vec{x}_0|} dS \leq u_0.$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\oint_{|\vec{x}-\vec{y}|=R} dS = 4\pi R^2.$$

Следовательно, возможно только равенство, а тогда $u(\vec{x}) = \text{const}$, что противоречит предположению и доказывает утверждение. Доказательство для точки минимума аналогично.

Пример 24.1. Показать, что если две функции $u(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$, гармонические в E и непрерывные в \bar{E} , удовлетворяют на границе S_E неравенству

$$u(\vec{x}) \leq v(\vec{x}), \quad (24.7)$$

то оно справедливо и для всех внутренних точек области E .

Решение. Рассмотрим функцию $w(\vec{x}) = u(\vec{x}) - v(\vec{x})$, гармоническую в E , непрерывную в \bar{E} и удовлетворяющую условию $w(\vec{x})|_{S_E} \leq 0$. Предположим, что в некоторой внутренней точке $\vec{x} \in E$ имеет место неравенство $w(\vec{x}) > 0$. Но это предположение противоречит замечанию к теореме 24.2, и, следовательно, неравенство (24.7) справедливо во всей замкнутой области \bar{E} .

В заключение сформулируем некоторые утверждения, вытекающие из замечания к теореме 24.2, которые потребуются нам при рассмотрении краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона.

Утверждение 24.1. *Если $u(\vec{x})$ гармоническая в E и непрерывная в \bar{E} , то*

$$|u(x)| \leq \max_{\vec{x} \in S_E} |u(\vec{x})|, \quad \vec{x} \in \bar{E}. \quad (24.8)$$

Неравенство (24.8) следует непосредственно из (24.6).

Утверждение 24.2. *Если гармоническая функция $u(\vec{x})$ равна нулю на границе области E , то она тождественно равна нулю внутри этой области.*

Утверждение 24.3. *Если последовательность гармонических в области E и непрерывных в \bar{E} функций $\{u_m(\vec{x})\}$, $m = \overline{0, \infty}$, сходится равномерно на границе области E , то она равномерно сходится в \bar{E} к гармонической функции.*

Из неравенства (24.8) вытекает

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} |u_k(\vec{x}) - u_m(\vec{x})| \leq \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \max_{\vec{x} \in S_E} |u_k(\vec{x}) - u_m(\vec{x})| = 0, \quad \vec{x} \in \bar{E},$$

откуда следует справедливость первой части утверждения. Справедливость второй его части вытекает из теоремы о среднем: поскольку функции $u_m(\vec{x})$ удовлетворяют равенству (24.5), то их предел удовлетворяет этому же равенству, откуда и следует гармоничность предельной функции.

Аналогичные утверждения для неограниченных областей мы сформулируем ниже, рассмотрев поведение гармонических функций на бесконечности.

24.2. Поведение гармонических функций в особых точках и на бесконечности

Пусть функция $u(\vec{x})$ гармонична в области E , за исключением особой точки $\vec{y} \in E$. Рассмотрим ее поведение в окрестности этой точки.

Теорема 24.5. *Если функция $u(\vec{x})$ – гармоническая в области $E \subset \mathbb{R}^n$, за исключением точки $\vec{x} = \vec{y}$, в окрестности которой она ведет себя так, что*

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{y}} \frac{u(\vec{x})}{\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y})} = 0, \quad (24.9)$$

где $\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y})$ – фундаментальное решение оператора Лапласа, то $u(\vec{x})$ можно гармонически продолжить в эту точку.

Доказательство. Рассмотрим сферу S_ε радиуса ε с центром в точке $\vec{x} = \vec{y}$. Выберем гармоническую внутри S_ε функцию $v(\vec{x})$, которая на S_ε совпадает с рассматриваемой функцией $u(\vec{x})$ (согласно теореме 24.8 о единственности решения задачи Дирихле, это всегда возможно). Из условия (24.9) следует, что в окрестности точки $\vec{x} = \vec{y}$ функция $u(\vec{x})$ удовлетворяет оценке $u(\vec{x}) = \alpha(\vec{x})\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y})$, где $\alpha(\vec{x})$ – бесконечно малая величина при $\vec{x} \rightarrow \vec{y}$. Рассмотрим еще две функции: $w_1(\vec{x}) = u(\vec{x}) - v(\vec{x})$ и $w_2(\vec{x}) = \beta[\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) - \mathcal{E}_n(\vec{x}_0, \vec{y})]$, где β – произвольное положительное число, а \vec{x}_0 – произвольная точка, лежащая на сфере S_ε .

Из точки $\vec{x} = \vec{y}$, как из центра, опишем еще одну сферу S_δ , лежащую внутри S_ε , с радиусом δ таким, чтобы на S_δ выполнялось неравенство

$$w_2(\vec{x})|_{S_\delta} \geq |w_1(\vec{x})|_{S_\delta}. \quad (24.10)$$

Поскольку функция $w_1(\vec{x})$ как разность гармонических функций гармонична в области вне S_δ и внутри S_ε , то неравенство (24.10) с границы S_δ можно продолжить на эту область. Для функции $w_2(\vec{x})$ с фиксированной точкой $\vec{x} \neq \vec{y}$ предельный переход $\beta \rightarrow 0$ дает

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} w_2(\vec{x}) = 0.$$

Но это означает, что функция $w_1(\vec{x}) = 0$ всюду, за исключением, может быть, точки $\vec{x} = \vec{y}$. Таким образом, функция $u(\vec{x})$ всюду в E , за исключением точки $\vec{x} = \vec{y}$, совпадает с функцией $v(\vec{x})$. Доопределив функцию $u(\vec{x})$ так, чтобы $u(\vec{y}) = v(\vec{y})$, получим функцию $u(\vec{x})$, гармоническую всюду в области E .

Прежде чем перейти к рассмотрению поведения гармонической функции на бесконечности, коротко остановимся на преобразованиях, сохраняющих гармоничность рассматриваемых функций. Известно, что на плоскости, т.е. в \mathbb{R}^2 , любое конформное преобразование

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy, \quad z \in E, \quad w \in D,$$

области E в область D сохраняет гармоничность функции $f(x, y)$, так как

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \tilde{f}(u, v) = \frac{1}{|w'(z)|} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y).$$

Обобщим известное для \mathbb{R}^2 понятие симметрии относительно окружности на \mathbb{R}^3 .

♦ Точки \vec{x} и \vec{x}' называются симметричными относительно сферы (окружности) радиуса R с центром в начале координат, если они лежат на одном луче, исходящем из начала координат, и $|\vec{x}| \cdot |\vec{x}'| = R^2$.

Очевидно, что декартовы координаты симметричных точек связаны соотношениями

$$\vec{x} = \vec{x}' \frac{R^2}{|\vec{x}'|^2}, \quad \vec{x}' = \vec{x} \frac{R^2}{|\vec{x}|^2}. \quad (24.11)$$

♦ Функция

$$v(\vec{x}') = \left(\frac{|\vec{x}|}{R} \right)^{n-2} u(\vec{x}) = \left(\frac{R}{|\vec{x}'|} \right)^{n-2} u\left(\frac{R^2}{|\vec{x}'|} \vec{x} \right), \quad (24.12)$$

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n = 2, 3$$

называется преобразованием Кельвина гармонической функции $u(\vec{x})$.

Теорема 24.6. Если функция $u(\vec{x})$ гармоническая в окрестности точки \vec{x} , то ее преобразование Кельвина – функция $v(\vec{x})$ гармонична в окрестности точки \vec{x}' , симметричной точке \vec{x} относительно сферы (окружности) S_R .

Доказательство. 1. Для $n = 3$ точку \vec{x} зададим сферическими координатами r, θ, φ . Тогда точка \vec{x}' будет иметь координаты r', θ, φ , где $r' = R^2/r$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что из уравнения

$$\Delta_{r,\theta,\varphi} u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta,\varphi} u = 0 \quad (24.13)$$

следует уравнение для функции v

$$\Delta_{r',\theta,\varphi} v = \frac{1}{(r')^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left[(r')^2 \frac{\partial v}{\partial r'} \right] + \frac{1}{(r')^2} \Delta_{\theta,\varphi} v = 0. \quad (24.14)$$

В (24.13) и (24.14) введено обозначение

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (24.15)$$

Заметив, что

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, \quad (24.16)$$

уравнение (24.13) можно записать

$$\Delta_{r,\theta,\varphi} u = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \Delta_{\theta,\varphi} u \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta,\varphi} (ru) \right] = \frac{R}{r} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta,\varphi} v \right] = 0. \quad (24.17)$$

С учетом того, что

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r'} \frac{\partial r'}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r'} \left(-\frac{R^2}{r^2} \right) = -\frac{(r')^2}{R^2} \frac{\partial v}{\partial r'},$$

соотношение (24.17) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta_{r,\theta,\varphi} u &= \frac{r'}{R} \left[\frac{(r')^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{(r')^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial r'} \right) + \frac{(r')^2}{R^4} \Delta_{\theta,\varphi} \right] v = \\ &= \frac{(r')^5}{R^5} \left[\frac{1}{(r')^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left((r')^2 \frac{\partial}{\partial r'} \right) + \frac{1}{(r')^2} \Delta_{\theta,\varphi} \right] v = \frac{(r')^5}{R^5} \Delta_{r,\theta,\varphi} v = 0, \end{aligned}$$

откуда и следует (24.14).

2. Доказательство для $n = 2$ аналогично.

Как уже отмечалось, преобразование Кельвина позволяет некоторые внешние задачи сводить к внутренним (см. разд. «Постановка начальных и краевых задач для уравнений математической физики») и наоборот. Кроме того, оно позволяет достаточно просто оценить поведение гармонической функции на бесконечности.

Теорема 24.7. *Если функция $u(\vec{x})$ гармонична и регулярна вне шара (круга) $E : |\vec{x}| \leq R$, то при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ справедливы следующие оценки:*

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= O(1), & \text{grad } u(\vec{x}) &= O(|\vec{x}|^{-2}), & n &= 2; \\ u(\vec{x}) &= O(|\vec{x}|^{-1}), & \text{grad } u(\vec{x}) &= O(|\vec{x}|^{-2}), & n &= 3. \end{aligned} \quad (24.18)$$

Доказательство. Для $n = 3$ преобразование Кельвина функции $u(\vec{x})$, согласно (24.12), имеет вид

$$v(\vec{x}') = \frac{R}{|\vec{x}'|} u\left(\frac{R^2}{|\vec{x}'|^2} \vec{x}'\right)$$

и является гармонической функцией внутри шара E , за исключением точки $\vec{x}' = 0$, в которой она в силу регулярности функции $u(\vec{x})$ на бесконечности удовлетворяет оценке

$$v(\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}'|} o(1) = o(|\vec{x}'|^{-1}) = o(\mathcal{E}_3(\vec{x}')). \quad (24.19)$$

Условие (24.19) эквивалентно условию (24.9). Это означает, что функция $v(\vec{x}')$ гармонически продолжается в точку $\vec{x}' = 0$. Совершив обратное преобразование Кельвина, для функции $u(\vec{x})$ получим представление

$$u(\vec{x}) = \frac{R}{|\vec{x}|} v\left(\frac{R^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x}\right),$$

откуда и следуют оценки (24.18). Доказательство для $n = 2$ аналогично.

Теоремы 24.5–24.7 показывают, что утверждения 24.1–24.3 можно распространить на неограниченную область $\mathbb{R}^3 \setminus E$ с границей S_E при условии регулярности функции $u(\vec{x})$ на границе.

Действительно, пусть функция $u(\vec{x})$ – непрерывная в $\mathbb{R}^3 \setminus E$ и регулярная гармоническая в $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{E}$. Согласно теореме 24.7, $u(\vec{x})$ при $\vec{x} \rightarrow \infty$ удовлетворяет оценкам (24.18).

Начнем со случая $n = 2$, для которого при $\vec{x} \rightarrow \infty$ справедлива оценка $u(\vec{x}) = O(1)$. Пусть S_R – окружность, целиком лежащая в области E . Тогда преобразование Кельвина (24.12) относительно этой окружности трансформирует неограниченную и лежащую вне S_R область $\mathbb{R}^3 \setminus E$ в ограниченную и расположенную внутри S_R область $(\mathbb{R}^3 \setminus E)'$ с границей S'_R . По теореме 24.6 функция

$$v(\vec{x}') = u\left(\frac{R^2}{|\vec{x}'|^2}\vec{x}'\right)$$

непрерывна в $(\mathbb{R}^3 \setminus E)'$ и гармонична в $(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{E})'$, за исключением, может быть, точки $\vec{x}' = 0$, в которой она ограничена. Но по теореме 24.6 такую функцию можно доопределить до гармонической, что позволяет считать функцию $v(\vec{x}')$ гармонической в замкнутой ограниченной области $(\mathbb{R}^3 \setminus E)'$ с границей S'_R . Но тогда, согласно (24.8),

$$|v(\vec{x}')| \leq \max_{\vec{x}' \in S'_E} |v(\vec{x}')|, \quad \vec{x}' \in (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{E})'.$$

Совершив обратное преобразование Кельвина, получим

$$u(\vec{x}) = v\left(\frac{R^2}{|\vec{x}|^2}\vec{x}\right), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus E,$$

откуда и следует справедливость соотношения (24.8) для неограниченной области $\mathbb{R}^2 \setminus E$ с границей S_E , что влечет за собой справедливость утверждения 24.2 для $\mathbb{R}^2 \setminus E$. Для $n = 3$ доказательство аналогично.

Утверждение 24.4. *Гармоническая функция, ограниченная во всем пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, равна постоянной.*

Утверждение 24.5. *Регулярная гармоническая в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, функция есть тождественный нуль.*

24.3. Постановка, разрешимость и единственность краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона

Рассмотрим более подробно краевые задачи для уравнения Лапласа, сформулированные в разд. «Постановка начальных и краевых задач для уравнений математической физики».

Обратимся, например, к внутренней задаче Дирихле в ограниченной области E с границей S_E :

$$\Delta u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in E, \quad (24.20)$$

$$u(\vec{x})|_{S_E} = f(\vec{x})|_{S_E}, \quad \vec{x} \in S_E. \quad (24.21)$$

Поскольку решение уравнения (24.20) обычно ищут в открытой области E , то одного граничного условия (24.21), вообще говоря, недостаточно для обеспечения единственности решения задачи. Например, функция

$$u(\vec{x}) = \begin{cases} C_1 \vec{x} + C_2, & \vec{x} \in E, \\ f(\vec{x}), & \vec{x} \in S_E \end{cases} \quad (24.22)$$

с произвольными постоянными C_1 и C_2 является неоднозначным решением задачи. Более того, в различных подобластях области E произвольные постоянные можно выбрать по-разному. Поэтому корректная постановка задачи, помимо (24.20), (24.21), предполагает выбор классов искомой функции $u(\vec{x})$, а также $f(\vec{x})$ и S_E , допускающих ее устойчивое решение. Будем искать решение краевых задач (18.3) в классе регулярных гармонических функций, и пусть S_E – замкнутая гладкая в смысле Ляпунова поверхность (кривая при $E \subset \mathbb{R}^2$), ограничивающая область E .

♦ Поверхность S называется поверхностью Ляпунова (или гладкой в смысле Ляпунова), если она удовлетворяет следующим условиям:

1) в каждой точке поверхности S существует касательная плоскость;

2) существует такое $r > 0$, что вокруг каждой точки M поверхности S можно описать шар радиуса r , внутрь которого попадает лишь участок S_M поверхности S , являющийся окрестностью точки M на поверхности S и пересечаемой прямыми, параллельными нормали \vec{n}_M , восстановленной из точки M , не более одного раза;

3) нормаль к поверхности S непрерывна в смысле Липшица–Гельдера с показателем $0 < \alpha \leq 1$, т.е. если \vec{n}_M и \vec{n}_P – нормали к поверхности S , восстановленные из точек M и P , то

$$|\vec{n}_M - \vec{n}_P| \leq CR^\alpha, \quad (24.23)$$

где C – некоторая постоянная, а R – расстояние между точками M и P .

В рамках сделанных предположений и обозначений сформулируем основные краевые задачи для уравнения Лапласа (где, как обычно, $\bar{E} = E + S_E$).

Внутренняя задача Дирихле: найти гармоническую в E функцию, непрерывно примыкающую [т.е. $u(\vec{x}) \in C(\bar{E})$] к заданной (непрерывной) на S_E функции $f(\vec{x})$.

Внутренняя задача Неймана: найти гармоническую в E функцию $u(\vec{x}) \in C(\bar{E})$ такую, что $(\partial u / \partial n)|_{S_E} = f(\vec{x})$, где $f(\vec{x})$ – заданная (непрерывная) на S_E функция, а \vec{n} – нормаль к S_E , внешняя относительно E .

Внутренняя третья краевая задача: найти гармоническую в E функцию $u(\vec{x}) \in C(\bar{E})$ такую, что $[(\partial u/\partial n) + hu]|_{S_E} = f(\vec{x})$, где $f(\vec{x})$ – заданная (непрерывная) на S_E функция, \vec{n} – нормаль к S_E , внешняя относительно E , и $h = \beta/\alpha > 0$ [см. (18.3)].

Внешние задачи, т.е. задачи для области $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{E}$, формулируются аналогично внутренним с соответствующей заменой E на $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{E}$ и \bar{E} на $\mathbb{R}^3 \setminus E$ при дополнительном условии регулярности функции $u(\vec{x})$ на бесконечности.

Теорема 24.8. *Решение и внутренней, и внешней задачи Дирихле единственно и непрерывно зависит от граничного условия.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $u_1(\vec{x})$ и $u_2(\vec{x})$ – два решения задачи Дирихле (внутренней или внешней). Тогда разность $u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x})$ также является решением задачи Дирихле с граничным условием $[u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x})]|_{S_E} = 0$. Но в таком случае, согласно утверждению 24.2, $u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x}) \equiv 0$. Тождество $u_1(\vec{x}) \equiv u_2(\vec{x})$ доказывает первую часть теоремы независимо от того, решениями внутренней или внешней задачи являются функции $u_1(\vec{x})$ и $u_2(\vec{x})$.

Перейдем к доказательству устойчивости решения задачи, т.е. непрерывной зависимости решения $u(\vec{x})$ от граничного условия. Пусть $u_1(\vec{x})$ и $u_2(\vec{x})$ – два решения задачи Дирихле (внутренней или внешней), соответствующие граничным условиям

$$u_1(\vec{x})|_{S_E} = f_1(x)|_{S_E}, \quad u_2(\vec{x})|_{S_E} = f_2(x)|_{S_E}.$$

Предположим, что граничные условия удовлетворяют оценке

$$|f_1(\vec{x}) - f_2(\vec{x})| |_{S_E} \leq \varepsilon.$$

Тогда такой же оценке на границе области E удовлетворяет гармоническая функция $u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x})$. В силу неравенства (24.8) оценка

$$|u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x})| < \varepsilon$$

справедлива для всех \vec{x} , принадлежащих области \bar{E} для внутренней задачи и области $\mathbb{R}^3 \setminus E$ для внешней, откуда и следует устойчивость решения задачи Дирихле.

◇ Если $f(\vec{x})|_{S_E} = 0$, то решение задачи Дирихле для уравнений Лапласа есть тождественный нуль, т.е. $u(\vec{x}) \equiv 0$.

Отметим, что постановка задачи Дирихле допускает расширение на разрывные граничные условия. Теорема 24.8 остается справедливой и в этом случае, если потребовать, чтобы $u(\vec{x})$ непрерывно примыкала к граничным значениям в точках непрерывности последних и была ограниченной в \bar{E} .

Теорема 24.9. *Решение внутренней задачи Неймана определено с точностью до аддитивной постоянной. Для разрешимости этой*

задачи необходимо и достаточно выполнение условия (условия разрешимости)

$$\oint_{S_E} f(\vec{x}) dS = 0. \quad (24.24)$$

Доказательство проведем при дополнительном условии, что функция $u(\vec{x})$ имеет непрерывные первые производные в \bar{E} . Пусть $u_1(\vec{x})$ и $u_2(\vec{x})$ – два решения внутренней задачи Неймана

$$\Delta u(\vec{x}) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{S_E} = f(\vec{x}) \Big|_{S_E}. \quad (24.25)$$

Очевидно, что для функции $v(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x})$ будем иметь

$$\Delta v(\vec{x}) = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{S_E} = 0. \quad (24.26)$$

В рамках сделанных предположений можем воспользоваться первой формулой Грина (22.1), положив $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$. Тогда

$$\oint_{S_E} v(\vec{x}) \frac{\partial v(\vec{x})}{\partial n} dS = \int_E [v(\vec{x}) \Delta v(\vec{x}) + (\nabla v, \nabla v)] d\vec{x}. \quad (24.27)$$

Формулу (24.27) с учетом (24.26) можно записать

$$\int_E \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_3} \right)^2 \right] d\vec{x} = 0,$$

откуда в силу непрерывности $u(\vec{x})$ и ее первых производных следуют соотношения

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial x_3} = 0,$$

означающие, что $v(\vec{x}) = \text{const}$ или $u_1(\vec{x}) = u_2(\vec{x}) + \text{const}$.

Необходимость условия (24.24) очевидным образом вытекает из второй формулы Грина (22.2), если положить там $v \equiv 1$:

$$\int_E \Delta u(\vec{x}) d\vec{x} = \oint_{S_E} \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} dS,$$

и учесть (24.25).

В физическом смысле условие (24.24) является частью законов сохранения соответствующих физических процессов и для уравнения Лапласа оно означает отсутствие внутри S_E источников тепла, зарядов и т.д.

Теорема 24.10. *Регулярное на бесконечности решение внешней задачи Неймана*

$$\Delta u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \bar{E}, \quad \bar{E} = E + S_E, \quad (24.28)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{S_E} = f(\vec{x})|_{S_E}, \quad k = 2, 3$$

единственно в \mathbb{R}^3 и определено с точностью до аддитивной постоянной в \mathbb{R}^2 . Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи в \mathbb{R}^2 является равенство (24.24).

Доказательство. Пусть сфера (окружность) $S_R \subset \mathbb{R}^k$ радиуса R содержит \bar{E} . Тогда $S_E \cup S_R$ есть граница конечной области G . Привлекая, как и при доказательстве теоремы 24.9, первую формулу Грина для разности

$$v(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x}),$$

где $u_1(\vec{x})$, $u_2(\vec{x})$ – два решения задачи (24.28), найдем

$$\int_G [v\Delta v + (\nabla v, \nabla v)] d\vec{x} = \int_{S_E} v \frac{\partial v}{\partial n} dS + \int_{S_R} v \frac{\partial v}{\partial n} dS.$$

Отсюда, приняв во внимание, что

$$\Delta v = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{S_E} = 0,$$

получим

$$\int_G [v\Delta v + (\nabla v, \nabla v)] d\vec{x} = \int_{S_R} v \frac{\partial v}{\partial n} dS. \quad (24.29)$$

Далее доказательство для $k = 2$ и $k = 3$ проведем раздельно.

Для $k = 3$, учтя поведение гармонической функции на бесконечности, на сфере S_R имеем оценки

$$|v| < \frac{M_1}{R}, \quad \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| < \frac{M_2}{R^2}, \quad (24.30)$$

из которых вытекает, что

$$\left| \int_{S_R} v \frac{\partial v}{\partial n} dS \right| \leq \int_{S_R} |v| \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| dS \leq \frac{M_1 M_2}{R^3} \int_{S_R} dS = 4\pi \frac{M_1 M_2}{R},$$

и, следовательно,

$$\int_G \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_3} \right)^2 \right] d\vec{x} < 4\pi \frac{M_1 M_2}{R}.$$

Устремив в этом неравенстве $R \rightarrow \infty$, получим

$$\int_G \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_3} \right)^2 \right] d\vec{x} = 0.$$

Это возможно лишь при условии

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial x_3} = 0,$$

и, значит, $v(\vec{x})$ есть постоянная. Но эта постоянная может быть только нулем, поскольку $v(\infty) = 0$. Таким образом, разность двух решений внешней задачи есть нуль и, следовательно, она имеет единственное решение.

Для $k = 2$ с учетом поведения гармонической функции на бесконечности на окружности S_R имеем оценки

$$|v_1(\vec{x})| < M_1, \quad \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| < \frac{M_2}{R^2},$$

из которых следует

$$\left| \int_{S_R} v \frac{\partial v}{\partial n} dS \right| \leq \int_{S_R} |v| \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| dS \leq \frac{M_1 M_2}{R^2} \int_{S_R} dS = \frac{2\pi M_1 M_2}{R}.$$

Таким образом, оценка для случая $k = 2$ аналогична оценке для $k = 3$. Следовательно, в \mathbb{R}^2 функция $v(\vec{x})$ также является постоянной, но теперь эта постоянная не обязана быть нулем, что и доказывает вторую часть теоремы.

Необходимость условия (24.24) при $k = 2$ очевидным образом вытекает из второй формулы Грина (22.2) для области G , если там положить $v(\vec{x}) \equiv 1$:

$$\int_G \Delta u d\vec{x} = \oint_{S_E} \frac{\partial u}{\partial n} dS + \oint_{S_R} \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Учтя в (24.28) направление нормалей на S_E и окружности S_R , получим

$$\oint_{S_E} f(\vec{x}) dx = \oint_{S_R} \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Перейдя к пределу $R \rightarrow \infty$ и использовав оценку $\partial u / \partial n|_R = O(R^{-2})$, приходим к (24.24), что и требовалось доказать.

Теорема 24.11. *Решение третьей краевой задачи – как внутренней, так и внешней – единственно.*

Доказательство аналогично доказательству рассмотренных выше теорем. Несмотря на это, мы приведем доказательство для внутренней задачи:

$$\Delta u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in E; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) \Big|_{S_E} = f(\vec{x}) \Big|_{S_E}, \quad (24.31)$$

чтобы подчеркнуть роль условия $h > 0$. Действительно, пусть $u_1(\vec{x})$ и $u_2(\vec{x})$ – два решения задачи (24.31). Тогда для функции $v(\vec{x}) =$

$= u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x})$ имеем третью краевую задачу с однородным граничным условием, т.е.

$$\Delta v(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in E; \quad \left(\frac{\partial v}{\partial n} + hv \right) \Big|_{S_E} = 0. \quad (24.32)$$

Далее воспользуемся формулой (24.27) с учетом (24.32), тогда

$$\oint_{S_E} hv^2 dS + \int_E \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_3} \right)^2 \right] d\vec{x} = 0. \quad (24.33)$$

Сумма двух интегралов от положительно определенных ($h > 0$) функций может обратиться в нуль только при условии $v(\vec{x}) \equiv 0$ в \bar{E} , т.е. $u_1(\vec{x}) \equiv u_2(\vec{x})$ везде в \bar{E} , что и требовалось доказать.

Перейдем к уравнению Пуассона.

Теорема 24.12. *Решение уравнения Пуассона*

$$\Delta u(\vec{x}) = -F(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (24.34)$$

регулярное на бесконечности [$u(\infty) = 0$], единственно.

Доказательство. Пусть $u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x})$ – два решения задачи (24.34). Тогда их разность $v(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x})$ является гармонической в \mathbb{R}^3 функцией, регулярной на бесконечности и, согласно утверждению 24.5, есть тождественный нуль, что и требовалось доказать.

Постановка краевых задач для уравнения Пуассона аналогична постановке краевых задач для уравнения Лапласа. Теоремы 24.8–24.11 остаются справедливыми и в этом случае с единственной оговоркой: в теореме 24.9 условие разрешимости (24.24) заменяется условием

$$\int_{S_E} f(\vec{x}) dS + \int_E F(\vec{x}) d\vec{x} = 0, \quad (24.35)$$

вытекающим, как и (24.24), из второй формулы Грина (22.2), но теперь с учетом (24.34).

Условие (24.35) в случае $F(\vec{x}) = 0$ естественно переходит в (24.24), а для однородного граничного условия $f(\vec{x})|_{S_E} = 0$ получим

$$\int_E F(\vec{x}) d\vec{x} = 0. \quad (24.36)$$

Ниже мы покажем, что замена

$$u(\vec{x}) = v(\vec{x}) + V(\vec{x}), \quad \vec{x} \in E,$$

где $V(\vec{x})$ – объемный потенциал в области E с плотностью заряда (вещества) $F(\vec{x})$, сводит уравнение Пуассона (24.34) для функции $u(\vec{x})$ к уравнению Лапласа для функции $v(\vec{x})$.

Ниже мы рассмотрим методы решения поставленных задач, начав с метода разделения переменных, или метода Фурье.

25. Разделение переменных в уравнении Лапласа

Этот раздел посвящен одному из наиболее распространенных методов решения начальных и краевых задач – методу Фурье или, как его называют в соответствии с основной идеей, методу разделения переменных. Этот метод оказывается эффективным в тех случаях, когда, во-первых, уравнение в частных производных в выбранной системе координат допускает разделение переменных и, во-вторых, граничные условия задаются на координатных линиях или поверхностях данной системы координат. Это позволяет из общих решений обыкновенных дифференциальных уравнений по соответствующим переменным выделить единственные решения и, как следствие, определить единственное решение исходной задачи.

25.1. Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат

Рассмотрим пример, наглядно иллюстрирующий сущность метода. В прямоугольнике $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ рассмотрим следующую задачу Дирихле для функции $u(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \quad (25.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = \varphi(x), \quad u(0, y) = \psi(y), \quad u(a, y) = \chi(y).$$

Функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\chi(y)$ непрерывны на каждой стороне прямоугольника, а в его вершинах в зависимости от физического смысла величины $u(x, y)$ эти функции могут быть непрерывными или иметь разрывы. В первом случае должны выполняться условия непрерывности

$$f(a) = \chi(0), \quad \chi(b) = \varphi(a), \quad \varphi(0) = \psi(b), \quad \psi(0) = f(0). \quad (25.2)$$

Рассмотрим последовательно обе возможности.

I. Граничные условия в вершинах прямоугольника имеют разрыв.

В этом случае сразу можно провести редукцию задачи.

◆ Процедура сведения исходной задачи к более простым называется редукцией исходной задачи.

Представим функцию $u(x, y)$ в виде суммы четырех гармонических функций

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y), \quad (25.3)$$

каждая из которых принимает заданные значения на одной из сторон, обращаясь в нуль на остальных трех. В результате имеем четыре задачи Дирихле

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] u_i(x, y) = 0, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (25.4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= f(x), \quad u_1(x, b) = u_1(0, y) = u_1(a, y) = 0; \\ u_2(x, 0) &= 0, \quad u_2(x, b) = \varphi(x), \quad u_2(0, y) = u_2(a, y) = 0; \\ u_3(x, 0) &= u_3(x, b) = 0, \quad u_3(0, y) = \psi(y), \quad u_3(a, y) = 0; \\ u_4(x, 0) &= u_4(x, b) = u_4(0, y) = 0, \quad u_4(a, y) = \chi(y). \end{aligned} \quad (25.5)$$

Найдем одну из функций $u_i(x, y)$, например $u_2(x, y)$. Следуя идее метода, частное решение задачи ищем в виде

$$u_2(x, y) = X(x)Y(y), \quad (25.6)$$

где $X(x)$ и $Y(y)$ – «функции разделения», каждая из которых зависит только от одной переменной. Подстановка (25.6) в (25.4) дает

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

Следующий шаг метода разделения переменных состоит в том, что уравнение, в которое уже подставлены функции «разделения», домножается на такой множитель, чтобы получить сумму, каждое из слагаемых которой зависит только от одной переменной. В данном случае таким множителем является $[X(x)Y(y)]^{-1}$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0.$$

Последнее равенство возможно лишь тогда, когда каждое слагаемое (группа слагаемых), зависящее только от своей переменной, равно константе, а сумма этих констант равна нулю. Поскольку мы имеем всего две переменных, то констант должно быть две, равных по величине и противоположных по знаку. Следовательно,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda, \quad \lambda = \text{const}.$$

В результате приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x), \\ Y''(y) &= -\lambda Y(y). \end{aligned}$$

Эти уравнения необходимо дополнить граничными условиями, которые следуют из подстановки (25.6) во вторую строку (25.5):

$$\begin{aligned} X(x)Y(0) &= 0, & u_2(x, b) &= \varphi(x), \\ X(0)Y(y) &= 0, & X(a)Y(y) &= 0. \end{aligned}$$

Так как сомножители $X(x)$ и $Y(y)$ для произвольных x и y не могут обращаться в нуль, [тогда $u_2(x, y) \equiv 0$], то

$$X(0) = X(a) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad u_2(x, b) = \varphi(x). \quad (25.7)$$

Таким образом, для функций $X(x)$ и $Y(y)$ получим следующие задачи:

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad X(0) = X(a) = 0; \quad (25.8)$$

$$Y''(y) = -\lambda Y(y), \quad Y(0) = 0. \quad (25.9)$$

Задача (25.8) представляет собой задачу Штурма–Лиувилля для $X(x)$, решение которой приведено в примере III.2.2:

$$X_n(x) = a_n \sin \frac{\pi n x}{a}, \quad \lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (25.10)$$

Общее решение уравнения (25.9) с учетом (25.10) имеет вид

$$Y_n(y) = b_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y + c_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{a} y.$$

Если учесть, что $Y_n(0) = 0$, то

$$Y_n(y) = b_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} u_2^n(x, y) &= X_n(x)Y_n(y) = a_n b_n \sin \frac{\pi n}{a} x \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y = \\ &= \bar{a}_n \sin \frac{\pi n}{a} x \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y, \quad n = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (25.11)$$

В силу линейности уравнения Лапласа любая сумма его решений также будет решением, поэтому, просуммировав все решения (25.11), получим общий вид решения уравнения Лапласа

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \sin \frac{\pi n}{a} x \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y, \quad (25.12)$$

удовлетворяющего однородным граничным условиям из второй строки (25.5).

Оставшиеся не определенными произвольные постоянные $\bar{a}_n = a_n b_n$ можно найти, воспользовавшись последним условием (25.7), т.е.

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \sin \frac{\pi n}{a} x \operatorname{sh} \frac{\pi n b}{a} = \varphi(x). \quad (25.13)$$

Разложим функцию $\varphi(x)$ на интервале $]0, a[$ в ряд Фурье по ортогональной системе функций (25.10)

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{a} x; \quad \varphi_n = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx. \quad (25.14)$$

Поскольку разложение в ряд Фурье единственно, то равенство (25.13) справедливо лишь тогда, когда коэффициенты рядов (25.13) и (25.14) равны, т.е.

$$\bar{a}_n = \frac{1}{\operatorname{sh}(\pi n b/a)} \varphi_n, \quad (25.15)$$

и, следовательно,

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{\operatorname{sh}(\pi n y/a)}{\operatorname{sh}(\pi n b/a)} \sin \frac{\pi n}{a} x. \quad (25.16)$$

После аналогичных вычислений для функций $u_1(x, y)$, $u_3(x, y)$, $u_4(x, y)$ получим, согласно (25.3), решение задачи

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\varphi_n \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{a} + f_n \operatorname{sh} \frac{\pi n (b-y)}{a} \right] \frac{\sin(\pi n x/a)}{\operatorname{sh}(\pi n b/a)} + \left[\chi_n \operatorname{sh} \frac{\pi n x}{b} + \psi_n \operatorname{sh} \frac{\pi n (a-x)}{b} \right] \frac{\sin(\pi n y/b)}{\operatorname{sh}(\pi n a/b)} \right\}, \quad (25.17)$$

где f_n , χ_n , ψ_n — коэффициенты Фурье функций $f(x)$, $\chi(x)$, $\psi(x)$, определяемые аналогично (25.14) формулами

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{\pi nx}{a} dx; \\
\chi_n &= \frac{2}{b} \int_0^b \chi(y) \sin \frac{\pi ny}{b} dy; \\
\psi_n &= \frac{2}{b} \int_0^b \psi(y) \sin \frac{\pi ny}{b} dy.
\end{aligned} \tag{25.18}$$

II. Граничные условия в вершинах прямоугольника являются непрерывными.

Как уже отмечалось, в этом случае должны выполняться условия непрерывности (25.2). Поскольку значения функции $u(x, y)$ в вершинах прямоугольника не обязательно нулевые, то редукция задачи непосредственно для функции $u(x, y)$ невозможна. Поэтому решение задачи будем искать в виде

$$u(x, y) = u_0(x, y) + w(x, y), \tag{25.19}$$

где $u_0(x, y)$ – гармоническая функция, которую следует выбрать так, чтобы гармоническая функция $w(x, y)$ в вершинах прямоугольника обращалась в нуль. Это означает, что функция $u_0(x, y)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned}
u_0(0, 0) = \psi(0) = f(0), & \quad u_0(a, 0) = f(a) = \chi(0), \\
u_0(a, b) = \varphi(a) = \chi(b), & \quad u_0(0, b) = \varphi(0) = \psi(b),
\end{aligned} \tag{25.20}$$

Положим

$$u_0(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy. \tag{25.21}$$

Такая функция гармонична при любых вещественных коэффициентах, которые мы найдем, подчинив соотношение (25.21) условиям (25.20). В результате имеем

$$\begin{aligned}
A = f(0), \quad B = \frac{f(a) - f(0)}{a}, \quad C = \frac{\psi(b) - \psi(0)}{b}, \\
D = \frac{[\varphi(a) - \varphi(0)] - [f(a) - f(0)]}{ab}.
\end{aligned} \tag{25.22}$$

Таким образом, замена (25.19) приводит к задаче Дирихле для функции $w(x, y)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\
w(x, 0) = \bar{f}(x), \quad w(x, b) = \bar{\varphi}(x),
\end{aligned} \tag{25.23}$$

$$w(0, y) = \bar{\psi}(y), \quad w(a, b) = \bar{\chi}(y),$$

где $\bar{f}(x)$, $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\psi}(y)$, $\bar{\chi}(y)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= f(x) - u_0(x, 0), & \bar{\varphi}(x) &= \varphi(x) - u_0(x, b), \\ \bar{\psi}(y) &= \psi(y) - u_0(0, y), & \bar{\chi}(y) &= \chi(y) - u_0(a, y) \end{aligned} \quad (25.24)$$

и удовлетворяют условиям непрерывности

$$\bar{f}(a) = \bar{\chi}(0) = \bar{\chi}(b) = \bar{\varphi}(a) = \bar{\varphi}(0) = \bar{\psi}(b) = \bar{\psi}(0) = \bar{f}(0) = 0,$$

означающим, что непрерывная на границе функция $w(x, y)$ в вершинах прямоугольника обращается в нуль. Для такой функции можно провести редукцию задачи (25.23) к задачам типа (25.4), решение которых определено формулами (25.17), (25.18), причем в последних функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\chi(y)$ следует заменить функциями $\bar{f}(x)$, $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\psi}(y)$, $\bar{\chi}(y)$.

◇ Отметим, что ряды (25.17), определяющие решение в случае непрерывных граничных условий, равномерно сходятся в прямоугольнике в отличие от аналогичных рядов, определяющих решение для разрывных граничных условий, которые в окрестности вершин могут утрачивать равномерную сходимость.

Аналогично рассматривается задача Дирихле для прямоугольного параллелепипеда.

Перейдем к задаче Неймана. Некоторые особенности, возникающие в этом случае, проиллюстрируем на задаче Неймана в прямоугольнике $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x < a, & \quad 0 < y < b; & (25.25) \\ u_x(0, y) &= \frac{F}{b}, & u_y(x, 0) &= -\frac{F}{a}, & u_x(a, y) = u_y(x, b) = 0, \end{aligned}$$

где $F = \text{const}$. Сразу отметим, что редукция этой задачи к двум, каждая из которых на трех сторонах имеет нулевые граничные условия, невозможна, так как при этом нарушится необходимое условие разрешимости задачи Неймана (24.24):

$$\oint_{S_E} \frac{\partial u}{\partial n} dl = -\frac{F}{a} \int_0^a dx + \frac{F}{b} \int_0^b dy = 0.$$

Поэтому решение задачи ищем в виде

$$u(x, y) = u_0(x, y) + w(x, y), \quad (25.26)$$

где $u_0(x, y)$ – гармонический полином

$$u_0(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy + E(x^2 - y^2), \quad (25.27)$$

удовлетворяющий условиям (25.25), т.е.

$$\begin{aligned} B + Dy &= \frac{F}{b}, & B + Dy + 2Ea &= 0, \\ C + Dx &= -\frac{F}{a}, & C + Dx - 2Eb &= 0. \end{aligned} \quad (25.28)$$

Отсюда находим

$$u_0(x, y) = A + \frac{F}{2ab}[y^2 - 2by - (x^2 - 2ax)].$$

Если оставшийся неопределенным коэффициент A выбрать в виде $A = F(b^2 - a^2)/(2ab)$, то

$$u_0(x, y) = \frac{F}{2ab}[(y - b)^2 - (x - a)^2]. \quad (25.29)$$

В результате подстановки (25.26) задача (25.25) сводится к следующей задаче для функции $w(x, y)$:

$$\begin{aligned} w_{xx} + w_{yy} &= 0, & 0 < x < a, & \quad 0 < y < b; \\ w_x(0, y) &= w_y(x, 0) = w_x(a, y) = w_y(x, b) = 0, \end{aligned}$$

решением которой является произвольная постоянная c . Таким образом, решение задачи Неймана имеет вид

$$u(x, y) = \frac{F}{2ab}[(y - b)^2 - (x - a)^2] + c. \quad (25.30)$$

Пример 25.1. Найти стационарное распределение температуры в тонкой прямоугольной пластине длиной a и шириной b с коэффициентом теплопроводности k , если:

а) по периметру прямоугольника поддерживается заданная температура;

б) через одну сторону поступает, а через смежную ей сторону выводится количество тепла Q .

Решение. а) Математическая постановка задачи соответствует (25.1). Ее решения задаются формулами (25.17), (25.18) или (25.17)–(25.19).

б) Математическая постановка задачи соответствует (25.25), где следует положить $F = Q/k$. Решение задачи определяется формулой (25.30).

25.2. Разделение переменных в уравнении Лапласа в полярных координатах

Рассмотрим первую краевую задачу для круга

$$\Delta_2 u = 0, \quad u(x, y) \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=a} = f(x, y) \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=a}, \quad (25.31)$$

где $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$, а $f(x, y)$ – заданная функция. Задача, для которой $\sqrt{x^2 + y^2} < a$, называется внутренней, а задача, для которой $\sqrt{x^2 + y^2} > a$, – внешней.

Задачу (25.31) удобно рассматривать в полярной системе координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

В этом случае оператор Лапласа примет вид

$$\Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (25.32)$$

(Доказать самостоятельно.)

Тогда граничное условие (25.31) можно переписать в виде

$$u(r, \varphi) \Big|_{r=a} = f(\varphi), \quad (25.33)$$

где функция $f(\varphi)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[0, 2\pi]$. Уравнение Лапласа $\Delta_2 u = 0$ с граничными условиями (25.33) будем решать методом разделения переменных, или методом Фурье. В этом случае частное решение уравнения ищем в виде

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi), \quad (25.34)$$

где $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ – «функции разделения» – зависят только от одной переменной (r и φ соответственно). Поэтому далее аргументы этих функций будем опускать. Подставив (25.34) в уравнение Лапласа в полярных координатах, получим

$$\frac{\Phi}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2} \Phi'' = 0.$$

Умножим левую и правую части этого равенства на $r^2/(R\Phi)$, чтобы каждое из слагаемых получившегося выражения зависело только от одной переменной – r или φ :

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0.$$

Последнее равенство возможно лишь в том случае, когда каждое слагаемое равно константе, а сумма этих констант равна нулю. Таким образом,

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda, \quad \lambda = \text{const}.$$

В результате приходим к следующим уравнениям для функций $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad r \frac{d}{dr} (r\dot{R}) - \lambda R = 0. \quad (25.35)$$

Здесь точкой обозначена производная по переменной r . Функция $u = \Phi R$ (25.34) – гармоническая, поэтому она достигает своего наибольшего значения на границе области гармоничности, для чего должны выполняться условия

$$|R(r)| < \infty, \quad |\Phi(\varphi)| < \infty.$$

Кроме того, решение уравнения Лапласа в полярных координатах не должно измениться, если к углу φ прибавить 2π :

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \quad (25.36)$$

Для определения функции $\Phi(\varphi)$ и параметра λ получили задачу Штурма–Лиувилля (25.35), (25.36), решение которой приведено в примере III.2.8. В этом решении следует положить $l = 2\pi$. Тогда

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad \lambda = n^2. \quad (25.37)$$

Функцию $R(r)$ будем искать в виде $R(r) = r^\mu$, тогда $\dot{R} = \mu r^{\mu-1}$, $\ddot{R} = \mu(\mu-1)r^{\mu-2}$. Подставим в уравнение (25.37):

$$r^2 \ddot{R} + r\dot{R} - n^2 R = 0$$

и получим $\mu^2 = n^2$ или $\mu = \pm n$. Таким образом,

$$\begin{aligned} R_n(r) &= C_n r^n + B_n r^{-n}, & n \neq 0, \\ R_0(r) &= C_0 + B_0 \ln r, & n = 0. \end{aligned} \quad (25.38)$$

Из условия $|R(r)| < \infty$ следует, что для внутренней задачи ($r < a$) $B_0 = B_n = 0$, а для внешней ($r > a$) $B_0 = C_n = 0$. В результате приходим к двум возможным вариантам частного решения (25.34)

$$\begin{aligned} u_n^1(r, \varphi) &= r^n (A_n^1 \cos n\varphi + B_n^1 \sin n\varphi), & r \leq a; \\ u_n^2(r, \varphi) &= \frac{1}{r^n} (A_n^2 \cos n\varphi + B_n^2 \sin n\varphi), & r \geq a, \end{aligned} \quad (25.39)$$

где $n = \overline{0, \infty}$. В силу линейности исходного уравнения любая сумма его решений также будет решением этого уравнения. Просуммировав все частные решения (25.39), получим наиболее общий вид решения уравнения Лапласа

$$u_1(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n^1 \cos n\varphi + B_n^1 \sin n\varphi), \quad r \leq a; \quad (25.40)$$

$$u_2(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} (A_n^2 \cos n\varphi + B_n^2 \sin n\varphi), \quad r \geq a, \quad (25.41)$$

удовлетворяющего условиям

$$|u(r, \varphi)| < \infty, \quad u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi). \quad (25.42)$$

Функция $u_1(r, \varphi)$ есть решение для внутренней задачи, а $u_2(r, \varphi)$ – для внешней.

◇ Заметим также, что для функции, гармонической в кольце $a < r < b$, условие ограниченности решения выполняется автоматически и общее решение, удовлетворяющее условиям (25.42), примет вид (25.53) (см. пример 25.4).

Положим в (25.40) $r = a$, тогда

$$u_1(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n^1 \cos n\varphi + B_n^1 \sin n\varphi) = f(\varphi). \quad (25.43)$$

Разложим $f(\varphi)$ в ряд Фурье, что всегда возможно, так как она периодична и удовлетворяет условиям Дирихле. Получим

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi,$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi \, d\psi, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi \, d\psi. \quad (25.44)$$

Поскольку разложение в ряд Фурье единственно, то равенство (25.43) возможно лишь в том случае, когда

$$A_n^1 = \frac{\alpha_n}{a^n}, \quad B_n^1 = \frac{\beta_n}{a^n}.$$

Проведем аналогичные операции для $u_2(r, \varphi)$. Окончательно имеем

$$u_{1,2}(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{\pm n} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \quad (25.45)$$

◇ Если α_n и β_n – коэффициенты Фурье ограниченных и непрерывных функций, то при $r < a$ ряд для $u_1(r, \varphi)$ (при $r > a$ для u_2) сходится равномерно.

Пример 25.2. Найти функцию, гармоническую в круге радиуса a и такую, что 1) $u|_{r=a} = \varphi$; 2) $u|_{r=a} = A \sin^3 \varphi + B$, где A, B – некоторые постоянные.

Решение. 1) Математическая постановка задачи имеет вид

$$\Delta u = 0, \quad u|_{r=a} = \varphi, \quad r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Решение этой задачи дается функцией $u_1(r, \varphi)$ (25.45). Найдем коэффициенты разложения функции $f(\varphi) = \varphi$ в ряд Фурье. Из (25.44) найдем

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \cos n\varphi d\varphi.$$

Проинтегрируем один раз по частям, положив $U = \varphi$, $dU = d\varphi$, $dV = \cos n\varphi d\varphi$, $V = (\sin n\varphi)/n$. Получим

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \left[n\varphi \sin n\varphi \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\varphi}{n} d\varphi \right] = 0,$$

где $n = \overline{1, \infty}$. Аналогично

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \sin n\varphi d\varphi = -\frac{2}{n}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi d\varphi = 2\pi.$$

Окончательно получим

$$u(r, \varphi) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{\sin n\varphi}{n} = 2 \operatorname{arctg} \frac{a - r \cos \varphi}{r \sin \varphi}.$$

2) Математическая постановка задачи имеет вид

$$\Delta u = 0, \quad u|_{r=a} = A \sin^3 \varphi + B, \quad r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

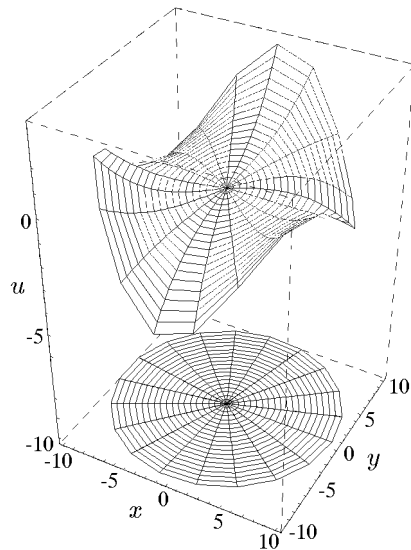


Рис. 44

и ее решение дается формулой (25.45), где в показателе степени нужно выбрать положительное n . С учетом того, что

$$\sin^3 \varphi = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi,$$

простым сравнением находим

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2B, & \alpha_k &= 0, & k &= \overline{1, \infty}; \\ \beta_1 &= \frac{3A}{4}, & \beta_2 &= 0, & \beta_3 &= -\frac{A}{4}, & \beta_k &= 0, & k &= \overline{4, \infty}. \end{aligned}$$

Этот же результат можно получить из (25.44) с учетом условия ортогональности тригонометрических функций. Таким образом,

$$u(r, \varphi) = B + \frac{3A}{4} \frac{r}{a} \sin \varphi - \frac{A}{4} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sin 3\varphi.$$

График этой функции при $A = 1$, $B = 0$ и $a = 10$ приведен на рис. 44.

Пример 25.3. Найти стационарное распределение температуры в бесконечном цилиндре, образующая которого параллельна оси Oz , а направляющая представляет собой границу

лежащего в плоскости $z = 0$ кругового сектора радиуса b с углом раствора α , $0 < \alpha < 2\pi$, если на его границе поддерживается температура $u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0$, $u(b, \varphi) = \varphi$.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (25.46)$$

$$u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, \quad u(b, \varphi) = \varphi.$$

Поскольку граничные условия не зависят от z , то $u(r, \varphi, z) = u(r, \varphi)$. Решение задачи ищем методом разделения переменных:

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \quad (25.47)$$

Подставив в (25.46) и домножив на $r^2/(R\Phi)$, получим

$$r^2 \frac{R'' + R'/r}{R} + \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} = 0.$$

Разделив переменные, для определения функции $\Phi(\varphi)$ получим следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$\ddot{\Phi} = \lambda\Phi, \quad \Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0, \quad (25.48)$$

решение которой дано в примере III.2.2 и имеет вид

$$\Phi_n = A_n \sin \frac{\pi n \varphi}{\alpha}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad \lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2. \quad (25.49)$$

Тогда для определения функции $R(r)$ получим уравнение

$$r^2 R'' + rR' - \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 R = 0, \quad |R(r)| < \infty, \quad (25.50)$$

решение которого будем искать в виде

$$R(r) = r^\mu.$$

Подставив его в (25.50), получим

$$\mu(\mu - 1) + \mu - \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 = 0,$$

откуда

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{\pi n}{\alpha},$$

и общее решение уравнения (25.50) можно представить в виде

$$R_n(r) = B_n r^{\pi n/\alpha} + C_n r^{-\pi n/\alpha}.$$

Из условия $|R(r)| < \infty$ для $r \in [0, b]$ находим, что $C_n \equiv 0$. Тогда

$$R_n(r) = B_n r^{\pi n/\alpha}. \quad (25.51)$$

Подставим (25.49) и (25.51) в (25.47) и просуммировав по n , получим

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n r^{\pi n/\alpha} \sin \frac{\pi n \varphi}{\alpha}, \quad (25.52)$$

где $\bar{A} = A_n B_n$. Подставим (25.52) в граничное условие (25.46)

$$u(b, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n b^{\pi n/\alpha} \sin \frac{\pi n \varphi}{\alpha} = \varphi$$

и разложим правую часть в ряд Фурье по ортогональной системе функций (25.49). Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях из этой системы, найдем

$$\bar{A}_n b^{\pi n/\alpha} = \frac{\int_0^{\alpha} \varphi \sin(\pi n \varphi / \alpha) d\varphi}{\int_0^{\alpha} \sin^2(\pi n \varphi / \alpha) d\varphi} = (-1)^{n+1} \frac{2\alpha}{\pi n}.$$

Окончательно для распределения температуры получим

$$u(r, \varphi) = \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{r}{b}\right)^{\pi n/\alpha} \sin \frac{\pi n \varphi}{\alpha}.$$

Пример 25.4. Найти функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и такую, что

$$u|_{r=1} = 1 + \cos^2 \varphi, \quad u|_{r=2} = \sin^2 \varphi.$$

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & u(r, \varphi) &= u(r, \varphi + 2\pi), \\ u(1, \varphi) &= 1 + \cos^2 \varphi, & u(2, \varphi) &= \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Перейдем к полярным координатам

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2} = 0.$$

Частное решение этого уравнения ищем в виде

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

Разделив переменные, получим

$$\begin{aligned} r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R &= 0, \\ \Phi'' + \lambda^2 \Phi &= 0, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{aligned}$$

Решение задачи Штурма–Лиувилля для функции Φ приведено в примере III.2.8 и имеет вид

$$\lambda_n = n^2, \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Для определения функций $R_n(r)$ получим уравнение

$$r^2 R_n'' + rR_n' - n^2 R_n = 0.$$

1. Рассмотрим случай, когда $n = 0$. Тогда

$$r^2 R_0'' + rR_0' = 0.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$\Phi_0(r) = C_0 \ln r + D_0.$$

Обозначим $\Phi_0(\varphi) = A_0$, тогда

$$u_0(r, \varphi) = A_0(D_0 + C_0 \ln r) = a_0 + b_0 \ln r,$$

где $a_0 = A_0 D_0$, $b_0 = A_0 C_0$.

2. Рассмотрим случай, когда $n \neq 0$. Решение ищем в виде $R_n(r) = r^\alpha$. Уравнение для определения $\alpha_n(r)$ запишется следующим образом:

$$r^2[\alpha(\alpha - 1)]r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - n^2 r^\alpha = 0.$$

Из последнего соотношения находим

$$\alpha = \pm n.$$

Следовательно,

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}.$$

Общее решение запишется в виде

$$u_n(r, \varphi) = A_n \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) \cos n\varphi + B_n \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) \sin n\varphi.$$

Обозначим

$$A_n C_n = a_n, \quad A_n D_n = b_n, \quad B_n C_n = c_n, \quad B_n D_n = d_n$$

и просуммируем $u_n(r, \varphi)$ по всем n . Тогда

$$u(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^n} \right) \cos n\varphi + \left(c_n r^n + \frac{d_n}{r^n} \right) \sin n\varphi \right]. \quad (25.53)$$

Из первого граничного условия

$$u(1, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + b_n) \cos n\varphi + (c_n + d_n) \sin n\varphi] = 1 + \cos^2 \varphi.$$

Разложив правую часть в ряд Фурье и приравняв коэффициенты при одинаковых функциях $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$, получим

$$a_0 = \frac{3}{2}, \quad a_n + b_n = \frac{1}{2} \delta_{2n}, \quad c_n + d_n = 0, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$1 + \cos^2 \varphi = 1 + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2}.$$

Из второго граничного условия

$$u(2, \varphi) = a_0 + b_0 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_n 2^n + \frac{b_n}{2^n} \right) \cos n\varphi + \left(c_n 2^n + \frac{d_n}{2^n} \right) \sin n\varphi \right] = \sin^2 \varphi.$$

Аналогично найдем

$$a_0 + b_0 \ln 2 = \frac{1}{2}, \quad a_n 2^n + \frac{b_n}{2^n} = -\frac{1}{2} \delta_{2n}, \quad c_n 2^n + \frac{d_n}{2^n} = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{3}{2}, & b_0 &= -\frac{1}{\ln 2}, \\ a_2 + b_2 &= \frac{1}{2}, & 4a_2 + \frac{b_2}{4} &= -\frac{1}{2}, \\ a_2 &= -\frac{1}{6}, & b_2 &= \frac{2}{3}, & a_n &= b_n = 0, & n &\neq 2. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$u(r, \varphi) = \frac{3}{2} - \frac{\ln r}{\ln 2} + \left(\frac{2}{3r^2} - \frac{r^2}{6} \right) \cos 2\varphi.$$

Рассмотрим теперь задачу Неймана

$$\begin{aligned} \Delta_2 u(r, \varphi) &= 0, & E : r < R; \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{r=a} &= f(\varphi), \end{aligned} \quad (25.54)$$

где n – нормаль к окружности радиуса R , внешняя по отношению к области E . Если функция $f(\varphi)$ удовлетворяет условию разрешимости (24.24), то решение задачи ищем в виде

$$u_{1,2}(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{\pm k} (\bar{A}_k \cos k\varphi + \bar{B}_k \sin k\varphi),$$

где произвольные постоянные \bar{A}_k и \bar{B}_k следует определить из граничных условий (25.54). Так как направление нормали \vec{n} совпадает с направлением радиус-вектора \vec{r} , то

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Поскольку это условие не определяет коэффициент \bar{A}_0 , то с точностью до произвольной постоянной $C = \bar{A}_0$ найдем

$$u_1(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{ka^{k-1}} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) + C \quad (25.55)$$

для внутренней задачи и

$$u_2(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{kr^k} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) + C \quad (25.56)$$

для внешней. Коэффициенты α_k и β_k по-прежнему определены формулами (25.44).

Аналогично решается третья краевая задача.

Отметим, что преобразование Кельвина (24.12) относительно окружности радиуса a саму окружность оставляет неизменной и, более того, будучи конформным, сохраняет углы между окружностью и нормалью. Поэтому решения внешних задач можно получить из решения внутренних преобразованием Кельвина, т.е. заменой $r \rightarrow a^2/r$. Легко убедиться, что такая замена в (25.31) переводит $u_1(r, \varphi)$ в $u_2(r, \varphi)$, а (25.55) в (25.56) и наоборот.

Пример 25.5. Для задачи Неймана (25.54) отметить неправильно поставленные задачи: а) $f(\varphi) = A = \text{const}$; б) $f(\varphi) = \cos \varphi$; в) $f(\varphi) = \sin^2 \varphi$.

Решение. Для задачи Неймана должно выполняться условие разрешимости (24.24), которое в полярных координатах для окружности $r = a$ примет вид

$$I = \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0, \quad (25.57)$$

т.е.

$$\text{а) } I = 2\pi A, \quad \text{б) } I = 0, \quad \text{в) } I = \pi.$$

Отсюда следует, что задачи а) и в) поставлены неправильно. Это означает, что не существует гармонических функций, которые бы на окружности удовлетворяли условиям а) и в).

25.3. Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрических координатах

◇ Если цилиндр бесконечен и граничные условия не зависят от переменной z , то решение задачи имеет вид

$$u(r, \varphi, z) = u(r, \varphi).$$

Для определения функции $u(r, \varphi)$ получим двумерную задачу, решение которой получено выше (см., в частности, пример 25.3).

Рассмотрим ряд задач на определение гармонических функций в цилиндре радиуса a и конечной высоты h , решение которых можно найти методом разделения переменных.

Общая постановка задачи в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & 0 \leq r < a, & \quad 0 < z < h, & \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(r, \varphi + 2\pi, z) &= u(r, \varphi, z), & u(a, \varphi, z) &= f_1(\varphi, z), \\ u(r, \varphi, 0) &= f_2(r, \varphi), & u(r, \varphi, h) &= f_3(r, \varphi) \end{aligned}$$

и допускает следующую редукцию $u = u_1 + u_2$:

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= 0, & u_1(a, \varphi, z) &= f_1(\varphi, z), \\ u_1(r, \varphi, 0) &= u_1(r, \varphi, h) = 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Delta u_2 &= 0, & u_2(a, \varphi, z) &= 0, \\ u_2(r, \varphi, 0) &= f_1(r, \varphi), & u_2(r, \varphi, h) &= f_2(r, \varphi). \end{aligned}$$

Учет зависимости от азимутального угла φ был рассмотрен в предыдущем разделе, поэтому перейдем сразу к задачам, в которых граничные условия не зависят от переменной φ .

Пример 25.6. Дан цилиндр радиусом $r = a$ и высотой h , боковая поверхность и нижнее основание которого поддерживаются при нулевой температуре, а верхнее основание – при температуре T . Найти стационарное распределение температуры в цилиндре.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & 0 < z < h, & \quad r < a, & \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{z=0} &= 0, & u|_{r=a} &= 0, & \quad u|_{z=h} &= T. \end{aligned}$$

Запишем оператор Лапласа в цилиндрической системе координат

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Поскольку краевые условия не зависят от переменной φ , то решение задачи можно искать в виде $u(r, \varphi, z) = u(r, z)$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0,$$

и, следовательно, уравнение Лапласа примет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Решение задачи будем искать методом Фурье, положив

$$u(r, z) = R(r)Z(z).$$

Обозначим

$$R' = \frac{dR}{dr}, \quad \dot{Z} = \frac{dZ}{dz}.$$

Тогда

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r R' Z + R \ddot{Z} = 0.$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} = -\frac{\ddot{Z}}{Z} = \lambda, \quad \lambda = \text{const}$$

или

$$R'' + \frac{R'}{r} = R\lambda; \quad \ddot{Z} + \lambda Z = 0.$$

Из граничного условия

$$u(a, z) = R(a)Z(z) = 0$$

найдем $R(a) = 0$. Поскольку функция $u(r, z)$ имеет смысл температуры, то

$$|R(r)| < \infty \quad \text{при} \quad r \leq a.$$

В результате функция $R(r)$ есть решение задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \lambda R = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +0} |R(r)| < \infty, \quad R(a) = 0.$$

Для собственных значений и собственных функций получим соответственно

$$\lambda = -\left(\frac{\alpha_n^0}{a}\right)^2, \quad n = \overline{1, \infty};$$

$$R_n(r) = A_n J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\right),$$

где α_n^0 – нули функции $J_0(x)$ (см. разд. «Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя» части III). В результате уравнение для функции $Z(z)$ примет вид

$$\ddot{Z} - (\alpha_n^0)^2 Z = 0, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Следовательно,

$$Z_n(z) = B_n \text{sh } \alpha_n^0 z + C_n \text{ch } \alpha_n^0 z$$

и

$$u_n(r, z) = A_n J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\right) [B_n \text{sh } \alpha_n^0 z + C_n \text{ch } \alpha_n^0 z].$$

Просуммировав по n , найдем

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\right) [\bar{B}_n \text{sh } \alpha_n^0 z + \bar{C}_n \text{ch } \alpha_n^0 z],$$

где

$$\bar{B}_n = A_n B_n, \quad \bar{C}_n = A_n C_n.$$

Из граничных условий получим

$$u|_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\right) = 0.$$

Следовательно, $\bar{C}_n = 0$. Аналогично

$$u|_{z=h} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\right) \operatorname{sh}(\alpha_n^0 h) = T.$$

Разложим функцию $f(r)$ в ряд Фурье–Бесселя на интервале $]0, a[$:

$$f(r) = T = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\right),$$

где

$$\beta_n = \frac{1}{a^2} \frac{2}{[J_0'(\alpha_n^0)]^2} \int_0^a r f(r) J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\right) dr.$$

Тогда

$$\bar{C}_n = -\frac{\beta_n}{2 \operatorname{sh} \alpha_n^0 h}.$$

Итак,

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\right) \beta_n \frac{\operatorname{sh} \alpha_n^0 z}{\operatorname{sh} \alpha_n^0 h}.$$

Чтобы определить коэффициент β_n разложения функции $f(r) = T$ в ряд Фурье–Бесселя, найдем значение интеграла (см. пример III.5.8)

$$I_n = \frac{1}{a^2} \int_0^a r T J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\right) dr.$$

Сделаем в интеграле замену переменных $\alpha_n^0 r/a = t$. Тогда $dr = (a/\alpha_n^0) dt$. Для новых пределов интегрирования получим $r_1 = 0$, $t_1 = 0$, $r_2 = a$, $t_2 = \alpha_n^0$ и

$$\begin{aligned}
 I_n &= \frac{T}{(\alpha_n^0)^2} \int_0^{\alpha_n^0} t J_0(t) dt = \frac{T}{(\alpha_n^0)^2} \int_0^{\alpha_n^0} [t J_1(t)]' dt = \\
 &= \frac{T}{(\alpha_n^0)^2} [t J_1(t)] \Big|_0^{\alpha_n^0} = \frac{T}{(\alpha_n^0)^2} [\lambda_n^0 J_1(\alpha_n^0)] = -\frac{T J_0'(\alpha_n^0)}{\alpha_n^0}.
 \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\beta_n = \frac{I_n}{[J_0'(\alpha_n^0)]^2} = -\frac{2T}{(\alpha_n^0) J_0'(\alpha_n^0)}$$

и

$$\begin{aligned}
 u(r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} -J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\right) \frac{2T}{\alpha_n^0 J_0'(\alpha_n^0)} \frac{\operatorname{sh} \alpha_n^0 z}{\operatorname{sh} \alpha_n^0 h} = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T}{\alpha_n^0} \frac{\operatorname{sh} \alpha_n^0 z}{\operatorname{sh} \alpha_n^0 h} \frac{J_0(\alpha_n^0 r/a)}{J_1(\alpha_n^0)}.
 \end{aligned}$$

Пример 25.7. Дан цилиндр радиусом $r = a$ и высотой h , боковая поверхность которого поддерживается при температуре $\sin \pi m z$ ($m = \overline{1, \infty}$), а верхнее и нижнее основания – при нулевой температуре. Найти стационарное распределение температуры в цилиндре.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

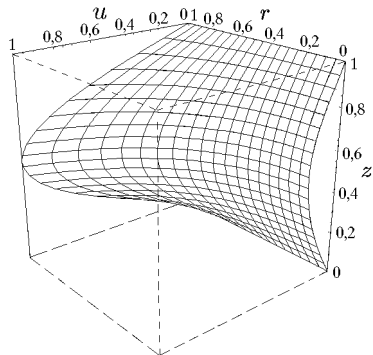


Рис. 45

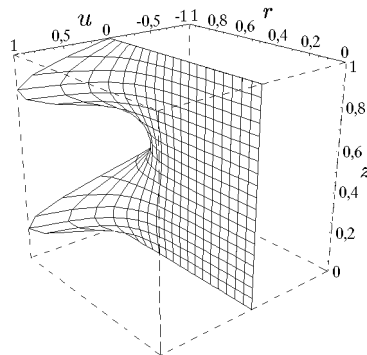


Рис. 46

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & 0 < z < h, & \quad r < a, \\ u|_{z=0} &= u|_{z=h} = 0, & u|_{r=a} &= \sin \pi m z. \end{aligned}$$

Решение задачи будем искать методом Фурье, положив

$$u(r, z) = R(r)Z(z).$$

Аналогично предыдущему примеру, для определения функций $R(r)$ и $Z(z)$ имеем следующие задачи:

$$R'' + \frac{R'}{r} = \lambda R; \quad |R(r)| < \infty \quad r \leq a, \quad (25.58)$$

$$\ddot{Z} + \lambda Z = 0, \quad z(0) = z(h) = 0. \quad (25.59)$$

Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (25.59) получены ранее (см. пример III.2.2) и имеют вид

$$\lambda = \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2, \quad Z_n(z) = A_n \sin \frac{\pi n z}{h}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Тогда общее решение уравнения (25.59) есть

$$R_n(r) = B_n I_0\left(\frac{\pi n r}{h}\right) + C_n K_0\left(\frac{\pi n r}{h}\right),$$

и из условия ограниченности (25.59) $C_n = 0$. Следовательно,

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n I_0\left(\frac{\pi n r}{h}\right) \sin \frac{\pi n z}{h},$$

где $\bar{A}_n = A_n B_n$. Из граничных условий получим

$$u|_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n I_0\left(\frac{\pi n a}{h}\right) \sin \frac{\pi n z}{h} = \sin \pi m z.$$

Таким образом,

$$\bar{A}_n I_0\left(\frac{\pi n a}{h}\right) = \delta_{nm},$$

и для решения исходной задачи получим

$$u(r, z) = \frac{I_0(\pi m r/h)}{I_0(\pi m a/h)} \sin \frac{\pi m z}{h}.$$

График этой функции при $a = 1$, $h = 1$, $m = 1$ приведен на рис. 45, а при $a = 1$, $h = 1$, $m = 3$ – на рис. 46.

25.4. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферических координатах

Рассмотрим задачу на определение гармонической функции, решение которой можно найти методом разделения переменных в сферической системе координат.

Пример 25.8. Найти функцию, удовлетворяющую на сфере единичного радиуса условию $u_r|_{r=1} = \sin(\pi/4 - \varphi) \sin \theta$ и гармоническую а) вне этой сферы и б) внутри нее.

Решение. Запишем уравнение Лапласа в сферической системе координат. Тогда для определения функции $u(r, \theta, \varphi)$ получим следующую задачу:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0; \quad (25.60)$$

$$u_r(r, \theta, \varphi)|_{r=1} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right) \sin \theta = f(\varphi, \theta);$$

а) $r > 1$, б) $r < 1$.

Отметим, что хотя для внешней задачи Неймана условие разрешимости (24.24) не требуется, для внутренней задачи необходимо проверить следующее условие:

$$\int_{r=1} u_n(r, \theta, \varphi) dS = \int_{r=1} u_r(r, \theta, \varphi) dS = 0.$$

Действительно,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right) \sin^2 \theta \, d\theta d\varphi = 0.$$

Таким образом, внутренняя задача Неймана разрешима.

Решение задачи будем искать методом разделения переменных

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi). \quad (25.61)$$

Поскольку функция $u(r, \theta, \varphi)$ – гармоническая вне сферы единичного радиуса, то

$$|R(r)| < \infty, \quad |Y(\theta, \varphi)| < \infty, \quad r > 1.$$

Стандартным образом разделив переменные, для определения функции $R(r)$ получим уравнение

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0, \quad (25.62)$$

а для $Y(\varphi, \theta)$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0 \quad (25.63)$$

с периодическим граничным условием

$$Y(\theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi + 2\pi).$$

Решение уравнения (25.63) будем искать в виде

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi). \quad (25.64)$$

Функция $\Phi(\varphi)$ является решением задачи Штурма–Лиувилля с периодическим граничным условием

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \quad (25.65)$$

Решение задачи (25.65) для $m = \overline{0, \infty}$ имеет вид

$$\Phi_m(\varphi) = C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi, \quad \mu = m^2. \quad (25.66)$$

С учетом (25.66) для определения функции $\Theta(\theta)$ имеем

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0, \quad (25.67)$$

$$|\Theta(\theta)| < \infty, \quad 0 \leq \theta < \pi.$$

Сделаем в уравнении (25.66) замену переменных $z = \cos \theta$. Тогда для функции $\Theta(z)$ получим

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{d\Theta}{dz} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - z^2} \right) \Theta = 0, \quad (25.68)$$

$$|\Theta(z)| < \infty, \quad -1 \leq z \leq 1.$$

Решением задачи (25.68) являются присоединенные функции Лежандра (см. разд. «Присоединенные функции Лежандра» части III) с собственными значениями $\lambda = n(n + 1)$:

$$\Theta_{nm}(z) = A_{nm} P_n^m(z) = A_{nm} (1 - z^2)^{m/2} P_n^{(m)}(z), \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Возвратившись к переменной θ , запишем

$$\Theta_{nm}(\theta) = A_{nm} \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} [P_n(\cos \theta)] = A_{nm} P_n^m(\cos \theta).$$

Поскольку $P_n^m(\cos \theta) = 0$ при $m > n$, то для функции (25.64) получим

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \bar{C}_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\varphi + \bar{D}_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \quad (25.69)$$

где обозначено

$$\bar{C}_{nm} = A_{nm} C_n, \quad \bar{D}_{nm} = A_{nm} D_n.$$

Решение уравнения (25.61) при $\lambda = n(n+1)$ будем искать в виде

$$R(r) = r^\alpha.$$

Тогда для определения α получим

$$\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha - n(n+1) = 0$$

или

$$\alpha^2 + \alpha - n(n+1) = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha_1 = n, \quad \alpha_2 = -(n+1)$$

и

$$R_n(r) = E_n r^n + F_n r^{-(n+1)}.$$

Из условия $|R(r)| < \infty$, $r > 1$ находим $E_n = 0$ при $n > 1$, т.е.

$$R_n(r) = \frac{F_n}{r^{n+1}} + E_0 r^n \delta_{n0}, \quad (25.70)$$

где δ_{n0} – символ Кронекера. Для внутренней задачи аналогично запишем

$$R_n(r) = E_n r^n. \quad (25.71)$$

Подставив (25.69) и (25.70) в (25.61) и просуммировав по n , получим

$$u(r, \varphi, \theta) = \tilde{E}_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left[\tilde{C}_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (\tilde{C}_{nm} \cos m\varphi + \tilde{D}_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) \right], \quad (25.72)$$

где обозначено

$$\tilde{C}_{nm} = F_n \bar{C}_{nm}, \quad \tilde{D}_{nm} = F_n \bar{D}_{nm}, \quad \tilde{E}_0 = E_0 \bar{C}_{00}.$$

Подставим (25.72) в граничное условие (25.60):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{r^{n+2}} \left[\tilde{C}_{n0} P_n(\cos \theta) + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=1}^n (\tilde{C}_{nm} \cos m\varphi + \tilde{D}_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) \right] \Big|_{r=1} = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (25.73)$$

Поскольку $P_0(\cos \theta) = 1$, уравнение (25.73) можно записать в виде

$$\begin{aligned} -\tilde{C}_{00} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (n+1) (\tilde{C}_{nm} \cos m\varphi + \tilde{D}_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) = \\ = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \sin \theta. \end{aligned}$$

Разложим правую часть в ряд по ортогональной системе функций $\cos m\varphi P_n^m(\cos \theta)$, $\sin m\varphi P_n^m(\cos \theta)$. Тогда для коэффициентов \tilde{C}_{nm} и \tilde{D}_{nm} получим

$$\begin{aligned} -\tilde{C}_{00} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \sin^2 \theta d\theta, \\ -(n+1)\tilde{C}_{nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \sin \theta P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi, \\ -(n+1)\tilde{D}_{nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \sin \theta P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

где $m = \overline{1, n}$, $n = \overline{1, \infty}$. Поскольку

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \varphi - \cos \frac{\pi}{4} \sin \varphi, \quad \sin \theta = P_1^1(\cos \theta),$$

то

$$\tilde{C}_{00} = 0, \quad \tilde{C}_{nm} = \begin{cases} -\frac{\sin \pi/4}{2}, & n = m = 1, \\ 0, & n \neq 1, m \neq 1; \end{cases}$$

$$\tilde{D}_{nm} = \begin{cases} \frac{\cos \pi/4}{2}, & n = m = 1, \\ 0, & n \neq 1, m \neq 1. \end{cases}$$

Окончательно получим

$$u(r, \varphi, \theta) = \tilde{E}_0 - \frac{1}{2r^2} \left[\sin \frac{\pi}{4} \cos \varphi P_1^1(\cos \theta) - \cos \frac{\pi}{4} \sin \varphi P_1^1(\cos \theta) \right]$$

или

$$u(r, \varphi, \theta) = \tilde{E}_0 - \frac{1}{2r^2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right) \sin \theta.$$

Постоянная \tilde{E}_0 произвольна. Если функцию $u(r, \varphi, \theta)$ подчинить условию регулярности на бесконечности ($u|_{r=\infty} = 0$), то $\tilde{E}_0 = 0$ и решение задачи становится однозначным.

В случае внутренней задачи Неймана, проделав аналогичные операции с (25.71), получим

$$u(r, \varphi, \theta) = \tilde{E}_0 + r \sin \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right) \sin \theta.$$

26. Интегралы Пуассона и Дини

Теорема 26.1. *Решение первой краевой задачи (25.31) для круга*

$$\Delta_2 u = 0, \quad u(r, \varphi)|_{r=a} = f(\varphi), \quad r \leq a, \quad (26.1)$$

можно представить в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \frac{f(\psi)(a^2 - r^2)}{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\psi - \varphi)}. \quad (26.2)$$

◆ *Соотношение (26.2) называется интегралом Пуассона первой краевой задачи, а функция*

$$\mathcal{K}(r, \varphi, a, \psi) = \frac{a^2 - r^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\psi - \varphi)} \quad (26.3)$$

– ядром интеграла Пуассона первой краевой задачи.

Доказательство. Подставим в соотношение (25.45) значения α_n и β_n , поменяем местами интегрирование и суммирование и получим

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n [\cos n\varphi \cos n\psi + \sin n\varphi \sin n\psi] \left. \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos n(\psi - \varphi) \right\}, \end{aligned}$$

но при $|t| < 1$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\alpha &= \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} t^n (e^{i\alpha n} + e^{-i\alpha n}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{te^{i\alpha}}{1 - te^{i\alpha}} + \frac{te^{-i\alpha}}{1 - te^{-i\alpha}} \right) = \frac{1 - t^2}{2(1 - 2t \cos \alpha + t^2)}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\alpha = \frac{1 - t^2}{2(1 - 2t \cos \alpha + t^2)}, \quad |t| < 1. \quad (26.4)$$

Подставим теперь в (26.4) $t = r/a$, $\alpha = \psi - \varphi$ и получим (26.2), что и требовалось доказать.

◇ Решение внешней краевой задачи можно получить из (26.2) с помощью замены $a \rightarrow r$ и $r \rightarrow a$ (т.е. просто изменением знака).

Теорема 26.2. *Решение второй краевой задачи (25.54) для круга $r < a$ можно представить формулой*

$$u(r, \varphi) = C - \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \ln[a^2 + r^2 - 2ar \cos(\psi - \varphi)] d\psi, \quad (26.5)$$

называемой формулой или интегралом Дини.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 9.1, подставим значения коэффициентов α_n , β_n в выражение (25.54).

После изменения порядка суммирования и интегрирования получим

$$\begin{aligned}
 u(r, \varphi) &= C + \frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\psi - \varphi) d\psi = \\
 &= C + \frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n e^{in(\psi - \varphi)} d\psi = \\
 &= C + \frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} d\psi, \quad (26.6)
 \end{aligned}$$

где $t = (r/a)^n e^{in\alpha}$, $\alpha = \psi - \varphi$, $|t| < 1$.

Воспользовавшись известным разложением

$$\ln \frac{1}{1-t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}, \quad |t| < 1,$$

и учтя, что

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \ln(1-t) &= \ln |1-t| = \ln \left| 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^n e^{in\alpha} \right| = \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + r^2 - 2ar \cos \alpha}{a},
 \end{aligned}$$

находим

$$u(r, \varphi) = C - \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \ln \frac{a^2 + r^2 - 2ar \cos \alpha}{a} d\psi,$$

а с учетом условия разрешимости для $f(\psi)$

$$u(r, \varphi) = C - \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \ln[a^2 + r^2 - 2ar \cos(\psi - \varphi)] d\psi,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично суммируется ряд (25.56), определяющий решение внешней второй краевой задачи для круга.

27. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца

27.1. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца в полярных координатах

Рассмотрим уравнение Гельмгольца для круга

$$\Delta u \pm k^2 u = 0 \quad (27.1)$$

с граничными условиями вида

$$\text{а) } u|_{r=a} = f(\varphi) \quad \text{б) } \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = g(\varphi). \quad (27.2)$$

Пусть $\Delta u + k^2 u = 0$. В полярной системе координат это уравнение примет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0. \quad (27.3)$$

Решение уравнения (27.3) будем искать методом разделения переменных:

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

Получим

$$\frac{\Phi}{r} \frac{d}{dr} (rR') + \frac{R}{r^2} \Phi'' + k^2 \Phi R = 0.$$

Домножив обе части уравнения на $r^2/(R\Phi)$ и разделив переменные, найдем

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} (rR') + k^2 r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda.$$

Следовательно,

$$r^2 R'' + rR' + (k^2 r^2 - \lambda)R = 0 \quad (27.4)$$

и

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0 \quad (27.5)$$

с условиями $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, $|R(r)| < \infty$, которые следуют из постановки задачи. Задача Штурма–Лиувилля (27.5) уже рассматривалась (см. пример III.2.8), и ее решение имеет вид

$$\lambda_n = n^2, \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi. \quad (27.6)$$

Уравнение (27.4) при $\lambda = n^2$ есть уравнение Бесселя с ограниченным при $r < a$ решением

$$R_n(r) = C_n J_n(kr). \quad (27.7)$$

В результате для решений исходного уравнения получим

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(kr) [A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi]. \quad (27.8)$$

Коэффициенты A_n, B_n определим из граничных условий:

а) Для граничных условий первого типа, разложив $f(\varphi)$ в ряд Фурье, найдем

$$u|_{r=a} = f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

Следовательно, в предположении, что ka не является корнем функции Бесселя [т.е. $J_m(ka) \neq 0, m = \overline{0, \infty}$], получим

$$A_0 2J_0(ka) = \alpha_0, \quad A_n J_n(ka) = \alpha_n, \quad B_n J_n(ka) = \beta_n, \quad (27.9)$$

где α_n и β_n определяются формулой (25.44), а решение поставленной задачи единственно и имеет вид

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(kr)}{J_n(ka)} [\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi]. \quad (27.10)$$

Если ka является корнем функции Бесселя [$J_m(ka) = 0, m = \overline{0, \infty}$], то решение существует только при условии, что коэффициенты α_n и β_n равны нулю при $n = m$. В этом случае решение не единственно, так как коэффициенты A_m и B_m не определяются из соотношения (27.9). Если хотя бы один из коэффициентов α_n или β_n при $n = m$ отличен от нуля, решение исходной задачи не существует.

б) Аналогично для граничных условий второго типа находим

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = g(\varphi) = \frac{\bar{\alpha}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_n \cos n\varphi + \bar{\beta}_n \sin n\varphi),$$

где $\bar{\alpha}_n$ и $\bar{\beta}_n$ определяются соотношением (25.44), в котором функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следует заменить функциями $\bar{\varphi}(x)$ и $\bar{\psi}(x)$. Следовательно, в предположении, что ka не является корнем производной функции Бесселя $J'_n(x), n = \overline{0, \infty}$, получим

$$A_0 = \frac{\bar{\alpha}_0}{2kJ'_0(ka)}, \quad A_n = \frac{\bar{\alpha}_n}{kJ'_n(ka)}, \quad B_n = \frac{\bar{\beta}_n}{kJ'_n(ka)},$$

а решение поставленной задачи единственно и имеет вид

$$u(r, \varphi) = \frac{\bar{\alpha}_0}{2} \frac{J_0(kr)}{kJ'_0(ka)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(kr)}{kJ'_n(ka)} [\bar{\alpha}_n \cos n\varphi + \bar{\beta}_n \sin n\varphi]. \quad (27.11)$$

В противном случае, как и для граничных условий первого рода, решение задачи не существует или не единственно.

Если $\Delta u - k^2 u = 0$, то вместо формул (27.10) и (27.11) получим соответственно

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} \frac{I_0(kr)}{I_0(ka)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(kr)}{I_n(ka)} [\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi]; \quad (27.12)$$

$$u(r, \varphi) = \frac{\bar{\alpha}_0}{2} \frac{I_0(kr)}{kI'_0(ka)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(kr)}{kI'_n(ka)} [\bar{\alpha}_n \cos n\varphi + \bar{\beta}_n \sin n\varphi], \quad (27.13)$$

где $I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода. В этом случае решение существует для любых значений ka и единственно, так как задача Штурма–Лиувилля $\Delta u - \lambda u = 0$ не имеет положительных собственных значений и, следовательно, величина k^2 не может совпасть с каким-либо из них. Заметим, что этот вывод также следует непосредственно из формул (27.12) и (27.13), поскольку модифицированная функция Бесселя первого рода $I_n(x)$, а также ее производная не имеют нулей (см. разд. «Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя» части III).

27.2. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца в декартовых координатах

Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\Delta u - k^2 u = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq q, \quad (27.14)$$

с граничными условиями

$$а) \quad u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=q} = \psi(x), \quad u|_{x=0} = u|_{x=p} = 0 \quad (27.15)$$

или

$$б) \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \bar{\varphi}(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=q} = \bar{\psi}(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=p} = 0. \quad (27.16)$$

К задачам с такими граничными условиями редуцируются (см. разд. <Разделение переменных в уравнении Лапласа>) задачи Неймана (в предположении ее разрешимости) и Дирихле для уравнения Гельмгольца с произвольными граничными условиями.

Решение уравнения (27.14) ищем методом Фурье:

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (27.17)$$

Подставив (27.17) в (27.14), запишем

$$YX'' + XY'' - k^2XY = 0.$$

Домножим обе части уравнения на $X(x)Y(y)$ и, разделив переменные, найдем

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + k^2 = \lambda$$

или

$$X'' - \lambda X = 0, \quad Y'' + (-k^2 + \lambda)Y = 0. \quad (27.18)$$

Из исходной задачи для первого уравнения из (27.18) получим следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$X(0) = X(p) = 0, \quad |X(x)| < \infty,$$

решение которой имеет вид (см. пример III.2.2)

$$\lambda = -\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 = -\omega_n^2, \quad X_n(x) = C_n \sin \frac{\pi n x}{p}. \quad (27.19)$$

Подставив λ_n в (27.18), найдем

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= A_n e^{\sqrt{\omega_n^2 + k^2} y} + B_n e^{-\sqrt{\omega_n^2 + k^2} y} = \\ &= \tilde{A}_n \operatorname{ch}(\sqrt{\omega_n^2 + k^2} y) + \tilde{B}_n \operatorname{sh}(\sqrt{\omega_n^2 + k^2} y). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{A}_n \operatorname{ch}(\sqrt{\omega_n^2 + k^2} y) + \tilde{B}_n \operatorname{sh}(\sqrt{\omega_n^2 + k^2} y)] \sin \omega_n x,$$

где $\bar{A}_n = \tilde{A}_n C_n$, $\bar{B}_n = \tilde{B}_n C_n$.

а) Из граничных условий первого типа найдем

$$u|_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{\pi n x}{p}, \quad u|_{y=q} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{\pi n x}{p},$$

где

$$\alpha_n = \frac{2}{p} \int_0^p \varphi(x) \sin \omega_n x dx, \quad \beta_n = \frac{2}{p} \int_0^p \psi(x) \sin \omega_n x dx.$$

Следовательно, для определения коэффициентов \bar{A}_n , \bar{B}_n получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{A}_n &= \alpha_n, \\ \bar{A}_n \operatorname{ch}(\sqrt{\omega_n^2 + k^2} q) + \bar{B}_n \operatorname{sh}(\sqrt{\omega_n^2 + k^2} q) &= \beta_n. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{A}_n &= \alpha_n, \\ \bar{B}_n &= \frac{1}{\operatorname{sh}(\sqrt{\omega_n^2 + k^2} q)} \{ \beta_n - \alpha_n \operatorname{ch}(\sqrt{\omega_n^2 + k^2} q) \}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n \operatorname{ch}(\sqrt{\omega_n^2 + k^2} y) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\omega_n^2 + k^2} y)}{\operatorname{sh}(\sqrt{\omega_n^2 + k^2} q)} [\beta_n - \alpha_n \operatorname{ch}(\sqrt{\omega_n^2 + k^2} q)] \right\} \sin \omega_n x. \end{aligned}$$

Решение задачи (27.16) находится аналогично.

◇ Уравнение $\Delta u + k^2 u = 0$ рассматривается аналогично. Следует лишь обратить внимание, совпадает ли k^2 с одним из собственных значений задачи Штурма–Лиувилля (см. предыдущий раздел).

27.3. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца в сферических координатах

Рассмотрим пример, решение которого можно найти методом разделения переменных в сферической системе координат.

Ограничимся случаем, когда граничные условия не зависят от переменной φ . В общем случае решение аналогично решению примера 25.8.

Пример 27.1. Найти решение уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\Delta u + 25u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=\pi} = \cos \theta, \quad 0 \leq r < \pi.$$

Решение. В сферической системе координат уравнение Гельмгольца примет вид

$$\begin{aligned} \Delta_3 u + 25u = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + 25u = 0. \end{aligned} \quad (27.20)$$

Переменная φ не входит явно в уравнение и в граничные условия, поэтому будем считать, что $\partial u / \partial \varphi = 0$. Решение будем искать методом Фурье:

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta). \quad (27.21)$$

Обозначим

$$R' = \frac{dR}{dr}, \quad \text{и} \quad \dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{d\theta}.$$

Подставим (27.21) в (27.20):

$$\frac{\Theta}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + 25R\Theta = 0$$

или

$$\frac{\Theta}{r^2} (2rR' + r^2 R'') + \frac{R}{r^2 \sin \theta} (\cos \theta \dot{\Theta} + \sin \theta \ddot{\Theta}) + 25R\Theta = 0.$$

Домножив обе части этого равенства на $r^2/\Theta R$ и разделив переменные, получим

$$\frac{2rR' + r^2 R''}{R} + 25r^2 = -\frac{1}{\Theta \sin \theta} (\cos \theta \dot{\Theta} + \sin \theta \ddot{\Theta}) = \lambda.$$

В результате функция $R(r)$ определяется из уравнения

$$r^2 R'' + 2rR' + (25r^2 - \lambda)R = 0, \quad 0 \leq r \leq \pi, \quad |r| < \infty.$$

а функция $\Theta(\theta)$ является решением следующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$\ddot{\Theta} + \dot{\Theta} \operatorname{ctg} \theta + \lambda \Theta = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad |\Theta(\theta)| < \infty. \quad (27.22)$$

Решение

$$\lambda_n = n(n+1), \quad \Theta_n(\theta) = A_n P_n(\cos \theta), \quad n = \overline{0, \infty},$$

задачи Штурма–Лиувилля (27.22) найдено в примере III.18.1. Подставим λ_n в уравнение для функции $R(r)$ и получим

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left[25 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right]R = 0.$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$R(r) = z(r)r^{-1/2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R'(r) &= r^{-1/2}z'(r) - \frac{1}{2}r^{-3/2}z(r); \\ R''(r) &= r^{-1/2}z''(r) - r^{-3/2}z'(r) + \frac{3}{4}r^{-5/2}z(r). \end{aligned}$$

Для функции $z(r)$ получим уравнение

$$r^2z'' + rz' + \left[(5r)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right]z = 0. \quad (27.23)$$

Общее решение уравнения (27.23) имеет вид

$$z_n(r) = B_n J_{n+1/2}(5r) + C_n J_{-n-1/2}(5r),$$

где B_n и C_n — произвольные постоянные.

Для функции $R_n(r)$ получим

$$R_n(r) = r^{-1/2}[B_n J_{n+1/2}(5r) + C_n N_{n+1/2}(5r)]. \quad (27.24)$$

С учетом известного свойства функции Неймана

$$\lim_{x \rightarrow +0} N_{n+1/2}(x) = -\infty$$

имеем $C_n = 0$ и

$$R_n(r) = B_n r^{-1/2} J_{n+1/2}(5r).$$

Тогда решение запишется выражением

$$u_n(r, \theta) = R_n(r) \Theta_n(\theta) = A_n P_n(\cos \theta) \frac{B_n}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}(5r),$$

просуммировав которое по n , найдем

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n P_n(\cos \theta) r^{-1/2} J_{n+1/2}(5r), \quad (27.25)$$

где $\bar{A}_n = A_n B_n$. Из граничного условия

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=\pi} = \cos \theta \quad (27.26)$$

вычислим константы \bar{A}_n . Для этого продифференцируем $u(r, \theta)$ (27.25) по r :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=\pi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n P_n(\cos \theta) \left[5J'_{n+1/2}(5r) r^{-1/2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} r^{-3/2} J_{n+1/2}(5r) \right] \Big|_{r=\pi} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n P_n(\cos \theta) \left[5J'_{n+1/2}(5\pi) \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} J_{n+1/2}(5\pi) \right]. \end{aligned} \quad (27.27)$$

Разложим $\cos \theta$ в ряд Фурье по полиномам Лежандра. Функция $\cos \theta$ – полином первой степени по $\cos \theta$. Следовательно, ее разложение в ряд Фурье не будет содержать полиномов выше первого порядка. Поскольку

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

то

$$\cos \theta = 0 \cdot P_0(\cos \theta) + P_1(\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \cdot P_n(\cos \theta). \quad (27.28)$$

Следовательно,

$$\alpha_n = \delta_{n1}$$

Подставив (27.28) и (27.27) в (27.26) и приравняв коэффициенты при одинаковых полиномах $P_n(\cos \theta)$, получим

$$\bar{A}_n = \alpha_n / \left[5J'_{n+1/2}(5r) \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} J_{n+1/2}(5r) \right], \quad n = \overline{0, \infty},$$

или

$$\bar{A}_n = \delta_{n1} / \left[5J'_{n+1/2}(5\pi) \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} J_{n+1/2}(5\pi) \right].$$

Тогда

$$u(r, \theta) = \frac{2(\sqrt{\pi})^3}{\left[10\pi J'_{3/2}(5\pi) - J_{3/2}(5\pi) \right]} P_1(\cos \theta) \frac{J_{3/2}(5r)}{\sqrt{r}}.$$

С учетом соотношений (III.5.16) получим

$$u(r, \theta) = -\frac{\pi^2}{2r} \left(\frac{\sin 5r}{5r} - \cos 5r \right) \cos \theta.$$

28. Метод функций Грина

В предыдущих разделах мы рассмотрели метод Фурье, позволяющий представлять решение краевых задач в виде рядов Фурье по собственным функциям соответствующих задач Штурма–Лиувилля. Решение краевых задач также можно находить в интегральной форме с помощью метода функций Грина. Прежде чем перейти непосредственно к рассмотрению метода, заметим, что в разд. «Интегралы Пуассона и Дини» суммирование рядов Фурье привело к формулам Пуассона (26.2) и Дини (26.5). Эти формулы в интегральной форме представляют решение задач Дирихле и Неймана для круга. В этом разделе мы получим, в частности, эти же формулы посредством метода функций Грина.

28.1. Функция Грина задачи Дирихле

Обратимся к задаче Дирихле для уравнения Пуассона в области E , ограниченной поверхностью S_E ,

$$\Delta u(\vec{x}) = -F(\vec{x}), \quad \vec{x} \in E \subset \mathbb{R}^n, \quad n = 2, 3; \quad (28.1)$$

$$u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_E. \quad (28.2)$$

Эту задачу можно рассматривать, например, как задачу о нахождении электростатического (гравитационного, теплового и др.) потенциала, создаваемого зарядами, распределенными в области E с плотностью $\rho(x) = F(\vec{x})/(4\pi)$ (см. обозначения разд. «Стационарные физические процессы и уравнения эллиптического типа»), значение которого на границе S_E задано. Обобщая известный подход (см. разд. «Краевая задача с параметром» части II) к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений методом функций Грина, сформулируем следующую вспомогательную задачу: найти потенциал, создаваемый внутри заземленной проводящей поверхности S_E точечным зарядом величиной $1/(4\pi)$.

Обозначим искомый потенциал через $G(\vec{x}, \vec{y})$. В отличие от $u(\vec{x})$, функция $G(\vec{x}, \vec{y})$ зависит не только от переменной \vec{x} , но и от параметра \vec{y} , который указывает положение точечного заряда. Поскольку плотность точечного заряда с помощью дельта-функции можно записать в виде $-\delta(\vec{x} - \vec{y})/(4\pi)$, а проводящая сфера заземлена, приходим к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) &= -\delta(\vec{x} - \vec{y}), & \vec{x}, \vec{y} \in E, \\ G(\vec{x}, \vec{y})|_{\vec{x} \in S_E} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее индекс у оператора Лапласа указывает переменную, на которую он действует.

Суть метода функций Грина заключается в представлении решения общей задачи (28.1), (28.2) через решение полученной краевой задачи специального вида, т.е. через функцию $G(\vec{x}, \vec{y})$, называемую функцией Грина, или функцией источника.

◆ Функцией Грина (функцией источника) задачи Дирихле (28.1), (28.2) называется функция $G(\vec{x}, \vec{y})$, являющаяся решением краевой задачи

$$\Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) = -\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \vec{x}, \vec{y} \in E \subset \mathbb{R}^n, \quad n = 2, 3; \quad (28.3)$$

$$G(\vec{x}, \vec{y})|_{\vec{x} \in S_E} = 0. \quad (28.4)$$

Из этого определения следует, во-первых, что функция Грина $G(\vec{x}, \vec{y})$ как решение неоднородного уравнения (28.3) допускает представление

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = g_0(\vec{x}, \vec{y}) - \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}), \quad (28.5)$$

где $g_0(\vec{x}, \vec{y})$ – регулярная гармоническая функция, а $\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y})$ – фундаментальное решение оператора Лапласа, т.е.

$$\Delta_x g_0(\vec{x}, \vec{y}) = 0; \quad (28.6)$$

$$\Delta_x \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (28.7)$$

Во-вторых, функция Грина $G(\vec{x}, \vec{y})$ обладает свойством симметрии

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{y}, \vec{x}). \quad (28.8)$$

Действительно, положим во второй формуле Грина (22.2)

$$u(\vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{y}), \quad v(\vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{z}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_E [G(\vec{x}, \vec{y}) \Delta_x G(\vec{x}, \vec{z}) - G(\vec{x}, \vec{z}) \Delta_x G(\vec{x}, \vec{y})] dx = \\ & = \int_{S_E} ([G(\vec{x}, \vec{y}) \nabla_x G(\vec{x}, \vec{z}) - G(\vec{x}, \vec{z}) \nabla_x G(\vec{x}, \vec{y})], d\vec{S}). \end{aligned}$$

Отсюда, согласно (28.3), (28.4), получим

$$\begin{aligned} & \int_E [G(\vec{x}, \vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{z}) + G(\vec{x}, \vec{z}) \delta(\vec{x} - \vec{y})] dx = \\ & = -G(\vec{z}, \vec{y}) + G(\vec{y}, \vec{z}) = 0 \end{aligned}$$

и соответственно (28.8). С учетом равенства $\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{E}_n(|\vec{x} - \vec{y}|)$, означающего симметрию фундаментального решения по переменным \vec{x} и \vec{y} [т.е. $\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{E}_n(\vec{y}, \vec{x})$], из (28.8) следует, что гармоническая функция

$$g_0(\vec{x}, \vec{y}) = g_0(\vec{y}, \vec{x}) \quad (28.9)$$

тоже симметрична. Поэтому справедливо не только (28.6), но и

$$\Delta_y g_0(\vec{x}, \vec{y}) = 0. \quad (28.10)$$

◇ Если вернуться к физическому смыслу функции $G(\vec{x}, \vec{y})$, то сформулированный выше принцип симметрии $G(\vec{x}, \vec{y})$ является ничем иным, как математическим выражением принципа взаимности в физике, а именно: источник, помещенный в точку \vec{y} , производит в точке \vec{x} такое же действие, какое производит в точке \vec{y} источник, помещенный в точку \vec{x} .

◇ Функция Грина внешней задачи Дирихле (для неограниченных областей) определяется аналогично (28.3), (28.4) с дополнительным условием регулярности функции $G(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow 0$ при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ и фиксированном \vec{y} . Это же условие необходимо

и для внутренних задач с неограниченными поверхностями, как, например, задача Дирихле в полупространстве.

◇ Если для уравнения (28.3) граничное условие первого рода (28.4) заменить граничным условием третьего рода, получим определение функции Грина третьей краевой задачи.

Перейдем к построению решения задачи (28.1), (28.2).

Теорема 28.1. *Если решение задачи Дирихле (28.1), (28.2) существует, то его можно представить в виде*

$$u(\vec{x}) = \int_E G(\vec{x}, \vec{y}) F(\vec{y}) d\vec{y} - \int_{S_E} f(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} dS_y. \quad (28.11)$$

Доказательство. Если $u(\vec{x})$ и S_E удовлетворяют условиям леммы 24.1, то, согласно (24.2),

$$u(\vec{x}) = \int_E \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) \Delta_y u(\vec{y}) d\vec{y} + \oint_{S_E} \left[u(\vec{y}) \frac{\partial \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} - \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial n_y} \right] dS_y. \quad (28.12)$$

Переобозначим (для удобства) во второй формуле Грина (22.2) \vec{x} на \vec{y} и применим ее к функциям $u(\vec{y})$ и $g_0(\vec{x}, \vec{y})$ с учетом (28.2). Тогда

$$- \int_E g_0(\vec{x}, \vec{y}) \Delta_y u(\vec{y}) d\vec{y} - \oint_{S_E} \left[u(\vec{y}) \frac{\partial g_0(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} - g_0(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial n_y} \right] dS_y = 0. \quad (28.13)$$

Суммирование (28.12) и (28.13) дает

$$u(\vec{x}) = \int_E [\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) - g_0(\vec{x}, \vec{y})] \Delta_y u(\vec{y}) d\vec{y} + \oint_{S_E} \left\{ u(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} [\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) - g_0(\vec{x}, \vec{y})] - [\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) - g_0(\vec{x}, \vec{y})] \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial n_y} \right\} dS_y.$$

С учетом (28.5) полученное выражение можно записать как

$$u(\vec{x}) = - \int_E G(\vec{x}, \vec{y}) \Delta_y u(\vec{y}) d\vec{y} - \oint_{S_E} \left[u(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}) - G(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial n_y} \right] dS_y \quad (28.14)$$

и упростить, если учесть соотношения (28.1), (28.2) для $u(\vec{x})$ и граничное условие (28.4) для $G(\vec{x}, \vec{y})$, к виду

$$u(\vec{x}) = \int_E G(\vec{x}, \vec{y}) F(\vec{y}) d\vec{y} + \oint_{S_E} f(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}) dS_y$$

совпадающему с (28.11).

Как следует из доказанной теоремы, для решения задачи (28.1), (28.2) достаточно найти функцию $G(\vec{x}, \vec{y})$. К изучению этого вопроса мы и переходим.

28.2. Методы построения функции Грина задачи Дирихле

Существует несколько методов построения функции Грина, определяемой в виде (28.3), (28.4).

I. Начнем с обобщения метода построения функции Грина краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (см. разд. «Функция Грина краевой задачи» части II), основанного на использовании собственных функций соответствующей задачи Штурма–Лиувилля и разложения функции $\delta(\vec{x} - \vec{y})$ по этой системе функций (см. разд. «Дельта-функция Дирака и ортонормированные системы функций» части II).

Итак, наряду с (28.3), (28.4) рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля

$$\Delta v(\vec{x}) + \lambda v(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in E \subset \mathbb{R}^k, \quad k = 2, 3; \quad (28.15)$$

$$v(\vec{x})|_{\vec{x} \in S_E} = 0.$$

Пусть $v_n(\vec{x})/\|v_n(\vec{x})\|$ – полная ортонормированная система собственных функций этой задачи с собственными значениями λ_n , $n = \overline{1, \infty}$. Будем искать функцию $G(\vec{x}, \vec{y})$ в виде ряда

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{v_n(\vec{x})}{\|v_n\|}. \quad (28.16)$$

В таком виде функция $G(\vec{x}, \vec{y})$ уже удовлетворяет граничному условию (28.4). А подстановка (28.16) в уравнение (28.3) с учетом (28.15) и разложения

$$\delta(\vec{x} - \vec{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\vec{x})v_n(\vec{y})}{\|v_n\|^2}$$

дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\|v_n\|} \Delta_x v_n(\vec{x}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \lambda_n v_n(\vec{x})}{\|v_n\|} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\vec{x})v_n(\vec{y})}{\|v_n\|^2}.$$

Отсюда при условии $\lambda_n \neq 0$ для $n = \overline{1, \infty}$ получим равенство

$$A_n = \frac{v_n(\vec{y})}{\lambda_n \|v_n\|},$$

подстановка которого в (28.16) дает следующее представление:

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\vec{x})v_n(\vec{y})}{\lambda_n \|v_n\|^2}. \quad (28.17)$$

II. Рассмотрим далее метод электростатических изображений (метод отражений). Идея метода исходит из электростатической интерпретации функции Грина и состоит в том, чтобы для заданного точечного заряда и поверхности S_E изобразить дополнительные заряды таким образом, чтобы суммарный потенциал на указанной поверхности обращался в нуль, как и предписывает граничное условие (28.4).

Рассмотрим несколько примеров построения функции Грина в заданных областях $E \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$.

Пример 28.1. Построить функцию Грина в полупространстве (полуплоскости) $E : x_n > 0$, $S_E : x_n = 0$.

Решение. Пусть точка \vec{y} лежит в полупространстве $x_n > 0$, тогда симметричная ей относительно плоскости $x_n = 0$ точка \vec{y}' лежит в полупространстве $x_n < 0$. Легко видеть (см. рис. 47, где точка \vec{x}_0 лежит в плоскости $x_n = 0$), что при приближении точки \vec{y} к плоскости $x_n = 0$ симметричная ей точка \vec{y}' также приближается к этой плоскости и на самой плоскости они совпадают. Если в точку \vec{y}' поместить заряд, равный по величине

заряду, расположенному в точке \vec{y} , но противоположный по знаку, то искомую функцию Грина можно записать в виде

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = -\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) + \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}'). \quad (28.18)$$

Действительно, подействуем на (28.18) оператором Δ_x :

$$\Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) = -\delta(\vec{x} - \vec{y}) + \delta(\vec{x} - \vec{y}').$$

Отсюда видно, что условие (28.3) выполняется, поскольку в рассматриваемой области $x_n > 0$ функция $\delta(\vec{x} - \vec{y}') = 0$. Наряду с этим, учтя равенство $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x} - \vec{y}'|$ непосредственно на плоскости $x_n = 0$, убеждаемся в справедливости граничного условия (28.4):

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{y}) &= -\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) + \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}') = \\ &= -\mathcal{E}_n(|\vec{x} - \vec{y}|) + \mathcal{E}_n(|\vec{x} - \vec{y}'|) = 0, \end{aligned}$$

так как $\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{E}_n(|\vec{x} - \vec{y}|)$.

Наконец, легко убедиться, что $G(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow 0$ при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$. Последнее становится совершенно очевидным, если функцию Грина (28.18) записать, используя явный вид фундаментальных решений $\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y})$ уравнения Лапласа:

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}'|} \right), & n = 3; \\ \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}'|} \right), & n = 2. \end{cases} \quad (28.19)$$

Таким образом, формула (28.19) действительно является решением задачи (28.3), (28.4) в области $x_n > 0$.

Пример 28.2. Построить функцию Грина в шаре (круге) $E: |\vec{x}| < R$, $S_E: |\vec{x}| = R$.

Решение. Пусть точка $\vec{y} \in E$, $\vec{y} \neq 0$, а $\vec{y}' = \vec{y}r^2/|\vec{y}|^2$ — точка, симметричная ей относительно сферы S_E (рис. 48), т.е.

$$|\vec{y}'| |\vec{y}| = R^2. \quad (28.20)$$

Если считать, что в точке \vec{y} расположен заряд, равный $1/(4\pi)$, то в точку \vec{y}' поместим заряд величиной $-\alpha/(4\pi)$. Поскольку $\alpha\delta(\vec{x} - \vec{y}') = \delta([\vec{x} - \vec{y}']/\alpha)$, функцию Грина ищем в виде

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = -\mathcal{E}_n(|\vec{x} - \vec{y}'|/\alpha) + \mathcal{E}_n(|\vec{x} - \vec{y}|). \quad (28.21)$$

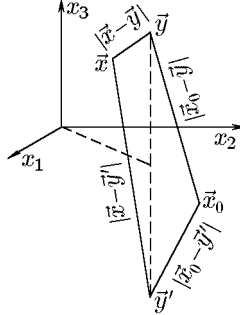


Рис. 47

Подберем значение α так, чтобы функция $G(\vec{x}, \vec{y})$ обращалась в нуль на границе S_E . Заметим, что треугольники $O\vec{x}\vec{y}$ и $O\vec{x}\vec{y}'$ подобны: один угол у них общий, а прилегающие стороны, согласно (28.20), пропорциональны. Поэтому на поверхности S_E : $|\vec{x}| = R$ справедливо соотношение

$$\frac{R}{|\vec{y}|} = \frac{|\vec{x} - \vec{y}'|}{|\vec{x} - \vec{y}|},$$

и, следовательно, в силу (28.21) следует положить $\alpha = R/|\vec{y}|$. Тогда

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{y}) &= -\mathcal{E}_n(|\vec{x} - \vec{y}|) + \mathcal{E}_n(|\vec{y}| |\vec{x} - \vec{y}'|/R) = \\ &= -\mathcal{E}_n(|\vec{x} - \vec{y}|) + \mathcal{E}_n\left(\frac{|\vec{y}|}{R} \left| \vec{x} - \vec{y} \frac{R^2}{|\vec{y}|^2} \right| \right). \end{aligned} \quad (28.22)$$

В силу (28.20) эта формула справедлива и при $\vec{y} = 0$:

$$G(\vec{x}, 0) = -\mathcal{E}_n(|\vec{x}|) + \mathcal{E}_n(R). \quad (28.23)$$

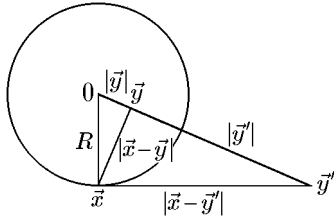


Рис. 48

Как и в предыдущем примере, нетрудно убедиться, что формулы (28.22), (28.23) удовлетворяют задаче (28.3), (28.4), и выписать их явный вид для $n = 2$ и $n = 3$.

Следуя принципу, использованному в приведенных выше примерах, можно находить функции Грина для различных областей: двугранного угла, сектора, полушара, полукруга и т.д.

III. Рассмотрим теперь метод, представляющий комбинацию описанных выше. Ограничимся трехмерной областью в виде шара E : $|\vec{x}| < R$, S_E : $|\vec{x}| = R$. Решение задачи (28.3), (28.4) ищем в форме (28.5). При $n = 3$ оно принимает вид

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} + g_0(\vec{x}, \vec{y}). \quad (28.24)$$

Таким образом, задача (28.3), (28.4) редуцируется к следующей:

$$\begin{aligned} \Delta_x g_0(\vec{x}, \vec{y}) &= 0, & \vec{x} \in E; \\ g_0(\vec{x}, \vec{y}) &= -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}, & \vec{x} \in S_E. \end{aligned} \quad (28.25)$$

Решение этой задачи будем искать методом разделения переменных. Для этого с учетом геометрии задачи воспользуемся сферической системой координат с началом в центре шара и осью z , направленной вдоль вектора \vec{y} . При таком выборе $\vec{x}(r, \varphi, \theta)$, $\vec{y}(\rho, 0, 0)$ и граничные условия не зависят от φ . Следуя примеру 25.8, найдем функцию $g_0(\vec{x}, \vec{y})$ в виде

$$g_0(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos \theta). \quad (28.26)$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_n подставим (28.26) в (28.25) и получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) &= -\frac{1}{4\pi\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\theta}} = \\ &= -\frac{1}{4\pi R\sqrt{1 - 2(\rho/R)\cos\theta + (\rho/R)^2}}. \end{aligned} \quad (28.27)$$

Так как $\rho/R < 1$, правую часть этого выражения можно рассматривать как производящую функцию полиномов Лежандра (см. разд. «Полиномы Лежандра» части III). В результате формулу (28.27) можно записать как

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) = -\frac{1}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n P_n(\cos \theta),$$

откуда выводим равенство

$$A_n = -\frac{1}{4\pi R} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n,$$

с учетом которого найдем

$$g_0(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho r}{R^2}\right)^n P_n(\cos \theta).$$

Точка \vec{y}' , симметричная точке \vec{y} относительно сферы S_E , будет иметь координаты $(\rho', 0, 0)$, где $\rho' = R^2/\rho < R$. Тогда

$$g_0(\vec{x}, \vec{y}') = -\frac{1}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho'}\right)^n P_n(\cos \theta).$$

Соотношение $r/\rho' < 1$ позволяет свернуть этот ряд к производящей функции, т.е. получить

$$\begin{aligned} g_0(\vec{x}, \vec{y}) &= -\frac{1}{4\pi R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2(r/\rho') \cos \theta + (r/\rho')^2}} = \\ &= -\frac{\rho'}{4\pi R} \frac{1}{\sqrt{(\rho')^2 - 2\rho' r \cos \theta + r^2}} = \\ &= -\frac{\rho'}{4\pi R |\vec{x} - \vec{y}'|} = -\frac{R}{4\pi \rho |\vec{x} - \vec{y}'|} = -\frac{R}{4\pi |\vec{y}'| |\vec{x} - \vec{y}'|}. \end{aligned}$$

Возвратившись к (28.24), находим явный вид искомой функции Грина

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{R}{|\vec{y}'| |\vec{x} - \vec{y}'|} \right), \quad (28.28)$$

совпадающий с найденным ранее (28.22) при $n = 3$.

28.3. Формула Пуассона

Выше было показано, что решение задачи Дирихле (28.1), (28.2) для уравнения Пуассона задается формулой (28.11). Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа можно получить из (28.11), положив там $F(\vec{x}) = 0$. Таким образом, решение задачи Дирихле для шара (круга)

$$\begin{aligned} \Delta_n u(\vec{x}) &= 0, & \vec{x} \in E \subset \mathbb{R}^n, & \quad E : |\vec{x}| = R; \\ u(\vec{x}) &= f(\vec{x}), & \vec{x} \in S_E : |\vec{x}| = R, & \quad n = 2, 3, \end{aligned} \quad (28.29)$$

имеет вид

$$u(\vec{x}) = \oint_{S_E} \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} f(\vec{y}) dy, \quad (28.30)$$

где $G(\vec{x}, \vec{y})$ определена формулой (28.22).

Преобразуем соотношение (28.30), вычислив значение нормальной производной функции Грина на поверхности S_E согласно (28.22):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}) \Big|_{S_E} &= -\mathcal{E}'_n(|\vec{x} - \vec{y}'|) \frac{\partial}{\partial n_y} (|\vec{x} - \vec{y}'|) + \\ &+ \mathcal{E}'_n \left(\frac{|\vec{y}'|}{R} |\vec{x} - \vec{y}'| \right) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{|\vec{y}'|}{R} |\vec{x} - \vec{y}'| \right) \Big|_{S_E}. \end{aligned} \quad (28.31)$$

Здесь штрих обозначает производную функции по всему аргументу. Учтя, что на сфере (окружности) S_E , т.е. для $\vec{y} \in S_E$: $|\vec{y}'| = R$

$$\mathcal{E}'_n(|\vec{x} - \vec{y}|)|_{|\vec{y}|=R} = \mathcal{E}'_n\left(\frac{|\vec{y}|}{R}|\vec{x} - \vec{y}|\right)|_{|\vec{y}|=R}, \quad (28.32)$$

а также $\partial/\partial n_y = \partial/\partial|\vec{y}|$, производную (28.31) можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y})|_{|\vec{y}|=R} &= \\ &= -\mathcal{E}'_n(|\vec{x} - \vec{y}|) \left[\frac{\partial}{\partial|\vec{y}|} (|\vec{x} - \vec{y}|) - \frac{\partial}{\partial|\vec{y}|} \left(\frac{|\vec{y}|}{R} |\vec{x} - \vec{y}| \right) \right] |_{|\vec{y}|=R}. \end{aligned}$$

Вычислив громоздкие, но несложные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial|\vec{y}|} (|\vec{x} - \vec{y}|)|_{|\vec{y}|=R} &= \frac{\partial}{\partial|\vec{y}|} (|\vec{x} - \vec{y}|) \sqrt{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cos \theta} = \\ &= \frac{R - |\vec{x}| \cos \theta}{\sqrt{|\vec{x}|^2 + R^2 - 2R|\vec{x}| \cos \theta}} = \frac{R - |\vec{x}| \cos \theta}{|\vec{x} - \vec{y}|} |_{|\vec{y}|=R}; \\ \frac{\partial}{\partial|\vec{y}|} \left(\frac{|\vec{y}|}{R} |\vec{x} - \frac{R^2}{|\vec{y}|^2} \vec{y}| \right) |_{|\vec{y}|=R} &= \frac{\partial}{\partial|\vec{y}|} \left(\frac{1}{R} |\vec{x}|\vec{y}|^2 - \frac{R^2}{|\vec{y}|} \vec{y}| \right) |_{|\vec{y}|=R} = \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial|\vec{y}|} \left(\sqrt{|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 + R^4 - 2R^2|\vec{x}||\vec{y}| \cos \theta} \right) |_{|\vec{y}|=R} = \\ &= \frac{|\vec{x}|^2 - R|\vec{x}| \cos \theta}{R\sqrt{|\vec{x}|^2 + R^2 - 2R|\vec{x}| \cos \theta}} = \frac{|\vec{x}|^2 - R|\vec{x}| \cos \theta}{R|\vec{x} - \vec{y}|} |_{|\vec{y}|=R}, \end{aligned}$$

найдем

$$\frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y})|_{|\vec{y}|=R} = -\mathcal{E}'_n(|\vec{x} - \vec{y}|) \frac{|\vec{x}|^2 - R^2}{R|\vec{x} - \vec{y}|} |_{|\vec{y}|=R}.$$

Приняв во внимание, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_n(|\vec{x} - \vec{y}|) &= \begin{cases} \mathcal{E}'_3(|\vec{x} - \vec{y}|) \\ \mathcal{E}'_2(|\vec{x} - \vec{y}|) \end{cases} = \begin{cases} \left(-\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \right)' \\ \left(-\frac{1}{2\pi} \ln |\vec{x} - \vec{y}| \right)' \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|^2} \\ \frac{1}{2\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \end{cases} = \frac{1}{\pi(2|\vec{x} - \vec{y}|)^{n-1}}, \quad n = 2, 3, \end{aligned}$$

приходим к формуле Пуассона

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{2^{n-1}\pi R} \oint_{|\vec{y}|=R} \frac{|\vec{x}|^2 - R^2}{|\vec{x} - \vec{y}|^n} f(\vec{y}) dS_y, \quad (28.33)$$

где $|\vec{x}| < R$, $n = 2, 3$.

При $n = 2$ формула (28.33) переходит в формулу (26.2), полученную ранее методом разделения переменных. Как и в плоском случае ($n = 2$), можно показать, что решение внешней задачи Дирихле определяется формулой

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{2^{n-1}\pi R} \oint_{|\vec{y}|=R} \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{|\vec{x} - \vec{y}|^n} f(y) dS_y, \quad (28.34)$$

где $|\vec{x}| > R$, $n = 2, 3$.

28.4. Функция Грина задачи Неймана для уравнения Лапласа

Перейдем от задачи Дирихле к задаче Неймана

$$\Delta u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in E, \quad (28.35)$$

$$\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_E. \quad (28.36)$$

Основное ее отличие от задачи Дирихле состоит в том, что соответствующая задача Неймана с нулевым граничным условием (28.36) всегда имеет нетривиальное решение $u(\vec{x}) = \text{const}$. Поэтому функция Грина в общепринятом смысле для нее не существует и следует, вообще говоря, искать модифицированную (обобщенную) функцию Грина, как это, например, делалось при решении краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (см. разд. «Краевая задача с параметром» части II).

♦ Функцией Грина задачи Неймана (28.35), (28.36) называется функция $G(\vec{x}, \vec{y})$ – решение специальной краевой задачи

$$\Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) = -\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \vec{x}, \vec{y} \in E \subset \mathbb{R}^k, \quad (28.37)$$

$$\frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n} = -\frac{1}{S}, \quad \vec{x} \in S_E, \quad k = 2, 3, \quad (28.38)$$

где \vec{n} – нормаль к S_E , внешняя по отношению к E , а S – площадь поверхности S_E .

Граничное условие (28.38) диктуется требованием разрешимости (24.24) для уравнения Пуассона, которое в данном случае имеет вид

$$\int_{S_E} \frac{\partial G}{\partial n} dS_y + \int_E \delta(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} = 0$$

или

$$\int_{S_E} \frac{\partial G}{\partial n} dS_y + 1 = 0.$$

Отсюда следует, что при выполнении именно условия (28.38) последнее выражение обращается в тождество

$$-\frac{1}{S} \int_{S_E} dS_y + 1 = 0.$$

Определенная таким образом функция $G(\vec{x}, \vec{y})$ неоднозначна, поскольку вычисляется в точности до аддитивной постоянной. Тем не менее, она позволяет строить решения задачи (28.35), (28.36).

Теорема 28.2. *Решение задачи Неймана (28.35), (28.36) при выполнении условия разрешимости (24.24) можно представить в виде*

$$u(\vec{x}) = \oint_{S_E} G(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) dS_y + C, \quad (28.39)$$

где C – произвольная постоянная.

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 28.1, получим выражение

$$u(\vec{x}) = \oint_{S_E} G(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) dS_y + \frac{1}{S} \oint_{S_E} f(\vec{y}) dS_y + C,$$

из которого при выполнении условия разрешимости (24.24) и следует (28.39).

◇ Для внешних трехмерных задач или задач, определенных на неограниченных поверхностях, трудностей, связанных с существованием нетривиального решения, можно избежать с помощью условия регулярности $u(\infty) = 0$, обращающего нетривиальное решение в тривиальное $u(\vec{x}) = \text{const} \equiv 0$. Соответствующие определения функций Грина в этом случае дополняются условием $G(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow 0$ при $\vec{x} \rightarrow \infty$ и фиксированном \vec{y} .

Перейдем теперь к вопросу о построении функции $G(\vec{x}, \vec{y})$. Отметим, что определение (28.37), (28.38) допускает следующую редукцию задачи:

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = g_0(\vec{x}, \vec{y}) - \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}), \quad (28.40)$$

где $\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y})$ – фундаментальное решение оператора Лапласа Δ_n , а $g_0(\vec{x}, \vec{y})$ – гармоническая функция, являющаяся решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta_x g_0(\vec{x}, \vec{y}) &= 0, & \vec{x}, \vec{y} \in E, \\ \frac{\partial g_0(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n} &= \frac{\partial \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n} - \frac{1}{S}, & \vec{x} \in S_E. \end{aligned} \quad (28.41)$$

Рассмотрим примеры построения функции Грина $G(\vec{x}, \vec{y})$ для некоторых областей.

Пример 28.3. Решить внутреннюю задачу Неймана для шара

$$\begin{aligned} \Delta u(\vec{x}) &= 0, & \vec{x} \in E \subset \mathbb{R}^3, & E : |\vec{x}| < R, \\ \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} &= f(\vec{x}), & \vec{x} \in S_E : |\vec{x}| = R. \end{aligned} \quad (28.42)$$

Решение. Воспользовавшись представлением $G(\vec{x}, \vec{y})$ (28.40) и явным видом $\mathcal{E}_3(\vec{x}, \vec{y})$, имеем

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} + g_0(\vec{x}, \vec{y}), \quad (28.43)$$

где функция $g_0(\vec{x}, \vec{y})$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta_x g_0(\vec{x}, \vec{y}) &= 0, \quad \vec{x}, \vec{y} \in E, \\ \frac{\partial g_0(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) - \frac{1}{S}, \quad \vec{x} \in S_E, \end{aligned} \quad (28.44)$$

а площадь сферы $S = 4\pi R^2$.

Аналогично задаче Дирихле с учетом результатов примера 25.8 решение задачи (28.44) ищем в виде

$$g_0(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{r^n}{nR^{n-1}} P_n(\cos \theta) + C. \quad (28.45)$$

Здесь векторы \vec{x}, \vec{y} имеют сферические координаты (r, φ, θ) и $(\rho, 0, 0)$, а вектор \vec{y}' , симметричный вектору \vec{y} относительно сферы S_E , соответственно $(\rho', 0, 0)$, $\rho' = R^2/\rho$.

Подстановка (28.45) в граничные условия (28.44) дает

$$A_n = \frac{n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n, \quad n = \overline{1, \infty},$$

и соответственно

$$g_0(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{r\rho}{R^2} \right)^n P_n(\cos \theta) + C. \quad (28.46)$$

Если воспользоваться разложением (III.19.21) (см. разд. «Полиномы Лежандра»), то (28.46) можно записать

$$g_0(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{R}{\rho R_1} + \frac{1}{R} \ln \frac{2R^2}{R^2 - r\rho \cos \theta + \rho R_1} \right] + C,$$

где

$$R_1 = |\vec{x} - \vec{y}'|. \quad (28.47)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} + \frac{R}{\rho|\vec{x} - \vec{y}'|} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R} \ln \frac{2R^2}{R^2 - r\rho \cos \theta + \rho R_1} \right] + C \end{aligned} \quad (28.48)$$

и соответственно

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_E} f(\vec{y}) \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} + \frac{R}{\rho|\vec{x} - \vec{y}'|} + \right.$$

$$+ \frac{1}{R} \ln \frac{2R^2}{R^2 - r\rho \cos \theta + \rho R_1} \Big] dS_y + C. \quad (28.49)$$

Это выражение можно упростить с учетом условия разрешимости

$$\oint_{S_E} f(\vec{y}) dS_y = 0$$

и равенства $R_1|_{r=R} = R|\vec{x} - \vec{y}|/\rho$:

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_E} f(\vec{y}) \left[\frac{2}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{1}{R} \ln(R - |\vec{x}| \cos \theta + |\vec{x} - \vec{y}|) \right] dS_y + C. \quad (28.50)$$

♦ Формула (28.50) называется формулой Неймана и представляет собой трехмерный аналог формулы Дини (26.5).

◇ Если в задаче (28.44) положить $1/S = 0$ и рассматривать область $E: |\vec{x}| > R$, то получим задачу для определения функции $g_0(\vec{x}, \vec{y})$, являющейся, согласно (28.40), частью функции Грина $G(\vec{x}, \vec{y})$ внешней задачи Неймана.

Пример 28.4. Найти функцию Грина задачи Неймана для полупространства (полуплоскости) $E \subset \mathbb{R}^n$, $E: x_n > 0$, $S_E: x_n = 0$.

Решение. Так как поверхность S_E неограничена и $1/S = 0$, то для искомой функции Грина $G(\vec{x}, \vec{y})$ имеем граничное условие

$$\frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n} \Big|_{S_E} = 0. \quad (28.51)$$

Следуя примеру 28.1, воспользуемся методом электростатических изображений (отражений). Напомним, что в случае задачи Дирихле заряду, расположенному в точке с радиус-вектором $\vec{y} \in E$, ставился в соответствие равный по величине и противоположный по знаку заряд, помещенный в точку \vec{y}' , симметричную \vec{y} относительно плоскости $y_n = 0$. Такое отражение иногда называют «нечетным». Легко увидеть, что в случае задачи Неймана следует воспользоваться «четным» отражением, т.е. не менять знак заряда. Тогда функция $G(\vec{x}, \vec{y})$ будет иметь вид

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = -\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) - \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}'). \quad (28.52)$$

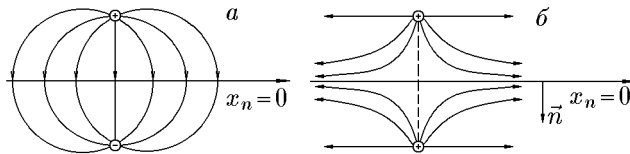


Рис. 49

Простой проверкой убеждаемся, что (28.52) удовлетворяет условию (28.51). Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n} \Big|_{x_n=0} &= -\frac{\partial}{\partial x_n} [\mathcal{E}_n(\vec{x} - \vec{y}) + \mathcal{E}_n(\vec{x} - \vec{y}')] \Big|_{x_n=0} = \\ &= -\left[\mathcal{E}'_n(|\vec{x} - \vec{y}|) \frac{\partial |\vec{x} - \vec{y}|}{\partial x_n} + \mathcal{E}'_n(|\vec{x} - \vec{y}'|) \frac{\partial |\vec{x} - \vec{y}'|}{\partial x_n} \right] \Big|_{x_n=0}. \end{aligned} \quad (28.53)$$

Воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{y}'| \Big|_{x_n=0} &= |\vec{x} - \vec{y}'| \Big|_{x_n=0}, \quad y'_n = -y_n, \\ \mathcal{E}'_n(|\vec{x} - \vec{y}'|) \Big|_{x_n=0} &= \mathcal{E}'_n(|\vec{x} - \vec{y}'|) \Big|_{x_n=0}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n} \Big|_{x_n=0} &= -\mathcal{E}'_n(|\vec{x} - \vec{y}'|) \left[\frac{\partial |\vec{x} - \vec{y}|}{\partial x_n} + \frac{\partial |\vec{x} - \vec{y}'|}{\partial x_n} \right] \Big|_{x_n=0} = \\ &= -\frac{\mathcal{E}'_n(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}'|} [(x_n - y_n) + (x_n + y_n)] \Big|_{x_n=0} = 0. \end{aligned}$$

Силовые линии, характеризующие потенциал соответствующей системы зарядов (см. рис. 49), наглядно иллюстрируют методы «четного» и «нечетного» отражения, комбинация которых позволяет находить функции Грина для широкого класса граничных условий.

Покажем теперь, как с помощью модифицированной функции Грина можно находить решения задачи Неймана. Для этого рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} \Delta v &= \lambda v, \quad \vec{x} \in E, \\ \frac{\partial v(\vec{x})}{\partial n} &= 0, \quad \vec{x} \in S_E, \end{aligned} \quad (28.54)$$

отвечающую краевой задаче (28.1), (28.2). Пусть $v_n(\vec{x})$ – полная ортонормированная система собственных функций этой задачи с собственными числами λ_n , $n = 0, \infty$. Очевидно, что собственному значению $\lambda_0 = 0$ соответствует функция $v_0 = V^{-1/2}$, где V – объем области E . Тогда, следуя разд. «Функция Грина краевой задачи» части II, рассмотрим функцию $G(\vec{x}, \vec{y})$ – решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) &= -\delta(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{1}{V}, \quad \vec{x} \in E, \\ \frac{\partial}{\partial n} G(\vec{x}, \vec{y}) &= 0, \quad \vec{x} \in S_E. \end{aligned} \quad (28.55)$$

Связь между функциями $u(\vec{x})$ из (28.1), (28.2) и $G(\vec{x}, \vec{y})$ из (28.55) можно найти, применив к ним вторую формулу Грина (22.2). Тогда

$$u(\vec{x}) = \oint_{S_E} \left[G(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n_y} - u(\vec{x}) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} \right] dS_y + \frac{1}{V} \int_E u(\vec{y}) d\vec{y} = \oint_{S_E} f(\vec{y}) G(\vec{x}, \vec{y}) dS_y + \text{const}. \quad (28.56)$$

Согласно формуле (28.56), решение задачи (28.1), (28.2) свелось к решению задачи (28.55), которое мы будем искать в виде

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(\vec{x}), \quad (28.57)$$

заведомо удовлетворяющем граничным условиям (28.55). Подставив (28.57) в (28.55) и учтя известное разложение дельта-функции, находим

$$A_n = \frac{v_n(\vec{y})}{\lambda_n}$$

и, следовательно,

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\vec{x}) v_n(\vec{y})}{\lambda_n}. \quad (28.58)$$

Таким образом, решение исходной задачи (28.1), (28.2) можно свести к решению задачи Штурма–Лиувилля (28.54) для заданной области E , а затем с помощью формулы (28.58) записать искомое решение в виде (28.56) [см. более подробно главу «Задача Штурма–Лиувилля для уравнений в частных производных»].

29. Плоско-параллельное течение идеальной жидкости. Методы комплексного анализа для двумерных задач

29.1. Обтекание цилиндра

Стационарное безвихревое (ламинарное) движение идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнениями

$$\text{div } \vec{v} = 0, \quad \text{rot } \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \vec{v}(\vec{r}), \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad (29.1)$$

где \vec{v} – скорость частиц жидкости в точке \vec{r} . Если в жидкость погружено тело, ограниченное замкнутой кусочно-гладкой непроницаемой для жидкости поверхностью S , то уравнение (29.1) описывает обтекание этого тела потоком жидкости, если наложить граничные условия

$$(\vec{v}(\vec{r}), \vec{n})|_S = 0, \quad \vec{v}|_{|\vec{r}|=\infty} = \vec{v}^0, \quad (29.2)$$

где \vec{n} – нормаль к поверхности S , \vec{v}^0 – постоянный вектор. Уравнение поверхности S в общем случае имеет вид

$$f(x, y, z) = 0. \quad (29.3)$$

Рассмотрим частный случай поверхности – цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz

$$f(x, y) = 0, \quad (29.4)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} (\vec{v}(\vec{r}), \vec{n}) &= 0, \\ \vec{v}|_{|\vec{r}|=\infty} &= \vec{v}^0 = (v_x^0, v_y^0, 0) = v^0(\cos \alpha, \sin \alpha, 0). \end{aligned} \quad (29.5)$$

Очевидно, что в этом случае решение $\vec{v}(\vec{r})$ следует искать в виде

$$\vec{v}(\vec{r}) = (v_x(x, y), v_y(x, y), 0). \quad (29.6)$$

◆ Такое течение называется плоско-параллельным.

Уравнения (29.1) теперь примут вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \quad (29.7)$$

Второе уравнение в (29.7) имеет решение вида

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = u(x, y), \quad \vec{v} = \nabla u, \quad (29.8)$$

где $u(x, y)$ – произвольная функция (гидродинамический потенциал), имеющая непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Подставив (29.8) во второе уравнение (29.7), найдем, что $u(x, y)$ есть гармоническая функция

$$\Delta_2 u = 0, \quad (29.9)$$

удовлетворяющая граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0, \quad \nabla u|_{|\vec{r}|=\infty} = v^0. \quad (29.10)$$

Записав общее решение первого уравнения из (29.7)

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi = \psi(x, y), \quad (29.11)$$

из второго найдем, что ψ также гармоническая функция

$$\Delta_2 \psi = 0,$$

называемая функцией тока. Сравнив (29.8) и (29.11), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (29.12)$$

Если ввести комплексную функцию w

$$w = u + i\psi, \quad (29.13)$$

называемую комплексным потенциалом, то (29.12) являются для нее условиями Коши–Римана, и комплексный потенциал

$$w = w(z), \quad z = x + iy \quad (29.14)$$

является аналитической функцией z в области, где справедливы уравнения (29.7).

◇ Выясним физический смысл функции ψ . Для этого рассмотрим уравнение линий тока жидкости – линий, в каждой точке которых касательная совпадает с вектором \vec{v} ,

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

или

$$v_y dx - v_x dy = 0,$$

что дает

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0. \quad (29.15)$$

Таким образом, семейство линий тока определяется уравнением

$$\psi(x, y) = C. \quad (29.16)$$

Рассмотрим плоско-параллельное обтекание жидкостью бесконечного цилиндра радиуса a . Уравнение (29.4) в этом случае имеет вид

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

В полярной системе координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

вместо граничных условий (29.10) запишем

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{r=a} = 0, \quad \nabla u \Big|_{r=\infty} = v^0 (\cos \alpha, \sin \alpha). \quad (29.17)$$

Общее решение двумерного уравнения Лапласа

$$u(x, y) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \{r^n [A_n \cos n(\varphi - \alpha) + B_n \sin n(\varphi - \alpha)] + r^{-n} [\bar{A}_n \cos n(\varphi - \alpha) + \bar{B}_n \sin n(\varphi - \alpha)]\}$$

получено ранее. Из граничного условия находим

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \frac{B_0}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} [n(a^{n-1}A_n - a^{-n-1}\bar{A}_n) \cos n(\varphi - \alpha) + \\ &+ n(a^{n-1}B_n - a^{-n-1}\bar{B}_n) \sin n(\varphi - \alpha)] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$B_0 = 0, \quad \bar{A}_n = a^{2n}A_n, \quad \bar{B}_n = a^{2n}B_n. \quad (29.18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ r^n A_n \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \right] \cos n(\varphi - \alpha) + \right. \\ &\left. + r^n B_n \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \right] \sin n(\varphi - \alpha) \right\}. \end{aligned}$$

Постоянные A_n, B_n выберем из второго граничного условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{r=\infty} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{r=\infty} = v_0 \sin \alpha$$

и учтем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ nr^{n-1}A_n \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \right] \cos n(\varphi - \alpha) + \right. \\ &\left. + nr^{n-1}B_n \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \right] \sin n(\varphi - \alpha) \right\}; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -nr^{n-1}A_n \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \right] \sin n(\varphi - \alpha) + \right. \\ &\left. + nr^{n-1}B_n \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \right] \cos n(\varphi - \alpha) \right\}. \end{aligned}$$

Из условия

$$\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \Big|_{r=\infty} < \infty$$

находим

$$A_n = B_n = 0, \quad n > 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{r=\infty} &= [A_1 \cos(\varphi - \alpha) + B_1 \sin(\varphi - \alpha)] \cos \varphi - \\ &- [-A_1 \sin(\varphi - \alpha) + B_1 \cos(\varphi - \alpha)] \sin \varphi = \\ &= A_1 [\cos \varphi \cos(\varphi - \alpha) + \sin \varphi \sin(\varphi - \alpha)] + \\ &+ B_1 [\cos \varphi \sin(\varphi - \alpha) + \sin \varphi \cos(\varphi - \alpha)] = \\ &= A_1 \cos(\varphi - \varphi + \alpha) + B_1 \sin(\varphi - \varphi + \alpha) = \\ &= A_1 \cos \alpha + B_1 \sin \alpha, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$A_1 = v_0, \quad B_1 = 0$$

и

$$u(r, \varphi) = A_0 + v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos(\varphi - \alpha). \quad (29.19)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial y} = A_1 \sin \alpha$$

справедливо и условие (29.17) выполняется.

◇ Решение (29.19) получено в предположении, что $u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi)$ (см. разд. «Разделение переменных в уравнении Лапласа в полярных координатах»). Однако физическая постановка рассматриваемой задачи допускает непериодические по переменной φ решения, которым соответствует вращение жидкости вокруг цилиндра. Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $u_0(r, \varphi) = \lambda\varphi$, $\lambda = \text{const}$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta_2 \lambda\varphi = 0$, хотя и не периодически: $\lambda\varphi \neq \lambda(\varphi + 2\pi)$. С учетом вышесказанного решение задачи принимает вид

$$u(r, \varphi) = v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos(\varphi - \alpha) + \lambda\varphi. \quad (29.20)$$

Найдем комплексный потенциал $w = u + i\psi$. Для этого удобно воспользоваться условиями Коши–Римана в полярной системе координат

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (29.21)$$

т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} &= v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \cos(\varphi - \alpha); \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{v_0}{r} \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \sin(\varphi - \alpha) - \frac{\lambda}{r}. \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно получить

$$\psi = v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin(\varphi - \alpha) - \lambda \ln r, \quad (29.22)$$

т.е.

$$\begin{aligned} w = u + i\psi &= v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos(\varphi - \alpha) + \\ &+ iv_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin(\varphi - \alpha) + \lambda\varphi - i\lambda \ln r. \end{aligned}$$

Введем переменную $z = re^{i\varphi} = x + iy$. Тогда

$$w(z) = v^* z + v \frac{a^2}{z} - i\lambda \ln z, \quad (29.23)$$

где $v = v_0 e^{i\alpha}$, $v^* = v_0 e^{-i\alpha} = v_0 \cos \alpha + i v_0 \sin \alpha$.

◇ Поскольку $v_\varphi = \lambda$, то слагаемое $\lambda \ln z$ описывает циркуляцию жидкости со скоростью λ вокруг цилиндра.

Введем безразмерную переменную $z = a\zeta$, тогда

$$w(\zeta) = av^*\zeta + va\frac{1}{\zeta} - i\lambda \ln \zeta. \quad (29.24)$$

29.2. Обтекание плоской пластины

Полученные для круга результаты позволяют решить задачу обтекания тела произвольной формы. При этом применяется метод конформных преобразований, позволяющий отобразить произвольный гладкий контур на окружность.

Рассмотрим в качестве примера обтекание плоской пластины ширины $2a$ и бесконечной длины. После стандартного отделения переменной z получим следующую задачу:

$$\Delta_2 u = 0, \quad \vec{v}|_{r=\infty} = v_0(\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0, \quad (29.25)$$

где S — отрезок $[-a, a]$.

Рассмотрим комплексную переменную $z = re^{i\varphi} = x + iy$. При помощи функции Жуковского

$$z = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad \zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\psi} \quad (29.26)$$

отобразим отрезок $[-a, a]$ на окружность единичного радиуса (см. гл. «Конформные отображения» части I), а пространство вне отрезка — на пространство вне круга единичного радиуса. Действительно,

$$re^{i\varphi} = \frac{a}{2} \left(\rho e^{i\psi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\psi} \right).$$

Единичной окружности $\rho = 1$ в плоскости ζ в плоскости z отвечает кривая

$$z = re^{i\varphi} = x + iy = \frac{a}{2} \left(\rho e^{i\psi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\psi} \right) \Big|_{\rho=1} = a \cos \psi.$$

Поскольку $\text{Im}(a \cos \psi) = 0$, то $y = 0$ и $x = a \cos \psi$, т.е. единичная окружность отображается в отрезок $[-a, a]$. Аналогично пространство вне отрезка отображается на пространство вне круга, т.е. $z = \infty$ отвечает $\zeta = \infty$. (Более подробно см. разд. «Функция Жуковского» части I.)

Рассмотрим фиктивное течение жидкости в плоскости ζ .

◇ Фиктивное течение представляет собой обтекание цилиндра единичного радиуса потоком, имеющим на бесконечности скорость

$$\frac{dw}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\infty} = \frac{dw}{dz} \Big|_{z=\infty} \frac{dz}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\infty} = \frac{a}{2} v^*.$$

В этом случае комплексный потенциал имеет вид

$$w(\zeta) = \frac{a}{2}v_0^*\zeta + \frac{a}{2}v_0\frac{1}{\zeta} - i\lambda \ln \zeta. \quad (29.27)$$

Найдем

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=\infty} = v_0 e^{-i\alpha}.$$

В соответствии с граничным условием

$$\left. \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=\infty} = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \Big|_{\zeta=\infty} = \frac{a}{2}.$$

Таким образом,

$$\tilde{v}_0 = v \frac{a}{2}. \quad (29.28)$$

Из соотношения (29.26) следует

$$z\zeta = \frac{a}{2}(\zeta^2 + 1) \quad \text{или} \quad \zeta^2 - \frac{2z}{a}\zeta + 1 = 0.$$

Выделим полный квадрат

$$\left(\zeta - \frac{z}{a} \right)^2 + 1 - \frac{z^2}{a^2} = 0,$$

откуда

$$\zeta = \frac{1}{a} \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right). \quad (29.29)$$

Найдем

$$\zeta^{-1} = \frac{a}{z + \sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{a}{z + \sqrt{z^2 - a^2}} \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{z - \sqrt{z^2 - a^2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{a} \left(z - \sqrt{z^2 - a^2} \right). \quad (29.30)$$

Подставив в (29.27), получим

$$w(z) = \frac{a}{2}v^* \frac{1}{a} \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right) + \frac{a}{2}v \frac{1}{a} \left(z - \sqrt{z^2 - a^2} \right) - \\ - i\lambda \ln \left[\frac{1}{a} \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right) \right],$$

т.е.

$$w(z) = \frac{1}{2}v^* \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right) + \frac{1}{2}v \left(z - \sqrt{z^2 - a^2} \right) - \\ - i\lambda \ln \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{2} \right). \quad (29.31)$$

Решение задачи (29.25) определяется как

$$u = \operatorname{Re} w(z).$$

◇ Из полученных соотношений следует, что скорость на концах пластины равна ∞ . Это связано с тем, что жидкость идеальна.

Элементы теории потенциалов

Мы переходим к изучению еще одного метода решения краевых задач, основанного на теории потенциалов. Смысл этого метода заключается в том, что решения краевых задач ищут в виде некоторого специального интегрального представления – в форме потенциалов. Тогда решение этих задач удастся свести к решению интегральных уравнений.

Помимо того, что изучение потенциалов имеет методологическое значение, теория потенциалов представляет и самостоятельную ценность как математический аппарат отдельных разделов физики: электростатики, магнитостатики, гравитации и др.

30. Основные понятия и определения

Запишем формулу (24.2) в эквивалентной форме

$$u(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_E \frac{1}{|\vec{r}|} \Delta u(\vec{y}) d\vec{y} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_E} \frac{1}{|\vec{r}|} \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial \vec{n}_y} dS_y - \frac{1}{4\pi} \int_{S_E} u(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left[\frac{1}{|\vec{r}|} \right] dS_y, \quad (30.1)$$

$$|\vec{r}| = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$

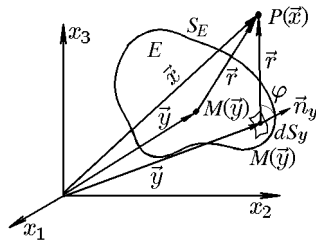


Рис. 50

более удобной для дальнейшей работы (см. рис. 50, где в точке $M(\vec{y}) \in S_E$ строится нормаль \vec{n}_y , внешняя по отношению к области E , а φ – угол между нормалью и вектором $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$). Формула (30.1) является исходной для всей теории потенциалов. Поскольку функция $|\vec{x} - \vec{y}|^{-1}$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, то можно предположить, что она дает явное решение следующей краевой задачи для

уравнения Пуассона:

$$\Delta u = -4\pi\rho(\vec{x}), \quad \vec{x} \in E,$$

с граничными условиями

$$u|_{S_E} = \nu(\vec{x})|_{S_E}, \quad \frac{\partial u}{\partial n_y}|_{S_E} = \mu(\vec{x})|_{S_E}.$$

Однако ранее было установлено (см. разд. «Гармонические функции и их свойства»), что для произвольных функций $\mu(\vec{x})$ и $\nu(\vec{x})$,

определяющих значение функций $u(\vec{x})$ и $\partial u(\vec{x})/\partial n$ на поверхности S_E , невозможно поставить краевую задачу. Поэтому формула (30.1) не выражает решения какой-либо краевой задачи, если функции $\mu(\vec{x})$ и $\nu(\vec{x})$ не удовлетворяют условиям разрешимости. Тем не менее, все три интеграла, входящие в формулу (30.1), имеют важное значение в физических приложениях и носят общее название ньютоновых (кулоновских) потенциалов.

◆ Интеграл

$$\int_E \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y} = \int_E \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{r}|} d\vec{y} = U(\vec{x}) \quad (30.2)$$

называется объемным потенциалом, а функция $\rho(\vec{x})$ – плотностью этого потенциала.

◆ Интеграл

$$\oint_{S_E} \frac{\mu(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS_y = \oint_{S_E} \frac{\mu(\vec{y})}{|\vec{r}|} dS_y = V(\vec{x}) \quad (30.3)$$

называется потенциалом простого слоя с поверхностной плотностью $\mu(\vec{x})$.

◆ Интеграл

$$\oint_{S_E} \nu(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS_y = \oint_{S_E} \nu(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \left[\frac{1}{|\vec{r}|} \right] dS_y = W(\vec{x}) \quad (30.4)$$

называется потенциалом двойного слоя с плотностью $\nu(\vec{x})$.

Интегралы, входящие в соотношения (30.2)–(30.4), обладают общей особенностью: в окрестностях точки $\vec{x} = \vec{y}$ они (в силу неограниченности $|\vec{x} - \vec{y}|^{-1}$) становятся несобственными кратными интегралами (см. приложение «Несобственные интегралы» части I). Для дальнейшей работы нам понадобится понятие равномерной сходимости несобственных интегралов, поскольку равномерно сходящиеся несобственные интегралы можно дифференцировать и интегрировать по параметру.

◆ Интеграл

$$U(\vec{x}) = \int_E f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \quad (30.5)$$

называется равномерно сходящимся в точке $\vec{x} = \vec{x}_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие $\delta(\varepsilon)$ -окрестность точки \vec{x}_0 и область $e(\varepsilon) \in E$, что для непрерывной по \vec{x}, \vec{y} функции $f(\vec{x}, \vec{y})$ для всех \vec{x} и \vec{y} , принадлежащих окрестности $\delta(\varepsilon)$ и ограниченному замкнутому множеству $E \setminus e(\varepsilon)$ соответственно, выполняется неравенство

$$\int_{e(\varepsilon)} |f(\vec{x}, \vec{y})| d\vec{y} \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим некоторые свойства равномерно сходящихся интегралов (30.5).

Лемма 30.1. *Равномерно сходящийся в точке $\vec{x} = \vec{x}_0$ интеграл (30.5) определяет функцию $U(x)$, непрерывную в точке \vec{x}_0 .*

Доказательство. Рассмотрим разность

$$|U(\vec{x}_0) - U(\vec{x})| = \left| \int_E f(\vec{x}_0, \vec{y}) d\vec{y} - \int_E f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \right|. \quad (30.6)$$

Из (30.6) следует неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \int_E f(\vec{x}_0, \vec{y}) d\vec{y} - \int_E f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{E \setminus e(\varepsilon)} f(\vec{x}_0, \vec{y}) d\vec{y} - \int_{E \setminus e(\varepsilon)} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \right| + \\ & + \left| \int_{e(\varepsilon)} f(\vec{x}_0, \vec{y}) d\vec{y} - \int_{e(\varepsilon)} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \right| \leq \\ & \leq \int_{E \setminus e(\varepsilon)} |f(\vec{x}_0, \vec{y}) - f(\vec{x}, \vec{y})| d\vec{y} + \int_{e(\varepsilon)} |f(\vec{x}_0, \vec{y})| d\vec{y} + \int_{e(\varepsilon)} |f(\vec{x}, \vec{y})| d\vec{y}. \end{aligned}$$

Выберем $\delta(\varepsilon)$ и $e(\varepsilon)$ такими, чтобы каждый из двух последних интегралов был меньше $\varepsilon/3$. Для первого интеграла воспользуемся условием непрерывности $f(\vec{x}, \vec{y})$ на ограниченном замкнутом множестве $E \setminus e(\varepsilon)$, которое следует из равномерной сходимости интеграла (30.5). Выберем произвольную точку \vec{x} так, чтобы для всех $\vec{y} \in E \setminus e(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$|f(\vec{x}_0, \vec{y}) - f(\vec{x}, \vec{y})| < \frac{\varepsilon}{3V},$$

где V — объем области $E \setminus e(\varepsilon)$, или

$$\int_{E \setminus e(\varepsilon)} |f(\vec{x}_0, \vec{y}) - f(\vec{x}, \vec{y})| d\vec{y} < \int_{E \setminus e(\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{3V} d\vec{y} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но тогда

$$|U(\vec{x}_0) - U(\vec{x})| < \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что и доказывает лемму.

Понятие равномерной сходимости в точке естественным образом обобщается на область.

◆ Интеграл (30.5), равномерно сходящийся в каждой точке \vec{x} некоторой области E , называется равномерно сходящимся в этой области.

◇ Если в области E можно указать $\delta(\varepsilon)$, одну и ту же для всех точек области, то данное выше определение равномерной сходимости совпадает с использованным ранее в курсе математического анализа.

С учетом этого получаем следующее очевидное обобщение леммы 30.1.

Лемма 30.2. *Интеграл (30.5), равномерно сходящийся в области E , определяет функцию $U(x)$, непрерывную в этой области.*

Рассмотрим интеграл (30.5) с подынтегральной функцией

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha},$$

который в последующем будем использовать как эталон, поскольку для него справедлива

Лемма 30.3. *Интеграл*

$$U(\vec{x}) = \int_E \frac{d\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha} \quad (30.7)$$

при $\alpha < 3$ сходится равномерно в ограниченной области E .

Доказательство. В области E выберем произвольную точку \vec{x}_0 , а в качестве ее $\delta(\varepsilon)$ -окрестности – шар $|\vec{x}_0 - \vec{x}| \leq \delta(\varepsilon)$ и в качестве области $e(\varepsilon)$ – шар $|\vec{x}_0 - \vec{y}| \leq \rho(\varepsilon)$. Если $\delta(\varepsilon) < \rho(\varepsilon)$, то шар $e(\varepsilon)$ целиком располагается в шаре $\tilde{e}(\varepsilon)$: $|\vec{x} - \vec{y}| \leq 2\rho(\varepsilon)$ (см. рис. 51).

Покажем, что для заданного $\varepsilon > 0$ и $\alpha < 3$ можно указать такое $\rho(\varepsilon)$, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{\tilde{e}(\varepsilon)} \frac{d\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha} < \varepsilon. \quad (30.8)$$

Для вычисления интеграла (30.8) перейдем в сферическую систему координат с центром в точке \vec{x} . Тогда

$$\int_{\tilde{e}(\varepsilon)} \frac{d\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\rho} \frac{r^2 dr}{r^\alpha} = \frac{4\pi}{3-\alpha} (2\rho)^{3-\alpha} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для всех

$$\rho(\varepsilon) < \frac{1}{2} \left[\frac{(3-\alpha)\varepsilon}{4\pi} \right]^{1/(3-\alpha)}$$

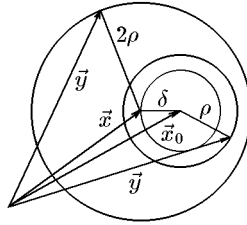


Рис. 51

неравенство (30.8) выполняется, но тогда выполняется и неравенство

$$\int_{e(\varepsilon)} \frac{d\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha} < \varepsilon, \quad e(\varepsilon) \subset \tilde{e}(\varepsilon),$$

что и доказывает равномерную сходимость интеграла (30.7) в E .

Возвратившись к интегралу (30.5), сформулируем для него следующий признак равномерной сходимости.

Теорема 30.1 (достаточный признак равномерной сходимости).

Если функция $f(\vec{x}, \vec{y})$ в ограниченной области E удовлетворяет неравенству

$$|f(\vec{x}, \vec{y})| < \frac{C}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha}, \quad (30.9)$$

где $\alpha < 3$ и C – некоторая постоянная, то интеграл (30.5) равномерно сходится в E .

Доказательство очевидным образом следует из неравенства (30.9) и леммы 30.3.

В заключение приведем еще одно обобщение известной из анализа формулы

$$\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_E f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} = \int_E \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y}, \quad (30.10)$$

справедливой при условии, что последний интеграл в (30.10) является собственным. Оказывается, эта формула остается справедливой и для несобственного интеграла при условии его равномерной сходимости в E .

Действительно, в силу равномерной сходимости интеграла

$$\int_E \frac{\partial}{\partial x_i} [f(\vec{x}, \vec{y})] d\vec{y}$$

на отрезке $[x_i, x_i + \Delta x_i] \in E$ существует интеграл

$$\int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} \left[\int_E \frac{\partial}{\partial x_i} [f(\vec{x}, \vec{y})] d\vec{y} \right] dx_i,$$

допускающий изменение порядка интегрирования

$$\int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} \left[\int_E \frac{\partial}{\partial x_i} [f(\vec{x}, \vec{y})] d\vec{y} \right] dx_i = \int_E \left[\int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} [f(\vec{x}, \vec{y})] dx_i \right] d\vec{y},$$

из которого следует

$$\int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} \left[\int_E \frac{\partial}{\partial x_i} [f(\vec{x}, \vec{y})] d\vec{y} \right] dx_i = U(\vec{x}\{\Delta x_i\}) - U(\vec{x}), \quad (30.11)$$

где $\vec{x}\{\Delta x_i\}$ обозначает вектор \vec{x} , координата x_i которого получила приращение Δx_i и стала равной $x_i + \Delta x_i$. Из (30.11) имеем

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} \left[\int_E \frac{\partial}{\partial x_i} [f(\vec{x}, \vec{y})] d\vec{y} \right] dx_i = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{U(\vec{x}\{\Delta x_i\}) - U(\vec{x})}{\Delta x_i}$$

или

$$\int_E \frac{\partial}{\partial x_i} [f(\vec{x}, \vec{y})] d\vec{y} = \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_E f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y}.$$

◇ Поскольку размерность интегралов не имела существенного значения вплоть до соотношения (30.10), аналогичные обобщения и результаты (будем приводить их по мере необходимости) можно получить не только для интегралов по объемам, но и по плоским и пространственным поверхностям, если последние являются поверхностями Ляпунова.

Ниже мы рассмотрим основные свойства этих потенциалов и их использование в некоторых физических задачах. Предварительно напомним некоторые сведения, связанные с понятиями точечного потенциала и потенциала диполя.

30.1. Точечный потенциал

Рассмотрим материальную точку массой m (или с зарядом e), находящуюся в точке $M(\vec{y})$ (см. рис. 50). По закону всемирного тяготения (или закону Кулона) на массу m' (или заряд e'), помещенную в точку $P(\vec{x})$, действует сила притяжения

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mm'}{|\vec{r}|^3} \vec{r}.$$

Положив $m' = 1$ и выбрав систему единиц, в которой $\gamma = 1$, получим

$$\vec{F} = -\frac{m}{|\vec{r}|^3} \vec{r}. \quad (30.12)$$

Вектор силы \vec{F} , направленный от точки $P(\vec{x})$ к точке $M(\vec{y})$, образует с координатными осями Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 углы, косинусы которых равны

$$\cos \alpha = -\frac{x_1 - y_1}{|\vec{r}|^2}, \quad \cos \beta = -\frac{x_2 - y_2}{|\vec{r}|^2}, \quad \cos \gamma = -\frac{x_3 - y_3}{|\vec{r}|^2}. \quad (30.13)$$

Соответственно проекции силы \vec{F} на координатные оси будут

$$\begin{aligned}
F_1 &= |\vec{F}| \cos \alpha = -\frac{m}{|\vec{r}|^3}(x_1 - y_1), \\
F_2 &= |\vec{F}| \cos \beta = -\frac{m}{|\vec{r}|^3}(x_2 - y_2), \\
F_3 &= |\vec{F}| \cos \gamma = -\frac{m}{|\vec{r}|^3}(x_3 - y_3).
\end{aligned} \tag{30.14}$$

Все три выражения (30.14) являются производными по координатам $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ от одной и той же скалярной функции

$$u(\vec{r}) = \frac{m}{|\vec{r}|} = \frac{m}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \tag{30.15}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m}{|\vec{r}|} \right) = \\
&= -\frac{m}{|\vec{r}|^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} = \\
&= -\frac{m}{|\vec{r}|^3}(x_1 - y_1)
\end{aligned}$$

и аналогично

$$F_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{m}{|\vec{r}|^3}(x_2 - y_2), \quad F_3 = \frac{\partial u}{\partial x_3} = -\frac{m}{|\vec{r}|^3}(x_3 - y_3).$$

Таким образом, силу притяжения \vec{F} (30.12), которая является вектором, можно определить через одну скалярную функцию $u(\vec{r})$ (30.15):

$$\vec{F} = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial x_3} = \nabla_x u = m \nabla_x \frac{1}{|\vec{r}|}. \tag{30.16}$$

◆ Скалярную функцию $u(\vec{r})$, определяемую равенством

$$\vec{F}(\vec{r}) = \nabla_x u(\vec{r}), \tag{30.17}$$

называют потенциалом силового поля $\vec{F}(\vec{r})$.

◇ Формула (30.15) определяет потенциал силового поля в точке $P(\vec{x})$, создаваемого массой m , расположенной в точке $M(\vec{y})$.

Чтобы выяснить физический смысл потенциала $u(\vec{r})$, найдем работу A , которую производит сила $\vec{F}(\vec{x})$ по перемещению единичной массы из точки $P'(\vec{x}')$ в точку $P(\vec{x})$. Учтя, что

$$\vec{r}' = |\vec{x}' - \vec{y}| = \sqrt{(x'_1 - y_1)^2 + (x'_2 - y_2)^2 + (x'_3 - y_3)^2},$$

согласно (30.17), находим

$$A = \int_{P'}^P (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_{P'}^P du = u(P) - u(P') = m \left(\frac{1}{|\vec{r}|} - \frac{1}{|\vec{r}'|} \right). \tag{30.18}$$

Это означает, что работа силы \vec{F} зависит лишь от положения начальной $P'(\vec{x}')$ и конечной $P(\vec{x})$ точек перемещения, но не зависит от пути, по которому проводилось это перемещение.

При $|\vec{r}| < |\vec{r}'|$ работа (30.18) положительна. При $|\vec{r}'| \rightarrow \infty$

$$A = u(\vec{r}) = \frac{m}{|\vec{r}|} = \frac{m}{|\vec{x} - \vec{y}|}.$$

Из сравнения с формулой (30.15) следует, что потенциал в точке $P(\vec{x})$ имеет смысл положительной работы, которую производит силовое поле, создаваемое точечной массой, расположенной в точке $M(\vec{y})$, при перемещении единичной массы из бесконечности в точку $P(\vec{x})$. Это соответствует потенциальной энергии системы материальных точек $M(\vec{y})$ и $P(\vec{x})$, взятой с обратным знаком.

Сказанное выше естественным образом обобщается на область электромагнитных явлений. Тогда в случае притяжения, как и при тяготении, пользуются равенством (30.17). В случае отталкивания полагают

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla_x u(\vec{x}),$$

так что потенциал совпадает с потенциальной энергией системы.

Следует отметить, что потенциал точечной массы (30.15) с точностью до постоянного множителя совпадает с фундаментальным решением уравнения Лапласа $\mathcal{E}_3(\vec{x}, \vec{y})$ (23.15):

$$u(\vec{r}) = u(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{m}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -4\pi m \mathcal{E}_3(\vec{x}, \vec{y}),$$

т.е. точечный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона с дельта-тообразной плотностью $m\delta(\vec{x} - \vec{y})$:

$$\Delta_x u(\vec{x}, \vec{y}) = \Delta_x \left(\frac{m}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) = -4\pi m \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (30.19)$$

Вне точки $\vec{x} = \vec{y}$ он удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta_x u(\vec{x}, \vec{y}) = \Delta_x \left(\frac{m}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) = 0, \quad (30.20)$$

т.е. является гармонической функцией.

30.2. Объемный потенциал

Рассмотрим тело E с плотностью $\rho(\vec{y})$ и определим потенциал, создаваемый им в точке $P(\vec{x})$ (см. рис. 50). Для этого разобьем весь объем E на малые элементы $d\vec{y} = dy_1 dy_2 dy_3$ и заменим влияние массы $\rho d\vec{y}$ влиянием равной массы, сосредоточенной в точке $M(\vec{y})$. Тогда для вектора силы $d\vec{F}$, действующей на единичную массу, помещенную в точку $P(\vec{x})$, получим следующее выражение:

$$dF_i = -\frac{\rho dy_i}{|\vec{r}|^3} (x_i - y_i) = \rho dy \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right).$$

Интегрирование по всему объему E дает выражение для полной силы

$$F_i = \int_E \rho(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y}, \quad i = 1, 2, 3,$$

или в векторной форме

$$\vec{F} = \int_E \rho(\vec{y}) \nabla_x \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y}. \quad (30.21)$$

Интегралы (30.21) от непрерывной ограниченной функции $\rho(\vec{y})$ являются собственными для $\vec{x} \notin E$ и несобственными, но равномерно сходящимися для $\vec{x} \in E$ в силу теоремы 30.1 и выполнения неравенства

$$\left| \rho(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \right| = |\rho(\vec{y})| \frac{|x_i - y_i|}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} < \frac{C}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}.$$

Таким образом, независимо от того, принадлежит точка \vec{x} области E или нет, операцию дифференцирования по x_i можно вынести за знак интеграла и записать (30.21) в виде

$$\vec{F} = \int_E \rho(\vec{y}) \nabla_x \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y} = \nabla_x \int_E \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y} = \nabla_x U(\vec{x}), \quad (30.22)$$

где

$$U(\vec{x}) = \int_E \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y} \quad (30.23)$$

– объемный потенциал силового поля (30.21), создаваемого массой с плотностью $\rho(\vec{y})$, заключенной в объеме E .

Сравнение (30.23) и (30.15) говорит о том, что точечный потенциал (30.15) можно рассматривать как частный случай объемного (30.23), если $\rho(\vec{y}) = m\delta(\vec{y} - \vec{y}')$. Основные свойства объемного потенциала будут рассмотрены ниже. Отметим лишь, что объемный потенциал, в отличие от точечного, никогда не обращается в бесконечность, даже когда точка $P(\vec{x})$ лежит внутри области E , так что

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \rightarrow \infty$$

в силу равномерной сходимости (30.23) в E согласно теореме 30.1.

30.3. Потенциал простого слоя

Предположим теперь, что действующая масса сосредоточена на границе S_E в виде слоя незначительной толщины Δh (рис. 52,а).

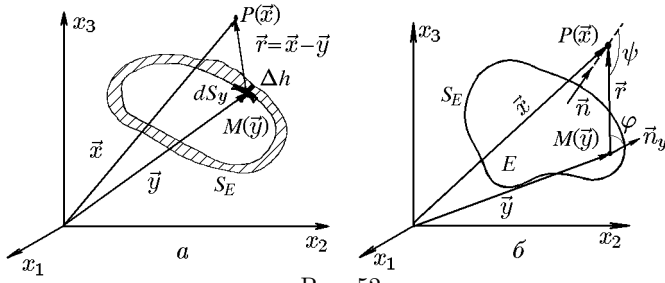


Рис. 52

Пусть dS_y – элемент поверхности этого слоя. Тогда с точностью до бесконечно малых высших порядков $d\vec{y} = dy_1 dy_2 dy_3 = \Delta h dS_y$. В таком предположении объемный потенциал (30.23) превращается в интеграл по поверхности S_E

$$V(\vec{x}) = \oint_{S_E} \frac{\rho(\vec{y}) \Delta h}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS_y.$$

Объемную плотность $\rho(\vec{y})$ в точке $M(\vec{y})$ можно рассматривать как массу, содержащуюся в элементе объема, т.е. $\rho(\vec{y}) = \Delta m / (\Delta h \Delta S_y)$. Тогда произведение $\rho(\vec{y}) \Delta h = \Delta m / \Delta S_y = \mu(\vec{y})$ имеет смысл поверхностной плотности. С помощью поверхностной плотности $\mu(\vec{y})$ потенциал простого слоя запишется в виде

$$V(\vec{x}) = \oint_{S_E} \frac{\mu(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS_y. \quad (30.24)$$

Формулу (30.24) для простого слоя можно получить из формулы объемного потенциала (30.23) в предположении, что

$$\rho(\vec{y}) = \mu(\vec{y}) \delta_{S_E}. \quad (30.25)$$

Здесь $\mu(\vec{y})$ – поверхностная плотность, а δ_{S_E} – поверхностная дельта-функция, действующая по правилу (см. разд. «Основные и обобщенные функции» части II)

$$\langle \mu \delta_{S_E} | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\vec{x}) \delta_{S_E} \varphi(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{S_E} \mu(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) dS_x, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $\varphi(\vec{x})$ – произвольная основная функция, т.е. $\varphi(\vec{x}) \in D(\mathbb{R}^n)$.

Так же как и для объемного потенциала $V(\vec{x})$, исследуем возможность дифференцирования интеграла (30.24). Очевидно, что если $\vec{x} \notin S_E$, то

$$\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \oint_{S_E} \frac{\mu(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS_y = \oint_{S_E} \frac{(y_i - x_i)\mu(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} dS_y.$$

Если из точки $\vec{x} \notin S_E$ восстановить нормаль \vec{n} к поверхности S_E , то дифференцирование по направлению \vec{n} дает

$$\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial n} = \oint_{S_E} \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{n}, x_i) \frac{y_i - x_i}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \mu(\vec{y}) dS_y = \oint_{S_E} \frac{\cos \psi}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \mu(\vec{y}) dS_y,$$

где ψ – угол между векторами \vec{n} и $\vec{y} - \vec{x}$ (или между \vec{n} и $-\vec{r}$, см. рис. 52,б).

30.4. Потенциал диполя и двойного слоя

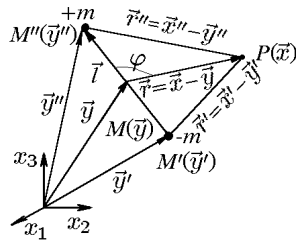


Рис. 53

Понятие потенциала двойного слоя наиболее органично вытекает из рассмотрения магнитных полей, источниками которых являются магнитные диполи. Магнитный диполь схематично можно представить в виде бесконечно малой и тонкой иглы (магнитной стрелки), на концах которой сосредоточены равные по величине и противоположные по знаку «количества магнетизма». Чтобы избежать введения новых обозначений, вместо магнитного диполя рассмотрим математически эквивалентную задачу, а именно, диполь, образованный двумя массами $-m$ и $+m$, расположенными в точках $M'(\vec{y}')$ и $M''(\vec{y}'')$ соответственно на расстоянии $l = |\vec{l}| = |\vec{y}'' - \vec{y}'|$ (рис. 53, вектор \vec{l} направлен от отрицательного полюса $-m$ к положительному $+m$).

Потенциал диполя w в точке $P(\vec{x})$, согласно (30.15), равен

$$w = \frac{m}{|\vec{r}''|} - \frac{m}{|\vec{r}'|} = m \left(\frac{1}{|\vec{r}''|} - \frac{1}{|\vec{r}'|} \right). \quad (30.26)$$

Обозначив через φ угол между вектором $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$, проведенным из середины диполя к точке $P(\vec{x})$, и вектором \vec{l} , можем записать

$$|\vec{r}''| = |\vec{r}| + |\vec{r}|l \cos \varphi + \frac{l^2}{4},$$

$$|\vec{r}'| = |\vec{r}| - |\vec{r}|l \cos \varphi + \frac{l^2}{4}.$$

Отсюда, пренебрегая величинами порядка $l^2/|\vec{r}|^3$ и выше, имеем

$$\frac{1}{|\vec{r}'\nu|} = \frac{1}{|\vec{r}'|} \left(1 + \frac{l}{2|\vec{r}'|} \cos \varphi\right),$$

$$\frac{1}{|\vec{r}'\nu|} = \frac{1}{|\vec{r}'|} \left(1 - \frac{l}{2|\vec{r}'|} \cos \varphi\right),$$

и, следовательно,

$$w = \frac{ml}{|\vec{r}|^2} \cos \varphi.$$

Допустим теперь, что при $l \rightarrow 0$ произведение ml стремится к конечному пределу ν , называемому моментом диполя. Тогда в пределе получим

$$w = \frac{\nu}{|\vec{r}|^2} \cos \varphi. \quad (30.27)$$

С учетом того, что

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{r}, \vec{l})}{|\vec{r}|},$$

потенциал диполя (30.27) можно записать через производную по направлению \vec{l} :

$$w = \frac{\nu}{|\vec{r}|^2} \frac{(\vec{r}, \vec{l})}{|\vec{r}|} = \nu \left(\nabla_y \frac{1}{|\vec{r}|}, \vec{l} \right) = \nu \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right). \quad (30.28)$$

Формула (30.28) допускает обобщение, которое и приводит к понятию двойного слоя. Допустим, что двусторонняя поверхность S_E покрыта слоем диполей, оси которых в каждой точке $M(\vec{y})$ ориентированы по нормальным \vec{n} к S_E , направленным от отталкивающих масс к притягивающим (рис. 54). Потенциал такого слоя диполей носит название потенциала двойного слоя и определяется формулой (30.4). Для ее получения обозначим через $\nu(\vec{y})$ плотность дипольного момента, т.е. его значение, отнесенное к площади поверхности, называемую еще плотностью двойного слоя. Тогда для потенциала двойного слоя с учетом (30.27), (30.28) получаем следующие выражения:

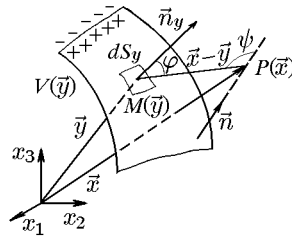


Рис. 54

$$W(\vec{x}) = \int_{S_E} \nu(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y = \int_{S_E} \nu(\vec{y}) \frac{\cos \varphi}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS_y, \quad (30.29)$$

где φ – угол между векторами \vec{n}_y и $\vec{x} - \vec{y}$ (см. рис. 54). Формулу (30.29) можно получить из выражения для объемного потенциала (30.23), если распределение плотности записать с помощью обобщенной функции

$$\rho = -\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_{S_E}).$$

Эта функция определяется соотношением

$$\left\langle -\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_{S_E}) \middle| \varphi(\vec{x}) \right\rangle = \int_{S_E} \nu(\vec{x}) \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial n} dS, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(\vec{x}) \in D(\mathbb{R}^n)$$

и описывает плотность зарядов, соответствующих распределению диполей на поверхности S_E , ориентированных вдоль заданного направления нормали \vec{n} на S_E и создающих дипольный момент с поверхностной плотностью $\nu(\vec{x})$.

Таким образом, рассмотренные выше потенциалы представляют собой потенциалы, создаваемые массами или зарядами с различными распределениями в пространстве. В частности, непрерывное распределение масс или зарядов создает объемный потенциал; если массы или заряды сосредоточены на поверхности, то они создают потенциал простого слоя; если же на поверхности сосредоточены диполи, то создаваемый ими потенциал есть потенциал двойного слоя.

Отметим, что, несмотря на существенные различия, все потенциалы обладают одним общим свойством, которое мы сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 30.4. Пусть функции $\rho(\vec{x})$, $\mu(\vec{x})$, $\nu(\vec{x})$ сосредоточены в области E или на поверхности S_E . Тогда вне области \bar{E} или поверхности S_E потенциалы (30.2)–(30.4) удовлетворяют уравнению Лапласа.

Доказательство. Потенциалы (30.2)–(30.4) зависят только от расстояния между точками $P(\vec{x})$ и $M(\vec{y})$, т.е. от модуля

$$|\vec{y} - \vec{x}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}.$$

Причем для всех точек $P(\vec{x})$, лежащих вне области \bar{E} , выполняется неравенство $|\vec{y} - \vec{x}| \neq 0$. Оно означает, что интегралы (30.2)–(30.4), определяющие потенциалы, – непрерывные и ограниченные функции параметра \vec{x} . Аналогичное утверждение справедливо и для производных $\partial u / \partial x_i$, $\partial^2 u / \partial x_i^2$, явный вид которых можно найти непосредственным дифференцированием подынтегральных выражений (30.2)–(30.4) по параметрам x_i . Учитывая, что

$$\Delta_x \left(\frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|} \right) = 0, \quad (30.30)$$

для потенциала объемных масс и потенциала простого слоя найдем

$$\begin{aligned}\Delta_x U(\vec{x}) &= \Delta_x \int_E \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y} = \int_E \Delta_x \left(\frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|} \right) \rho(\vec{y}) d\vec{y} = 0, \\ \Delta_x V(\vec{x}) &= \Delta_x \int_{S_E} \frac{\mu(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} dS_y = \int_{S_E} \Delta_x \left(\frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|} \right) \mu(\vec{y}) dS_y = 0.\end{aligned}\tag{30.31}$$

Для потенциала двойного слоя помимо (30.30) следует принять во внимание, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial n_y} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|} \right) \right].\tag{30.32}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta_x W(\vec{x}) &= \Delta_x \int_{S_E} \nu(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|} \right) dS_y = \\ &= \int_{S_E} \nu(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \left[\Delta_x \left(\frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|} \right) \right] dS_y = 0,\end{aligned}\tag{30.33}$$

что и требовалось доказать.

30.5. Эквипотенциальные поверхности

Рассмотрим уравнение

$$U(\vec{x}) = C = \text{const},\tag{30.34}$$

где $U(\vec{x})$ – некоторый потенциал, градиент которого, согласно (30.13), определяет силу, действующую на единичную массу. Уравнение (30.34), как известно, задает поверхность уровня функции $U(\vec{x})$ независимых переменных $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$.

◆ Поверхность уровня (30.34) для потенциала $U(\vec{x})$ называется эквипотенциальной поверхностью.

Производная от потенциала $U(\vec{x})$ по положительной нормали $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ к некоторой поверхности S запишется в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial n} &= (\vec{n}, \nabla_x U) = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial x_2} \cos \beta + \\ &+ \frac{\partial U}{\partial x_3} \cos \gamma = (\vec{F}, \vec{n}) = F_n.\end{aligned}\tag{30.35}$$

Выберем здесь в качестве поверхности S эквипотенциальную. Тогда для направляющих косинусов нормали \vec{n} к такой поверхности

запишем

$$\cos \alpha = \frac{1}{|\vec{F}|} \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad \cos \beta = \frac{1}{|\vec{F}|} \frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{|\vec{F}|} \frac{\partial U}{\partial x_3}, \quad (30.36)$$

где

$$|\vec{F}| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2}. \quad (30.37)$$

Тогда, подставив (30.36) и (30.37) в (30.35), получим

$$\frac{\partial U}{\partial n} = F_n = \pm \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2}{|\vec{F}|} = \pm |\vec{F}|. \quad (30.38)$$

В формуле (30.38) знак «+» выбирается в случае $\partial U / \partial n > 0$, а знак «-» в случае $\partial U / \partial n < 0$ для выбранного направления \vec{n} . Кроме того, из формулы (30.38) следует, что в каждой точке эквипотенциальной поверхности ее вектор-градиент \vec{F} направлен по нормали к ней в сторону возрастания потенциала $U(\vec{x})$. Проекция вектора \vec{F} на произвольное направление \vec{l} имеет следующее значение:

$$F_l = (\vec{F}, \vec{l}) = \frac{\partial U}{\partial n} \cos(\vec{n}, \vec{l}), \quad (30.39)$$

из которого следует, что потенциал $U(\vec{x})$ изменяется сильнее всего в направлении нормали к эквипотенциальной поверхности [когда $\cos(\vec{n}, \vec{l}) = 1$] и совсем не изменяется в любом направлении, лежащем в касательной плоскости к ней [когда $\cos(\vec{n}, \vec{l}) = 0$].

Для характеристики всего семейства эквипотенциальных поверхностей (30.34) в целом рассмотрим две эквипотенциальные поверхности:

$$S_1 : U(\vec{x}) = C \quad \text{и} \quad S_2 : U(\vec{x}) = C + \Delta C.$$

Выбрав точку M_1 на эквипотенциальной поверхности S_1 и обозначив через Δn расстояние (по нормали к S_1) от точки M_1 до точки M_2 , лежащей на эквипотенциальной поверхности S_2 , с точностью до бесконечно малых высших порядков найдем

$$\Delta C = \frac{\partial U}{\partial n} \Delta n = F_n \Delta n,$$

откуда

$$\Delta n = \frac{\Delta C}{F_n} = \pm \frac{\Delta C}{|\vec{F}|}. \quad (30.40)$$

Из формулы (30.40) следует, что эквипотенциальные поверхности при заданном ΔC располагаются в пространстве более плотно в тех

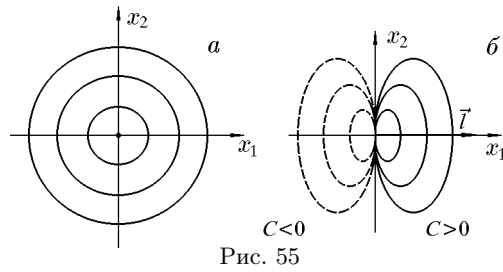


Рис. 55

точках, в которых величина $|\vec{F}|$ (т.е. градиент потенциала) наибольшая.

На рис. 55 изображены эквипотенциальные поверхности единичного точечного заряда (а) и диполя с моментом $+1$ (б), расположенных в начале координат.

31. Свойства объемного потенциала

Рассмотрим теперь более подробно объемный потенциал (30.23), основные свойства которого достаточно наглядно можно проиллюстрировать рядом конкретных примеров.

Пример 31.1. Найти объемный потенциал шара радиуса R со сферически-симметричной плотностью $\rho = \rho(r_M)$ — так называемой ньютоновой сферы, где $r_M = |\vec{r}_M|$ — расстояние от точки $M(\vec{r}_M)$ до центра шара S_R . Исследовать поведение первых и вторых производных потенциала.

Решение. Выберем систему координат (x_1, x_2, x_3) , центр которой совпадает с центром шара (рис. 56). Обозначим для удобства вектор \vec{x} через \vec{r}_P , а \vec{y} через \vec{r}_M , где \vec{r}_P и \vec{r}_M — радиус-векторы точек P и M соответственно. Согласно условию задачи, $\rho(\vec{r}_M) = \rho(r_M)$, где $r_M = |\vec{r}_M|$. Тогда для потенциала, создаваемого в точке $P(\vec{r}_P)$ массой, сферически-симметрично распределенной по шару, согласно (30.23), получим

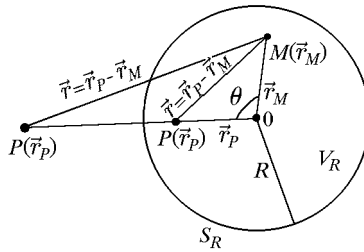


Рис. 56

$$U(r_P) = \int_{r_M < R} \frac{\rho(r_M)}{|\vec{r}|} d\vec{r}_M, \quad (31.1)$$

где $\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_M$ и интегрирование ведется по всему объему шара $r_M < R$.

Перейдем в интеграле (31.1) в сферическую систему координат. Тогда

$$U(r_P) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho(r_M) r_M^2 dr_M \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|}.$$

С учетом соотношения

$$|\vec{r}| = |\vec{r}_P - \vec{r}_M| = r_P^2 + r_M^2 - 2r_P r_M \cos \theta$$

и замены переменных $\cos \theta = t$ получим

$$U(r_P) = 2\pi \int_0^R \rho(r_M) r_M^2 dr_M \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{r_P^2 + r_M^2 - 2r_P r_M t}}. \quad (31.2)$$

Обозначим через I внутренний интеграл в (31.2) и найдем его значение в зависимости от соотношения радиусов r_P и r_M :

$$\begin{aligned} I(r_P, r_M) &= \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{r_P^2 + r_M^2 - 2r_P r_M t}} = \\ &= -\frac{1}{r_P r_M} \left[\sqrt{r_P^2 + r_M^2 - 2r_P r_M} - \sqrt{r_P^2 + r_M^2 + 2r_P r_M} \right] = \\ &= -\frac{1}{r_P r_M} [|r_P - r_M| - |r_P + r_M|] = \begin{cases} 2/r_P, & r_P > r_M; \\ 2/r_M, & r_P < r_M. \end{cases} \end{aligned} \quad (31.3)$$

В силу неоднозначности интеграла (31.3) для дальнейшего вычисления (31.2) следует различать два случая:

I. $r_P > R$. Здесь r_P заведомо больше r_M и, следовательно,

$$U(r_P) = \frac{4\pi}{r_P} \int_0^R \rho(r_M) r_M^2 dr_M. \quad (31.4)$$

Поскольку масса вещества m_0 , заключенного внутри сферы S_R , определяется интегралом

$$m_0 = 4\pi \int_0^R \rho(r_M) r_M^2 dr_M, \quad (31.5)$$

потенциал (31.4) можно записать в виде

$$U(r_P) = m_0/r_P. \quad (31.6)$$

Это означает, что для внешних точек P ($r_P > R$) потенциал ньютоновой сферы S_R эквивалентен точечному потенциалу, создаваемому массой m_0 , расположенной в центре шара.

II. $r_P < R$. В этом случае интервал интегрирования $]0, R[$ следует разбить на два: $]0, r_P[$ и $]r_P, R[$, т.е.

$$\begin{aligned} U(r_P) &= 2\pi \int_0^R \rho(r_M) r_M^2 I(r_P, r_M) dr_M = \\ &= 2\pi \int_0^{r_P} \rho(r_M) r_M^2 I(r_P, r_M) dr_M + \\ &+ 2\pi \int_{r_P}^R \rho(r_M) r_M^2 I(r_P, r_M) dr_M. \end{aligned} \quad (31.7)$$

В первом интеграле (31.7) $r_P > r_M$, а во втором $r_P < r_M$. Поэтому, согласно (31.3), имеем

$$U(r_P) = \frac{4\pi}{r_P} \int_0^{r_P} \rho(r_M) r_M^2 dr_M + 4\pi \int_{r_P}^R \rho(r_M) r_M dr_M. \quad (31.8)$$

Рассмотрим два предельных случая формулы (31.8): а) $r_P = R$ и б) $r_P = 0$.

а) Поскольку $r_P = R$, из (31.8) следует

$$U(R) = \frac{4\pi}{r_P} \int_0^R \rho(r_M) r_M^2 dr_M = \frac{4\pi m_0}{R}. \quad (31.9)$$

Но такое же выражение дает и формула (31.6) при $r_P = R$. Отсюда следует важный вывод о том, что потенциал ньютоновой сферы является непрерывной функцией r_P и не имеет разрыва при переходе через границу сферы S_R во внешнее пространство.

б) При $r_P = 0$

$$U(0) = 4\pi \int_0^R \rho(r_M) r_M dr_M, \quad (31.10)$$

так как раскрытие неопределенности вида $(0/0)$ в первом интеграле (31.8) дает

$$\lim_{r_P \rightarrow 0} \frac{4\pi \int_0^{r_P} \rho(r_M) r_M^2 dr_M}{r_P} = \lim_{r_P \rightarrow 0} \frac{4\pi \rho(r_P) r_P^2}{1} = 0.$$

Согласно (31.6) и (31.8), как вне ньютоновой сферы, так и внутри нее эквипотенциальными поверхностями являются концентрические сферы, поскольку при $r_P = \text{const}$ имеем $U = \text{const}$.

При исследовании производных будем исходить из сферической симметрии эквипотенциальных поверхностей. Последнее означает, что введенная ранее сила притяжения, действующая на единицу массы, в точке $P(\vec{r}_P)$ всегда направлена от этой точки к центру сферы и может быть найдена как производная от потенциала по внешней нормали к эквипотенциальной поверхности или как производная по r_P , т.е.

$$|\vec{F}(r_P)| = -\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} = -\frac{\partial U}{\partial r_P}. \quad (31.11)$$

Из формулы (31.11) для потенциала в точке $P(\vec{r}_P)$, расположенной вне сферы S_R , имеем

$$|\vec{F}(r_P)| = -\frac{\partial U}{\partial r_P} = -\frac{m_0}{r_P^2}, \quad (31.12)$$

а для потенциала в точке $P(\vec{r}_P)$, расположенной внутри сферы S_R ,

$$\begin{aligned} |\vec{F}(r_P)| &= -\frac{\partial U}{\partial r_P} = \\ &= -\left[-\frac{4\pi}{r_P^2} \int_0^{r_P} \rho(r_M) r_M^2 dr_M + \frac{4\pi}{r_P} \rho(r_P) r_P^2 - 4\pi \rho(r_P) r_P \right] = \\ &= \frac{4\pi}{r_P^2} \int_0^{r_P} \rho(r_M) r_M^2 dr_M. \end{aligned} \quad (31.13)$$

Поскольку масса вещества $m(r_P)$, заключенная внутри сферы радиуса r_P , определяется интегралом

$$m(r_P) = 4\pi \int_0^{r_P} \rho(r_M) r_M^2 dr_M, \quad (31.14)$$

выражение (31.13) можно представить в виде

$$|\vec{F}(r_P)| = m(r_P)/r_P^2. \quad (31.15)$$

Из формул (31.12) и (31.15) следуют два важных утверждения. Во-первых, сила притяжения, т.е. первая производная потенциала U , как и сам потенциал, является непрерывной функцией от r_P и не имеет разрыва на границе ньютоновой сферы S_R при переходе из ее внутренней части во внешнюю, поскольку функция $m(r_P)$ непрерывна. Во-вторых, на внутреннюю точку $P(r_P)$, согласно (31.15),

действует сила притяжения только тех масс, которые расположены внутри сферы с радиусом r_P . Внешние слои, лежащие на расстоянии больше r_P вплоть до R , как бы уравнивают свое воздействие на эту точку и не притягивают ее вовсе. В пределе $r_P \rightarrow 0$, т.е. в центре сферы, $|\vec{F}(0)| = 0$.

◇ Интересный результат следует из (31.15), если считать плотность $\rho(r_M)$ постоянной. Действительно, положив в (31.15) $\rho(r_M) = \rho_0$, получим (см. пример 31.2 и рис. 57,з)

$$|\vec{F}(r_P)| = \frac{4\pi\rho_0}{3}r_P, \quad (31.16)$$

так что внутри однородной сферы сила притяжения увеличивается пропорционально расстоянию, т.е. ведет себя как квазиупругая сила.

Перейдем теперь к рассмотрению вторых производных. Так как $\vec{r}_P = (x_1, x_2, x_3)$, то

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial r_P} \frac{\partial r_P}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r_P} \frac{\partial U}{\partial r_P}, \quad i = 1, 2, 3$$

и

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = \left(\frac{x_i}{r_P}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r_P^2} + \left(\frac{1}{r_P} - \frac{x_i^2}{r_P^3}\right) \frac{\partial U}{\partial r_P}, \quad i = 1, 2, 3,$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta U &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_P^2} + \left(\frac{3}{r_P} - \frac{1}{r_P}\right) \frac{\partial U}{\partial r_P} = \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial r_P^2} + \frac{2}{r_P} \frac{\partial U}{\partial r_P}. \end{aligned} \quad (31.17)$$

Воспользовавшись теперь формулами (31.6) и (31.8), из (31.13) для внутренних точек сферы ($r_P < R$) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial r_P^2} &= \frac{\partial}{\partial r_P} \left(\frac{\partial U}{\partial r_P} \right) = \frac{8\pi}{r_P^3} \int_0^{r_P} \rho(r_M) r_M^2 dr_M - 4\pi\rho(r_P) = \\ &= -\frac{2}{r_P} \frac{\partial U}{\partial r_P} - 4\pi\rho(r_P). \end{aligned} \quad (31.18)$$

Подставив (31.18) в (31.17), получим, что потенциал $U(r_P)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\Delta U(r_P) = -4\pi\rho(r_P). \quad (31.19)$$

Для внешних точек сферы ($r_P > R$) вместо (31.18) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial r_P} = -\frac{m}{r_P^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r_P^2} = \frac{2m}{r_P^3}. \quad (31.20)$$

Подставив (31.20) в (31.17), получим уравнение

$$\Delta U(r_P) = 0. \quad (31.21)$$

Таким образом, потенциал ньютоновой сферы во внутренних точках $r_P < R$ удовлетворяет уравнению Пуассона (31.19), в во внешних точках $r_P > R$ – уравнению Лапласа. Сравнение (31.19) с (31.21) с учетом (31.17) и непрерывности первой производной по r_P приводит в выводу о разрывности второй производной потенциала, испытывающей скачок величиной $4\pi\rho(R)$ при переходе из внутренней области сферы во внешнюю.

Пример 31.2. Найти объемный потенциал шара радиусом R с постоянной плотностью (см. рис. 57,а)

$$\rho(r_M) = \begin{cases} \rho_0, & r_M \leq R; \\ 0, & r_M > R. \end{cases} \quad (31.22)$$

Исследовать поведение первых и вторых производных потенциала.

Решение. Воспользовавшись результатами предыдущего примера, из (31.5) и (31.14) получим (см. рис. 57,б)

$$m(r_P) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\rho_0 r_P^3, & r_P < R; \\ \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3, & r_P > R. \end{cases} = \begin{cases} m_0 \frac{r_P^3}{R^3}, & r_P < R; \\ m_0, & r_P > R. \end{cases}$$

Отсюда, согласно (30.29) и (31.2), следует (см. рис. 57,в)

$$U(r_P) = \begin{cases} 4\pi\rho_0 \left[\frac{1}{r_P} \int_0^{r_P} r_M^2 dr_M + \int_{r_P}^R r_M dr_M \right] \\ \frac{4\pi\rho_0}{r_P} \int_0^R r_M^2 dr_M \\ 2\pi\rho_0 \left(R^2 - \frac{r_P^2}{3} \right), & r_P < R; \\ \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3r_P}, & r_P > R. \end{cases} = \quad (31.23)$$

Из (31.23), в свою очередь, имеем (см. рис. 57,г)

$$|\vec{F}(r_P)| = -\frac{\partial U(r_P)}{\partial r_P} = \begin{cases} \frac{4\pi\rho_0 r_P}{3} \\ \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3r_P^2} \end{cases} = \begin{cases} m_0 \frac{r_P}{R^3}, & r_P < R; \\ \frac{m_0}{r_P^2}, & r_P > R. \end{cases} \quad (31.24)$$

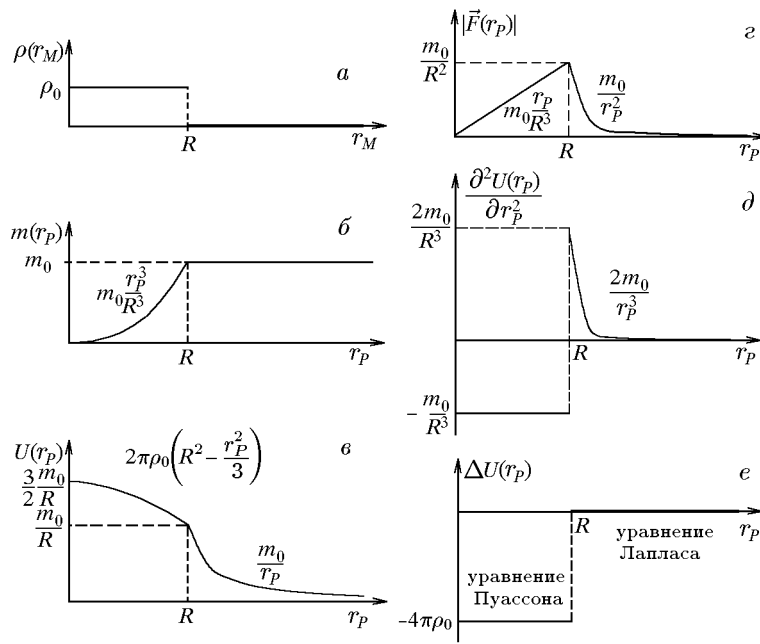


Рис. 57

И, наконец, из (31.19) и (31.21) получим (см. рис. 57,е)

$$\begin{aligned} \Delta U(r_P) &= \frac{1}{r_P^2} \frac{\partial}{\partial r_P} \left(r_P^2 \frac{\partial U(r_P)}{\partial r_P} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 U(r_P)}{\partial r_P^2} + \frac{2}{r_P} \frac{\partial U(r_P)}{\partial r_P} = \begin{cases} -4\pi\rho_0, & r_P < R; \\ 0, & r_P > R. \end{cases} \quad (31.25) \end{aligned}$$

Решение примера наглядно иллюстрируют графики, приведенные на рис. 57.

Покажем, что эти свойства объемного потенциала, создаваемого шаром со сферически-симметричной плотностью, справедливы и для потенциалов с плотностью $\rho(\vec{y})$ общего вида. При рассмотрении, если это не оговаривается особо, будем предполагать $\rho(\vec{y})$ ограниченной в некоторой области E и равной нулю вне ее, т.е.

$$\rho(\vec{y}) = \begin{cases} |\rho(\vec{y})| < C, & \vec{y} \in E; \\ 0, & \vec{y} \notin E. \end{cases} \quad (31.26)$$

Свойство 1. Объемный потенциал $U(\vec{x})$ и его частные производные $\partial U(\vec{x})/\partial x_i$ являются непрерывными и ограниченными функциями во всем пространстве \mathbb{R}^3 , причем

$$F_i(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} U(\vec{x}) = - \int_E \frac{\rho(\vec{y})(x_i - y_i)}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} d\vec{y}. \quad (31.27)$$

Действительно, в области $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{E}$ справедливость этого свойства вытекает из леммы 30.4, а в области E , как показано выше, потенциал $U(\vec{x})$ и его производные $\partial U(\vec{x})/\partial x_i$ связаны соотношением (30.22) и являются равномерно сходящимися в E и, следовательно, непрерывными и ограниченными функциями.

Свойство 2. В области $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{E}$ объемный потенциал является регулярной гармонической функцией.

Действительно, согласно лемме 30.4, функция $U(\vec{x})$ в области $\mathbb{R}^3 \setminus E$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Покажем, что наряду с этим имеет место асимптотическая оценка

$$U(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) \quad \text{при} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (31.28)$$

Домножив и разделив на $|\vec{x}|$ правую часть (30.23), получим

$$U(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} \int_E \frac{|\vec{x}|}{|\vec{x} - \vec{y}|} \rho(\vec{y}) d\vec{y}.$$

Приняв во внимание, что

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \frac{|\vec{x}|}{|\vec{x} - \vec{y}|} = 1,$$

имеем

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} U(\vec{x}) = \frac{m}{|\vec{x}|},$$

где m — масса вещества, сосредоточенного в области E . Таким образом, потенциал $U(\vec{x})$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к функции, гармонической в неограниченной области $\mathbb{R}^3 \setminus E$.

Свойство 3. Если объемная плотность $\rho(\vec{x})$ и ее частные производные $\partial \rho(\vec{x})/\partial x_i$ непрерывны в области E , то объемный потенциал $U(\vec{x})$ имеет в E непрерывные вторые производные и удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x}), \quad \vec{x} \in E. \quad (31.29)$$

Основная трудность при доказательстве этого свойства состоит в том, что несобственные интегралы

$$\begin{aligned} & \int_E \rho(\vec{y}) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y} = \\ & = \int_E \rho(\vec{y}) \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} - 3 \frac{(x_i - y_i)^2}{|\vec{x} - \vec{y}|^5} \right) d\vec{y} \end{aligned} \quad (31.30)$$

не являются равномерно сходящимися в E и не могут представлять производные $\partial^2 U(\vec{x}) / \partial^2 x_i$. Можно показать, однако, что в сделанных выше предположениях относительно $\rho(\vec{x})$ частные производные $\partial^2 U(\vec{x}) / \partial^2 x_i$ существуют и непрерывны в E , хотя не представляются в виде (31.30).

Обратимся к формуле

$$\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i} = \int_E \rho(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y},$$

которую с учетом соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) = - \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \quad (31.31)$$

можно представить в виде разности

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i} &= - \int_E \rho(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y} = \\ &= \int_E \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial \rho(\vec{y})}{\partial y_i} d\vec{y} - \int_E \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y}. \end{aligned} \quad (31.32)$$

С помощью формулы Остроградского–Гаусса выражение (31.32) можем записать в следующем виде:

$$\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i} = \int_E \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial \rho(\vec{y})}{\partial y_i} d\vec{y} - \int_{S_E} \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \cos \alpha_i dS_y, \quad (31.33)$$

где S_E – поверхность, охватывающая область E , а α_i – угол между внешней нормалью \vec{n}_y к поверхности S_E и осью x_i .

Таким образом, производные $\partial U(\vec{x}) / \partial x_i$ могут быть представлены суммой двух потенциалов. Первый из них – объемный потенциал с непрерывной плотностью $\partial \rho(\vec{x}) / \partial x_i$, который, как мы доказали, является равномерно сходящимся и имеет в области E непрерывную первую производную. Второй – потенциал простого

слоя с непрерывной плотностью $\rho(\vec{y}) \cos \alpha_i$, который, согласно лемме 30.4, удовлетворяет внутри области E уравнению Лапласа, т.е. имеет в E производные всех порядков.

Тот факт, что правая часть формулы (31.33) имеет непрерывные первые производные, означает существование вторых непрерывных производных $\partial^2 U(\vec{x})/\partial x_i^2$ объемного потенциала $U(\vec{x})$. Осталось доказать, что в области E потенциал $U(\vec{x})$ удовлетворяет уравнению Пуассона (31.29). Воспользуемся наглядным (хотя и не совсем строгим) методом, предложенным Грином.

Выделим внутри объема E шар $e(\varepsilon)$ с центром в точке \vec{x} и радиусом ε , достаточно малым для того, чтобы его плотность можно было считать равномерной. Таким образом, плотность всего шара будет такой же, как и в точке \vec{x} . Потенциал всей области E разобьется тогда на две части:

$$U = U_1 + U_2.$$

Одна из них – U_1 – будет зависеть от масс, лежащих вне шара, другая – U_2 – от масс, находящихся внутри него. Тогда

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2,$$

а учитывая, что точка \vec{x} является внешней для области $E \setminus e(\varepsilon)$, получим

$$\Delta U_1 = 0$$

и, следовательно,

$$\Delta U = \Delta U_2.$$

Но, как следует из примера 31.2, для однородной сферы произвольного радиуса справедливо соотношение

$$\Delta U_2 = -4\pi\rho.$$

Отсюда, устремив радиус сферы к нулю, в пределе получим

$$\Delta U(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x}), \quad \vec{x} \in E,$$

что и требовалось доказать.

Строгое доказательство формулы (31.29) заключается в корректном вычислении частных производных функции $U(\vec{x})$ второго порядка $\partial^2 U(\vec{x})/\partial x_i^2$. Для этого левую и правую части (31.33) продифференцируем по x_i :

$$\frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_E \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial \rho(\vec{y})}{\partial y_i} d\vec{y} - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{S_E} \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \cos \alpha_i dS_y,$$

где α_i – угол между внешней нормалью \vec{n}_y к поверхности S_E и осью x_i . Поменяв в соотношении (31.30) местами дифференцирование по

x_i и интегрирование, с учетом формулы (31.31) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_i^2} &= \\ &= - \int_E \frac{\partial \rho(\vec{y})}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y} + \int_{S_E} \rho(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \cos \alpha_i dS_y. \end{aligned}$$

Далее, как и в доказательстве, предложенном Гринем, вырежем шаровую окрестность $e(\varepsilon)$ с центром в точке \vec{x} , радиус которой ε достаточно мал, так что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_i^2} &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus e(\varepsilon)} \frac{\partial \rho(\vec{y})}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y} + \\ &+ \int_{S_E} \rho(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \cos \alpha_i dS_y. \end{aligned} \quad (31.34)$$

С учетом равенства

$$\begin{aligned} &\int \frac{\partial \rho(\vec{y})}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y} = \\ &= \int \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\rho(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \right] d\vec{y} - \int \rho(\vec{y}) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y} \end{aligned}$$

формулу (31.34) можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_i^2} &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{E \setminus e(\varepsilon)} \rho(\vec{y}) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y} - \right. \\ &- \left. \int_{E \setminus e(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\rho(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \right] d\vec{y} \right\} + \\ &+ \int_{S_E} \rho(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \cos \alpha_i dS_y. \end{aligned} \quad (31.35)$$

Второй интеграл в (31.35) преобразуем по формуле Остроградского-Гаусса:

$$\begin{aligned} \int_{E \setminus e(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\rho(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \right] d\vec{y} &= \int_{S_E} \rho(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \cos \alpha_i dS_y + \\ &+ \int_{S_\varepsilon} \rho(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \cos \alpha_i dS_y, \end{aligned}$$

где S_ε – поверхность шара $e(\varepsilon)$ и \vec{n}_y – внешняя нормаль к поверхности $S_E \cup S_\varepsilon$. В результате такого преобразования формула (31.35) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_i^2} = & - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{E \setminus e(\varepsilon)} \rho(\vec{y}) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y} - \right. \\ & \left. - \int_{S_\varepsilon} \rho(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \cos \alpha_i dS_y \right]. \end{aligned} \quad (31.36)$$

В поверхностном интеграле (31.36) положим $(\vec{y} - \vec{x})/\varepsilon = \vec{r}/\varepsilon = \vec{z}$, где $|\vec{z}| = 1$. Если $\vec{y} \in S_\varepsilon$, то $\vec{z} \in S_1$ и для $\vec{y} \in S_\varepsilon$ получим $dS_y = \varepsilon^2 dS_z$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_i^2} = & - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{E \setminus e(\varepsilon)} \rho(\vec{y}) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y} - \right. \\ & \left. - \int_{S_1} \rho(\vec{x} + \varepsilon \vec{z}) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \Big|_{|\vec{x} - \vec{y}| = \varepsilon} \cos \beta_i \varepsilon^2 dS_z \right], \end{aligned} \quad (31.37)$$

где β_i – угол между внешней нормалью \vec{n}_z к поверхности S_1 и осью x_i . Так как

$$\frac{y_i - x_i}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \cos \gamma_i, \quad (31.38)$$

где γ_i – угол между вектором \vec{r} и осью x_i , а нормали \vec{n}_y и \vec{n}_z , использованные в теореме Остроградского–Гаусса, направлены против вектора $\vec{z} = \varepsilon \vec{r} = \varepsilon(\vec{y} - \vec{x})$, то

$$\cos \beta_i = -\cos \gamma_i \quad (31.39)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \Big|_{|\vec{x} - \vec{y}| = \varepsilon} &= - \frac{y_i - x_i}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \Big|_{|\vec{x} - \vec{y}| = \varepsilon} = \\ &= - \frac{1}{\varepsilon^2} \cos \gamma_i = \frac{1}{\varepsilon^2} \cos \beta_i. \end{aligned} \quad (31.40)$$

С учетом (31.38)–(31.40) формула (31.37) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_i^2} = & - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{E \setminus e(\varepsilon)} \rho(\vec{y}) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y} - \right. \\ & \left. - \int_{S_1} \rho(\vec{x} + \varepsilon \vec{z}) \cos^2 \beta_i \varepsilon^2 dS_z \right]. \end{aligned}$$

Если считать $\rho(\vec{y})$ непрерывной функцией, то вторую производную $\partial^2 U(\vec{x})/\partial x_i^2$, существование которой было доказано выше, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_i^2} = & - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus e(\varepsilon)} \rho(\vec{y}) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y} - \\ & - \rho(\vec{x}) \int_{S_1} \cos^2 \beta_i dS_z. \end{aligned} \quad (31.41)$$

Просуммировав выражение (31.41) по i , находим

$$\begin{aligned} \Delta U(\vec{x}) = & \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) U(\vec{x}) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus e(\varepsilon)} \rho(\vec{y}) \Delta_y \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) d\vec{y} - \\ & - \rho(\vec{x}) \int_{S_1} [\cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3] dS_z = -4\pi \rho(\vec{x}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

◇ В силу свойства 3 объемный потенциал $U(\vec{x})$ (30.2) является частным решением уравнения Пуассона

$$\Delta u(\vec{x}) = -4\pi \rho(\vec{x}),$$

общее решение которого можно записать в виде

$$u(\vec{x}) = U(\vec{x}) + u_0(\vec{x}),$$

где $u_0(\vec{x})$ – общее решение уравнения Лапласа

$$\Delta u_0(\vec{x}) = 0.$$

32. Потенциал простого слоя

Как и в предыдущем разделе, понятие потенциала простого слоя проиллюстрируем рядом примеров.

Пример 32.1. Найти потенциал простого слоя, создаваемого сферой радиуса R с постоянной поверхностной плотностью μ_0 (см. рис. 58,а). Исследовать поведение первых и вторых производных потенциала.

Решение. Поместим начало декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 в центр сферы S_R . Воспользуемся обозначениями примера 31.1

и рис. 56 при условии, что точка $M(\vec{r}_M)$ может быть расположена только на сфере S_R , т.е. $|\vec{r}_M| = R$. Тогда

$$V(r_P) = \int_{S_R} \frac{\mu_0 dS}{|\vec{r}|}. \quad (32.1)$$

В сферической системе координат (см. рис. 56) потенциал простого слоя (32.1) можно записать

$$\begin{aligned} V(r_P) &= \int_{S_R} \frac{\mu_0 R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{r_P^2 + R^2 - 2r_P R \cos \theta}} = \\ &= 2\pi\mu_0 R^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r_P^2 + R^2 - 2r_P R \cos \theta}}. \end{aligned}$$

С помощью подстановки $\cos \theta = t$ и формул (31.2), (31.3) получим

$$V(r_P) = \begin{cases} \frac{4\pi\mu_0 R^2}{R}, & r_P < R; \\ \frac{4\pi\mu_0 R^2}{r_P}, & r_P > R. \end{cases} \quad (32.2)$$

Если учесть, что величина $4\pi\mu_0 R^2$ определяет массу m_0 , равномерно распределенную по сфере S_R с постоянной поверхностной плотностью μ_0 , то выражение (32.2) примет вид (см. рис. 58,6)

$$V(r_P) = \begin{cases} m_0/R, & r_P < R; \\ m_0/r_P, & r_P > R. \end{cases} \quad (32.3)$$

Таким образом, согласно первому равенству из (32.3), внутри сферы потенциал простого однородного слоя есть величина постоянная: m_0/R . Производная от него в этом случае равна нулю. Отсюда следует, что однородный сферический простой слой диполей не действует на тела, находящиеся внутри этой сферы. Второе соотношение из (32.3) означает, что простой слой с произвольной поверхностной плотностью действует на тела вне сферы так, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре сферы S_R . Другими словами, для внешних точек потенциал простого слоя эквивалентен точечному потенциалу, создаваемому массой m_0 , сосредоточенной в центре сферы S_R . В точках самой сферы $r_P = R$ оба выражения из (32.3) дают одно и то же значение m_0/R . Это говорит о том, что потенциал простого слоя вполне определен на сфере S_R и, более того, не терпит разрыва при переходе через сам слой, т.е. является непрерывной функцией r_P .

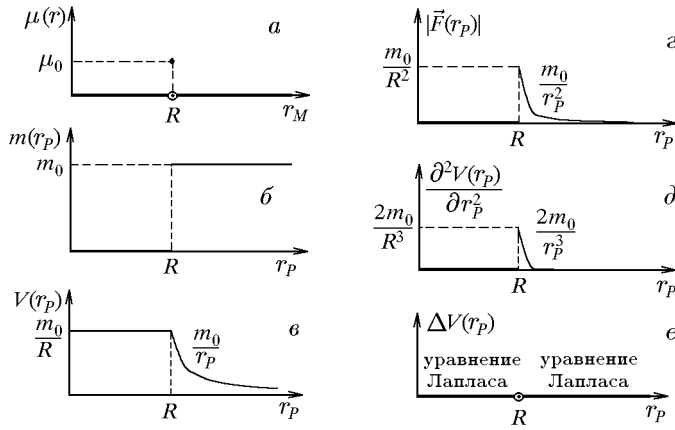


Рис. 58

Дифференцирование формулы (32.3) по r_P дает выражения для (см. рис. 58, з)

$$\frac{\partial V(r_P)}{\partial r_P} = -|\vec{F}| = \begin{cases} 0 & r_P < R; \\ -\frac{4\pi\mu_0 R^2}{r_P^2} = -\frac{m}{r_P^2} & r_P > R \end{cases} \quad (32.4)$$

и (см. рис. 58, д)

$$\frac{\partial^2 V(r_P)}{\partial r_P^2} = \begin{cases} 0 & r_P < R; \\ \frac{8\pi\mu_0 R^2}{r_P^3} = \frac{2m}{r_P^3} & r_P > R. \end{cases} \quad (32.5)$$

Из (32.4) и (32.5) следует, что для всех точек r_P , расположенных как внутри сферы S_R , так и вне ее, потенциал $V(r_P)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (см. рис. 58, е)

$$\Delta V(r_P) = \frac{\partial^2 V(r_P)}{\partial r_P^2} + \frac{2}{r_P} \frac{\partial V(r_P)}{\partial r_P} = 0. \quad (32.6)$$

Решение задачи наглядно иллюстрируется графиками, приведенными на рис. 58. Так как $\partial V/\partial r_P = \partial V/\partial n$, то производная по нормали в точке $r_P = R$ имеет скачок, равный m_0/R^2 (см. рис. 58, з).

Покажем, как формулу (32.3) можно получить с помощью теоремы Остроградского–Гаусса.

Обратимся к уравнению Пуассона

$$\Delta V(\vec{x}) = -4\pi f(\vec{x}),$$

интегрирование левой и правой части которого по произвольной области $E \in \mathbb{R}^3$, ограниченной поверхностью S_E , дает

$$\begin{aligned} 4\pi \int_E f(\vec{x}) d\vec{x} &= - \int_E \Delta V(\vec{x}) d\vec{x} = \\ &= - \int_E (\nabla, \nabla V(\vec{x})) d\vec{x} = - \int_{S_E} (\nabla V(\vec{x}), \vec{n}) dS. \end{aligned} \quad (32.7)$$

Так как $f(\vec{x})$ описывает пространственное распределение массы (заряда) в простом сферическом слое радиуса R с постоянной поверхностной плотностью μ_0 , то

$$4\pi \int_E f(\vec{x}) d\vec{x} = \begin{cases} 0, & |\vec{x}| < R; \\ (4\pi)^2 R^2 \mu_0, & |\vec{x}| > R \end{cases}$$

и

$$V(\vec{x}) = V(|\vec{x}|), \quad \nabla V(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} V'(|\vec{x}|),$$

или в принятых ранее обозначениях

$$V(\vec{x}) = V(r_P), \quad \nabla V(r_P) = \frac{\vec{r}_P}{r_P} \frac{\partial V(r_P)}{\partial r_P}$$

выражение (32.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} - \int_{S_E} \frac{\partial V(r_P)}{\partial r_P} \frac{(\vec{r}_P, \vec{n})}{r_P} dS_{r_P} &= -4\pi r_P^2 \frac{\partial V(r_P)}{\partial r_P} = \\ &= \begin{cases} 0, & r_P < R; \\ (4\pi)^2 R^2 \mu_0, & r_P > R, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда

$$V(r_P) = \begin{cases} C_1, & r_P < R; \\ \frac{4\pi R^2 \mu_0}{r_P} + C_2, & r_P > R. \end{cases}$$

Из условия $\lim_{r_P \rightarrow \infty} V(r_P) \rightarrow 0$ находим $C_2 = 0$, а из условия непрерывности в точке $r_P = R$ — константу $C_1 = 4\pi R \mu_0$. Тогда

$$V(r_P) = \begin{cases} 4\pi R\mu_0, & r_P < R; \\ 4\pi R^2\mu_0/r_P, & r_P > R, \end{cases}$$

что соответствует формуле (32.2), полученной ранее.

Перейдем к рассмотрению потенциалов простого слоя с поверхностной плотностью $\mu(\vec{x})$. Предварительно сформулируем две леммы.

Лемма 32.1. *Интеграл*

$$V(\vec{x}) = \int_E \frac{d\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in E \subset \mathbb{R}^2, \quad (32.8)$$

при $\alpha < 2$ сходится равномерно в ограниченной области E .

Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 30.3 с той лишь разницей, что области, изображенные на рис. 51, являются не шарами, а кругами, а неравенство, связывающее $\rho(\varepsilon)$ и ε , имеет вид $[\tilde{e}(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2]$

$$\int_{\tilde{e}(\varepsilon)} \frac{d\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\rho} \frac{r dr}{r^\alpha} = \frac{2\pi}{2-\alpha} (2\rho)^{2-\alpha} < \varepsilon,$$

т.е.

$$\rho(\varepsilon) < \frac{1}{2} \left[\frac{(2-\alpha)\varepsilon}{2\pi} \right]^{1/(2-\alpha)}.$$

Наряду с интегралом (32.8) рассмотрим интеграл

$$V(\vec{x}) = \int_\sigma \frac{dS_y}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \sigma \subset \mathbb{R}^3. \quad (32.9)$$

Различие интегралов (32.8) и (32.9) состоит в том, что в (32.8) интегрирование проводится по плоской области $E \in \mathbb{R}^2$ (двойной интеграл), а в (32.9) – по пространственной поверхности $\sigma \in \mathbb{R}^3$. Покажем, что интеграл (32.9) при определенных условиях также является равномерно сходящимся на поверхности σ .

Лемма 32.2. *Интеграл (32.9) для $\alpha < 2$ сходится равномерно на ограниченной поверхности σ , если она является поверхностью Ляпунова.*

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 30.2, воспользуемся рис. 51, в котором проведем дополнительное построение. Пусть \vec{x}_0 – произвольная точка поверхности σ (рис. 59). Построим

сферу S_ρ радиусом ρ с центром в этой точке, называемую сферой Ляпунова. Через эту же точку проведем касательную плоскость (её существование обеспечено по определению) с единичным вектором нормали \vec{n}_0 , восстановленным из точки \vec{x}_0 .

Часть поверхности σ , отсекаемую сферой Ляпунова S_ρ , обозначим через σ_ρ , а проекцию σ_ρ на касательную плоскость – через e_ρ .

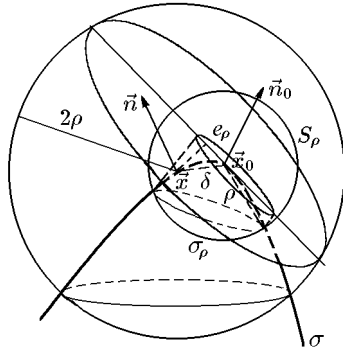


Рис. 59

Пусть \vec{x} – произвольная точка поверхности σ , отстоящая от \vec{x}_0 на расстояние δ ($|\vec{x} - \vec{x}_0| = \delta$). Из точки \vec{x} восстановим единичный вектор нормали \vec{n} . Для оценки угла между нормальными \vec{n}_0 и \vec{n} введем новую декартову систему координат x'_1, x'_2, x'_3 , ось x'_3 которой направим по нормали \vec{n} . Тогда оси Ox'_1 и Ox'_2 лежат в указанной выше касательной плоскости. Из второго условия в определении поверхности Ляпунова следует существование такой δ -окрестности точки \vec{x}_0 , в которой поверхность σ может быть описана уравнением

$$x'_3 = x'_3(x'_1, x'_2). \quad (32.10)$$

Из первого условия – условия существования нормали в каждой точке поверхности – следует дифференцируемость функции (32.10), в силу чего направляющие косинусы вектора $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{N} \frac{\partial x'_3}{\partial x'_1}, & \cos \beta &= \frac{1}{N} \frac{\partial x'_3}{\partial x'_2}, & \cos \gamma &= \frac{1}{N}; \\ N &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x'_3}{\partial x'_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'_3}{\partial x'_2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (32.11)$$

Таким образом, на поверхности Ляпунова σ всегда можно выбрать такую δ -окрестность точки \vec{x}_0 , чтобы угол γ – угол между нормальными \vec{n} и \vec{n}_0 (или, что то же самое, угол между нормалью \vec{n} и осью Ox'_3) – удовлетворял условию

$$1 \geq \cos \gamma = \frac{1}{N} > \frac{1}{2}. \quad (32.12)$$

Обратимся теперь к интегралу

$$\int_{\sigma_\rho} \frac{dS_y}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha}, \quad (32.13)$$

который можно свести к двойному интегралу по области e_ρ , являющейся проекцией σ_ρ на касательную плоскость, проходящую через точку \vec{x}_0 и на которой $x'_3 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_\rho} \frac{dS_y}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha} &= \int_{\sigma_\rho} \frac{dS_{y'}}{|\vec{x}' - \vec{y}'|^\alpha} = \int_{e_\rho} \frac{dx'_1 dx'_2 / \cos \gamma}{|\vec{x}' - \vec{y}'|^\alpha} < \\ &< 2 \int_{e_\rho} \frac{dx'_1 dx'_2}{|\vec{x}' - \vec{y}'|^\alpha}, \quad \vec{x}', \vec{y}' \in e_\rho \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (32.14)$$

Согласно лемме 32.1, интеграл в правой части (32.14) сходится равномерно в точке \vec{x}_0 при $\alpha < 2$. Следовательно, в этой же точке \vec{x}_0 и при этом же α сходится равномерно и интеграл (32.13). В силу произвольности точки \vec{x}_0 можно сделать вывод, что интеграл (32.9) сходится равномерно на всей поверхности σ , что и требовалось доказать.

Основываясь на доказанных выше леммах, сформулируем ряд свойств потенциала простого слоя (30.3).

Свойство 1. Для непрерывной и ограниченной плотности $\mu(\vec{x})$ потенциал простого слоя $V(\vec{x})$ (30.3) является непрерывной и ограниченной функцией для всех $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, в том числе и для всех $\vec{x} \in S_E$.

Действительно, непрерывность и ограниченность потенциала простого слоя для $\vec{x} \notin S_E$ очевидны. Аналогичное утверждение для $\vec{x} \in S_E$ вытекает из равномерной сходимости интеграла (30.3), которая, в свою очередь, согласно достаточному признаку равномерной сходимости (теорема 30.1), является следствием ограниченности плотности $\mu(\vec{x})$ и равномерной сходимости интеграла (32.9) при $\alpha = 1$ (лемма 32.2):

$$\left| \int_{S_E} \frac{\mu(\vec{x}) dS_y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right| \leq M \left| \int_{S_E} \frac{dS_y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right|, \quad M = \max_{\vec{x} \in S_E} |\mu(\vec{x})|.$$

◇ Это свойство остается справедливым и для неограниченных поверхностей, если плотность потенциала простого слоя имеет при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ асимптотическую оценку

$$\mu(\vec{x}) = O(|\vec{x}|^{-1-\beta}), \quad \beta > 0.$$

Свойство 2. Для всех $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S_E$ потенциал простого слоя является регулярной гармонической функцией.

Это вытекает из леммы 30.4 и асимптотической оценки

$$V(\vec{x}) = O(|\vec{x}|^{-1}),$$

поскольку

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}|V(\vec{x}) = m,$$

где m – масса поверхности S_E .

Исследование поведения производных потенциала простого слоя вблизи поверхности S_E проведем после рассмотрения некоторых свойств потенциала двойного слоя.

33. Потенциал двойного слоя и его свойства

Изучение потенциала двойного слоя (30.4) начнем с конкретного примера.

Пример 33.1. Найти потенциал двойного слоя сферы радиуса R с постоянной плотностью дипольного момента ν .

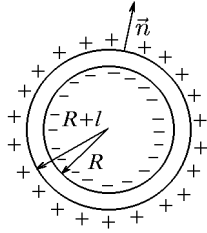


Рис. 60

Решение. Найдем решение задачи, не обращаясь непосредственно к формуле (30.4), а используя решение примера 32.1 для потенциала простого слоя. Для этого двойной слой сферы представим (см. рис. 60) простыми слоями двух сфер, отстоящих друг от друга на «бесконечно малое» расстояние l . Сферу радиуса R будем считать отрицательно заряженной с плотностью $-\nu/l$. Сферу радиуса $R+l$ будем считать положительно заряженной с плотностью ν/l , которую найдем из тех соображений, что суммарный заряд диполей ра-

вен нулю:

$$-\frac{\nu}{l}4\pi R^2 + \frac{\nu l}{l}4\pi(R+l)^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\nu_l = \nu \left(\frac{R}{R+l} \right)^2. \quad (33.1)$$

Используя результат решения примера 32.1, потенциал двойного слоя можно записать в виде

$$W(r_P) = \begin{cases} 4\pi \left[\frac{\nu_l(R+l) - \nu R}{l} \right], & r_P < R; \\ \frac{4\pi}{r_P} \left[\frac{\nu_l(R+l)^2 - \nu R^2}{l} \right], & r_P > R+l, \end{cases}$$

а устремив l к нулю, получим

$$W(r_P) = 4\pi\nu \lim_{l \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{d}{dl} [(R+l)\nu_l], & r_P < R; \\ \frac{d}{dl} [(R+l)^2\nu_l], & r_P > R. \end{cases} \quad (33.2)$$

Из (33.2) с учетом (33.1) находим потенциал двойного слоя

$$W(r_P) = 4\pi\nu \lim_{l \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{d}{dl} \left[\frac{R^2}{(R+l)} \right] \\ \frac{d}{dl} [R^2] \end{cases} = \begin{cases} -4\pi\nu, & r_P < R; \\ 0, & r_P > R. \end{cases} \quad (33.3)$$

Как следует из (33.3), потенциал двойного слоя сферы S_R с плотностью дипольного момента ν есть функция, не зависящая от r_P (т.е. не оказывает никакого действия на массы, лежащие внутри и снаружи) и имеющая конечный разрыв $4\pi\nu$ на самой сфере S_R .

Формулу (33.3) можно получить из определения (30.4), согласно которому

$$W(\vec{x}) = \int_{S_R} \nu \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y = \nu \int_{S_R} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y. \quad (33.4)$$

Рассмотрим подробнее интеграл

$$W(\vec{x}) = \int_{S_R} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y, \quad (33.5)$$

представляющий собой потенциал двойного слоя с плотностью дипольного момента $\nu = 1$. Для его вычисления исследуем два случая: когда точка \vec{x} находится вне сферы и внутри нее.

Пусть точка \vec{x} находится вне сферы S_R . Тогда функция $1/|\vec{x} - \vec{y}|$ – гармоническая внутри S_R , и в силу теоремы 30.1 (о нормальной производной) имеем

$$W(\vec{x}) = \int_{S_R} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y = 0, \quad |\vec{x}| > R. \quad (33.6)$$

Пусть теперь точка \vec{x} находится внутри сферы S_R . Построим вокруг этой точки сферу S_r радиусом r с центром в ней. В сферическом слое между S_R и S_r функция $1/|\vec{x} - \vec{y}|$ также гармоническая и, следовательно,

$$\int_{S_R} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y + \int_{S_r} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y = 0,$$

где \vec{n}_y – нормаль, внешняя к сферическому слою и направленная на сфере S_r против радиуса $\vec{r} = \vec{y} - \vec{x}$. Тогда

$$\int_{S_R} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y = - \int_{S_r} \frac{dS_r}{r^2} = -4\pi, \quad |\vec{x}| < R. \quad (33.7)$$

Объединение формул (33.6) и (33.7) дает значение интеграла (33.5):

$$W(\vec{x}) = \int_{S_R} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y = \begin{cases} -4\pi, & |\vec{x}| < R; \\ 0, & |\vec{x}| > R, \end{cases} \quad (33.8)$$

подстановка которого в (33.4) приводит к полученному ранее решению (33.3). Отметим, что выражение (33.8) – частный случай соотношения для поверхностей более общего вида, к рассмотрению которого мы и переходим.

Лемма 33.1. *Интеграл*

$$W(\vec{x}) = \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y, \quad (33.9)$$

определяющий потенциал двойного слоя с плотностью дипольного момента $\nu = 1$, сходится равномерно для всех $\vec{x} \in \sigma$, если поверхность σ является поверхностью Ляпунова (не обязательно замкнутой).

Доказательство. Исходный интеграл (33.9), согласно (30.29), запишем в виде

$$W(\vec{x}) = \int_{\sigma} \frac{\cos \varphi}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} dS_y = 0, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \sigma, \quad (33.10)$$

где φ – угол между нормалью \vec{n}_y и вектором $\vec{y} - \vec{x}$. Лемма будет доказана, если будет доказана справедливость оценки

$$\cos \varphi \leq A |\vec{x} - \vec{y}|^{\kappa}, \quad (33.11)$$

с некоторыми постоянными $A > 0$ и $0 < \kappa \leq 1$ для $\vec{x}, \vec{y} \in \sigma$. Действительно, для (33.10) с учетом (33.11) можем записать

$$W(\vec{x}) = \int_{\sigma} \frac{\cos \varphi}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} dS_y \leq A \int_{\sigma} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2-\kappa}} dS_y. \quad (33.12)$$

Согласно лемме 32.2, последний интеграл в правой части (33.12) сходится равномерно для всех $\vec{x} \in \sigma$, но тогда в силу достаточного признака сходимости интеграл (33.9) также равномерно сходится на σ .

Перейдем теперь к рассмотрению неравенства (33.11), справедливость которого достаточно установить для малых $|\vec{x} - \vec{y}|$, т.е. в окрестности точки \vec{x} , лежащей на поверхности σ . Пусть \vec{n}_0 и \vec{n} (рис. 61) – единичные векторы нормали, восстановленные к поверхности σ в точках \vec{x} и \vec{y} , соответственно (как и в доказательстве леммы

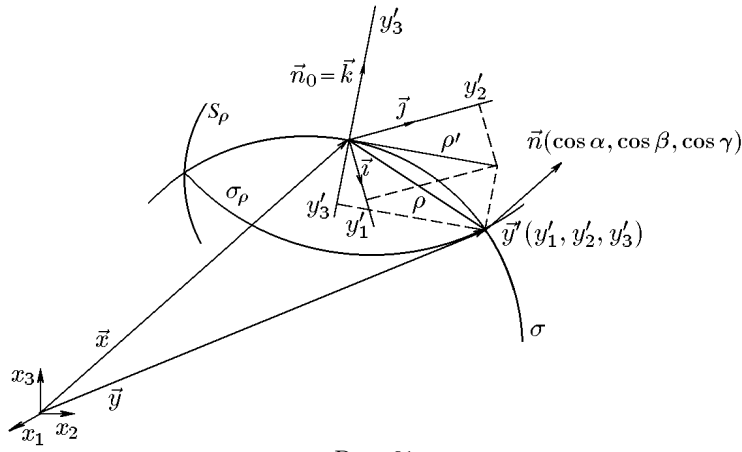


Рис. 61

32.2, пользуемся условиями определения поверхности Ляпунова). Опишем радиусом $\rho = \vec{x} - \vec{y}$ с началом в точке \vec{x} сферу Ляпунова S_ρ . Часть поверхности σ , ограниченную сферой Ляпунова, обозначим через σ_ρ . Кроме того, точку \vec{x} выберем началом новой декартовой системы координат y'_1, y'_2, y'_3 , ось Oy'_3 которой направим по нормали \vec{n}_0 . Тогда $\vec{n}_0 = \vec{k}$, а единичные орты \vec{i} и \vec{j} расположатся в касательной плоскости к поверхности σ , проходящей через точку \vec{x} .

Проекциями вектора $\vec{y}' = \vec{x} - \vec{y}$ на координатные оси являются y'_1, y'_2, y'_3 , причем проекцией $\rho = \sqrt{(y'_1)^2 + (y'_2)^2 + (y'_3)^2}$ на касательную плоскость является отрезок $\rho' = \sqrt{(y'_1)^2 + (y'_2)^2} < \rho$.

Возможность указанных выше построений вытекает из первого условия определения поверхности Ляпунова. Из второго условия следует, что часть поверхности σ_ρ в координатах y'_i описывается дифференцируемой функцией $f(y'_1, y'_2)$

$$y'_3 = f(y'_1, y'_2). \quad (33.13)$$

Наконец, из третьего условия имеем

$$|\vec{n} - \vec{n}_0| < C|\vec{y}'|^\kappa = C\rho^\kappa. \quad (33.14)$$

Величину ρ выберем так, чтобы выполнялось условие

$$|\vec{n} - \vec{n}_0| < C\rho^\kappa < \frac{1}{2}. \quad (33.15)$$

Тогда из неравенств (33.14) и (33.15) вытекают неравенства

$$|\cos \alpha| = |(\vec{n}, \vec{i})| = |(\vec{n} - \vec{n}_0, \vec{i}) + (\vec{n}_0, \vec{i})| =$$

$$\begin{aligned}
&= |(\vec{n} - \vec{n}_0, \vec{v})| \leq |\vec{n} - \vec{n}_0| \leq C\rho^\kappa, \\
|\cos \beta| &= |(\vec{n}, \vec{j})| = |(\vec{n} - \vec{n}_0, \vec{j}) + (\vec{n}_0, \vec{j})| = \\
&= |(\vec{n} - \vec{n}_0, \vec{j})| \leq |\vec{n} - \vec{n}_0| \leq C\rho^\kappa, \\
|\cos \gamma| &= |(\vec{n} - \vec{n}_0, \vec{n}_0) + (\vec{n}_0, \vec{n}_0)| = |1 + (\vec{n} - \vec{n}_0, \vec{n}_0)| \geq (33.16) \\
&\geq 1 - |(\vec{n} - \vec{n}_0, \vec{n}_0)| \geq 1 - |\vec{n} - \vec{n}_0| \geq 1 - C\rho^\kappa \geq 1/2, \\
|\cos \varphi| &= |(\vec{n}, \vec{y}')|/|\vec{y}'| = |(\vec{n} - \vec{n}_0, \vec{y}')/\rho + (\vec{n}_0, \vec{y}')/\rho| \leq \\
&\leq |\vec{n} - \vec{n}_0| + |y'_3|/\rho \leq C\rho^\kappa + |y'_3|/\rho.
\end{aligned}$$

Для оценки величины $|y'_3|$ воспользуемся теоремой о конечных приращениях

$$y'_3 = f(y'_1, y'_2) = y'_1 \frac{\partial f}{\partial y'_1}(\vec{y}'_1, \vec{y}'_2) + y'_2 \frac{\partial f}{\partial y'_2}(\vec{y}'_1, \vec{y}'_2),$$

где $0 < \vec{y}'_1 < y'_1$, $0 < \vec{y}'_2 < y'_2$. Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial y'_1} = -\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} = -\frac{(\vec{n}, \vec{v})}{(\vec{n}, \vec{n}_0)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'_2} = -\frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = -\frac{(\vec{n}, \vec{j})}{(\vec{n}, \vec{n}_0)}, \quad (33.17)$$

то с учетом (33.16) получим

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y'_1} \right| \leq 2C\rho^\kappa, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y'_2} \right| \leq 2C\rho^\kappa$$

и, следовательно,

$$|y'_3| \leq 2C\rho^\kappa(|y'_1| + |y'_2|) \leq 4C\rho^\kappa \rho' \leq 4C\rho^{1+\kappa}. \quad (33.18)$$

Возвратившись к (33.16), получим оценку для $\cos \varphi$ в окрестности точки \vec{x} :

$$|\cos \varphi| \leq C\rho^\kappa + 4C\rho^\kappa = 5C\rho^\kappa = 5C|\vec{x} - \vec{y}|^\kappa. \quad (33.19)$$

Из произвольности точек \vec{x} , \vec{y} следует справедливость (33.11) при $A = 5C$ и, соответственно, утверждения леммы.

Рассмотрим еще одно свойство интеграла (33.9).

Лемма 33.2. *Интеграл (33.9), определяющий потенциал двойного слоя с плотностью дипольного момента $\nu = 1$, равен телесному углу, под которым из точки \vec{x} видна ограниченная кусочно-гладкая двусторонняя поверхность σ .*

Доказательство. Так как точка \vec{x} лежит вне поверхности σ , построим коническую поверхность с вершиной в точке \vec{x} и основанием σ (рис. 62). Пусть S_ρ – часть сферы радиуса ρ с центром в точке \vec{x} ,

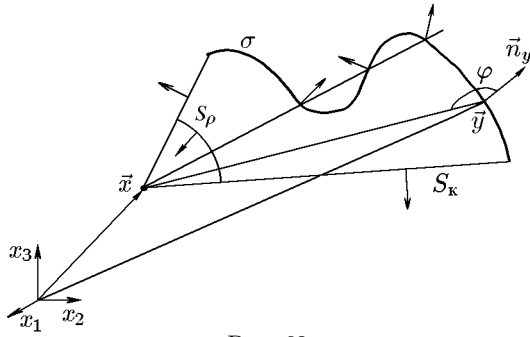


Рис. 62

лежащая внутри упомянутого конуса. Рассмотрим пространственную область E , ограниченную σ , S_ρ и боковой поверхностью конуса S , в которой функция $|\vec{x} - \vec{y}|^{-1}$ является гармонической и, следовательно,

$$\int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y + \int_{S_\rho} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y + \int_S \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y = 0. \quad (33.20)$$

На поверхности S

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) = \frac{\cos \varphi}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} = \frac{\cos \pi/2}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} = 0. \quad (33.21)$$

На поверхности S_ρ векторы \vec{n}_y и $\vec{x} - \vec{y}$ параллельны и направлены в одну сторону, причем

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) = \frac{1}{\rho^2}.$$

Тогда интеграл

$$- \int_{S_\rho} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y = - \int_{S_\rho} \frac{1}{\rho^2} dS_y = \int_{S_\rho} d\Omega(\vec{x}) = \Omega(\vec{x}) \quad (33.22)$$

дает телесный угол $\Omega(\vec{x})$, под которым из точки \vec{x} видна часть сферы S_ρ . Из (33.20) с учетом (33.21), (33.22) следует

$$\int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y = \int_{\sigma} \frac{\cos \varphi}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} dS_y = \Omega(\vec{x}). \quad (33.23)$$

Таким образом, поверхность σ и часть сферы S_ρ , ограниченная конической поверхностью, видны из точки \vec{x} под одним телесным углом, равным значению интеграла (33.9) в этой точке.

Может оказаться, что прямая, проведенная из точки \vec{x} , пересекает поверхность σ в нескольких точках, например в трех, как изображено на рис. 62. Тогда внешние нормали, восстановленные к σ , образуют поочередно тупые и острые углы. Косинусы этих углов поочередно меняют знак. А так как проекции элементов dS_y на сферу S_ρ равны по абсолютной величине, то в интеграле (33.23) остается только сумма углов видимости $\Omega(\vec{x})$, под которыми видна сфера S_ρ , что и требовалось доказать.

В дальнейшем мы будем предполагать поверхность S такой, что телесный угол $\Omega_\sigma(\vec{x})$, под которым любая часть поверхности S видна из произвольной точки \vec{x} , ограничен:

$$|\Omega_\sigma(\vec{x})| \leq K. \quad (33.24)$$

Это ограничение обусловлено тем, что если прямая пересекает поверхность S неоднократно, то, приняв за σ множество таких кусков S , которые видны с положительной стороны ($\cos \varphi > 0$), мы можем получить, вообще говоря, сколь угодно большое значение $\Omega_\sigma(\vec{x})$.

◇ Если с учетом (33.23) потенциал двойного слоя с произвольной плотностью дипольного момента $\nu(\vec{y})$ записать в виде

$$W(\vec{x}) = \int_\sigma \nu(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y = \int_\sigma \nu(\vec{y}) d\Omega(\vec{x}), \quad (33.25)$$

то из этой формулы при $\nu = 1$ следует

$$W(\vec{x})|_{\nu=1} = \int_\sigma d\Omega(\vec{x}) = \Omega(\vec{x}).$$

Заметим, что леммы 33.1 и 33.2 по отдельности характеризуют поведение потенциала двойного слоя с $\nu = 1$, когда \vec{x} находится непосредственно на поверхности или вне ее. Их обобщением является следующая лемма.

Лемма 33.3. Если S_E — замкнутая поверхность Ляпунова, охватывающая область $E \subset \mathbb{R}^3$, то потенциал двойного слоя с $\nu = 1$ определяется формулой

$$W(\vec{x}) = \int_{S_E} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y = \begin{cases} -4\pi, & \vec{x} \in E; \\ -2\pi, & \vec{x} \in S_E; \\ 0, & \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{E}, \end{cases} \quad (33.26)$$

называемой формулой (или интегралом) Гаусса.

Доказательство. Для $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S_E$ справедливость двух утверждений леммы следует из леммы 33.2, если упомянутая там поверхность σ является замкнутой, т.е. $\sigma = S_E$. Для доказательства третьего значения интеграла Гаусса выберем на поверхности S_E произвольную точку \vec{x} и опишем вокруг нее как центра сферу Ляпунова S_ρ радиуса ρ . Часть поверхности S_E , заключенную внутри S_ρ , обозначим через $S_{E\rho}$ (рис. 63). Тогда $S_E = S_{E\rho} + S_E \setminus S_{E\rho}$ и интеграл (33.26) можно записать

$$W(\vec{x}) = \int_{S_{E\rho}} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y + \int_{S_E \setminus S_{E\rho}} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y. \quad (33.27)$$

Так как точка \vec{x} находится в $S_{E\rho}$ и не принадлежит $S_E \setminus S_{E\rho}$, то второй интеграл в (33.27), согласно лемме 33.2, равен телесному углу $\Omega_{S_E \setminus S_{E\rho}}$, под которым из точки \vec{x} видна поверхность $S_E \setminus S_{E\rho}$. Поэтому при стягивании сферы Ляпунова в точку этот интеграл стремится к -2π , а первый интеграл в (33.27) в силу его равномерной сходимости стремится к нулю, что и требовалось доказать.

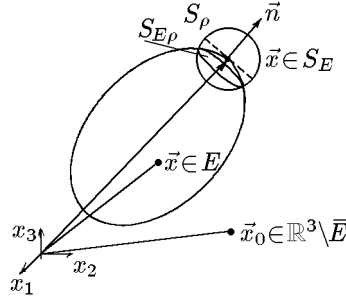


Рис. 63

◇ В примере 33.1 было замечено, что решение в виде (33.8) представляет частный случай. Действительно, сравнение (33.8) и (33.26) говорит о том, что при переходе из внутренней части сферы во внешнюю потенциал двойного слоя испытывает, вообще говоря, двойной скачок: от $-4\pi\nu$ внутри сферы к $-2\pi\nu$ на самой сфере, а затем к нулю вне ее. В связи с этим более точно решение примера 33.1 можно записать в виде

$$W(r_P) = \begin{cases} W(R) - 2\pi\nu, & r_P < R; \\ W(R), & r_P = R; \\ W(R) + 2\pi\nu, & r_P > R; \end{cases} \quad W(R) = -2\pi\nu. \quad (33.28)$$

Рассмотрим теперь потенциал двойного слоя с переменной плотностью дипольного момента $\nu(\vec{x})$ и докажем, что для непрерывной плотности справедливы следующие свойства.

Свойство 1. Для непрерывной и ограниченной плотности дипольного момента $\nu(\vec{x})$ потенциал двойного слоя (30.4) является непрерывной и ограниченной функцией для всех $\vec{x} \in S_E$.

Действительно, в силу ограниченности плотности $\nu(\vec{x})$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} W(\vec{x}) &= \left| \int_{S_E} \nu(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y \right| \leq \\ &\leq m \left| \int_{S_E} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y \right|. \end{aligned} \quad (33.29)$$

Последний интеграл в (33.29) в силу леммы 33.1 сходится равномерно для всех $\vec{x} \in S_E$. Но тогда, согласно достаточному признаку равномерной сходимости, потенциал двойного слоя (30.4) также сходится равномерно для всех $\vec{x} \in S_E$. Кроме того, из равномерной сходимости интеграла (30.4) в силу леммы 33.2 следует и непрерывность потенциала двойного слоя для всех $\vec{x} \in S_E$.

◇ Это свойство остается справедливым и для неограниченных поверхностей, если плотность $\nu(\vec{x})$ имеет асимптотическую оценку

$$\nu(\vec{x}) = O(1/|\vec{x}|^\kappa), \quad \kappa > 0, \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (33.30)$$

◆ Значение потенциала двойного слоя (30.4) при $\vec{x} \in S_E$ называется его прямым значением.

Таким образом, свойство 1 описывает поведение прямого значения потенциала двойного слоя.

Свойство 2. Потенциал двойного слоя (30.4) вне S_E является регулярной гармонической функцией.

Действительно, согласно лемме 30.4, потенциал двойного слоя удовлетворяет уравнению Лапласа для всех $\vec{x} \notin S_E$. Кроме того, справедлива асимптотическая оценка

$$W(\vec{x}) = O(|\vec{x}|^{-2}), \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty.$$

◇ Тот факт, что потенциал двойного слоя имеет указанную оценку, вообще говоря, затрудняет его использование в построении других гармонических функций, имеющих, как правило, оценку $O(|\vec{x}|^{-1})$.

Сформулированные выше свойства характеризуют двойной слой непосредственно на поверхности S_E и вне ее. Рассмотрим поведение потенциала двойного слоя при пересечении поверхности S_E .

Свойство 3. Потенциал двойного слоя с плотностью дипольного момента $\nu(\vec{x})$, непрерывной на поверхности Ляпунова S_E , имеет пределы $W_+(\vec{x})$ и $W_-(\vec{x})$ при приближении к поверхности S_E извне и изнутри, соответственно, которые определяются через прямое значение потенциала двойного слоя $W(\vec{x})$ соотношениями

$$W_+(\vec{x}) = W(\vec{x}) + 2\pi\nu(\vec{x}), \quad W_-(\vec{x}) = W(\vec{x}) - 2\pi\nu(\vec{x}). \quad (33.31)$$

Действительно, рассмотрим значение потенциала двойного слоя

$$W(\vec{x}') = \int_{S_E} \nu(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{y}|} \right) dS_y \quad (33.32)$$

в некоторой точке \vec{x}' . Если $\vec{x}' \in S_E$, то интеграл (33.32) определяет прямое значение потенциала двойного слоя; если $\vec{x}' \notin S_E$, то интеграл определяет гармоническую функцию. Рассмотрим поведение интеграла (33.32), когда $\vec{x}' \rightarrow \vec{x}$. Для этого представим его в виде

$$\begin{aligned} W(\vec{x}') &= \int_{S_E} [\nu(\vec{y}) - \nu(\vec{x})] \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{y}|} \right) dS_y + \\ &+ \nu(\vec{x}) \int_{S_E} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{y}|} \right) dS_y. \end{aligned} \quad (33.33)$$

Второй интеграл в правой части (33.33) – интеграл Гаусса и определяется леммой 33.3. Покажем, что первый интеграл в (33.33)

$$W_1(\vec{x}') = \int_{S_E} [\nu(\vec{y}) - \nu(\vec{x})] \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{y}|} \right) dS_y, \quad (33.34)$$

где $\vec{x}' \in \mathbb{R}^3$ и $\vec{x} \in S_E$, равномерно сходится в точке $\vec{x}' = \vec{x}$. Для этого воспользуемся непрерывностью плотности $\nu(\vec{x})$ в точке \vec{x} , в силу которой для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую $\varepsilon(\varepsilon)$ -окрестность точки \vec{x} , принадлежащую S_E , что

$$|\nu(\vec{y}) - \nu(\vec{x})| < \varepsilon.$$

Тогда для любой точки \vec{x}' , лежащей в некоторой $\delta(\varepsilon)$ -окрестности точки \vec{x} , будем иметь

$$\int_{S_E} [\nu(\vec{y}) - \nu(\vec{x})] \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{y}|} \right) dS_y \leq \varepsilon \int_{S_E} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{y}|} \right) dS_y, \quad (33.35)$$

где $\vec{x}' \notin S_E$, а в силу условия (33.24)

$$\int_{S_E} [\nu(\vec{y}) - \nu(\vec{x})] \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{y}|} \right) dS_y \leq \varepsilon K. \quad (33.36)$$

Этого достаточно для выполнения условия равномерной сходимости интеграла (33.34) и, следовательно, согласно лемме 30.1, его непрерывности в точке \vec{x} . С другой стороны, непрерывность интеграла (33.34) в точке \vec{x} означает, что в указанной точке предельные

значения $W_1(\vec{x}')$ при стремлении $\vec{x}' \rightarrow \vec{x}$ извне и изнутри существуют и совпадают с его прямым значением $W_1(\vec{x})$, т.е.

$$W_{1+}(\vec{x}) = W_{1-}(\vec{x}) = W_1(\vec{x}). \quad (33.37)$$

Из формул (33.33), (33.37) и интеграла Гаусса (33.36) следует, что предельные значения потенциала двойного слоя $W_+(\vec{x})$, $W_-(\vec{x})$ также существуют, причем для $\vec{x}' \rightarrow \vec{x}$ извне S_E

$$W_+(\vec{x}) = W_{1+}(\vec{x}), \quad (33.38)$$

а для $\vec{x}' \rightarrow \vec{x}$ изнутри S_E

$$W_-(\vec{x}) = W_{1-}(\vec{x}) + 4\pi\nu(\vec{x}). \quad (33.39)$$

Учтем, что, согласно (33.34),

$$W_1(\vec{x}) = W(\vec{x}) - 2\pi\nu(\vec{x}).$$

Тогда (33.38) и (33.39) можно записать соотношением

$$W_+(\vec{x}) = W(\vec{x}) - 2\pi\nu(\vec{x}), \quad W_-(\vec{x}) = W(\vec{x}) + 2\pi\nu(\vec{x}),$$

совпадающим с (33.31) и содержащим прямое значение потенциала двойного слоя

$$W(\vec{x}) = \int_{S_E} \nu(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y, \quad \vec{x} \in S_E. \quad (33.40)$$

◇ Если ввести обозначения

$$W_+(\vec{x}) = W(\vec{x} + \vec{n}_x \cdot 0), \quad W_-(\vec{x}) = W(\vec{x} - \vec{n}_x \cdot 0),$$

где \vec{n}_x – внешняя нормаль к S_E в точке \vec{x} , то из (33.31) можно получить формулы

$$\begin{aligned} W(\vec{x} + \vec{n}_x \cdot 0) &= W(\vec{x}) - 2\pi\nu(\vec{x}), \\ W(\vec{x} - \vec{n}_x \cdot 0) &= W(\vec{x}) + 2\pi\nu(\vec{x}), \end{aligned} \quad (33.41)$$

аналогичные формулам Сохоцкого (см. разд. «Примеры обобщенных функций» части II). Из (33.41) вытекают простые соотношения, связывающие предельные значения потенциала с плотностью потенциала двойного слоя $\nu(\vec{x})$ и его прямым значением $W(\vec{x})$:

$$\begin{aligned} W(\vec{x} + \vec{n}_x \cdot 0) - W(\vec{x} - \vec{n}_x \cdot 0) &= -4\pi\nu(\vec{x}), \\ W(\vec{x} + \vec{n}_x \cdot 0) + W(\vec{x} - \vec{n}_x \cdot 0) &= 2W(\vec{x}). \end{aligned} \quad (33.42)$$

34. Нормальная производная потенциала простого слоя

Продолжим начатое ранее рассмотрение свойств потенциала простого слоя. Обратимся снова к примеру 32.1, из которого следует, что радиальная производная потенциала простого слоя при переходе через сферу S_R терпит разрыв. Но для сферической поверхности производная по радиусу совпадает с производной по внешней нормали. Для того чтобы выяснить, как обстоит дело с нормальной производной в общем случае, введем понятие правильной нормальной производной.

Пусть функция $u(\vec{x})$ определена в некоторой открытой области E , ограниченной замкнутой поверхностью S_E . Рассмотрим поверхность S'_E , которая получается из S_E смещением каждой точки $\vec{x} \in S_E$ на достаточно малое расстояние Δl по нормали

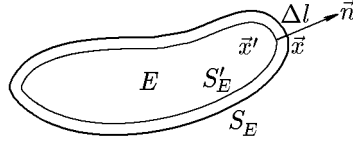


Рис. 64

\vec{n} к поверхности S_E внутрь области E (рис. 64). Поверхность S'_E можно назвать «параллельной» поверхности S_E , поскольку при достаточно малом Δl нормаль к S'_E можно рассматривать как нормаль к S'_E и наоборот. Для поверхности S'_E , состоящей из внутренних точек E , вычисление производной $\partial u(\vec{x}')/\partial n$ (в предположении, что она существует) не составляет труда. Тогда производную $\partial u(\vec{x})/\partial n$ в точке $\vec{x} \in S_E$ можно рассматривать как предел

$$\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} = \lim_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \frac{\partial u(\vec{x}')}{\partial n}, \quad \vec{x} \in S_E. \quad (34.1)$$

◇ Если предел (34.1) существует и является равномерным и непрерывным относительно $\vec{x} \in S_E$, то говорят, что функция $u(\vec{x})$ обладает на границе S_E области E правильной нормальной производной.

Приведенные выше рассуждения относятся к области, расположенной внутри поверхности S_E . Но аналогично можно ввести понятие правильной нормальной производной для области E , лежащей вне поверхности S_E . Таким образом, для S_E можно рассматривать правильные нормальные производные при стремлении \vec{x}' к $\vec{x} \in S_E$ как изнутри, так и извне S_E , которые мы будем обозначать $(\partial u/\partial n)_-$ и $(\partial u/\partial n)_+$ соответственно.

Возвратившись к потенциалу простого слоя, запишем его нормальную производную

$$\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \int_{S_E} \mu(y) \frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|} dS_E, \quad (34.2)$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к поверхности S_E , проведенная из точки \vec{x} . Результат дифференцирования интеграла в (34.2) существенным

образом зависит от положения точки \vec{x} . Если $\vec{x} \notin S_E$, то в силу гармоничности $V(\vec{x})$ вне S_E можно записать

$$\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial n} = \int_{S_E} \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|} \right) dS_E = \int_{S_E} \mu(y) \frac{\cos \psi}{|\vec{y} - \vec{x}|^2} dS_E, \quad (34.3)$$

где ψ – угол между вектором $\vec{y} - \vec{x}$ и внешней нормалью \vec{n} к S_E , проведенной из точки \vec{x} . Предельные значения нормальной производной (34.3) при $\vec{x} \notin S_E$, стремящейся к $\vec{x} \in S_E$ извне и изнутри, при условии их существования обозначим через $(\partial V(\vec{x})/\partial n)_+$ и $(\partial V(\vec{x})/\partial n)_-$ соответственно.

Если в (34.2) точка $\vec{x} \in S_E$, то операции дифференцирования и интегрирования нельзя поменять местами. Тем не менее, если формально рассматривать (34.3) для $\vec{x} \in S_E$, то этот интеграл равномерно сходится, если S_E – поверхность Ляпунова. Последнее вытекает из того, что для $\vec{x} \in S_E$ углы φ и ψ совпадают и, следовательно, можно воспользоваться оценкой (33.11), как это было сделано при рассмотрении потенциала двойного слоя. В силу равномерной сходимости интеграла (34.3) для $\vec{x} \in S_E$ он будет представлять непрерывную функцию, для которой мы сохраним обозначение $(\partial V/\partial n)_{S_E}$ и которую мы будем называть прямым значением нормальной производной потенциала простого слоя на поверхности S_E (хотя ее и нельзя в этом случае рассматривать как нормальную производную потенциала простого слоя для $\vec{x} \in S_E$).

Сохранив нумерацию свойств потенциала простого слоя, начатую ранее, сформулируем свойство, описывающее разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.

Свойство 4. Потенциал простого слоя (30.3) с непрерывной плотностью $\mu(\vec{x})$ на поверхности Ляпунова S_E имеет правильные нормальные производные $(\partial V/\partial n)_+$ и $(\partial V/\partial n)_-$ как извне, так и изнутри ее, связанные с прямым значением нормальной производной $(\partial V/\partial n)_{S_E}$ следующими соотношениями:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_+ (\vec{x}) = \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{S_E} (\vec{x}) - 2\pi\mu(\vec{x}); \quad (34.4)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_- (\vec{x}) = \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{S_E} (\vec{x}) + 2\pi\mu(\vec{x}). \quad (34.5)$$

Доказательство этих соотношений аналогично доказательству свойства 3 потенциала двойного слоя, описывающего разрыв (скачок) потенциала двойного слоя на поверхности S_E .

Из суммы и разности (34.4) и (34.5) следуют соотношения

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_- (\vec{x}) - \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_+ (\vec{x}) = 4\pi\mu(\vec{x}); \quad (34.6)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_- (\vec{x}) + \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_+ (\vec{x}) = 2 \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{S_E} (\vec{x}). \quad (34.7)$$

Иногда вместо производных по нормали \vec{n} требуются производные по произвольному направлению \vec{l} , образующему с ней угол θ . В этом случае формулы (34.6) и (34.7) принимают вид

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_- (\vec{x}) - \left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_+ (\vec{x}) = 4\pi\mu(\vec{x}) \cos \theta; \quad (34.8)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_- (\vec{x}) + \left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_+ (\vec{x}) = 2\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{S_E} (\vec{x}), \quad (34.9)$$

откуда следует, что производная по касательной, в отличие от производной по нормали, не испытывает разрыва при переходе через поверхность простого слоя.

Для рассмотренного выше класса поверхностей введение понятия нормальной производной позволяет обобщить теорему 22.1.

Теорема 34.1. Если $u(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$ — гармонические в E функции, обладающие правильными нормальными производными, то для них справедливы формулы Грина (22.1), (22.2).

Доказательство. Применим формулы (22.1), (22.2) к любой подобласти E' , ограниченной поверхностью S'_E . Перейдя в этих формулах к пределу при $\Delta l \rightarrow 0$, убеждаемся в справедливости теоремы.

Теоремы 24.9, 24.10 также остаются справедливыми в предположении, что решения задач Неймана имеют правильные нормальные производные.

35. Логарифмический потенциал (плоский случай)

В процессе рассмотрения свойств потенциалов мы неоднократно обращались к сферически-симметричным распределениям зарядов, масс и т.д. Остановимся теперь более подробно на распределениях, обладающих цилиндрической симметрией. Рассмотрим объемный потенциал, создаваемый бесконечно длинным цилиндром с плотностью $\rho(\vec{x})$, и потенциалы простого и двойного слоя, создаваемые цилиндрическими поверхностями с плотностями $\mu(\vec{x})$ и $\nu(\vec{x})$. Предположим, что функции $\rho(\vec{x})$, $\mu(\vec{x})$ и $\nu(\vec{x})$ не зависят от длины цилиндра или цилиндрической поверхности. В результате создаваемые ими потенциалы являются фактически функциями двух переменных. Поскольку вся теория трехмерного потенциала была построена на основе потенциала точечного заряда, рассмотрим следующий пример.

Пример 35.1. Найти потенциал бесконечно длинной заряженной нити, вытянутой вдоль оси x_3 , с линейной плотностью $1/(4\pi)$.

Решение. Бесконечно длинную нить заменим нитью конечной длины $2N$, вытянутой вдоль оси x_3 между координатами $x_3 = -N$ и $x_3 = N$. Тогда плотность $\rho(\vec{x})$ можно записать в виде

$$\rho(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\delta(x_1)\delta(x_2)\theta(N - |x_3|), \quad (35.1)$$

где $\theta(\zeta)$ – функция Хевисайда. Для нахождения искомого потенциала воспользуемся формулой (30.2), подставив в нее плотность (35.1):

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-N}^N \frac{\delta(y_1)\delta(y_2)\theta(N - |y_3|)}{|\vec{x} - \vec{y}|} dy = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-N}^N \frac{dy_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - y_3)^2}} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{x_3 - N + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - N)^2}}{x_3 + N + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + N)^2}}. \end{aligned}$$

Если в полученном выражении величину N устремить к бесконечности, то исходный интеграл расходится. Эту расходимость можно устранить «смещением точки отсчета» потенциала, т.е. добавлением к нему величины $\ln |2N|/(2\pi)$. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{2\pi} \ln |\vec{x}|, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Сравнив полученное выражение с (23.15), видим, что фундаментальное решение двумерного уравнения Лапласа совпадает с потенциалом бесконечной заряженной нити.

Отталкиваясь от фундаментального решения уравнения Лапласа $\mathcal{E}_2(\vec{x}) = \ln |\vec{x}|/(2\pi)$, можно построить теорию плоского, или логарифмического, потенциала.

◆ Интеграл

$$U(\vec{x}) = \int_E \rho(\vec{y}) \ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y} \quad (35.2)$$

называется логарифмическим потенциалом, интеграл

$$V(\vec{x}) = \int_{\gamma_E} \mu(\vec{y}) \ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} dl_y \quad (35.3)$$

– потенциалом простого слоя и, наконец, интеграл

$$W(\vec{x}) = \int_{\gamma_E} \nu(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} dl_y \quad (35.4)$$

– потенциалом двойного слоя. Если γ_E – кривая Ляпунова, то с учетом интеграла Гаусса (33.26), который на плоскости имеет вид

$$W(\vec{x}) = \int_{\gamma_E} \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} dl_y = \begin{cases} -2\pi, & \vec{x} \in E; \\ -\pi, & \vec{x} \in \gamma_E; \\ 0, & \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{E}, \end{cases} \quad (35.5)$$

все основные свойства трехмерных потенциалов можно без труда переформулировать для логарифмических потенциалов (35.2)–(35.4).

36. Применение теории потенциала к решению краевых задач

Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u(\vec{x}) = -F(\vec{x}), \quad \vec{x} \in E. \quad (36.1)$$

Пусть

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_E \frac{F(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y} \quad (36.2)$$

– объемный потенциал с плотностью $F(\vec{x})$. Поскольку, согласно (31.29) (свойство 3), потенциал (36.2) удовлетворяет уравнению Пуассона (36.1), то подстановка

$$u(\vec{x}) = v(\vec{x}) + V(\vec{x}) \quad (36.3)$$

сводит краевые задачи для уравнения Пуассона на функцию $u(\vec{x})$ к соответствующим краевым задачам для уравнения Лапласа на функцию $v(\vec{x})$. Поэтому перейдем к рассмотрению краевых задач для уравнения Лапласа. Воспользовавшись изложенной выше теорией потенциала, сведем краевые задачи к интегральным уравнениям, получив, таким образом, еще один метод их решения.

Итак, пусть S_E – замкнутая поверхность Ляпунова, ограничивающая две области: внутреннюю E и внешнюю $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{E}$.

Решение внутренней (внешней) задачи Дирихле

$$\Delta u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in E \quad (\text{или } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{E}), \quad (36.4)$$

$$u(\vec{x})|_{S_E} = f(\vec{x})|_{S_E} \quad (36.5)$$

будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$u(\vec{x}) = W(\vec{x}) = \int_{S_E} \nu(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y \quad (36.6)$$

с неизвестной непрерывной на S_E плотностью $\nu(\vec{y})$. Решение задачи в виде (36.6) заведомо удовлетворяет уравнению Лапласа, так как потенциал двойного слоя является гармонической вне S_E функцией и для нее справедливо условие $W(\infty) = 0$. Граничные условия (36.5) будут выполнены, если подобрать такую плотность $\nu(\vec{x})$, что

$$f(\vec{x}) = W_{\pm}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_E, \quad (36.7)$$

для внутренней и внешней задачи Дирихле, соответственно. Поскольку предельные значения потенциала двойного слоя $W_{\pm}(\vec{x})$ удовлетворяют уравнениям (33.31) (свойство 3), то подстановка их в (36.7) дает для внутренних задач

$$f(\vec{x}) = -2\pi\nu(\vec{x}) + \int_{S_E} \nu(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y, \quad \vec{x} \in S_E, \quad (36.8)$$

а для внешних

$$f(\vec{x}) = 2\pi\nu(\vec{x}) + \int_{S_E} \nu(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS_y, \quad \vec{x} \in S_E. \quad (36.9)$$

Уравнения (36.8), (36.9) представляют собой интегральные уравнения Фредгольма (см. разд. «Уравнения Фредгольма») относительно неизвестной плотности $\nu(\vec{x})$ и полностью их определяют. Обозначив

$$K(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) = \frac{\cos \varphi}{2\pi|\vec{x} - \vec{y}|^2}, \quad (36.10)$$

запишем уравнения (36.8), (36.9) в единой форме с помощью параметра $\lambda = \pm 1$:

$$\nu(\vec{x}) = \lambda \int_{S_E} K(\vec{x}, \vec{y}) \nu(\vec{y}) dS_y + g(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_E. \quad (36.11)$$

Для внутренней задачи $\lambda = 1$ и $g(\vec{x}) = -f(\vec{x})/(2\pi)$, а для внешней $\lambda = -1$ и $g(\vec{x}) = f(\vec{x})/(2\pi)$.

Аналогично решение внутренней (внешней) задачи Неймана

$$\Delta u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in E \quad (\text{или } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{E}), \quad (36.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_E} = \varphi(\vec{x}) \Big|_{S_E} \quad (36.13)$$

ищем в виде потенциала простого слоя

$$u(\vec{x}) = V(\vec{x}) = \int_{S_E} \frac{\mu(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS_y \quad (36.14)$$

с неизвестной непрерывной плотностью $\mu(\vec{y})$. Потенциал простого слоя заведомо является гармоническим вне S_E и удовлетворяет условию $V(\infty) = 0$. Для того чтобы выполнялись граничные условия (36.13), потребуем выполнения равенств

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\pm}(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_E. \quad (36.15)$$

Поскольку потенциал простого слоя обладает правильными нормальными производными с предельными значениями, удовлетворяющими уравнениям (33.4), (33.5), то подстановка их в (36.15) дает

$$\mu(\vec{x}) = \lambda \int_{S_E} L(\vec{x}, \vec{y}) \mu(\vec{y}) dS_y + p(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_E. \quad (36.16)$$

Здесь

$$L(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) = \frac{\cos \psi}{2\pi |\vec{x} - \vec{y}|^2} \quad (36.17)$$

– ядро уравнения и $\lambda = -1$ соответствует внутренней задаче с $p(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})/2\pi$, а $\lambda = 1$ – внешней с $p(\vec{x}) = -\varphi(\vec{x})/2\pi$.

Ядра (36.10) и (36.17) получаются одно из другого перестановкой аргументов, а так как они еще и вещественны, то они являются сопряженными (союзными), т.е.

$$L(\vec{x}, \vec{y}) = K^*(\vec{x}, \vec{y}). \quad (36.18)$$

С учетом этого уравнение (36.16) можно переписать в виде

$$\mu(\vec{x}) = \lambda \int_{S_E} K^*(\vec{x}, \vec{y}) \mu(\vec{y}) dS_y + p(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_E. \quad (36.19)$$

Таким образом, для первой и второй краевых задач мы получили две пары ($\lambda = \pm 1$) попарно сопряженных интегральных уравнения (36.11) и (36.19).

Что касается третьей внутренней (внешней) краевой задачи

$$\Delta u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in E \quad (\text{или } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{E}), \quad (36.20)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\Big|_{S_E} = \psi(\vec{x})\Big|_{S_E}, \quad (36.21)$$

где $h > 0$ и \vec{n} – нормаль, внешняя к E (или $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{E}$), то ее решение также ищем в виде потенциала простого слоя (36.14). Подобно предыдущему, приходим к интегральным уравнениям

$$\mu(\vec{x}) = \lambda \int_{S_E} \left[K^*(\vec{x}, \vec{y}) + \frac{h(\vec{x})}{2\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \right] \mu(\vec{y}) dS_y + q(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_E, \quad (36.22)$$

где $\lambda = -1$ соответствует внутренней краевой задаче с $q(\vec{x}) = \psi(\vec{x})/2\pi$, а $\lambda = 1$ – внешней с $q(\vec{x}) = -\psi(\vec{x})/2\pi$.

♦ Интегральные уравнения (36.11), (36.19), (36.22) называются интегральными уравнениями теории потенциала.

Поскольку, согласно (36.9)–(36.12), ядро $K(\vec{x}, \vec{y})$ удовлетворяет оценке

$$|K(\vec{x}, \vec{y})| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \right| \leq \frac{A}{2\pi |\vec{x} - \vec{y}|^{2-\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad (36.23)$$

то оно является полярным, и, следовательно, к интегральным уравнениям теории потенциала применимы все положения теории интегральных уравнений (см. гл. «Интегральные уравнения»).

Решения задач на плоскости, т.е. задач (36.4), (36.5) и (36.12), (36.13) в \mathbb{R}^2 , также ищут в виде (36.6) и (36.14), соответственно, с заменой фундаментального решения

$$\mathcal{E}_3(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad \text{на} \quad \mathcal{E}_2(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\vec{x} - \vec{y}|.$$

В результате уравнения (36.11) и (36.19) запишутся в виде

$$\nu(\vec{x}) = \lambda \int_{S_E} K(\vec{x}, \vec{y}) \nu(\vec{y}) dS_y + g(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_E; \quad (36.24)$$

$$\mu(\vec{x}) = \lambda \int_{S_E} K^*(\vec{x}, \vec{y}) \mu(\vec{y}) dS_y + p(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_E, \quad (36.25)$$

где полярные союзные ядра равны:

$$\begin{aligned} K(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{\cos \varphi}{\pi |\vec{x} - \vec{y}|}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in S_E, \\ K^*(\vec{x}, \vec{y}) &= K(\vec{y}, \vec{x}) = \frac{\cos \psi}{\pi |\vec{x} - \vec{y}|}, \end{aligned} \quad (36.26)$$

при этом по-прежнему $\lambda = 1$ соответствует внутренней задаче Дирихле, а $\lambda = -1$ – внешней. Напротив, $\lambda = -1$ соответствует внутренней задаче Неймана, а $\lambda = 1$ – внешней.

Подробное рассмотрение этих задач возможно в рамках теории интегральных уравнений (см. гл. <Интегральные уравнения>), где можно проследить связь чисел λ с характеристическими числами соответствующих интегральных уравнений. Однако для простейших областей решения уравнений (36.24) и (36.25) удастся найти непосредственно, не обращаясь к специальным методам решения интегральных уравнений.

Пример 36.1. Методом потенциалов найти решение внутренней задачи Дирихле для круга.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\Delta u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in E : |\vec{x}| < R, \quad E \subset \mathbb{R}^2; \quad (36.27)$$

$$u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_E : |\vec{x}| = R, \quad (36.28)$$

где R – радиус круга.

Согласно (36.6), решение задачи ищем в виде потенциала двойного слоя

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) = W(\vec{x}) &= - \int_{S_E} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \nu(\vec{y}) dS_y = \\ &= \int_{S_E} \frac{\cos \varphi}{|\vec{x} - \vec{y}|} \nu(\vec{y}) dS_y, \quad \vec{x} \in S_E. \end{aligned} \quad (36.29)$$

Для плотности $\nu(\vec{x})$ справедливо интегральное уравнение (36.24) с $\lambda = 1$, т.е.

$$\nu(\vec{x}) = \int_{S_E} \frac{\cos \varphi}{\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \nu(\vec{y}) dS_y, \quad \vec{x} \in S_E. \quad (36.30)$$

Поскольку для $\vec{x} \in S_E$ справедливо равенство (см. рис. 65)

$$\frac{\cos \varphi}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -\frac{1}{2R},$$

то ядро

$$K(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\cos \varphi}{\pi |\vec{x} - \vec{y}|} = -\frac{1}{2\pi R}, \quad (36.31)$$

и уравнение (36.30) примет вид

$$\nu(\vec{x}) = -\frac{1}{2\pi R} \int_{S_E} \nu(\vec{y}) dS_y - \frac{f(\vec{x})}{\pi}, \quad \vec{x} \in S_E. \quad (36.32)$$

Нетрудно заметить, что его решение можно искать в виде (подробности приведены в разд. «Интегральные уравнения с вырожденным ядром»)

$$\nu(\vec{x}) = -\frac{1}{\pi} f(\vec{x}) + A, \quad (36.33)$$

где A – некоторая постоянная, определяемая подстановкой (36.33) в (36.32). Действительно, получается

$$-\frac{1}{\pi} f(\vec{x}) + A = -\frac{1}{2\pi R} \int_{S_E} \left(-\frac{1}{\pi} f(\vec{y}) + A \right) dS_y - \frac{f(\vec{x})}{\pi}, \quad \vec{x} \in S_E,$$

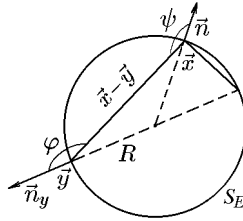


Рис. 65

или

$$A = \frac{1}{4\pi^2 R} \int_{S_E} f(\vec{y}) dS_y. \quad (36.34)$$

Таким образом, для функции $\nu(\vec{x})$, являющейся решением интегрального уравнения (36.30), получим

$$\nu(\vec{x}) = -\frac{1}{\pi} f(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi^2 R} \int_{S_E} f(\vec{y}) dS_y. \quad (36.35)$$

Подставив (36.35) в (36.29), найдем решение внутренней задачи Дирихле ($\vec{x} \in E$) в виде

$$u(\vec{x}) = \int_{S_E} \left\{ -\frac{1}{\pi} f(\vec{y}) + \frac{1}{4\pi^2 R} \int_{S_E} f(\vec{y}') dS_{y'} \right\} \frac{\cos \varphi}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS_y. \quad (36.36)$$

Преобразуем правую часть (36.36), учитывая, что $\vec{x} \in E$ [а не S_E , как в (36.30)]:

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= -\frac{1}{\pi} \int_{S_E} f(\vec{y}) \frac{\cos \varphi}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS_y + \frac{1}{4\pi^2 R} \int_{S_E} f(\vec{y}') dS_{y'} \int_{S_E} \frac{\cos \varphi}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS_y = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{S_E} f(\vec{y}) \frac{\cos \varphi}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS_y - \frac{1}{2\pi R} \int_{S_E} f(\vec{y}') dS_{y'} = \\ &= -\frac{1}{2\pi R} \int_{S_E} \left[\frac{2R \cos \varphi}{|\vec{x} - \vec{y}|} + 1 \right] f(\vec{y}) dS_y = \\ &= -\frac{1}{2\pi R} \int_{S_E} \frac{2R|\vec{x} - \vec{y}| \cos \varphi + |\vec{x} - \vec{y}|^2}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} f(\vec{y}) dS_y. \end{aligned} \quad (36.37)$$

С использованием теоремы косинусов для треугольника xOy (рис. 66)

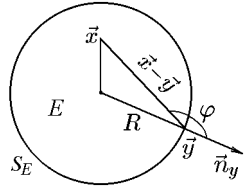


Рис. 66

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 + R^2 + 2R|\vec{x} - \vec{y}| \cos \varphi$$

интеграл (36.37) приводится к виду

$$u(\vec{x}) = -\frac{1}{2\pi R} \int_{S_E} \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} f(\vec{y}) dS_y. \quad (36.38)$$

Выражение (36.38) представляет собой интеграл Пуассона для внутренней задачи Дирихле, полученный ранее методами Фурье и функций Грина.

Аналогично с помощью потенциалов решается и внешняя задача Дирихле.

Пример 36.2. Методом потенциалов найти решение внутренней задачи Неймана для круга.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\Delta u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in E : |\vec{x}| < R, \quad E \subset \mathbb{R}^2; \quad (36.39)$$

$$\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_E : |\vec{x}| = R, \quad \int_{S_E} f(\vec{y}) dS_y = 0, \quad (36.40)$$

где R – радиус круга.

Согласно (36.14), решение задачи ищем в виде потенциала простого слоя

$$u(\vec{x}) = V(\vec{x}) = \int_{S_E} f(\vec{y}) \ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \mu(\vec{y}) dS_y. \quad (36.41)$$

Для плотности $\mu(\vec{x})$ справедливо интегральное уравнение (36.25) с $\lambda = -1$ и ядром $K^*(x, y)$ из (36.26):

$$\mu(\vec{x}) = -\frac{1}{\pi} \int_{S_E} \frac{\cos \varphi}{\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \mu(\vec{y}) dS_y + \frac{f(\vec{x})}{\pi}, \quad (36.42)$$

которое с учетом (36.31) принимает вид

$$\mu(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi R} \int_{S_E} \mu(\vec{y}) dS_y + \frac{f(\vec{x})}{\pi}, \quad \vec{x} \in S_E. \quad (36.43)$$

Решение интегрального уравнения (36.43) будем искать так же, как решение уравнения (36.32). В результате получим

$$\mu(\vec{x}) = \frac{1}{\pi} f(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi^2 R} \int_{S_E} f(\vec{y}) dS_y,$$

а с условием разрешимости задачи (36.40)

$$\mu(\vec{x}) = \frac{1}{\pi} f(\vec{x}). \quad (36.44)$$

Подставив (36.44) в (36.41), найдем решение внутренней задачи Неймана в виде интеграла

$$u(\vec{x}) = C + \frac{1}{\pi} \int_{S_E} f(\vec{y}) \ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS_y$$

или

$$u(\vec{x}) = C - \frac{1}{\pi} \int_{S_E} f(\vec{y}) \ln |\vec{x} - \vec{y}| dS_y, \quad (36.45)$$

представляющего собой интеграл Дини для внутренней задачи Неймана, полученный ранее методом Фурье.

Аналогично с помощью потенциалов решается внешняя задача Неймана.

Приняв во внимание, что в полярной системе координат для окружности S_E имеем

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (|\vec{x}|, \varphi); & \vec{y} &= (R, \psi); \\ |\vec{x} - \vec{y}| &= \sqrt{|\vec{x}|^2 + R^2 - 2|\vec{x}|R \cos(\varphi - \psi)}; & dS_y &= R d\psi, \end{aligned}$$

запишем интегралы (36.38) и (36.45) в виде

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2 - |\vec{x}|^2)f(\psi)}{|\vec{x}|^2 + R^2 - 2|\vec{x}|R \cos(\varphi - \psi)} d\psi, & |\vec{x}| < R; \\ u(\vec{x}) &= C - \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \ln[|\vec{x}|^2 + R^2 - 2|\vec{x}|R \cos(\varphi - \psi)] d\psi, & |\vec{x}| < R, \end{aligned}$$

полностью совпадающем с видом интегралов Пуассона (26.2) и Дини (26.5).

Пример 36.3. Методом потенциалов найти решение внутренней задачи Дирихле для полупространства.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\Delta u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in E : x_3 > 0, \quad E \subset \mathbb{R}^3; \quad (36.46)$$

$$\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_E : x_3 = 0. \quad (36.47)$$

Решение задачи ищем в виде потенциала двойного слоя

$$u(\vec{x}) = W(\vec{x}) = \int_{S_E} \frac{\cos \varphi}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \nu(\vec{y}) dS_y, \quad \vec{x} \in E. \quad (36.48)$$

В случае полупространства внутренняя и внешняя задачи эквивалентны, поэтому рассмотрим только внутреннюю. Интегральное уравнение (36.8) для плотности $\nu(\vec{x})$ при $\lambda = 1$ примет вид

$$\nu(\vec{x}) = \int_{S_E} \frac{\cos \varphi}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \nu(\vec{y}) dS_y - \frac{f(\vec{x})}{2\pi}, \quad \vec{x} \in S_E. \quad (36.49)$$

Приняв во внимание, что в интегралах (36.48) и (36.49) $\vec{y} \in S_E$, из треугольника axy (рис. 67) следует

$$\cos \varphi = -\sin \alpha = \begin{cases} -\frac{x_3}{|\vec{x} - \vec{y}|}, & \vec{x} \in E : x_3 > 0, \\ 0, & \vec{x} \in S_E : x_3 = 0. \end{cases}$$

Но тогда

$$\nu(\vec{x}) = -\frac{f(\vec{x})}{2\pi}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) = W(\vec{x}) &= \frac{x_3}{2\pi} \int_{S_E} \frac{f(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} dS_y = \\ &= \frac{x_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (36.50)$$

Напомним, что решение (36.50) имеет смысл, если для функции $f(\vec{x})$ при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка $f(\vec{x}) = O(|\vec{x}|^{-\kappa})$, $\kappa > 0$ [см. оценку (33.30)].

Формулу (36.50) можно получить и с помощью функции Грина задачи Дирихле для полупространства (28.19). Действительно, продифференцировав (28.19):

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n} \Big|_{y_3=0} &= -\frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial y_3} \Big|_{y_3=0} = \\ &= -\frac{x_3}{2\pi[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

и подставив полученное выражение в (28.11), приходим к (36.50).

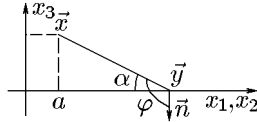


Рис. 67

Уравнения гиперболического типа

37. Задача Коши для одномерного однородного волнового уравнения. Формула Даламбера

Рассмотрим одномерное гиперболическое уравнение на бесконечном промежутке, описывающее свободные колебания бесконечно длинной струны:

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0, & -\infty < x < \infty, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x). \end{aligned} \quad (37.1)$$

Теорема 37.1. *Решение задачи Коши (37.1) имеет вид*

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy. \quad (37.2)$$

Формула (37.2) называется формулой Даламбера.

Доказательство. Характеристическое уравнение для исходного уравнения (37.1) имеет вид (см. главу 2)

$$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$$

и эквивалентно двум уравнениям

$$dx - a dt = 0, \quad dx + a dt = 0,$$

общие интегралы которых записываются в виде

$$\Psi_1(x, t) = x - at = C_1, \quad \Psi_2(x, t) = x + at = C_2 \quad (37.3)$$

и, как будет показано ниже, играют важную роль в решении задачи.

На плоскости xOt введем новые переменные

$$\alpha = x + at, \quad \beta = x - at. \quad (37.4)$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial \alpha} - a \frac{\partial u}{\partial \beta}$$

и, соответственно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right).$$

Подставив полученные выражения в уравнение (37.1), преобразуем его к виду

$$-4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = 0. \quad (37.5)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \chi(\beta), \quad u(\alpha, \beta) = \int \chi(\beta) d\beta + f(\alpha).$$

Таким образом,

$$u(\alpha, \beta) = f(\alpha) + g(\beta),$$

где $f(\alpha)$ и $g(\beta)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции. Возвратившись к исходным переменным, получим

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at). \quad (37.6)$$

Определим $f(x)$, $g(x)$ так, чтобы выполнялись начальные условия. Из начальных условий (37.1) найдем, что

$$f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad a[f'(x) - g'(x)] = \psi(x)$$

и

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy + C.$$

Здесь C — произвольная постоянная. Следовательно,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy + \frac{C}{2}, \\ g(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy - \frac{C}{2}. \end{aligned} \quad (37.7)$$

Подставив (37.7) в (37.6), получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(y) dy + \\ &+ \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(y) dy, \end{aligned}$$

откуда следует формула (37.2).

◇ Из формулы Даламбера следует единственность решения поставленной задачи (37.1).

◇ Функция $u(x, t)$, определяемая формулой Даламбера (37.2), описывает процесс распространения начального отклонения и влияние начальной скорости на этот процесс. Действительно, характеристики (37.3), как следует из (37.4) и (37.6), являются линиями уровня функций $g(x - at)$ и $f(x + at)$. Вдоль этих кривых значения функций $g(C_1)$ и $f(C_2)$ постоянны. Графически это означает, что отклонение струны от положения равновесия, зафиксированное в точке x и равное $g(C_1)$, с течением времени равномерно перемещается вдоль оси Ox со скоростью a в положительном направлении (вправо), сохраняя свое значение. Соответственно, отклонение $f(C_2)$ равномерно перемещается вдоль оси Ox с той же скоростью a в отрицательном направлении (влево). Волны, описываемые такими функциями, в физике принято называть бегущими: прямую – бегущей вправо, обратную – бегущей влево. Функция $u(x, 0)$ дает профиль струны в момент $t = 0$.

Таким образом, общее решение задачи Коши для бесконечной струны есть суперпозиция двух волн $f(x + at)$ и $g(x - at)$, одна из которых распространяется вправо со скоростью a , а другая – влево с той же скоростью.

Пример 37.1. В начальный момент времени неограниченная

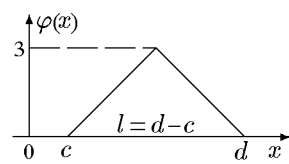


Рис. 68

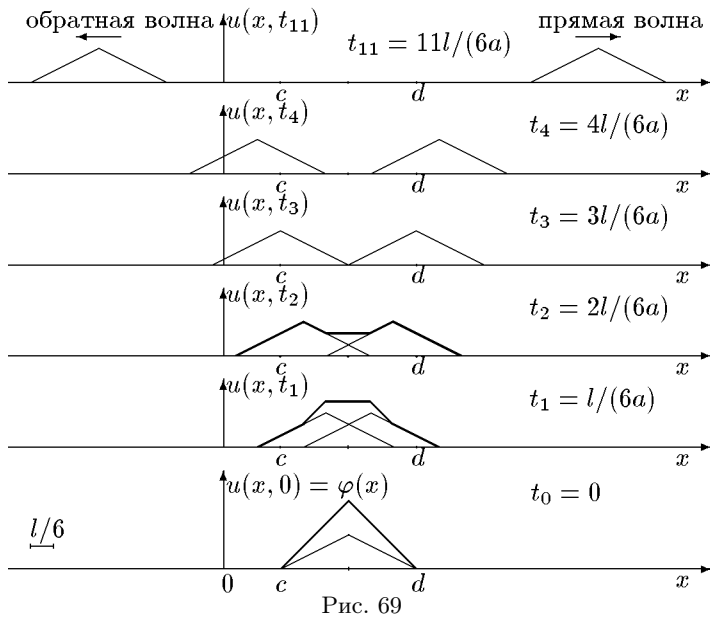
струна имеет форму, изображенную на рис. 68. Построить профили струны для моментов времени $t_k = lk/6a$, где $l = d - c$, а $k = 1, 2, 3, 4, 11$. Указать область, в которой решение задачи $u(x, t)$ равно нулю для $t > 0$.

Решение. Согласно условию задачи, функция $\psi(x) \equiv 0$. Тогда в соответствии с (37.2) имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] = \frac{1}{2}\varphi(x - at) + \frac{1}{2}\varphi(x + at),$$

где $\varphi(x)$ задана графически (см. рис. 68).

Прямая $\frac{1}{2}\varphi(x - at)$ и обратная $\frac{1}{2}\varphi(x + at)$ волны в начальный момент времени $t = 0$ совпадают, имея амплитуду $\frac{1}{2}\varphi(x)$. За время $t > 0$ график прямой волны переместится без деформации вправо на расстояние at , а график обратной волны – влево на at . Складывая графики перемещенных прямой и обратной волн в фиксированные моменты времени t_k , получим профиль струны в эти моменты времени (рис. 69).



Для решения второй части задачи можно использовать рис. 69. Но, поскольку моменты времени t_k фиксированы, то полную информацию об областях, где $u(x, t) = 0$, можно получить, изобразив процесс распространения колебаний на фазовой плоскости xOt (рис. 70). Отложим на оси Ox плоскости xOt отрезок $[c, d]$, соответствующий области первоначального отклонения. Из точки d строим характеристику $x - at = d$, соответствующую перемещению переднего фронта прямой волны. Из точки c строим характеристику $x - at = c$, описывающую перемещение заднего фронта прямой волны. Область между этими характеристиками есть область прохождения прямой волны. Аналогично характеристики $x + at = c$, $x + at = d$ соответствуют движению переднего и заднего фронтов обратной волны, а область между ними является областью прохождения обратной волны. Таким образом, указанные характеристики выделяют три области I, II, III фазовой плоскости, где решение задачи $u(x, t)$ равно нулю.

Если на фазовой плоскости провести прямые $t = t_k$, то пересечения этих прямых с характеристиками указывают области распространения первоначального отклонения от оси Ox . С другой стороны, если зафиксировать координату x , то мож-

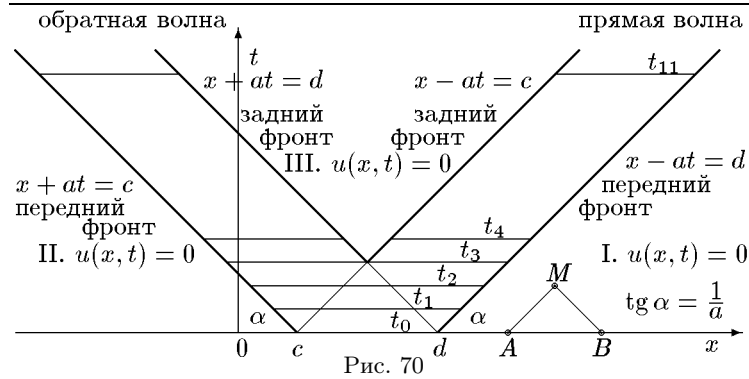


Рис. 70

но проследить процесс распространения колебаний в зависимости от t . Так, наблюдатель, помещенный в точку $x > d$, в начальный момент времени видит струну в положении равновесия, затем регистрирует прохождение переднего и заднего фронтов прямой волны и снова наблюдает струну в положении равновесия. Аналогичную картину видит наблюдатель, помещенный в точку $x < c$. В точке $c < x < d$ наблюдатель регистрирует взаимодействие задних фронтов волн, после чего тоже наблюдает струну в положении равновесия. Во всех случаях в любой конечной точке x по истечении определенного времени струна возвращается в положение равновесия. В этом случае говорят, что справедлив принцип Гюйгенса.

Все сказанное справедливо, естественно, в предположении, что струна является бесконечной и граничные условия не оказывают влияния на ее поведение в области конечных значений x (как будет показано в следующем параграфе, волны, вызываемые граничными условиями, также распространяются со скоростью a , поэтому они просто не успевают доходить до рассматриваемого участка). Это позволяет оценить длину струны L условием $L \gg aT$, где $]0, T[$ — интервал времени, на котором рассматривается процесс колебаний.

В заключение приведем геометрическую интерпретацию формулы Даламбера для решения рассматриваемой задачи: решение $u(M)$ в фиксированной точке $M(x_M, t_M)$ фазовой плоскости определяется первоначальными отклонениями лишь в точках $A(x_M - at_M, 0)$ и $B(x_M + at_M, 0)$, которые получаются пересечением оси Ox с характеристиками, проходящими через точку M (рис. 70). Треугольник MAB называют основным характеристическим треугольником для точки M . С точки зре-

ния наблюдателя, находящегося в вершине M характеристического треугольника, струну можно считать бесконечной, если точка M удалена от концов струны на расстояние большее, чем at_M . Точки A и B — это точки влияния начального данного $\varphi(x)$ на значение решения $u(x, t)$ в точке M .

Пример 37.2. Неограниченной струне, находящейся в положении равновесия, на отрезке $c \leq x \leq d$ сообщена поперечная начальная скорость $v_0 = \text{const}$, вне этого отрезка начальная скорость равна нулю. Построить профиль струны для моментов времени $t_k = kl/4a$, где $l = d - c$, а $k = 0, 1, 2, 3, 4, 8$. Указать область, в которой решение $u(x, t)$ равно нулю для $t > 0$, и исследовать его характер при $l \rightarrow 0$.

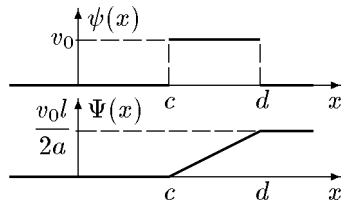


Рис. 71

Решение. По формуле Даламбера (37.2) с учетом $\varphi(x) = 0$ имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy = \Psi(x + at) - \Psi(x - at), \quad (37.8)$$

где $\Psi(x)$ есть первообразная функции $\psi(x)$, которую определим формулами

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy = \begin{cases} 0, & -\infty < x < c, \\ \frac{v_0(x - c)}{2a}, & c \leq x \leq d, \\ \frac{v_0 l}{2a}, & d < x < +\infty. \end{cases} \quad (37.9)$$

Здесь $x_0 = c$ и $d - c = l$. На рис. 71 изображены графики функции $\psi(x)$ и ее первообразной $\Psi(x)$.

Профиль струны для моментов времени t_k может быть получен, согласно (37.8), вычитанием графика прямой волны $\Psi(x - at)$ из графика обратной волны $\Psi(x + at)$ и имеет вид, изображенный на рис. 72.

Для решения второй части задачи в фазовой плоскости xOt отложим на оси Ox отрезок $[c, d]$, соответствующий области действия начальной скорости v_0 . Из точки d строим характеристику $x - at = d$, описывающую движение переднего фронта

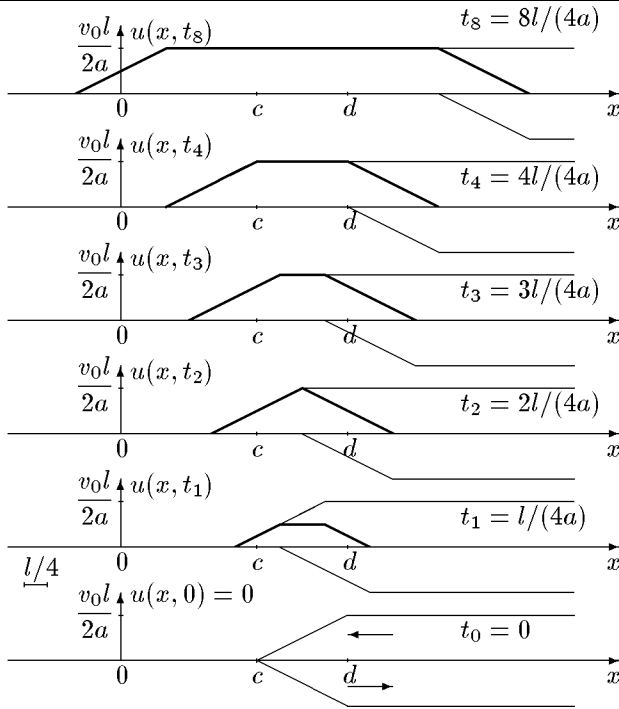
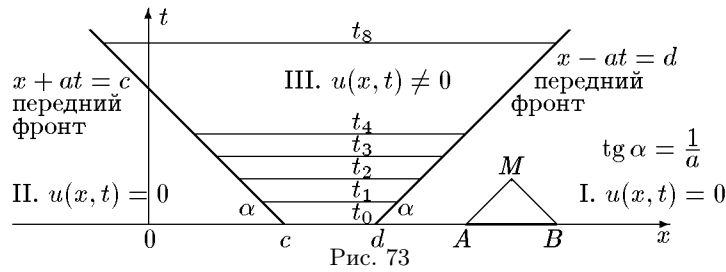


Рис. 72

прямой волны. Аналогично характеристика $x+at = c$ описывает перемещение переднего фронта обратной волны. Отметим, что волны, возникающие за счет первоначальных скоростей (импульсов), в отличие от волн, возникающих под действием первоначальных отклонений, в любой момент времени не имеют заднего фронта (ср. с предыдущим примером). В силу этого построенные характеристики выделяют на фазовой плоскости не три, а две области I, II, где решение $u(x, t) = 0$.

По этой же причине наблюдатель, помещенный в фиксированную конечную точку x , первоначально видит струну в положении равновесия, затем, по мере прохождения переднего фронта волны, регистрирует движение струны от положения равновесия до максимального отклонения, равного $v_0 l / 2a$, при котором струна «замирает». Такое поведение наблюдаемого участка струны напоминает смещение твердого тела на расстояние, соответствующее заданному импульсу. В этом случае говорят, что имеет место диффузия волн, нарушающая принцип Гюйгенса.



С учетом этого решение в фиксированной точке $M(x_M, t_M)$ (рис. 73) основного характеристического треугольника $MA B$ определится первоначальными скоростями не только в точках $A(x_M - at_M, 0)$, $B(x_M + at_M, 0)$, но во всех точках отрезка $[A, B]$.

Для нахождения решения при $l \rightarrow 0$ предположим, что суммарный импульс I , передаваемый струне в момент времени $t = 0$, равномерно распределен по отрезку $[c, d]$ с плотностью ρ и равен

$$I = \int_c^d v_0 \rho dx = v_0 \rho l.$$

Тогда первообразную (37.9) можно переписать в виде

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < c, \\ \frac{I(x - c)}{2al\rho}, & c \leq x \leq d, \\ \frac{I}{2a\rho}, & d < x < \infty, \end{cases}$$

откуда формальным переходом к пределу $l \rightarrow 0$ получим соотношение

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < c, \\ \frac{I}{2a\rho}, & c \leq x < \infty, \end{cases}$$

которое с помощью θ -функции (см. разд. «Примеры обобщенных функций» части II) можно записать в виде

$$\Psi(x) = \frac{I}{2a\rho} \theta(x - c).$$

В силу рассмотренного предельного перехода, схематично изображенного на рис. 74, процесс распространения волн,

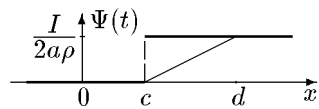


Рис. 74

соответствующий рис. 73, трансформируется к процессу, соответствующему рис. 75. Этот результат можно получить проще, если использовать дельта-функцию $\delta(x)$. Действительно, записав начальное

условие в виде

$$u_t(x, 0) = \frac{I}{\rho} \delta(x - c),$$

из формулы Даламбера (37.2) найдем решение

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{I}{\rho} \delta(x-c) dx = \frac{I}{2a\rho} [\theta(x+at-c) - \theta(x-at-c)],$$

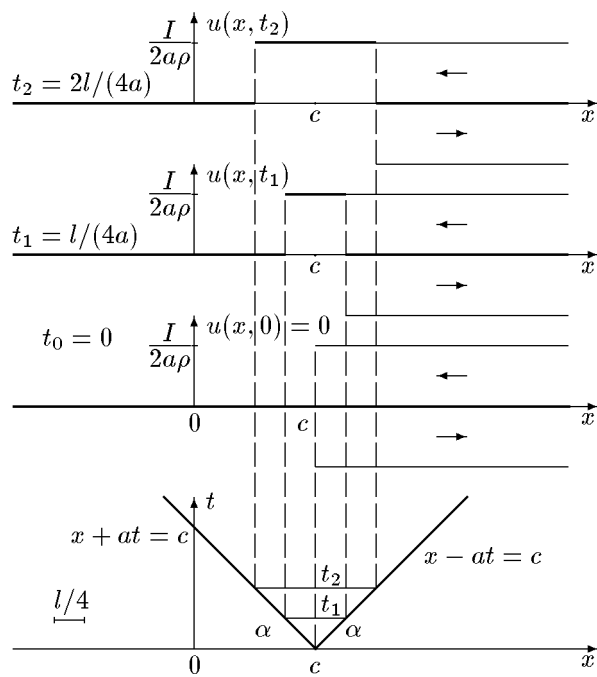


Рис. 75

график которого для моментов времени $t_1 = l/(4a)$, $t_2 = 2l/(4a)$ показан на рис. 75.

В рассмотренных выше примерах последовательно исследовался процесс распространения колебаний с начальными условиями $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = 0$ и $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$. Общий случай, когда оба начальных условия отличны от нуля, в силу линейности волнового уравнения представляет собой суперпозицию полученных решений.

Следует также отметить, что графики функции $u(x, t)$, фигурирующие в этих примерах, содержат ломаные линии и разрывы, что противоречит требованию непрерывной дифференцируемости функции $u(x, t)$ и ее частных производных до второго порядка включительно. Это противоречие можно рассматривать двояко. С одной стороны, можно считать, что в окрестностях излома функции являются гладкими и ломаные линии использованы для удобства построения. С другой стороны, можно рассматривать решение задачи (37.1) в классе обобщенных функций, допускающих такие решения, и, более того, в других физических интерпретациях (акустические колебания и др.), имеющих естественное физическое обоснование (ударные волны).

◇ Как правило, решение задачи Коши в обобщенной постановке выражается через обобщенные функции. Поэтому уравнение Даламбера действительно может иметь разрывные решения. Здесь мы ограничимся доказательством того факта, что разрывы могут находиться только на характеристиках.

Действительно, оператор Даламбера

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

из (37.1) можно представить в виде

$$\square = \widehat{L}_+ \widehat{L}_-,$$

где

$$\widehat{L}_+ = \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}, \quad \widehat{L}_- = \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x}$$

представляют собой операторы дифференцирования вдоль векторов $\vec{a}_+ = (a, 1)$ и $\vec{a}_- = (-a, 1)$. На фазовой плоскости xOt эти векторы параллельны характеристикам (37.3). Оператор Даламбера примет вид (37.5)

$$\square = \widehat{L}_+ \widehat{L}_- = -4a^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

Таким образом, оператор Даламбера \square можно рассматривать как композицию коммутирующих операторов \hat{L}_+ , \hat{L}_- дифференцирования вдоль характеристик. Следовательно, \square обращает в нуль любую функцию, постоянную вдоль характеристик, включая разрывную, что и подтверждает возможность существования разрывов только на характеристиках. Это утверждение достаточно наглядно иллюстрируется графиками рис. 75.

38. Теорема о единственности решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения

Лемма 38.1. Пусть функция $v(x, t)$ – классическое решение (см. гл. 3) смешанной задачи для одномерного волнового уравнения

$$\rho(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (38.1)$$

удовлетворяющее краевым и начальным условиям

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad v(x, 0) = \varphi(x), \quad v_t(x, 0) = \psi(x), \quad (38.2)$$

где $\rho(x) > 0$, $k(x) > 0$. Тогда функция

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2] dx \quad (38.3)$$

не зависит от времени, т.е. $E(t) = \text{const}$.

◇ Напомним, что классическое решение задачи (38.1), (38.2) есть функция $v(x, t)$, дважды непрерывно дифференцируемая на множестве $]0, l[\times]0, \infty[= W_\infty$, непрерывная вместе со своими первыми производными в замкнутой полуполосе \overline{W}_∞ , удовлетворяет в W_∞ уравнению (38.1), начальным и граничным условиям (38.2), если $\rho(x)$ непрерывна, а $k(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, l]$.

◇ Уравнение (38.1) можно интерпретировать как уравнение продольных колебаний стержня длины l , где $\rho(x)$ – линейная плотность стержня, $k(x)$ – его линейная упругость. Тогда функция $E(t)$ (38.3) есть полная (кинетическая + потенциальная) энергия системы. Эта система – непрерывная среда, каждая точка которой является осциллятором. Напомним, что в классической механике энергия осциллятора записывается в виде

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Условие $dE/dt = 0$ означает отсутствие притока энергии.

Доказательство. Найдем

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \int_0^l (kv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt}) dx = \\ &= \int_0^l \left[kv_x v_{xt} + v_t \partial_x \left(k \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx = \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} (kv_x v_t) dx = kv_x v_t \Big|_0^l. \end{aligned}$$

Так как концы стержня закреплены, то для согласования начальных и граничных условий выполняется $v_t(0, t) = v_t(l, t) = 0$. Следовательно,

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

и

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[k(x) \psi^2(x) + \rho(x) \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (38.4)$$

Теорема 38.1. *Классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения*

$$\rho(x) u_{tt} = \partial_x(k(x) u_x) + F(x, t), \quad \rho(x) > 0, \quad k(x) > 0 \quad (38.5)$$

с условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x), \\ u(0, t) &= \mu_1(t), & u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \quad (38.6)$$

единственно.

Доказательство. Предположим противное: пусть u_1 и u_2 — два решения задачи (38.5), (38.6). Тогда функция $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет условиям леммы 38.1 с нулевыми начальными и граничными условиями. Из (38.4) следует, что $E(0) = 0 = E(t)$, а из выражения (38.3) — $v = 0$, т.е. $u_1 = u_2$.

39. Смешанная задача для одномерного однородного волнового уравнения на полупрямой. Метод Даламбера

Эта задача, в отличие от рассмотренной выше задачи Коши, имеет важное значение для изучения и описания процессов отражения волн различной природы. Основные особенности и методы решения этой задачи рассмотрим на примере колебаний струны, вытянутой вдоль оси Ox , один конец которой совмещен с началом координат, а другой находится на большом ($L \gg at$) расстоянии от начала координат, формально — на $+\infty$.

39.1. Метод падающих и отраженных волн

Математическая постановка смешанной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0, & x > 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \quad (39.1)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad (39.2)$$

где $\mu(t)$ – гладкая заданная функция. Здесь мы рассматриваем неоднородные граничные условия первого рода.

На фазовой плоскости xOt проведем из начала координат характеристику $x - at = 0$, которую, в отличие от других, будем называть главной. Как следует из рис. 76, свойством главной характеристики является то, что она делит всю область решения задачи на две: под главной характеристикой, где $x - at > 0$ (I), и над главной характеристикой, где $x - at < 0$ (II). Область I содержит ось Ox ($t = 0$), на которой задаются начальные условия, а область II содержит ось Ot ($x = 0$), на которой задаются граничные условия. Такое деление позволяет искать решение задачи, составленное из двух частей. Одна часть решения в области I должна отвечать за выполнение только начальных условий, тогда как вторая часть в области II – за выполнение граничных условий. Естественно, что полное решение должно удовлетворять как начальным, так и граничным условиям.

Рассмотрим область I

$$x - at > 0.$$

Решение задачи, как и раньше, будем искать в виде (37.6)

$$u(x, t) = g(x - at) + f(x + at). \quad (39.3)$$

Подставив (39.3) в начальные условия (39.1) и проинтегрировав по-

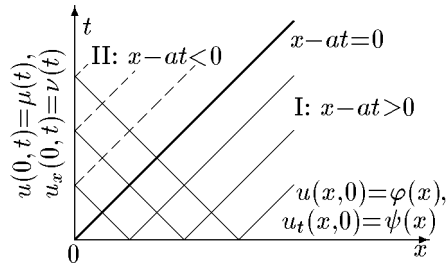


Рис. 76

лученную систему, находим решения

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2} \left[\varphi(x) - \frac{1}{a} \int_0^x \psi(y) dy - \frac{C}{a} \right], \\ f(x) &= \frac{1}{2} \left[\varphi(x) + \frac{1}{a} \int_0^x \psi(y) dy + \frac{C}{a} \right], \end{aligned} \quad x > 0,$$

отличающиеся от аналогичных, полученных при выводе формулы Даламбера (37.2), только областью определения, ограниченной условием $x > 0$ вместо $-\infty < x < +\infty$, так как $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены теперь только для $x > 0$.

Возвратившись к исходным аргументам, для $x - at > 0$ имеем

$$g(x - at) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x - at) - \frac{1}{a} \int_0^{x-at} \psi(y) dy - \frac{C}{a} \right] \quad (39.4)$$

и

$$f(x + at) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x + at) + \frac{1}{a} \int_0^{x+at} \psi(y) dy + \frac{C}{a} \right]. \quad (39.5)$$

Сложив (39.4) и (39.5), при $x - at > 0$ находим для $u(x, t)$ формулу

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x + at) + \varphi(x - at) + \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy \right], \quad (39.6)$$

совпадающую с формулой Даламбера (37.2) по форме, но отличающуюся от нее тем, что формула (39.6) справедлива только в области I ($x - at > 0$). Отметим, что это различие возникает только за счет функции $g(x - at)$ (39.4), поскольку ее аргумент становится отрицательным, если $x - at < 0$, тогда как функция $f(x + at)$, определяемая формулой (39.5), может быть использована на всей фазовой плоскости, поскольку ее аргумент всегда положителен.

С учетом вышесказанного решение в области II

$$x - at < 0$$

ищем в виде

$$u(x, t) = \bar{g}(x - at) + f(x + at), \quad (39.7)$$

где $f(x + at)$ определена формулой (39.5), а $\bar{g}(x - at)$ — неизвестная функция, подлежащая определению из граничного условия (39.2). Условимся волну $f(x + at)$ в области II называть падающей, а волну $\bar{g}(x - at)$ — отраженной. На рис. 76 характеристики падающей волны изображены непрерывными линиями, а отраженной — штриховыми.

Подставив (39.7) в (39.2), получим равенство

$$\bar{g}(-at) + f(at) = \mu(t),$$

которое после замены переменной $t = -z/a$, $z < 0$, примет вид

$$\bar{g}(z) + f(-z) = \mu(-z/a), \quad z < 0.$$

Отсюда, согласно (39.5), имеем

$$\bar{g}(z) = \mu(-z/a) - \frac{1}{2} \left[\varphi(-z) + \frac{1}{a} \int_0^{-z} \psi(y) dy + \frac{C}{a} \right]$$

или

$$\begin{aligned} \bar{g}(x - at) &= \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) - \\ &- \frac{1}{2} \left[\varphi(at - x) + \frac{1}{a} \int_0^{at-x} \psi(y) dy + \frac{C}{a} \right]. \end{aligned} \quad (39.8)$$

Тогда $u(x, t)$ из (39.7) запишется как

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} [\varphi(at + x) - \varphi(at - x)] + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(y) dy, \quad x - at < 0. \end{aligned} \quad (39.9)$$

Окончательное решение задачи (39.1), (39.2) имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} [\varphi(at + x) - \varphi(at - x)] + \\ \quad + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(y) dy, \quad x - at < 0; \\ \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \\ \quad + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy, \quad x - at > 0. \end{cases} \quad (39.10)$$

Поскольку решение (39.10) задается в областях I и II разными формулами, оно может быть разрывным вдоль главной характеристики. Для выяснения этого вопроса в произвольной точке главной характеристики вычислим

$$\lim_{x-at \rightarrow -0} u(x, t) - \lim_{x-at \rightarrow +0} u(x, t) = \mu(0) - \varphi(0). \quad (39.11)$$

При вычислении (39.11) использованы формула (39.10) и тот факт, что волна $f(x+at)$ на главной характеристике непрерывна, так как ее линии уровня $x+at = \text{const}$ пересекают прямую $x-at=0$ (см. рис. 76).

Таким образом, если физическая интерпретация задачи (39.1), (39.2) допускает разрывные решения, то такой разрыв возможен только на главной характеристике (39.11). Этот разрыв постоянен, поскольку он обусловлен разностью граничного и начального условий в точке, соответствующей началу координат.

В задачах, не допускающих разрывных решений (разрыва струны в нашем случае), начальные и граничные условия $\varphi(x)$, $\mu(t)$ не могут выбираться произвольно и должны быть согласованы условием непрерывности в точке $(0,0)$

$$\mu(0) = \varphi(0), \quad (39.12)$$

которое, как показано выше, обеспечивает непрерывность решения (39.10) на всей главной характеристике.

Перейдем к рассмотрению смешанной задачи с граничным условием второго рода

$$u_x(0, t) = \nu(t), \quad t > 0. \quad (39.13)$$

Решение задачи (39.1), (39.13) во многом повторяет решение задачи (39.1), (39.2). Основное различие заключается в том, что функция $\bar{g}(x-at)$ в данном случае должна определяться из условия (39.13), а не из (39.2). Подставив (39.7) в (39.13), получим уравнение

$$g'(-at) + f'(at) = \nu(t),$$

которое после замены переменной $t = -z/a$ примет вид

$$\bar{g}'(z) + f'(-z) = \nu(-z/a)$$

дифференциального уравнения с общим интегралом

$$\bar{g}(z) - f(-z) = -a \int_0^{-z/a} \nu(y) dy + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Отсюда с учетом (39.5) найдем

$$\bar{g}(z) = \frac{1}{2} \left[\varphi(-z) + \frac{1}{a} \int_0^{-z} \psi(y) dy + \frac{C}{a} \right] - a \int_0^{-z/a} \nu(y) dy + C_1$$

или

$$\bar{g}(x-at) = \frac{1}{2} \left[\varphi(at-x) + \frac{1}{a} \int_0^{at-x} \psi(y) dy + \frac{C}{a} \right] -$$

$$-a \int_0^{t-x/a} \nu(y) dy + C_1. \quad (39.14)$$

Сложив (39.14) и (39.5), получим выражение $u(x, t)$ для $x - at < 0$

$$u(x, t) = -a \int_0^{t-x/a} \nu(y) dy + \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(at-x)] + \\ + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(y) dy + \int_0^{at-x} \psi(y) dy \right] + \frac{C}{a} + C_1. \quad (39.15)$$

Окончательное решение второй краевой задачи (39.1), (39.13) имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} -a \int_0^{t-x/a} \nu(y) dy + \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(at-x)] + \\ + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(y) dy + \int_0^{at-x} \psi(y) dy \right] + \\ + \frac{C}{a} + C_1, & x - at < 0; \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(at-x)] + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy, & x - at > 0. \end{cases} \quad (39.16)$$

Для выяснения условия непрерывности решения (39.16) на главной характеристике, как и для первой краевой задачи, вычислим пределы $\lim_{x-at \rightarrow \pm 0} u(x, t)$. В результате имеем

$$\lim_{x-at \rightarrow -0} u(x, t) - \lim_{x-at \rightarrow +0} u(x, t) = \frac{C}{a} + C_1. \quad (39.17)$$

Таким образом, для физических задач, допускающих разрывные решения, функция $u(x, t)$ (39.16) имеет скачок величиной $C/a + C_1$, который не может быть найден из условий (39.1), (39.13). Возникающая неопределенность может быть устранена в каждом конкретном случае только с помощью дополнительных условий, вытекающих из физической природы рассматриваемого процесса.

Например, требование непрерывности решений приводит к условию

$$\frac{C}{a} + C_1 = 0.$$

Тогда решение задачи (39.1), (39.13) определено однозначно.

Структура формул (39.10), (39.16) имеет достаточно простое объяснение. Поскольку волны, вызванные воздействием граничных условий, также распространяются со скоростью a , то они могут взаимодействовать только с падающими волнами в области II, образуя отраженные волны и не изменяя прямые волны в области I, вызванные начальными условиями. Это и объясняет отсутствие функций $\mu(t)$, $\nu(t)$ во вторых частях формул (39.10) и (39.16).

Более того, оказывается, что решение смешанной задачи с краевыми условиями второго рода может быть сведено к решению смешанной задачи со специальными граничными условиями первого рода.

Действительно, однозначное решение смешанной задачи с краевыми условиями первого рода возможно при задании трех функций: $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu(t) = u(0, t)$. По найденному решению можно разделить и $u_x(0, t) = \nu(t)$. Отсюда можно предположить, что существует соотношение, связывающее все четыре функции: $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu(t)$ и $\nu(t)$. Для нахождения этого соотношения продифференцируем (39.10) по x и положим $x = 0$. В результате получим

$$\nu(t) = \varphi'(at) + \frac{1}{a}\psi(at) - \frac{1}{a}\mu'(t). \quad (39.18)$$

Аналогичное интегральное соотношение можно получить из непрерывного ($C/a + C_1 = 0$) решения (39.16), положив в нем $x = 0$:

$$\mu(t) = -a \int_0^t \nu(y)dy + \varphi(at) + \frac{1}{a} \int_0^{at} \psi(y)dy. \quad (39.19)$$

Таким образом, решение смешанной задачи с краевым условием $u_x(0, t) = \nu(t)$ (39.13) можно получить из решения смешанной задачи с граничным условием первого рода

$$u(0, t) = -a \int_0^t \nu(y)dy + \varphi(at) + \frac{1}{a} \int_0^{at} \psi(y)dy.$$

Легко проверить, что подстановка (39.19) в (39.10) дает решение (39.16). Аналогичным способом решение смешанной задачи с краевым условием третьего рода тоже может быть сведено к решению смешанной задачи с краевым условием первого рода. Хотя теоретически решение любой одномерной классической смешанной задачи может быть сведено к решению смешанной задачи с граничным условием первого рода, практически это не всегда оправдано.

Изложенный выше общий метод решения смешанных задач на полубесконечной прямой, который иногда называют методом падающей и отраженной волны, в некоторых частных случаях может быть заменен более простым методом четного и нечетного продолжения начальных условий.

39.2. Метод четного и нечетного продолжения

Рассмотрим смешанную задачу с однородным краевым условием первого рода

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & x > 0, & t > 0; \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x), & x > 0; \\ u(0, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned} \quad (39.20)$$

Ее решение дается формулой (18.27) при $\mu(t) = 0$.

Покажем, что решение задачи (39.20) может быть сведено к решению задачи только с начальными условиями, т.е. задачи Коши.

Действительно, решение задачи Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & t > 0; \\ u(x, 0) &= \Phi(x), & u_t(x, 0) &= \Psi(x), & -\infty < x < \infty, \end{aligned} \quad (39.21)$$

где функции $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ являются нечетными продолжениями функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всю ось Ox , в области $x > 0$ совпадает с решением задачи (39.20). Это объясняется тем, что решение задачи (39.21), согласно формуле Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x - at) + \Phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(y) dy, \quad (39.22)$$

при $x = 0$ имеет вид

$$u(0, t) = \frac{\Phi(-at) + \Phi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \Psi(y) dy$$

и обращается в нуль для нечетных функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$. Следовательно, граничные условия задачи (39.20) выполняются автоматически.

Воспользуемся явным видом функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0; \end{cases} \\ \Psi(x) &= \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (39.23)$$

Подставив (39.23) в (39.22), придем к уже полученной форме решения (39.10). В этом и заключается смысл метода нечетного продолжения начальных условий для смешанной задачи (39.20). Легко проверить, что все сказанное остается справедливым, если граничное условие задается в точке $x_0 \neq 0$. Естественно, в этом случае

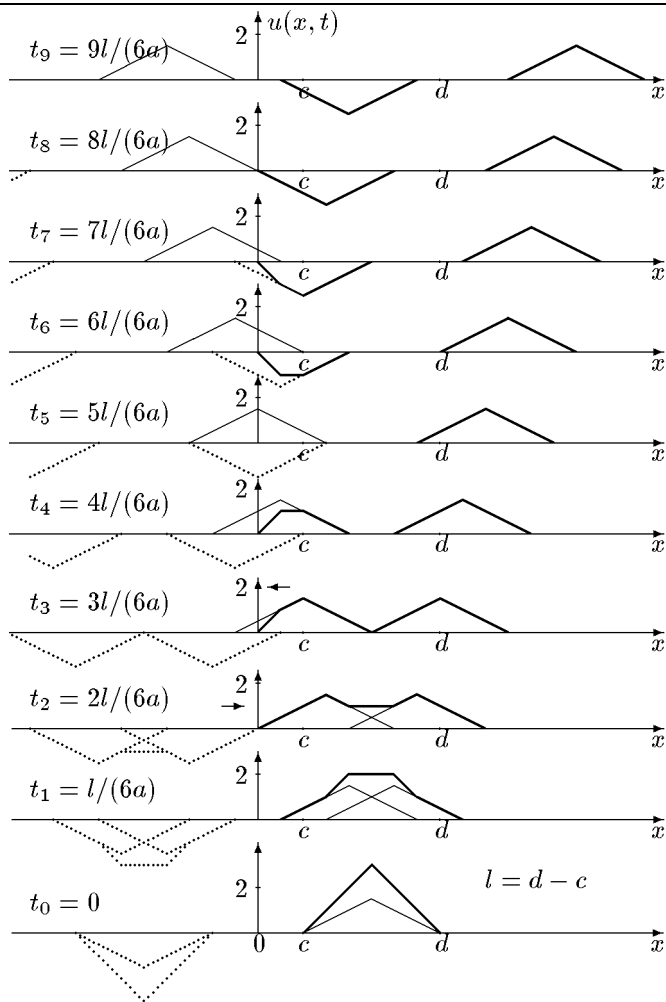


Рис. 77

функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетно продолжают относительно точки x_0 .

Несомненным достоинством этого метода является простота и наглядность графического построения решения $u(x, t)$ как решения задачи Коши.

Пример 39.1. Решить задачу с начальными условиями примера

37.1, считая струну полубесконечной с закрепленным левым краем. Построить профили струны для $t_k = kl/a$, $k = 0, 1, \dots, 9$.

Решение. На плоскости xOx в области $x > 0$, которую будем называть физической, строим график реального первоначального отклонения (см. рис. 77). Внефизической (фиктивной) области $x < 0$ строим график фиктивных первоначальных отклонений, являющийся нечетным продолжением графика $\varphi(x)$. Затем, как и в примере 37.1, оба первоначальных отклонения с течением времени разбиваются на прямые и обратные волны. Прямая фиктивная волна, взаимодействуя с обратной (падающей) реальной волной, образуют реальную прямую (отраженную) волну в области $x > 0$. В результате в физической области имеем две бегущие волны: прямую начальную и прямую отраженную – с амплитудами противоположных знаков (в противофазах). Рис. 78 наглядно иллюстрирует все сказанное. Во избежание излишних построений в нефизической области $x < 0$ целесообразно построение только графика нечетным образом продолженной падающей обратной волны.

Рассмотрим теперь задачу (39.1) с однородным краевым условием второго рода $u_x(0, t) = 0$. Ее решение задается формулой (39.16) с $\nu(t) = 0$. Покажем, что ее решение также может быть получено из решения задачи Коши (39.22), где функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ являются четными продолжениями начальных условий $\varphi(x)$, $\psi(x)$ на всю ось Ox . Действительно, решение задачи (39.21) задается формулой (39.22) и тогда

$$u_x(0, t) = \frac{\Phi'(at) + \Phi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}[\Psi(at) - \Psi(-at)] = 0. \quad (39.24)$$

Второе слагаемое этой суммы обращается в нуль в силу четности функции $\Psi(x)$, а первое – в силу нечетности (или равенства нулю)

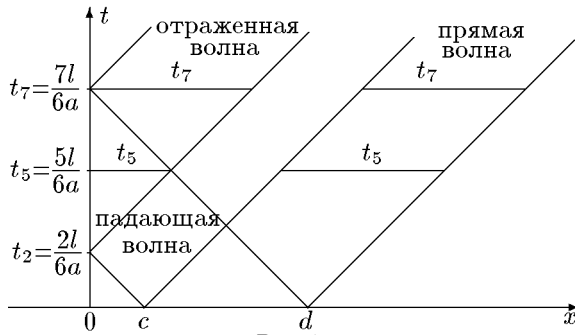


Рис. 78

производной от четной функции. Тем самым решение задачи Коши в области $x > 0$ совпадает с решением второй краевой задачи, поскольку граничные условия (39.24) выполняются автоматически.

Функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ задаются формулами

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ \varphi(-x), & x < 0; \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Подставив их в (39.22), приходим к уже полученной форме решения (39.16). Естественно, что если граничное условие задается в точке $x_0 \neq 0$, то функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ четно продолжаются относительно точки x_0 .

Графическое построение решения смешанной задачи для граничных условий второго рода практически совпадает со схемой, изложенной для граничных условий первого рода (см. предыдущий пример) с той разницей, что продолжение начальных условий в нефизическую область $x < 0$ проводится четным образом.

Пример 39.2. Найти закон колебаний полубесконечной струны, вызванных начальными отклонениями $u(x, 0) = \varphi_0 e^{-x}$ и начальными скоростями $u_t(x, 0) = \psi_0 \cos \omega x$, если ее левый конец упруго, с коэффициентом жесткости h , закреплен в точке $x = 0$, колеблющейся по закону $A \cos \omega t$. Исследовать решение в зависимости от постоянных φ_0 , ψ_0 , A , ω , h .

Решение. Требуется найти непрерывное (струна) решение смешанной задачи с краевыми условиями третьего рода

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & x > 0, & t > 0; \\ u(x, 0) &= \varphi_0 e^{-x}, & u_t(x, 0) &= \psi_0 \cos \omega x; \\ u_x(0, t) &= h[u(0, t) - A \cos \omega t]. \end{aligned} \quad (39.25)$$

Рассмотрим область I: $x - at > 0$ (см. рис. 76).

В этой области справедлива формула Даламбера (37.2)

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0}{2} [e^{-(x-at)} + e^{-(x+at)}] + \frac{\psi_0}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \cos \omega y dy, \quad (39.26)$$

которую после интегрирования можно записать в виде суммы прямой и обратной волн

$$u(x, t) = g(x - at) + f(x + at), \quad (39.27)$$

где

$$g(x - at) = \frac{\varphi_0}{2} e^{-(x-at)} - \frac{\psi_0}{2a\omega} \sin \omega(x - at), \quad (39.28)$$

$$f(x + at) = \frac{\varphi_0}{2} e^{-(x+at)} + \frac{\psi_0}{2a\omega} \sin \omega(x + at). \quad (39.29)$$

Рассмотрим область II: $x - at < 0$ (см. рис. 76).

В этой области решение ищем в виде

$$u(x, t) = \bar{g}_h(x - at) + f(x + at). \quad (39.30)$$

Здесь $f(x + at)$ – падающая волна, определенная (39.29), а $\bar{g}_h(x - at)$ – отраженная волна, подлежащая определению из граничного условия (39.25).

Подставив (39.30) в граничное условие, получим дифференциальное уравнение (штрих означает производную по всему аргументу)

$$\begin{aligned} & \bar{g}'_h(-at) - h\bar{g}_h(-at) = \\ & = \frac{\varphi_0}{2}(1+h)e^{-at} - \frac{\psi_0}{2a} \left(\cos \omega at - \frac{h}{\omega} \sin \omega at \right) - Ah \cos at, \end{aligned}$$

которое после замены переменной $at = -z$, $z < 0$, примет вид

$$\bar{g}'_h(z) - h\bar{g}_h(z) = F(z), \quad (39.31)$$

где

$$F(z) = \frac{\varphi_0}{2}(1+h)e^z - \frac{\psi_0}{2a} \left(\cos \omega z + \frac{h}{\omega} \sin \omega z \right) - Ah \cos \frac{\alpha z}{a}. \quad (39.32)$$

Уравнение (39.31) легко интегрируется:

$$\bar{g}_h(z) = C(z)e^{hz}, \quad (39.33)$$

где

$$C(z) = \int e^{-hz} F(z) dz. \quad (39.34)$$

Отсюда с учетом (39.32) и (39.33) найдем явный вид профиля отраженной волны

$$\bar{g}_h(z) = \frac{\varphi_0}{2} \frac{1+h}{1-h} e^z - p_h(\omega z) - q_h\left(\frac{\alpha}{a} z\right) + C_h e^{hz}. \quad (39.35)$$

Здесь C_h – произвольная постоянная, а $p_h(\omega z)$ и $q_h(\alpha z/a)$ задаются выражениями

$$p_h(\omega z) = \frac{\psi_0}{2a(h^2 + \omega^2)} \left[\frac{\omega^2 - h^2}{\omega} \sin \omega z - 2h \cos \omega z \right], \quad (39.36)$$

$$q_h(\alpha z/a) = \frac{Aha}{(ha)^2 + \alpha^2} \left[\alpha \sin \frac{\alpha z}{a} - ha \cos \frac{\alpha z}{a} \right] \quad (39.37)$$

и, соответственно,

$$\bar{g}_h(x - at) = \frac{\varphi_0(1+h)}{2(1-h)} e^{x-at} - p_h(\omega(x - at)) -$$

$$-q_h\left(\frac{\alpha}{a}(x-at)\right) + C_h e^{h(x-at)}. \quad (39.38)$$

Произвольная постоянная C_h находится из условия непрерывности волн $g(x-at)$ и $\bar{g}_h(x-at)$ на главной характеристике $x-at=0$. Согласно (39.38) и (39.28), имеем

$$\frac{(1+h)\varphi_0}{2(1-h)} - p_h(0) - q_h(0) + C_h = \frac{\varphi_0}{2} \quad (39.39)$$

и, следовательно,

$$C_h = -\frac{h\varphi_0}{1-h} + p_h(0) + q_h(0). \quad (39.40)$$

При $h=1$ решение уравнения (39.31) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{g}_1(x-at) &= (x-at)\varphi_0 e^{x-at} - p_1(\omega[x-at]) - \\ &\quad - q_1(\alpha[x-at]/a) + C_1 e^{x-at}, \end{aligned} \quad (39.41)$$

где $p_1(\omega z)$, $q_1(\alpha z/a)$ определяются формулами (39.36), (39.37) при $h=1$, а

$$C_1 = \frac{\varphi_0}{2} + p_1(0) + q_1(0). \quad (39.42)$$

При $h=\infty$ граничное условие (39.25) преобразуется в граничное условие первого рода

$$u(x,0) = A \cos \alpha t,$$

а дифференциальное уравнение (39.31) — в алгебраическое

$$-\bar{g}_\infty(z) = \frac{\varphi_0}{2} e^z - \frac{\psi_0}{2a\omega} \sin \omega z - A \cos \frac{\alpha}{a} z.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{g}_\infty(x-at) &= \\ &= -\frac{\varphi_0}{2} e^{x-at} - \frac{\psi_0}{2a\omega} \sin \omega(x-at) + A \cos \frac{\alpha}{a}(x-at) \end{aligned} \quad (39.43)$$

с условием непрерывности на главной характеристике

$$\varphi_0 = A. \quad (39.44)$$

Таким образом, непрерывное решение задачи (39.25) имеет вид

$$u(x,t) = \begin{cases} \bar{g}_h(x-at) + f(x+at), & x-at < 0; \\ g(x-at) + f(x+at), & x-at > 0, \end{cases} \quad (39.45)$$

где $g(x-at)$, $f(x+at)$ определены формулами (39.28), (39.29), а $\bar{g}_h(x-at)$, в зависимости от h , формулами (39.38), (39.41), (39.43).

Соотношения между частотами α и ω , амплитудами φ_0 , ψ_0 , A влияют на характер решения (39.45). Не проводя полного исследования, отметим некоторые частные случаи.

1. $\varphi_0 = \psi_0 = 0$. Процесс колебаний струны определяется только граничными условиями. В этом случае $u(x, t)$ имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \bar{g}_h(x - at), & x - at < 0; \\ 0, & x - at > 0, \end{cases} \quad (39.46)$$

поскольку $g(x - at) = f(x + at) = 0$.

- а) $h = 0$, что соответствует граничному условию $u_x(0, t) = 0$. Согласно (39.36)–(39.38), $\bar{g}_h(x - at) = 0$, $u(x, t) = 0$, что вполне естественно, поскольку к нулевым начальным условиям добавляется нулевое граничное условие.
- б) $h = \infty$, граничное условие первого рода $u(0, t) = A \cos \alpha t$,

$$\bar{g}_\infty(x - at) = A \cos \frac{\alpha}{a}(x - at).$$

Этот случай примечателен тем, что существует отличное от нуля решение, имеющее на главной характеристике разрыв, равный A . Условие неразрывности (39.44) приводит к $A = \varphi_0 = 0$, что дает непрерывное, но равное нулю решение $u(x, t) = 0$.

- в) $0 < h < \infty$, граничные условия общего вида

$$u_x(0, t) = h[u(0, t) - A \cos \alpha t].$$

Поскольку при $\varphi_0 = \psi_0 = 0$ функция $\bar{g}_1(x - at)$ представляет собой частный случай $\bar{g}_h(x - at)$, то для всех h , включая $h = 1$, согласно (39.38), (39.41), решение $u(x, t)$ имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{A(ha)^2}{(ha)^2 + \alpha^2} \left[\cos \frac{\alpha}{a}(x - at) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{ha} \sin \frac{\alpha}{a}(x - at) - e^{h(x-at)} \right], & x - at < 0; \\ 0, & x - at > 0, \end{cases} \quad (39.47)$$

и процесс колебаний струны сводится фактически к распространению граничных условий вдоль нее. Соответствующие графики при частных значениях $A = 1, 2, 5$, $h = 2$, $a = 1$, $\alpha = 1$ для моментов времени $t = 0, 1, 3, 5, 10$ приведены на рис. 79.

Как следует из (39.47), если точка упругого закрепления не колеблется ($\alpha = 0$), а зафиксирована на расстоянии A от оси Ox , то (39.47) упрощается до формулы

$$u(x, t) = \begin{cases} A[1 - e^{h(x-at)}], & x - at < 0; \\ 0, & x - at > 0, \end{cases}$$

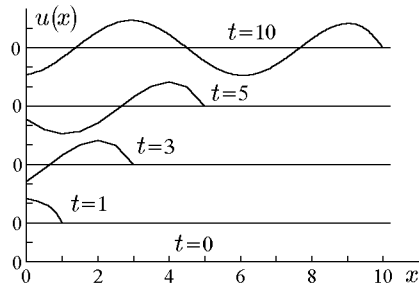


Рис. 79

которая графически изображена на рис. 80 для моментов времени $t = 2, 4, 6, 8, 10$ при $h = 1, A = 1$.

Наконец, при $A = 0$ граничное условие вырождается в однородное $u_x(0, t) - hu(0, t) = 0$, что в совокупности с нулевыми начальными условиями позволяет предполагать $u(x, t) = 0$, что и следует из (39.47).

2. $\varphi_0 \neq 0, \psi_0 = 0$. Процесс колебаний определяется только начальными отклонениями и граничными условиями.

а) $h = 0, u_x(0, t) = 0$, левый конец свободен. Согласно (39.28), (39.29), (39.38), решение выражается функцией

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi_0}{2} [e^{x-at} + e^{-(x+at)}], & x - at < 0; \\ \frac{\varphi_0}{2} [e^{-(x-at)} + e^{-(x+at)}], & x - at > 0, \end{cases}$$

график которой при $\varphi_0 = 2, A = 1$ для моментов времени $t = 0, 1, 5, 10, 15$ при $a = 1$ изображен на рис. 81.

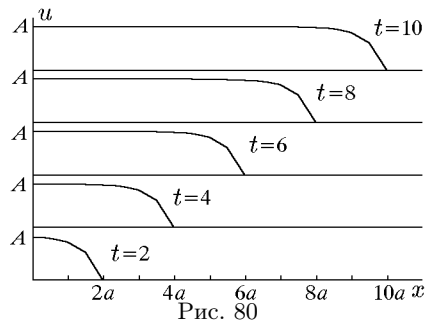


Рис. 80

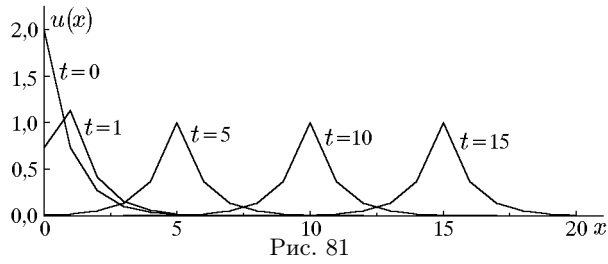


Рис. 81

- б) $h = \infty$, $u(0, t) = A \cos \alpha t$, левый конец движется по заданному закону. Согласно (39.28), (39.29) и условию сопряжения $A = \varphi_0$, получим решение

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi_0}{2} \left[2 \cos \frac{\alpha}{a} (x - at) - e^{-x-at} + e^{-(x+at)} \right], & x - at < 0; \\ \frac{\varphi_0}{2} [e^{-(x-at)} + e^{-(x+at)}], & x - at > 0, \end{cases}$$

график которого при $A = \varphi_0 = 2$, $a = 1$ для моментов времени $t = 0, 2, 5, 10$ изображен на рис. 82.

- в) $0 < h < 1$, $1 < h < \infty$, граничные условия общего вида

$$u_x(0, t) = h[u(0, t) - A \cos \alpha t].$$

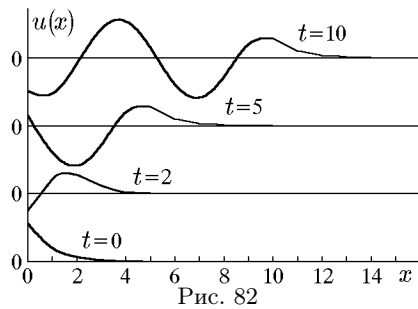


Рис. 82

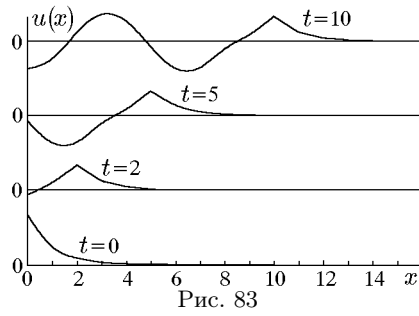


Рис. 83

Тогда получим решение

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi_0}{2(1-h)} [(1+h)e^{x-at} - 2he^{h(x-at)}] + \\ + \frac{A(ha)^2}{(ha)^2 + \alpha^2} \left[\cos \frac{\alpha}{a}(x-at) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{ha} \sin \frac{\alpha}{a}(x-at) - e^{h(x-at)} \right] + \\ + \frac{\varphi_0}{2} e^{-(x+at)}, & x-at < 0; \\ \frac{\varphi_0}{2} [e^{-(x-at)} + e^{-(x+at)}], & x-at > 0, \end{cases}$$

график которого при $A = 1,25$, $\varphi_0 = 2$, $h = 2$, $a = \alpha = 1$ для моментов времени $t = 0, 2, 5, 10$ изображен на рис. 83.

Дальнейшее исследование для случая $h = 1$, а также для случая $\psi_0 \neq 0$ принципиально не отличается от изложенного выше и может быть проведено самостоятельно.

Пример 39.3. Профиль полубесконечной струны в начальный момент времени задается формулой $u(x, 0) = e^{-x} \sin \omega x$. Найти закон колебания струны, если ее левый конец $x = 0$ движется по закону $u(0, t) = \varphi_0 e^{-at} \sin \omega at$.

Решение. Имеем смешанную задачу с неоднородным краевым условием первого рода

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & x > 0, & t > 0; \\ u(x, 0) &= e^{-x} \sin \omega x, & u_t(x, 0) &= 0; \\ u(0, t) &= \varphi_0 e^{-at} \sin \omega at. \end{aligned} \quad (39.48)$$

Условие сопряжения $u(x, 0)|_{x=0} = u(0, t)|_{t=0} = 0$ выполняется. Для $x - at > 0$ решение $u(x, t)$ находится по формуле Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [e^{-(x-at)} \sin \omega(x-at) + e^{-(x+at)} \sin \omega(x+at)]. \quad (39.49)$$

Для $x - at < 0$ решение $u(x, t)$ ищем в виде

$$u(x, t) = \bar{g}(x - at) + \frac{1}{2}e^{-(x-at)} \sin \omega(x + at). \quad (39.50)$$

Подставив (39.50) в граничное условие (39.48), получим

$$\bar{g}(-at) + \frac{1}{2}e^{-at} \sin \omega at = \varphi_0 e^{-at} \sin \omega at,$$

откуда

$$\bar{g}(-at) = \left(\varphi_0 - \frac{1}{2}\right) e^{-at} \sin \omega at$$

и, следовательно,

$$\bar{g}(x - at) = \left(\frac{1}{2} - \varphi_0\right) e^{x-at} \sin \omega(x - at). \quad (39.51)$$

Таким образом,

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - 2\varphi_0)e^{x-at} \sin \omega(x - at) + \\ + \frac{1}{2}e^{-(x+at)} \sin \omega(x + at), & x - at < 0; \\ \frac{1}{2}e^{-(x-at)} \sin \omega(x - at) + \\ + \frac{1}{2}e^{-(x+at)} \sin \omega(x + at), & x - at > 0. \end{cases} \quad (39.52)$$

Как следует из (39.52), граничные условия могут существенно корректировать фазу и амплитуду отраженной волны, вплоть до полного поглощения падающей волны при $\varphi_0 = 1/2$. Вывод достаточно очевиден, если обратиться к формулам (39.8), (39.14), описывающим отраженные волны с различными граничными условиями.

Пример 39.4. По упругому полубесконечному стержню при $t < 0$ распространяется волна деформации

$$u(x, t) = \begin{cases} \sin \omega(x + at), & x > -at; \\ 0, & 0 < x < -at, \end{cases} \quad t < 0, \quad (39.53)$$

бегущая влево со скоростью $a > 0$. Левый конец стержня упруго закреплен с коэффициентом жесткости h . Найти $u(x, t)$ для $t > 0$.

Решение. Имеем краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (39.54)$$

$$u(x, 0) = \sin \omega x, \quad u_t(x, 0) = a\omega \cos \omega x, \quad x > 0;$$

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \quad h \geq 0, \quad t > 0.$$

При $x > at$, согласно формуле Даламбера, имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\sin \omega(x - at) + \sin \omega(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} a\omega \cos \omega z dz = \sin \omega(x + at). \quad (39.55)$$

При $x < at$ функцию $u(x, t)$ ищем в виде

$$u(x, t) = \bar{g}(x - at) + \sin \omega(x + at). \quad (39.56)$$

Подставив (39.56) в граничное условие и проинтегрировав полученное уравнение, найдем

$$\bar{g}(x - at) = \frac{1}{h^2 + \omega^2} [2h\omega \cos \omega(x - at) - (\omega^2 - h^2) \sin \omega(x - at)] + C_1 e^{h(x-at)}.$$

Из условия непрерывности $\bar{g}(0) = 0$ определим произвольную постоянную C_1

$$C_1 = -\frac{2h\omega}{h^2 + \omega^2},$$

откуда

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{h^2 + \omega^2} \{2h\omega[\cos \omega(x - at) - e^{h(x-at)}] - (\omega^2 - h^2) \sin \omega(x - at)\} + \sin \omega(x + at), & x < at; \\ \sin \omega(x + at), & x > at. \end{cases} \quad (39.57)$$

При $h = 0$, $u_x(0, t) = 0$ (свободном левом торце) имеем

$$u(x, t) = \begin{cases} -\sin \omega(x - at) + \sin \omega(x + at), & x < at; \\ \sin \omega(x + at), & x > at. \end{cases} \quad (39.58)$$

При $h = \infty$, $u(0, t) = 0$ (закрепленном левом торце) получим

$$u(x, t) = \begin{cases} \sin \omega(x - at) + \sin \omega(x + at), & x < at; \\ \sin \omega(x + at), & x > at. \end{cases} \quad (39.59)$$

Как следует из (39.58), (39.59), изменение граничных условий меняет фазу отраженной волны на противоположную.

Пример 39.5. Плоский источник малых возмущений движется равномерно с дозвуковой скоростью вдоль цилиндрической неограниченной трубки с газом. Считая, что возмущение давления в том месте, где находится в момент времени $t > 0$ источник, является известной функцией времени, найти колебания газа слева и справа от источника, если в начальный момент времени газ был в невозмущенном состоянии, а источник находился в точке $x = 0$.

Решение. Используя обозначения, принятые в разд. «Уравнения гидродинамики и акустики», в лагранжевых координатах имеем смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & -\infty < x < v_0 t, & \quad v_0 t < x < \infty, & \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & -\infty < x < 0, & \quad 0 < x < v_0 t; \\ u(x, t) &= u_2(x, t), & -\infty < x < v_0 t; & & (39.60) \\ u(x, t) &= u_1(x, t), & v_0 t < x < \infty; & & \\ u_{1x}(v_0 t, t) &= u_{2x}(v_0 t, t) = -p(t)/(\gamma p_0), \end{aligned}$$

где $v_0 < a$ – скорость движения источника с заданным возмущением $p(t)$.

Пусть $x > at$. По формуле Даламбера в силу нулевых начальных условий имеем $u_1(x, t) = 0$, так как $g(x - at) = f(x + at) = 0$. При $v_0 t < x < at$ решение ищем в виде $u(x, t) = \bar{g}(x - at)$. Из граничных условий (39.60) имеем

$$\bar{g}'(v_0 t - at) = -\frac{p(t)}{\gamma p_0}. \quad (39.61)$$

Замена переменной $(a - v_0)t = -z$, $z < 0$ приводит (39.61) к уравнению

$$\bar{g}'(z) = -\frac{1}{\gamma p_0} p\left(-\frac{z}{a - v_0}\right)$$

с общим решением

$$\begin{aligned} \bar{g}(z) &= -\frac{1}{\gamma p_0} \int p\left(-\frac{z}{a - v_0}\right) dz = \\ &= \frac{a - v_0}{\gamma p_0} \int p\left(-\frac{z}{a - v_0}\right) d\left(-\frac{z}{a - v_0}\right) \end{aligned}$$

или

$$\bar{g}(z) = \frac{a - v_0}{\gamma p_0} \int_0^{-z/(a-v_0)} p(y) dy + C, \quad (39.62)$$

где C – произвольная постоянная. Тогда

$$\bar{g}(x - at) = \frac{a - v_0}{\gamma p_0} \int_0^{(at-x)/(a-v_0)} p(y) dy + C.$$

Условие сопряжения $\bar{g}(0) = 0$ на характеристике $x - at = 0$ дает $C = 0$. Таким образом, для $x > v_0 t$ функция $u_1(x, t)$ запишется в виде

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \frac{a - v_0}{\gamma p_0} \int_0^{(at-x)/(a-v_0)} p(y) dy, & v_0 t < x < at; \\ 0, & x > at. \end{cases} \quad (39.63)$$

Аналогично

$$u_2(x, t) = \begin{cases} -\frac{a + v_0}{\gamma p_0} \int_0^{(at+x)/(a+v_0)} p(y) dy, & -at < x < v_0 t; \\ 0, & x < -at. \end{cases} \quad (39.64)$$

Если возмущение $p(t)$ представляет собой колебания с частотой ω , например $p(t) = A \cos \omega t$, то формулы (39.63), (39.64) принимают вид

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \frac{a - v_0}{\gamma p_0 \omega} A \sin \left[\frac{\omega}{a - v_0} (at - x) \right], & v_0 t < x < at; \\ 0, & x > at. \end{cases}$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} -\frac{a + v_0}{\gamma p_0 \omega} A \sin \left[\frac{\omega}{a + v_0} (x + at) \right], & -at < x < v_0 t; \\ 0, & x < -at. \end{cases}$$

Таким образом, наблюдатель, навстречу которому движется источник, регистрирует частоту $\omega_1 = a\omega/(a - v_0)$, большую, чем частота источника ω . Соответственно, наблюдатель, от которого источник удаляется, регистрирует частоту $\omega_2 = a\omega/(a + v_0)$, меньшую частоты источника ω (эффект Доплера).

40. Начально-краевые задачи для одномерного неоднородного волнового уравнения

40.1. Задача Коши

Рассмотрим колебания бесконечной струны, когда на нее действует внешняя сила, характеризуемая величиной $F(x, t)$ –

силой, отнесенной к единице массы,

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= F(x, t), & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned} \quad (40.1)$$

Уравнение (40.1) – неоднородное волновое уравнение.

Так же как и для однородного уравнения (37.1), соотношениями (37.4) введем новые переменные η и ξ . Тогда уравнение (40.1) примет вид (37.5)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{1}{4a^2} \bar{F}(\eta, \xi), \quad (40.2)$$

где $\bar{F}(\eta, \xi)$ – функция $F(x, y)$, записанная в переменных η, ξ .

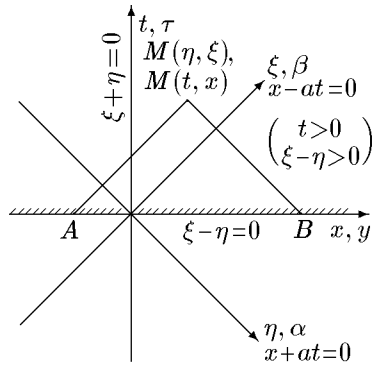


Рис. 84

Если в переменных x, t решение задачи (40.1) следует искать в области $0 < x < \infty, t > 0$ (верхняя полуплоскость xOt) с начальными условиями, заданными на прямой $t = 0$, то в переменных η, ξ – в области $-\infty < \eta + \xi < \infty$ ($x = (\eta + \xi)/2$), $\xi - \eta > 0$ ($t = (\xi - \eta)/2a$) с «начальными условиями», заданными на прямой $\xi - \eta = 0$ (рис. 84).

Для нахождения общего решения перепишем дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных (40.2) в виде системы двух уравнений первого порядка [см. также (9.7)]

$$\frac{\partial Z(\eta, \xi)}{\partial \eta} = -\frac{1}{4a^2} \bar{F}(\eta, \xi), \quad (40.3)$$

$$\frac{\partial u(\eta, \xi)}{\partial \xi} = Z(\eta, \xi). \quad (40.4)$$

Интегрирование уравнения (40.3) по η при условии $\xi = \text{const}$ дает

$$Z(\eta, \xi) = \int_{\beta}^{\eta} \left(-\frac{1}{4a^2} \right) \bar{F}(\alpha, \xi) d\alpha + p(\xi), \quad (40.5)$$

а интегрирование (40.4) по ξ при условии $\eta = \text{const}$ соответственно

$$u(\eta, \xi) = \int_{\eta}^{\xi} Z(\eta, \beta) d\beta + q(\eta), \quad (40.6)$$

где $p(\xi)$, $q(\eta)$ – произвольные функции переменных ξ , η .

Подстановка (40.5) в (40.6) дает общее решение в виде

$$u(\eta, \xi) = \int_{\eta}^{\xi} \left[-\frac{1}{4a^2} \int_{\beta}^{\eta} \bar{F}(\alpha, \beta) d\alpha + p(\beta) \right] d\beta + q(\eta)$$

или

$$u(\eta, \xi) = -\frac{1}{4a^2} \int_{\eta}^{\xi} \left[\int_{\beta}^{\eta} \bar{F}(\alpha, \beta) d\alpha \right] d\beta + \int_{\eta}^{\xi} p(\beta) d\beta + q(\eta). \quad (40.7)$$

Два последних слагаемых в (40.7) можно представить суммой двух новых произвольных функций $g(\eta)$ и $f(\xi)$. Если при этом во внешнем интеграле (40.7) поменять порядок интегрирования, а само решение рассматривать как решение в точке $M(\eta, \xi)$ с координатами η, ξ , то общее решение (40.7) примет вид

$$u(\eta, \xi) = \frac{1}{4a^2} \int_{\xi}^{\eta} \left[\int_{\beta}^{\eta} \bar{F}(\alpha, \beta) d\alpha \right] d\beta + g(\eta) + f(\xi), \quad (40.8)$$

где интегрирование ведется по области

$$\eta < \alpha < \beta < \xi, \quad (40.9)$$

которая соответствует треугольнику MAB на рис. 84. С учетом этого решение (40.8) можно представить двойным интегралом вида

$$u(\eta, \xi) = \frac{1}{4a^2} \iint_{\triangle MAB} \bar{F}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta + g(\eta) + f(\xi). \quad (40.10)$$

Возвратившись к старым переменным, с учетом

$$\frac{D(\eta, \xi)}{D(t, x)} = \frac{D(\alpha, \beta)}{D(\tau, y)} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a$$

и $\bar{F}(\alpha, \beta) = F(y, \tau)$ имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \iint_{\Delta_{MAB}} F(y, \tau) d\tau dy + g(x - at) + f(x + at). \quad (40.11)$$

Для вычисления двойного интеграла запишем уравнения прямых MA и MB в координатах τ, y как уравнения прямых с угловыми коэффициентами $\pm 1/a$, проходящих через заданную точку $M(t, x)$:

$$\begin{aligned} \tau - t &= \frac{1}{a}(y - x), \\ \tau - t &= -\frac{1}{a}(y - x), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} y &= x - a(t - \tau), \\ y &= x + a(t - \tau). \end{aligned} \quad (40.12)$$

Двойной интеграл в формуле (40.11) запишем как повторный, в котором внешний интеграл вычисляется по переменной τ . Тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(y, \tau) dy + g(x - at) + f(x + at). \quad (40.13)$$

Произвольные функции g, f определим из начальных условий (40.1). Продифференцировав (40.13) по t с учетом правила дифференцирования определенных интегралов с переменным верхним пределом

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\vartheta(t)}^{\gamma(t)} f(y, t) dy &= \\ &= \int_{\vartheta(t)}^{\gamma(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(y, t) dy + \gamma'(t) f(\gamma(t), t) - \vartheta'(t) f(\vartheta(t), t), \end{aligned} \quad (40.14)$$

найдем

$$u_t(x, t) = \int_0^t \frac{1}{2} [F(x + a(t - \tau), \tau) + F(x - a(t - \tau), \tau)] d\tau -$$

$$-ag'(x-at) + af'(x+at). \quad (40.15)$$

Подставив (40.13), (40.15) в начальные условия (40.1), получим систему

$$\begin{aligned} g(x) + f(x) &= \varphi(x), \\ a[f'(x) - g'(x)] &= \psi(x), \end{aligned}$$

полностью совпадающую с системой, полученной при решении однородной задачи (37.1), и дающую решение, описываемое формулой Даламбера (37.2)

$$g(x-at) + f(x+at) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy.$$

Таким образом, окончательное решение неоднородной задачи (40.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(y, \tau) dy + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy + \\ &+ \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)]. \end{aligned} \quad (40.16)$$

Из формулы (40.16) очевидно, что решением задачи Коши для неоднородного волнового уравнения с однородными начальными условиями, т.е. задачи

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - a^2 \tilde{u}_{xx} &= F(x, t), \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}_t(x, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (40.17)$$

является функция

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(y, \tau) dy. \quad (40.18)$$

Покажем, что эту формулу можно получить из решения (38.2) задачи Коши для однородного уравнения (38.1) с помощью полезного в дальнейшем приема, называемого «принципом Дюамеля».

Утверждение 40.1 (принцип Дюамеля). *Решение задачи (40.17) можно представить в виде*

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t, \tau) d\tau, \quad (40.19)$$

где функция $v(x, t, \tau)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} v_{tt} - a^2 v_{xx} &= 0, \\ v|_{t=\tau} &= 0, \quad v_t|_{t=\tau} = F(x, \tau). \end{aligned} \quad (40.20)$$

Действительно, согласно формуле Даламбера (37.2), решение задачи (40.20) имеет вид

$$v(x, t, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(y, \tau) dy. \quad (40.21)$$

Подстановка (40.21) в (40.19) дает (40.18), что и доказывает справедливость утверждения. Кроме того, в справедливости утверждения можно убедиться непосредственной проверкой.

Для этого производные функции $u(x, t)$ (40.18), согласно соотношению (40.14), запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{a}{2a} \int_0^t d\tau [F(x + a(t - \tau), \tau) + F(x - a(t - \tau), \tau)]; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= F(x, t) + \frac{a}{2} \int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial x} [F(x + a(t - \tau), \tau) - \\ &\quad - F(x - a(t - \tau), \tau)]; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau [F(x + a(t - \tau), \tau) - F(x - a(t - \tau), \tau)]; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t d\tau [F(x + a(t - \tau), \tau) - F(x - a(t - \tau), \tau)]. \end{aligned}$$

Поставив $\partial^2 u / \partial t^2$ и $\partial^2 u / \partial x^2$ в (40.17), получим тождество $0 = 0$, т.е. $u(x, t)$ (40.18) – решение неоднородного волнового уравнения.

◇ В заключение отметим, что решение (40.17) однозначно определено начальными условиями и является устойчивым. Действительно, пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ – два решения задачи (40.1) с различными начальными условиями

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= \varphi_1(x), & u_{1t}(x, 0) &= \psi_1(x); \\ u_2(x, 0) &= \varphi_2(x), & u_{2t}(x, 0) &= \psi_2(x), \end{aligned}$$

отличающиеся друг от друга меньше чем на δ :

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta, \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (40.22)$$

Тогда для любого ε и промежутка $[0, T]$ можно указать такое δ , что $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon$ для $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$, как только $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$ и $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$. Для нахождения δ рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &< \frac{1}{2} |\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)| + \\ &+ \frac{1}{2} |\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at)| + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(y) - \psi_2(y)| dy < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a} 2a\delta t = \\ &= \delta(1 + t) \leq \delta(1 + T), \end{aligned}$$

откуда $\delta = \varepsilon / (1 + T)$. Здесь мы воспользовались соотношением (40.22). Другими словами, решение (40.17) непрерывно зависит от начальных условий:

$$\lim_{\substack{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \\ \psi_1 \rightarrow \psi_2}} [u_1(x, t) - u_2(x, t)] = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T].$$

Пример 40.1. Найти закон колебаний бесконечной струны под действием внешней силы $F(x, t) = Ae^{-\alpha t} \cos \omega x$ ($\alpha \geq 0$).

Решение. Согласно условию задачи, решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} Ae^{-\alpha\tau} \cos \omega y dy,$$

откуда

$$u(x, t) = \frac{A}{a\omega} \cos \omega x \int_0^t e^{-\alpha\tau} \sin \omega a(t - \tau) d\tau$$

и окончательно получим

$$u(x, t) = \frac{A \cos \omega x}{a(\alpha^2 + \omega^2)} \left[e^{-\alpha t} + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t - \cos \omega t \right]. \quad (40.23)$$

При $\alpha = 0$ это дает

$$u(x, t) = \frac{A \cos \omega x}{a\omega^2} [1 - \cos \omega t],$$

при $\omega = 0$

$$u(x, t) = \frac{A}{a\alpha^2} [\alpha t + e^{-\alpha t} - 1].$$

40.2. Смешанная задача для полупрямой

Рассмотрим колебания полубесконечной струны, вызванные первоначальными отклонениями $\varphi(x)$, первоначальными скоростями $\psi(x)$ и внешней силой $F(x, t)$, если левый конец струны $x = 0$ колеблется по заданному закону $\mu(t)$.

Математическая постановка сводится к смешанной задаче с краевыми условиями первого рода:

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= F(x, t), & x > 0, & t > 0; \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x), & t > 0; \\ u(0, t) &= \mu(t), & t > 0. \end{aligned} \quad (40.24)$$

Решение задачи (40.24) будем искать в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + \tilde{u}(x, t), \quad (40.25)$$

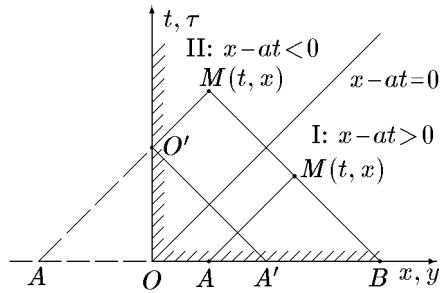


Рис. 85

где функция $v(x, t)$ — решение задачи (39.1), (39.2), а $\tilde{u}(x, t)$ — частное решение неоднородного уравнения (40.24) с нулевыми начально-краевыми условиями.

Как было показано выше, функция $v(x, t)$ задается формулой (39.10) и имеет различные виды в областях $x - at > 0$ под главной характеристикой и $x - at < 0$ над ней (рис.

85).

Естественно, что частное решение $\tilde{u}(x, t)$ в точке $M(x, t)$ также будет зависеть от того, какой области принадлежит эта точка $M(x, t)$ (см. рис. 85).

Если точка $M(x, t)$ принадлежит области I: $x - at > 0$, то решение записывается в виде

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2a} \iint_{\triangle MAB} F(y, \tau) d\tau dy = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x-a(t+\tau)} F(y, \tau) dy$$

и совпадает с формулой (40.18).

Если точка $M(x, t)$ принадлежит области II: $x - at < 0$, то

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2a} \iint_{\square MO'A'B} F(y, \tau) d\tau dy = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x-a(t+\tau)} F(y, \tau) dy.$$

Таким образом, решение задачи (40.24) имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} [\varphi(x + at) - \varphi(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(y) dy + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^{\tau} d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} F(y, \tau) dy, & x - at < 0, \\ \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(y) dy + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(y, \tau) dy, & x - at > 0. \end{cases} \quad (40.26)$$

Естественно, что при $F(x, t) = 0$ эта формула совпадает с формулой (39.10).

Аналогичным образом можно решать краевые задачи других типов, а также задачи для конечного отрезка.

41. Смешанная задача для одномерного однородного волнового уравнения на конечном отрезке. Метод Даламбера

Рассмотренный выше метод Даламбера для полубесконечной прямой можно применить и для конечного отрезка. Начнем со смешанной задачи с краевыми условиями первого рода

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x); \\ u(0, t) &= \mu_1(t), & u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \quad (41.1)$$

Сама постановка задачи говорит о том, что необходимо найти решение в полуполосе $0 < x < l, t > 0$ на фазовой плоскости xOt . Для удобства разобьем эту полуполосу правыми и левыми характеристиками (рис. 86)

$$\begin{aligned} (k-1)\frac{l}{a} < t - \frac{x}{a} < k\frac{l}{a}, & & k = \overline{0, \infty}, \\ m\frac{l}{a} < t + \frac{x}{a} < (m+1)\frac{l}{a}, & & m = \overline{0, \infty}. \end{aligned} \quad (41.2)$$

Если полосы, образованные правыми характеристиками, занумеровать числом k , а левыми – числом m , то вся рассматриваемая область решений разобьется на подобласти, являющиеся пересечениями пронумерованных полос. Каждая подобласть однозначно определяется парой чисел (m, k) . Решение в этих подобластях обозначим через $u(x, t) = u_{mk}(x, t)$.

Как следует из рис. 86, из всех подобластей выделяется треугольник, характеризуемый числами $m = 0, k = 0$, в котором искомое решение задачи должно удовлетворять только начальным условиям. Таким образом, решение в этой области определяется

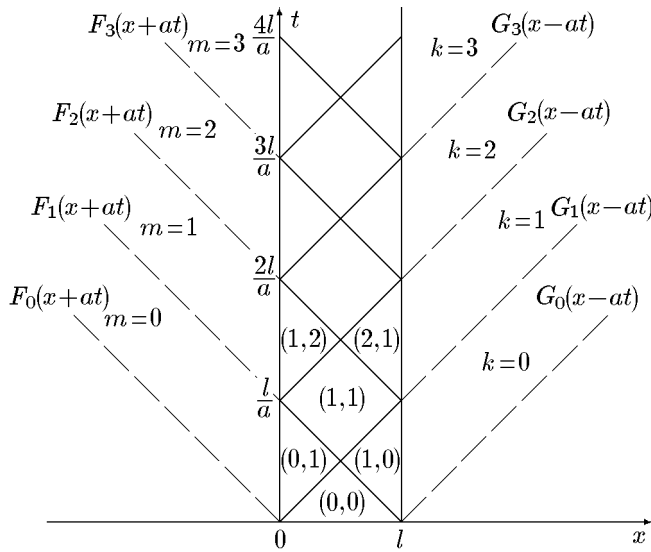


Рис. 86

формулой Даламбера (37.2)

$$u_{0,0}(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (41.3)$$

Если решения уравнения (41.3) представить прямой $G_0(x - at)$ и обратной $F_0(x + at)$ волнами

$$u_{0,0}(x, t) = F_0(x + at) + G_0(x - at), \quad (41.4)$$

то тогда

$$F_0(x + at) = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2a}\Psi(x + at), \quad (41.5)$$

$$G_0(x - at) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) - \frac{1}{2a}\Psi(x - at), \quad (41.6)$$

где $\Psi(x)$ – первообразная функции $\psi(x)$.

Теперь найденные функции $F_0(x + at)$ и $G_0(x - at)$ можно рассматривать как базис для построения решения в других областях так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям.

Представим решение в области $(0,1)$ в виде

$$u_{0,1}(x, t) = F_0(x + at) + G_1(x - at) \quad (41.7)$$

и определим $G_1(x, t)$ так, чтобы $u_{0,1}(x, t)$ удовлетворяла левому граничному условию

$$u_{0,1}(x, t)|_{x=0} = \mu_1(t). \quad (41.8)$$

Подставив (41.7) в (41.8), найдем

$$G_1(x - at) = \mu_1\left(t - \frac{x}{a}\right) - F_0(at - x). \quad (41.9)$$

Аналогично, представив решение в области $(1,0)$ в виде

$$u_{1,0}(x, t) = F_1(x + at) + G_0(x - at) \quad (41.10)$$

и подчинив его правому граничному условию

$$u_{1,0}(x, t)|_{x=l} = \mu_2(t), \quad (41.11)$$

получим

$$F_1(x + at) = \mu_2\left(t - \frac{x-l}{a}\right) - G_0(2l - x - at). \quad (41.12)$$

Для непрерывных решений условия сопряжения

$$G_1(x - at)|_{x-at=0} = G_0(x - at)|_{x-at=0}$$

и

$$F_1(x+at)|_{x+at=l} = F_0(x+at)|_{x+at=l}$$

дают естественное соотношение

$$\mu(0) = \varphi(0), \quad \mu_2(l) = \varphi(l). \quad (41.13)$$

Тогда решение в области (1,1) запишется как

$$u_{1,1}(x,t) = F_1(x+at) + G_1(x-at),$$

где $F_1(x+at)$ и $G_1(x-at)$ задаются соответственно формулами (41.12) и (41.9).Аналогично решение в произвольной области (m, k) можно записать

$$u_{m,k}(x,t) = F_m(x+at) + G_k(x-at). \quad (41.14)$$

Действуя так же, как при нахождении $F_1(x+at)$ и $G_1(x-at)$, получим рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} G_k(z) &= \mu_1\left(-\frac{z}{a}\right) - F_{k-1}(-z), \\ F_m(z) &= \mu_2\left(-\frac{z-l}{a}\right) - F_{m-1}(2l-z), \end{aligned} \quad (41.15)$$

с учетом которых можно выписать явный вид $F_m(x+at)$ и $G_k(x-at)$.Для нечетных $k = 2\bar{k} - 1$, $\bar{k} = \overline{1, \infty}$

$$\begin{aligned} G_{2\bar{k}-1}(x-at) &= \sum_{r=0}^{\bar{k}-1} \mu_1\left(t - \frac{x+2lr}{a}\right) - \\ &- \sum_{r=0}^{\bar{k}-2} \mu_2\left(t - \frac{x+l(1+2r)}{a}\right) - F_0(at-x-2l[\bar{k}-1]); \end{aligned} \quad (41.16)$$

для четных $k = 2\bar{k}$, $\bar{k} = \overline{1, \infty}$

$$\begin{aligned} G_{2\bar{k}}(x-at) &= \sum_{r=0}^{\bar{k}-1} \mu_1\left(t - \frac{x+2lr}{a}\right) - \\ &- \sum_{r=0}^{\bar{k}-1} \mu_2\left(t - \frac{x+l(1+2r)}{a}\right) - G_0(2l\bar{k}-at+x). \end{aligned} \quad (41.17)$$

Для нечетных $m = 2\bar{m} - 1$, $\bar{m} = \overline{1, \infty}$

$$F_{2\bar{m}-1}(x+at) = \sum_{r=0}^{\bar{m}-1} \mu_2\left(t + \frac{x-l(1+2r)}{a}\right) -$$

$$- \sum_{r=0}^{\bar{m}-2} \mu_1 \left(t + \frac{x - 2l(1+r)}{a} \right) - G_0(2l\bar{m} - at - x); \quad (41.18)$$

для четных $m = 2\bar{m}$, $\bar{m} = \overline{1, \infty}$

$$G_{2\bar{m}}(x + at) = \sum_{r=0}^{\bar{m}-1} \mu_2 \left(t + \frac{x - l(1+2r)}{a} \right) - \sum_{r=0}^{\bar{m}-1} \mu_1 \left(t + \frac{x - 2l(1+r)}{a} \right) - F_0(at + x - 2l\bar{m}). \quad (41.19)$$

Формулы (41.14) и (41.16)–(41.19) дают полное решение первой краевой задачи и, несмотря на свою громоздкость, имеют простой физический смысл. Так, например, величина $\mu_1([at - x - 2lr]/a)$ при $r = 0$ представляет собой волну, возбуждаемую левым граничным условием при $x = 0$. Следующие слагаемые при $r = 1, 2, \dots$ представляют собой последовательные отражения этой волны от как бы закрепленного края $x = 0$. Слагаемые $\mu_1([at + x - 2l(1+r)]/a)$, в свою очередь, описывают отражение этой волны от как бы закрепленного края $x = l$. Аналогично интерпретируются и остальные слагаемые.

Таким же образом решаются смешанные задачи с граничными условиями второго и третьего рода. Возникающие в этих случаях рекуррентные соотношения, аналогичные (41.15), представляют собой уже дифференциальные уравнения. Поскольку эти уравнения являются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка, то они легко интегрируются. Возникающие произвольные постоянные находятся из условий сопряжения на характеристиках $x - at = 0$ и $x + at = 0$.

Естественно, что громоздкость записи полученных решений затрудняет их практическое использование. Тем не менее, метод Даламбера позволяет преодолевать некоторые трудности, возникающие при решении смешанных задач методом Фурье.

Пример 41.1. Найти закон колебаний ограниченной струны, левый конец которой $x = 0$ колеблется по закону $A \sin \omega t$, а правый $x = l$ закреплен. Для моментов времени $t_i = il/a$, $i = \overline{0, 4}$ построить профиль струны, положив $\omega_1 = 3\pi a/2l$, $\omega_2 = 2\pi a/l$.

Решение. Согласно условию, имеем краевую задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, & u(0, t) &= A \sin \omega t, & u(l, t) &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку условие сопряжения $u(0, 0) = 0$ выполняется, то непрерывное решение, согласно (41.14), записывается в виде

$$u_{m,k}(x, t) = F_m(x + at) + G_k(x - at),$$

где F_m, G_k определены соотношениями

$$\begin{aligned} G_{2\bar{k}-1}(x-at) &= A \sum_{r=0}^{\bar{k}-1} \sin \omega \left(t - \frac{x+2lr}{a} \right), \\ G_{2\bar{k}}(x-at) &= -A \sum_{r=0}^{\bar{k}-1} \sin \omega \left(t + \frac{x+2lr}{a} \right), \\ F_{2\bar{m}-1}(x+at) &= A \sum_{r=0}^{\bar{m}-2} \sin \omega \left(t + \frac{x-2l(1+r)}{a} \right), \\ G_{2\bar{m}}(x+at) &= -A \sum_{r=0}^{\bar{m}-1} \sin \omega \left(t + \frac{x-2l(1+r)}{a} \right). \end{aligned} \quad (41.20)$$

Для построения профиля струны в моменты времени t_i выпишем явный вид решений $u_{i,i}(x, t_i)$. (см. рис. 86)

$$\begin{aligned} u_{0,0}(x, t_0) &= 0, \\ u_{1,1}(x, t_1) &= A \sin \omega \left(t_1 - \frac{x}{a} \right), \\ u_{2,2}(x, t_2) &= A \left\{ \sin \omega \left(t_2 - \frac{x}{a} \right) - \sin \omega \left(t_2 + \frac{x-2l}{a} \right) \right\}, \\ u_{3,3}(x, t_3) &= A \left\{ \sin \omega \left(t_3 - \frac{x}{a} \right) + \sin \omega \left(t_3 - \frac{x+2l}{a} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sin \omega \left(t_3 + \frac{x-2l}{a} \right) \right\}, \\ u_{4,4}(x, t_4) &= A \left\{ \sin \omega \left(t_4 - \frac{x}{a} \right) + \sin \omega \left(t_4 - \frac{x+2l}{a} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sin \omega \left(t_4 + \frac{x-2l}{a} \right) - \sin \omega \left(t_4 + \frac{x-4l}{a} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (41.21)$$

Положив в (41.21) $t_i = il/a$, получим выражения, описывающие профили струны в указанные моменты времени

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad u_{0,0}(x, 0) &= 0, \\ t_1 = \frac{l}{a} \quad u_{1,1} \left(x, \frac{l}{a} \right) &= A \sin \omega \frac{l-x}{a}, \\ t_2 = \frac{2l}{a} \quad u_{2,2} \left(x, \frac{2l}{a} \right) &= A \left\{ \sin \omega \frac{2l-x}{a} - \sin \omega \frac{x}{a} \right\}, \\ t_3 = \frac{3l}{a} \quad u_{3,3} \left(x, \frac{3l}{a} \right) &= A \left\{ \sin \omega \frac{3l-x}{a} + \sin \omega \frac{l-x}{a} - \right. \\ &\quad \left. - \sin \omega \frac{l+x}{a} \right\}, \\ t_4 = \frac{4l}{a} \quad u_{4,4} \left(x, \frac{4l}{a} \right) &= A \left\{ \sin \omega \frac{4l-x}{a} + \sin \omega \frac{2l-x}{a} - \right. \\ &\quad \left. - \sin \omega \frac{2l+x}{a} - \sin \omega \frac{x}{a} \right\} \end{aligned}$$

или после упрощений

$$\begin{aligned}
 u_{0,0}(x, 0) &= 0, \\
 u_{1,1}\left(x, \frac{l}{a}\right) &= A \sin \omega \frac{l-x}{a}, \\
 u_{2,2}\left(x, \frac{2l}{a}\right) &= 2A \cos \omega \frac{l}{a} - \sin \omega \frac{l-x}{a}, \\
 u_{3,3}\left(x, \frac{3l}{a}\right) &= A \left[\sin \omega \frac{3l-x}{a} \cos \omega \frac{x}{a} - \right. \\
 &\quad \left. - \left(2 \cos \omega \frac{l}{a} + \cos \omega \frac{3l}{a} \right) \sin \omega \frac{x}{a} \right], \\
 u_{4,4}\left(x, \frac{4l}{a}\right) &= 4A \cos \omega \frac{2l}{a} \cos \omega \frac{l}{a} \sin \omega \frac{l-x}{a}.
 \end{aligned} \tag{41.22}$$

Для частот $\omega = 3\pi a/(2l)$ (41.22) записываются как

$$\begin{aligned}
 u_{0,0}(x, 0) &= u_{2,2}\left(x, \frac{2l}{a}\right) = u_{4,4}\left(x, \frac{4l}{a}\right) = 0, \\
 u_{1,1}\left(x, \frac{l}{a}\right) &= -u_{3,3}\left(x, \frac{3l}{a}\right) = -A \cos \frac{3\pi x}{2l}
 \end{aligned}$$

и изображены на рис. 87.

Для частот $\omega = 2\pi a/l$ (41.22) принимают вид

$$\begin{aligned}
 u_{0,0}(x, 0) &= 0, \quad u_{1,1}\left(x, \frac{l}{a}\right) = -A \sin \frac{3\pi x}{l}, \\
 u_{2,2}\left(x, \frac{2l}{a}\right) &= 2u_{1,1}\left(x, \frac{l}{a}\right), \\
 u_{3,3}\left(x, \frac{3l}{a}\right) &= 3u_{1,1}\left(x, \frac{l}{a}\right), \quad u_{4,4}\left(x, \frac{4l}{a}\right) = 4u_{1,1}\left(x, \frac{l}{a}\right)
 \end{aligned}$$

и изображены на рис. 88.

В последнем случае амплитуда колебаний линейно возрастает с течением времени, т.е. возникает явление резонанса. Как следует из формул (41.22), это явление возникает для всех частот ω , кратных

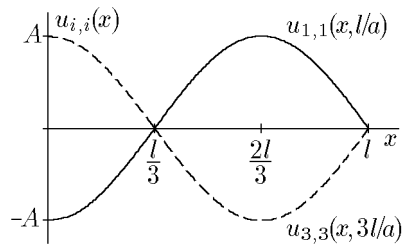


Рис. 87

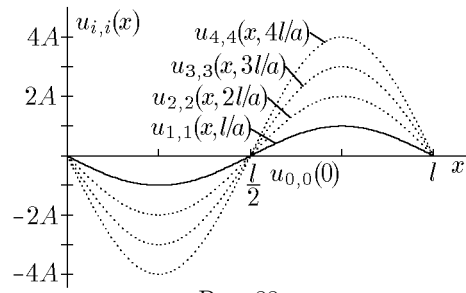


Рис. 88

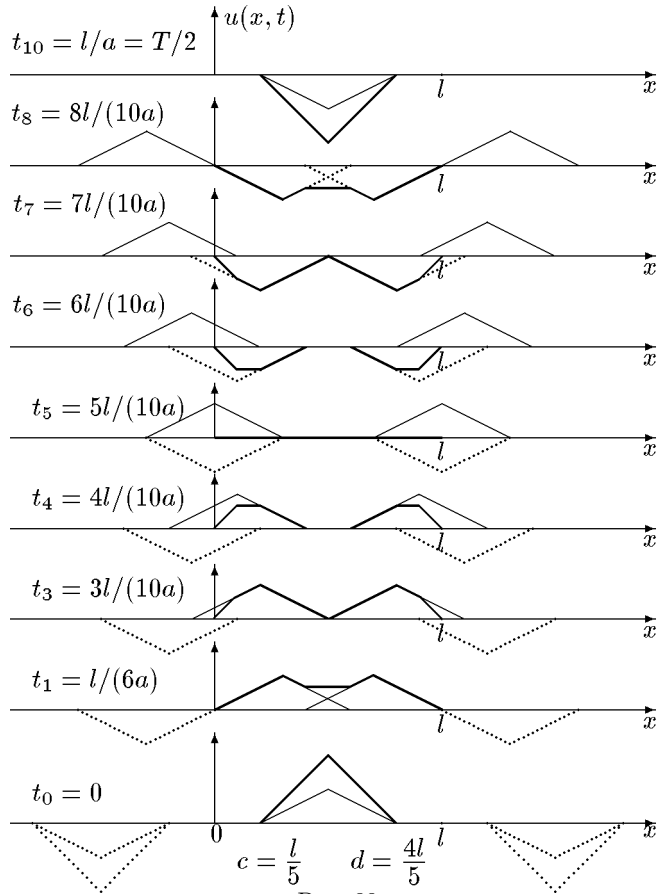


Рис. 89

величине $\pi a/l$, которые являются собственными частотами ограниченной струны длиной l (см. разд. «Задача Штурма–Лиувилля»). В этом случае решение задачи приемлемо только для моментов времени $t < l/a$, т.е. в области $(0,0)$, так как само волновое уравнение описывает малые поперечные колебания (см. разд. «Уравнения колебаний струны»).

Пример 41.2. Решить задачу с начальными условиями примера 37.1, считая струну конечной (длиной l) с закрепленными в точках $x = 0$ и $x = l$ концами. Точки c и d имеют координаты $x_c = l/5$, $x_d = 4l/5$. Построить профили струны для моментов времени $t_k = kl/(10a)$, $k = \overline{0, 10}$.

Решение. В данном случае удобнее использовать не аналитические выражения (41.14), (41.16)–(41.19), а их геометрическую интерпретацию. Для этого на плоскости xOx в области $0 < x < l$, которую будем называть физической, строим график реального первоначального отклонения (см. рис. 68). В нефизических (фиктивных) областях $x < 0$ и $x > l$ строим графики фиктивных первоначальных отклонений, являющихся нечетными продолжениями реального графика $\varphi(x)$ относительно точек $x = 0$ и $x = l$. Затем прямая и обратная реальные волны, взаимодействуя с фиктивными обратной и прямой волнами, образуют в физической области $0 < x < l$ прямую и обратную отраженные волны. В момент времени $t_{10} = l/a$ от начала процесса колебаний профиль принимает вид, симметричный первоначальному отклонению струны относительно оси Ox . Это означает, что значение l/a соответствует полупериоду колебаний, откуда $T = 2l/a$. Эти рассуждения наглядно иллюстрируются рис. 89.

42. Метод Фурье и смешанная задача для одномерного волнового уравнения на конечном отрезке

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях струны. Математическая постановка такой задачи имеет вид (см. разд. <Уравнения колебаний струны>)

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0, \quad (42.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad (42.2)$$

$$(\alpha_1 u + \beta_1 u_x)|_{x=0} = \mu_1(t), \quad (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)|_{x=l} = \mu_2(t),$$

где $a^2 = T/\rho$. Рассмотрим сначала смешанную задачу с крайевыми условиями первого рода, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Проанализируем поставленную задачу подробно, проследив на этом примере связь метода Фурье и метода функций Грина.

42.1. Однородная смешанная задача с однородными краевыми условиями первого рода

Рассмотрим колебания струны длины l с закрепленными концами. Такому физическому процессу математически соответствует следующая смешанная задача:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0, \quad (42.3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (42.4)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Решение будем искать методом разделения переменных. Для этого функцию $u(x, t)$ представим в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (42.5)$$

Тогда

$$\frac{T''}{T} - a^2 \frac{X''}{X} = 0.$$

Обозначим

$$\frac{X''}{X} = \lambda, \quad \frac{T''}{T} = a^2 \lambda.$$

Для функции $X(x)$ получим задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0, \\ X(0) = X(l) &= 0 \quad \text{иначе} \quad T(t) \equiv 0. \end{aligned} \quad (42.6)$$

Решение задачи Штурма–Лиувилля (42.6) получено в примере III.2.2:

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (42.7)$$

Подставим λ_n (42.7) в уравнение для $T(t)$

$$T'' + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 T = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + D_n \sin \frac{\pi n a}{l} t. \quad (42.8)$$

Учтя, что $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$, и просуммировав по всем n , получим

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{C}_n \cos \frac{\pi ant}{l} + \bar{D}_n \sin \frac{\pi ant}{l} \right] \sin \frac{\pi nx}{l}, \quad (42.9)$$

где $\bar{C}_n = A_n C_n$, а $\bar{D}_n = A_n D_n$. При этом должны выполняться начальные условия

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n \sin \frac{\pi nx}{l} = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{\pi n}{l} x;$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{D}_n \frac{\pi na}{l} \sin \frac{\pi nx}{l} = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где α_n, β_n – коэффициенты ряда Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(y) \sin \frac{\pi ny}{l} dy;$$

$$\beta_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(y) \sin \frac{\pi ny}{l} dy. \quad (42.10)$$

Два ряда Фурье по ортогональной системе функций равны, если равны коэффициенты этих рядов. Следовательно,

$$\bar{C}_n = \alpha_n, \quad \bar{D}_n = \frac{l\beta_n}{\pi an}.$$

В результате получим

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos \frac{\pi ant}{l} + \frac{l\beta_n}{\pi an} \sin \frac{\pi ant}{l} \right] \sin \frac{\pi nx}{l}. \quad (42.11)$$

Пример 42.1. Найти закон колебаний струны длиной $1/2$ с жестко закрепленными концами. Начальная скорость равна нулю, а начальное отклонение задается соотношением $u(x, 0) = x(x - 1/2)$.

Решение. Такому физическому процессу математически соответствует следующая смешанная задача:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad (42.12)$$

$$u(x, 0) = x(x - 1/2), \quad u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1/2, t) = 0 \quad (42.13)$$

в полуполосе $0 < x < 1/2$, $0 < t < \infty$. Решение будем искать методом разделения переменных. Для этого функцию $u(x, t)$ представим в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (42.14)$$

Обозначим

$$\frac{dX}{dx} = X', \quad \frac{dT}{dt} = \dot{T}.$$

Подставив (42.12) в (42.14), получим

$$\ddot{T}X = a^2 X''T, \quad \frac{\ddot{T}}{T} = a^2 \frac{X''}{X} = \lambda$$

или

$$\ddot{T} - \lambda T = 0, \quad X'' - \frac{1}{a^2} \lambda X = 0.$$

Подставим функцию (42.12) в граничные условия (42.13)

$$X(0)T(t) = X(1/2)T(t) = 0.$$

Следовательно,

$$X(0) = 0, \quad X(1/2) = 0.$$

Обозначим $\lambda = \tilde{\lambda}a^2$, тогда

$$\dot{T} - \tilde{\lambda}a^2 T, \quad X'' - \tilde{\lambda}X = 0.$$

Для $X(x)$ получим задачу Штурма–Лиувилля

$$X'' - \tilde{\lambda}X = 0, \quad X(0) = X(1/2) = 0,$$

решение которой имеет вид (см. пример III.2.1)

$$X_n(x) = B_n \sin 2\pi n x.$$

Для определения функции $T(t)$ получим

$$\ddot{T} + 4\pi^2 n^2 a^2 T = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 4\pi^2 n^2 a^2 = 0,$$

корни которого равны

$$k = \pm i2\pi na.$$

Следовательно,

$$T_n(t) = C_n \cos 2\pi nat + D_n \sin 2\pi nat$$

и

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t).$$

Просуммировав по n , получим решение уравнения (42.12), удовлетворяющее граничным условиям (42.13):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{C}_n \cos 2\pi nat + \tilde{D}_n \sin 2\pi nat] \sin 2\pi nx.$$

Здесь $\tilde{D}_n = D_n B_n$, $\tilde{C}_n = C_n B_n$ — постоянные, которые должны быть определены из начальных условий (42.13). Из первого условия найдем

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \sin 2\pi nx = x \left(x - \frac{1}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin 2\pi nx,$$

где α_n — коэффициенты Фурье функции $\varphi(x) = x(x - 1/2)$

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin(2\pi nx/l) dx.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях $\sin 2\pi nx$, получим

$$\tilde{C}_n = \alpha_n.$$

Аналогично из второго начального условия

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2\pi nx (-\tilde{C}_n 2\pi na \sin 2\pi nat + \tilde{D}_n 2\pi na \cos 2\pi nat),$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2\pi nx \tilde{D}_n 2\pi na = 0$$

следует, что

$$\tilde{D}_n = 0.$$

Найдем явный вид коэффициентов α_n :

$$\alpha_n = 4 \int_0^{1/2} x(x - 1/2) \sin(2\pi nx) dx.$$

Проинтегрируем по частям, положив

$$\begin{aligned} U &= x(x - 1/2), & dU &= (2x - 1/2)dx; \\ dV &= \sin 2\pi nx dx, & V &= -\frac{1}{2\pi n} \cos 2\pi nx. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 4 \left[x(x - 1/2) \left(-\frac{\cos 2\pi nx}{2\pi n} \right) \Big|_0^{1/2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi n} \int_0^{1/2} (2x - 1/2) \cos 2\pi nx dx \right]. \end{aligned}$$

Проинтегрируем еще раз по частям:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= -\frac{4}{2\pi n} \left(-\frac{1}{\pi n} \right) \left(-\frac{\cos 2\pi nx}{2\pi n} \right) \Big|_0^{1/2} = \\ &= -\frac{1}{\pi^3 n^3} [-(-1)^n + 1] = \frac{1}{\pi^3 n^3} [(-1)^n - 1], \end{aligned}$$

т.е.

$$\alpha_{2k} = 0, \quad \alpha_{2k+1} = -\frac{2}{\pi^3 (2k+1)^3}.$$

Следовательно,

$$\tilde{C}_n = \frac{1}{\pi^3 n^3} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ -\frac{2}{\pi^3 (2k+1)^3}, & n = 2k+1, \end{cases}$$

где $k = \overline{0, \infty}$. Окончательно получим

$$u(x, t) = -\frac{2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[2\pi(2k+1)x] \cos[2\pi(2k+1)at]}{(2k+1)^3}.$$

С учетом соотношения

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

запишем

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)],$$

$$\varphi(\xi) = -\frac{2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2\pi(2n+1)\xi}{(2n+1)^3}.$$

Функция $\varphi(\xi)$ обладает свойствами

$$\varphi(\xi) = -\varphi(-\xi), \quad \varphi(\xi + 1/2) = -\varphi(\xi), \quad \varphi(\xi + 1) = \varphi(\xi)$$

и на отрезке $[0, 1/2]$ имеет вид

$$\varphi(\xi) = \xi(\xi - 1/2).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} (\xi - [\xi])\left(\xi - [\xi] - \frac{1}{2}\right), & 0 \leq \xi - [\xi] \leq 1/2; \\ (1 - \xi - [\xi])\left(\xi - [\xi] - \frac{1}{2}\right), & \xi - [\xi] > 1/2, \end{cases}$$

где $[\xi]$ — целая часть ξ .

42.2. Фундаментальное решение смешанной задачи с краевыми условиями первого рода

♦ Функцией Грина $g(x, y, t)$ (фундаментальным решением) смешанной задачи для уравнения Даламбера называется обобщенная функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} g_{tt} &= a^2 g_{xx}, & t > 0, & \quad 0 \leq x \leq l, \\ (\alpha_1 g_x + \beta_1 g)|_{x=0} &= (\alpha_2 g_x + \beta_2 g)|_{x=l} = 0, & & (42.15) \\ g|_{t=0} &= 0, & g_t|_{t=0} &= \delta(x - y). \end{aligned}$$

Утверждение 42.1. Функцию Грина смешанной задачи

$$g_{tt} = a^2 g_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

$$g|_{x=0} = g|_{x=l} = 0, \quad (42.16)$$

$$g|_{t=0} = 0, \quad g_t|_{t=0} = \delta(x - y)$$

можно представить в виде

$$g(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi a n} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l} \sin \frac{\pi n a t}{l}. \quad (42.17)$$

Выполнение первых трех условий в (42.16) следует из (42.17). Последнее условие в (42.16) вытекает из соотношения

$$\delta(x - y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l}, \quad (42.18)$$

которое получается из разложения δ -функции в ряд Фурье по полной ортогональной системе функций [см. (III.2.9)]. Таким образом, утверждение доказано.

Рассмотрим простейшие свойства функции Грина смешанной задачи.

Свойство 1. Функция

$$u(x, t) = \int_0^l \{g_t(x, y, t)\varphi(y) + g(x, y, t)\psi(y)\} dy \quad (42.19)$$

является решением задачи (42.3), (42.4).

Доказательство. Действительно, подставив (42.10) в (42.11) и поменяв местами суммирование и интегрирование, получим (42.19), где $g(x, y, t)$ определена в (42.17).

Свойство 2. Функция $\mathfrak{g}(x, y, t) = g_t(x, y, t)$ является решением смешанной задачи

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{tt} &= a^2 \mathfrak{g}_{xx}, & t > 0, & \quad 0 \leq x \leq l, \\ \mathfrak{g}|_{x=0} &= \mathfrak{g}|_{x=l} = 0, & & \\ \mathfrak{g}|_{t=0} &= \delta(x - y), & \mathfrak{g}_t|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (42.20)$$

Доказательство полностью аналогично доказательству предыдущего утверждения.

Свойство 3. Функция

$$\mathfrak{E}(x, y, t) = \theta(t)g(x, y, t) \quad (42.21)$$

является фундаментальным решением смешанной задачи (42.3), (42.4), т.е.

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{tt} - a^2 \mathfrak{E}_{xx} &= \delta(x-y)\delta(t), \\ \mathfrak{E}|_{x=0} &= \mathfrak{E}|_{x=l} = \mathfrak{E}|_{t=0} = \mathfrak{E}_t|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (42.22)$$

Доказательство. Подставим (42.21) в левую часть соотношения (42.22) и получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{tt} - a^2 \mathfrak{E}_{xx} &= \theta''_{tt}(t)g + 2\theta'_t(t)g_t + \theta(t)g_{tt} - a^2\theta(t)g_{xx} = \\ &= \delta'(t)g + 2\delta(t)g_t. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением $\theta'(t) = \delta(t)$ и уравнением (42.16).

Воспользуемся теперь свойствами δ -функции Дирака (см. разд. <Дельта-функция Дирака и ее свойства> части II)

$$\begin{aligned} g_t \delta(t) &= g_t|_{t=0} \delta(t), \\ g \delta'(t) &= g|_{t=0} \delta'(t) - g_t|_{t=0} \delta(t). \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathfrak{E}_{tt} - a^2 \mathfrak{E}_{xx} = g|_{t=0} \delta'(t) + g_t|_{t=0} \delta(t) = \delta(x-y)\delta(t).$$

Здесь мы воспользовались начальными условиями (42.16) для функции $g(x, y, t)$. Выполнение начальных и краевых условий (42.22) вытекает из соответствующих условий для функции $g(x, y, t)$. Таким образом, свойство 3 доказано.

Свойство 4. Функция

$$\tilde{u}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l g(x, y, t - \tau) f(y, \tau) dy \quad (42.23)$$

является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - a^2 \tilde{u}_{xx} &= f(x, t), \\ \tilde{u}|_{x=0} &= \tilde{u}|_{x=l} = \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_t|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (42.24)$$

Доказательство. С учетом соотношения (42.23) найдем

$$\tilde{u}_{xx}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l g_{xx}(x, y, t - \tau) f(y, \tau) dy$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t = \int_0^t d\tau \int_0^l g_t(x, y, t - \tau) f(y, \tau) dy + \\ + \int_0^l g(x, y, 0) f(y, t) dy. \end{aligned} \quad (42.25)$$

В силу начальных условий (42.16) для функции $g(x, y, t)$ последнее слагаемое равно нулю. Тогда справедливость начально-краевых условий в (42.25) очевидна. Продифференцировав соотношение (42.25) по t , получим

$$\tilde{u}_{tt} = \int_0^t d\tau \int_0^l g_{tt}(x, y, t - \tau) f(y, \tau) dy + \int_0^l g_t(x, y, 0) f(y, t) dy.$$

Отсюда и из определения функции Грина $g(x, y, t)$ в (42.16) с учетом свойств δ -функции свойство 4 доказано.

42.3. Неоднородная смешанная задача с неоднородными краевыми условиями первого рода

Будем искать ненулевые решения уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (42.26)$$

удовлетворяющие дополнительным условиям

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad (42.27)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (42.28)$$

Рассмотрение проведем в несколько этапов.

1. Сначала введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$, положив

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t),$$

где $w(x, t)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям $w(0, t) = \mu_1(t)$, $w(l, t) = \mu_2(t)$. Простейший вид такой функции:

$$w(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Тогда для функции $v(x, t)$ получим смешанную задачу с нулевыми (однородными) граничными условиями

$$\begin{aligned} v_{tt} - a^2 v_{xx} &= \bar{f}(x, t), \\ v(0, t) = v(l, t) &= 0, \quad v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad v_t(x, 0) = \bar{\psi}(t), \end{aligned} \quad (42.29)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, t) &= f(x, t) - [w_{tt} - a^2 w_{xx}], \\ \bar{\varphi}(x) &= \varphi(x) - w(x, 0), \\ \bar{\psi}(t) &= \psi(t) - w_t(x, 0). \end{aligned}$$

2. Решение смешанной задачи (42.29) можно представить в виде

$$v(x, t) = L(x, t) + M(x, t), \quad (42.30)$$

где

$$\begin{aligned} L_{tt} - a^2 L_{xx} &= 0, \\ L|_{t=0} &= \bar{\varphi}(x), \quad L_t|_{t=0} = \bar{\psi}(x), \quad L|_{x=0} = L|_{x=l} = 0 \end{aligned} \quad (42.31)$$

и

$$\begin{aligned} M_{tt} - a^2 M_{xx} &= \bar{f}(x, t), \\ M|_{t=0} &= M_t|_{t=0} = M|_{x=0} = M|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (42.32)$$

3. Согласно (42.11), решение смешанной задачи (42.31) имеет вид

$$L(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{\alpha}_n \cos \frac{\pi ant}{l} + \frac{\bar{\beta}_n l}{\pi an} \sin \frac{\pi ant}{l} \right] \sin \frac{\pi nx}{l}, \quad (42.33)$$

где

$$\bar{\alpha}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{\varphi}(y) \sin \frac{\pi ny}{l} dy, \quad \bar{\beta}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{\psi}(y) \sin \frac{\pi ny}{l} dy.$$

4. Решение задачи (42.32) будем искать в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (42.6)

$$M(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (42.34)$$

где функции $\Theta_n(t)$ подлежат определению. Из (42.32) вытекает, что

$$\Theta_n(0) = \Theta'_n(0) = 0. \quad (42.35)$$

Подставив (42.34) в (42.32), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\Theta_n'' + a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \Theta_n \right] \sin \frac{\pi n x}{l} = \bar{f}(x, t).$$

Разложим правую часть последнего соотношения в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (42.6)

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (42.36) \\ f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l \bar{f}(y, t) \sin \frac{\pi n y}{l} dy \end{aligned}$$

и приравняем коэффициенты рядов Фурье в левой и правой частях соотношения. Тогда для определения функции $\Theta_n(t)$ получим следующее уравнение:

$$\Theta_n'' + \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 \Theta_n = f_n(t) \quad (42.37)$$

с начальными условиями (42.35).

Решение уравнения (42.37) будем искать методом Лагранжа

$$\Theta_n(t) = p_n(t) \cos \omega_n t + q_n(t) \sin \omega_n t, \quad \omega_n = \frac{\pi a n}{l},$$

где функции $p_n(t)$ и $q_n(t)$ определяются системой уравнений

$$\begin{cases} p'_n(t) \cos \omega_n t + q'_n(t) \sin \omega_n t = 0, \\ p'_n(t) (-\omega_n) \sin \omega_n t + q'_n(t) \omega_n \cos \omega_n t = f_n(t). \end{cases}$$

В результате получим

$$p_n(t) = -\frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \omega_n \tau d\tau + p_n^0,$$

$$q_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \cos \omega_n \tau d\tau + q_n^0.$$

Из начальных условий (42.35) найдем $q_n^0 = p_n^0 = 0$. Следовательно,

$$\Theta_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) (-\sin \omega_n \tau \cos \omega_n t + \cos \omega_n \tau \sin \omega_n t) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau.$$

Таким образом,

$$M(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \sin \frac{\omega_n x}{a}. \quad (42.38)$$

Подставив (42.36) в (42.38), найдем

$$M(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l f(y, \tau) g(x, y, t - \tau) dy, \quad (42.39)$$

где функция $g(x, y, t - \tau)$ определяется соотношением (42.17).
Окончательно получим

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t); \quad (42.40)$$

$$w(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \mu_1(t) + \frac{x}{l} \mu_2(t),$$

$$v(x, t) = L(x, t) + M(x, t),$$

где функции $L(x, t)$ и $M(x, t)$ определяются соотношениями (42.33) и (42.39) соответственно.

Пример 42.2. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & 0 < x < \pi, & & t > 0; & & (42.41) \\ u(0, t) &= t^2, & u(\pi, t) &= t^2, & u(x, 0) &= \sin x, & & u_t = 0. \end{aligned}$$

Решение. Согласно общей схеме (42.40), решение ищем в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)t^2 + \frac{x}{\pi}t^2 = v(x, t) + t^2.$$

Для функции $v(x, t)$ получим следующую смешанную задачу:

$$\begin{aligned} v_{tt} &= v_{xx} - 2; & v(0, t) &= 0, & v(\pi, t) &= 0; & & (42.42) \\ v(x, 0) &= \sin x, & v_t(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Решение задачи (42.42) ищем в виде

$$v(x, t) = L(x, t) + M(x, t),$$

где $L(x, t)$ — решение однородного уравнения

$$\begin{aligned} L_{tt} &= L_{xx}; \\ L|_{x=0} &= L|_{x=\pi} = 0; & & & (42.43) \\ L|_{t=0} &= \sin x; & L_t|_{t=0} &= 0, \end{aligned}$$

а $M(x, t)$ — решение неоднородного уравнения

$$M_{tt} = M_{xx} + 2 \quad (42.44)$$

с нулевыми граничными и начальными условиями

$$M|_{x=0} = M|_{x=\pi} = 0; \quad M|_{t=0} = M_t|_{t=0} = 0.$$

Частное решение задачи (42.43) ищем в виде

$$L(x, t) = X(x)T(t).$$

Разделив переменные, получим следующее уравнение для функции $T(t)$:

$$T'' - \lambda T = 0.$$

С учетом граничных условий

$$L(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad L(\pi, t) = X(\pi)T(t) = 0$$

для определения функции $X(x)$ получим задачу Штурма–Лиувилля

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0,$$

решение которой имеет вид

$$X_n(x) = B_n \sin nx; \quad \lambda_n = -n^2, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Тогда для функций $T_n(t)$ получим

$$T_n'' + n^2 T_n = 0, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Из характеристического уравнения $\omega^2 + n^2 = 0$ найдем $\omega = \pm in$. Поэтому общее решение имеет вид

$$T_n(t) = C_n \cos nt + D_n \sin nt.$$

Следовательно,

$$L_n(x, t) = (\bar{C}_n \cos nt + \bar{D}_n \sin nt) \sin nx,$$

где $\bar{C}_n = C_n B_n$, $\bar{D}_n = D_n B_n$. Просуммировав по n , получим

$$L(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{C}_n \cos nt + \bar{D}_n \sin nt) \sin nx.$$

Из начального условия для функции $u(x, t)$ найдем

$$L(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n \sin nx = \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \cdot \sin nx.$$

Следовательно,

$$\bar{C}_n = \delta_{n1}.$$

Из начального условия для производной $u_t(x, t)$ аналогично найдем

$$L_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin x [-n\bar{C}_n \cdot 0 + \bar{D}_n n] = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \sin nx.$$

Следовательно,

$$\bar{D}_n = 0, \quad n = \overline{0, \infty},$$

и окончательно получим

$$L(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nt \sin x \delta_{1n} = \cos t \sin x. \quad (42.45)$$

Решение задачи (42.44) ищем в виде

$$M(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(t) \sin nx. \quad (42.46)$$

Подставив (42.46) в (42.44), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n''(t) \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (-\sin nx) \Theta_n(t) + 2.$$

Разложим правую часть уравнения в ряд Фурье по функциям $\sin nx$:

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi n} (-\cos \pi n + \cos 0) = \\ &= \frac{4}{\pi n} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \frac{8}{\pi(2k+1)}, & n = 2k+1, \end{cases} \end{aligned}$$

где $k = \overline{0, \infty}$. Для определения функций $\Theta_n(t)$ получим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} \Theta_n''(t) + n^2 \Theta_n(t) &= \alpha_n; \\ \Theta_n(0) &= 0; \quad \Theta_n'(0) = 0. \end{aligned} \quad (42.47)$$

Частное решение уравнения (42.47) ищем методом неопределенных коэффициентов

$$\tilde{\Theta}_n(t) = \beta_n t^0 = \beta_n.$$

Тогда

$$n^2 \beta_n = \alpha_n,$$

т.е.

$$\beta_n = \frac{\alpha_n}{n^2}.$$

Следовательно,

$$\tilde{\Theta}_n(t) = \frac{\alpha_n}{n^2}, \quad n = \overline{0, \infty},$$

или

$$\Theta_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt + \frac{\alpha_n}{n^2}.$$

Из начального условия для функций $\Theta_n(t)$ (42.47)

$$\Theta_n(0) = a_n + \frac{\alpha_n}{n^2}$$

получим

$$a_n = -\frac{\alpha_n}{n^2}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Из начального условия для производной функций Θ'_n получим $b_n = 0$, $n = \overline{1, \infty}$. Тогда

$$\Theta_n(t) = \frac{\alpha_n}{n^2}(1 - \cos nt).$$

В результате запишем

$$M(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_n}{n^2} (1 - \cos nt) \right\} \sin nx. \quad (42.48)$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= t^2 + \cos t \sin x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4[1 - (-1)^n]}{\pi n^3} (1 - \cos nt) \right\} \sin nx = t^2 + \cos t \sin x + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{8}{\pi(2k+1)^3} [1 - \cos(2k+1)t] \right\} \sin(2k+1)x, \end{aligned}$$

где функция $L(x, t)$ определена соотношением (42.45), а функция M — соотношением (42.48).

42.4. Редукция неоднородных граничных условий

Найдем связь между функциями $u(x, t)$ и $v(x, t)$, удовлетворяющими соответственно неоднородным и однородным граничным условиям

$$\begin{aligned} (a_1 u_x + b_1 u)|_{x=0} &= \mu_1(t), & (a_1 v_x + b_1 v)|_{x=0} &= 0, \\ (a_2 u_x + b_2 u)|_{x=l} &= \mu_2(t); & (a_2 v_x + b_2 v)|_{x=l} &= 0. \end{aligned} \quad (42.49)$$

Отметим, что задача имеет неоднозначное решение. Будем искать, например, $u(x, t)$ в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= w(x, t) + v(x, t) = \\ &= p_1(x)\mu_1(t) + p_2(x)\mu_2(t) + v(x, t). \end{aligned} \quad (42.50)$$

Подставив (42.50) в первую пару уравнений (42.49), получим с учетом второй пары граничные условия для функции $p_1(x)$

$$\begin{aligned} [a_1 p_1'(x) + b_1 p_1(x)]|_{x=0} &= 1, \\ [a_2 p_1'(x) + b_2 p_1(x)]|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \quad (42.51)$$

и для функции $p_2(x)$

$$\begin{aligned} [a_1 p_2'(x) + b_1 p_2(x)]|_{x=0} &= 0, \\ [a_2 p_2'(x) + b_2 p_2(x)]|_{x=l} &= 1. \end{aligned} \quad (42.52)$$

Наиболее просто явный вид функций $p_1(x)$ и $p_2(x)$ может быть найден в классе полиномов

$$p_1(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2, \quad (42.53)$$

$$p_2(x) = \delta_0 + \delta_1 x + \delta_2 x^2, \quad (42.54)$$

коэффициенты которых удовлетворяют системам уравнений, полученным при подстановке (42.53) и (42.54) соответственно в (42.51) и (42.52), т.е.

$$\begin{aligned} b_1 \gamma_0 + a_1 \gamma_1 &= 1, \\ b_2 \gamma_0 + (a_2 + b_2 l) \gamma_1 + (2a_2 + b_2 l) l \gamma_2 &= 0 \end{aligned} \quad (42.55)$$

и

$$\begin{aligned} b_1 \delta_0 + a_1 \delta_1 &= 0, \\ b_2 \delta_0 + (a_2 + b_2 l) \delta_1 + (2a_2 + b_2 l) l \delta_2 &= 1. \end{aligned} \quad (42.56)$$

Отсюда

$$\gamma_0 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 a_1 l \gamma_2}{\Delta}, \quad \gamma_1 = -\frac{b_2 + \Delta_2 b_1 l \gamma_2}{\Delta}, \quad \gamma_2 = \gamma_2 \quad (42.57)$$

и

$$\delta_0 = \frac{a_1(\Delta_2 l \delta_2 - 1)}{\Delta}, \quad \delta_1 = \frac{b_1(1 - \Delta_2 l \delta_2)}{\Delta}, \quad \delta_2 = \delta_2, \quad (42.58)$$

где

$$\Delta_1 = a_2 + b_2 l, \quad \Delta_2 = a_2 + \Delta_1, \quad \Delta = b_1 \Delta_1 - a_1 b_2. \quad (42.59)$$

Для наиболее часто встречающихся случаев формулы можно упростить.

1. *Граничные условия первого рода:*

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{x=0} &= \mu_1(t), \\ u(x, t)|_{x=l} &= \mu_2(t), \\ u(x, t) &= \left[1 - (1 + l^2 \gamma_2) \frac{x}{l} + \gamma_2 x^2\right] \mu_1(t) + \\ &\quad + \left[(1 - l^2 \delta_2) \frac{x}{l} + \delta_2 x^2\right] \mu_2(t) + v(x, t) \end{aligned}$$

или, если выбрать $\gamma_2 = \delta_2 = 0$,

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \mu_1(t) + \frac{x}{l} \mu_2(t) + v(x, t).$$

2. *Граничные условия второго рода:*

$$\begin{aligned} u_x(x, t)|_{x=0} &= \mu_1(t), \\ u_x(x, t)|_{x=l} &= \mu_2(t), \\ u(x, t) &= \left(-\frac{x^2}{2l} + x + \gamma_0\right) \mu_1(t) + \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2l} + \delta_0\right) \mu_2(t) + v(x, t) \end{aligned}$$

или, если выбрать $\gamma_0 = \delta_0 = 0$,

$$u(x, t) = \left(-\frac{x^2}{2l} + x\right) \mu_1(t) + \frac{x^2}{2l} \mu_2(t) + v(x, t).$$

3. *Смешанные граничные условия:*

$$\begin{aligned} \text{а) } u(x, t)|_{x=0} &= \mu_1(t), \\ u_x(x, t)|_{x=l} &= \mu_2(t), \\ u(x, t) &= [\gamma_2 x^2 - 2l \gamma_2 x + 1] \mu_1(t) + \\ &\quad + [\delta_2 x^2 + (1 - 2l \delta_2) x] \mu_2(t) + v(x, t) \end{aligned}$$

или, если выбрать $\gamma_2 = \delta_2 = 0$,

$$u(x, t) = \mu_1(t) + x\mu_2(t) + v(x, t);$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad u_x(x, t)|_{x=0} &= \mu_1(t), \\ u(x, t)|_{x=l} &= \mu_2(t), \\ u(x, t) &= [(x^2 - l^2)\gamma_2 + (x - l)]\mu_1(t) + \\ &\quad + [(x^2 - l^2)\delta_2 + 1]\mu_2(t) + v(x, t) \end{aligned}$$

или, при $\gamma_2 = \delta_2 = 0$,

$$u(x, t) = (x - l)\mu_1(t) + \mu_2(t) + v(x, t)$$

и так далее.

С другой стороны, если ввести функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, непрерывные на отрезке $[0, l]$ и удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1, & y_1(l) &= 0, \\ y_2(0) &= 0, & y_2(l) &= 1, \end{aligned}$$

то соотношения (42.51), (42.52) можно записать следующим образом:

$$y_1(x)[a_1p'_1 + b_1p_1] + y_2(x)[a_2p'_1 + b_2p_1] = y_1(x), \quad (42.60)$$

$$y_1(x)[a_1p'_2 + b_1p_2] + y_2(x)[a_2p'_2 + b_2p_2] = y_2(x). \quad (42.61)$$

Уравнения (42.60), (42.61) в общем случае являются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка, любое частное решение которых автоматически удовлетворяет условиям (42.51), (42.52). В случае первой краевой задачи дифференциальные уравнения (42.60), (42.61) вырождаются в алгебраические ($a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$)

$$[y_1(x) + y_2(x)]p_1(x) = y_1(x), \quad (42.62)$$

$$[y_1(x) + y_2(x)]p_2(x) = y_1(x).$$

Выбор явного вида функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ обусловлен либо конкретным видом уравнения, которому соответствуют граничные условия (42.49), либо наиболее простым видом уравнения (42.62). В последнем случае, например, можно выбрать

$$y_1(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad y_2(x) = \frac{x}{l} \quad (42.63)$$

или

$$y_1(x) = \cos \frac{\pi x}{2l}, \quad y_2(x) = \sin \frac{\pi x}{2l} \quad (42.64)$$

и т.д.

Тогда для первой краевой задачи и (42.63) получим найденное уже соотношение

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_1(t) + \frac{x}{l}\mu_2(t) + v(x, t), \quad (42.65)$$

а для (42.64)

$$u(x, t) = \mu_1(t) \cos \frac{\pi x}{2l} + \mu_2(t) \sin \frac{\pi x}{2l} + v(x, t). \quad (42.66)$$

42.5. Метод Фурье для одномерного волнового уравнения. Общая схема

Метод разделения переменных, рассмотренный в предыдущих параграфах, может быть применен не только для уравнения колебаний однородной струны или стержня (уравнение с постоянными коэффициентами), но и для уравнения колебаний неоднородной струны или стержня (уравнение с переменными коэффициентами) [см. главу «Уравнения с частными производными в физических задачах»]. Если при этом принять во внимание силы сопротивления, обусловленные, например, трением или другими факторами, которые в большинстве случаев пропорциональны самой функции $u(x, t)$ или ее производной $u_t(x, t)$, то уравнение колебаний можно записать в виде

$$\rho(x)[u_{tt} + \alpha(t)u_t] = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u\right] + f(x, t), \quad (42.67)$$

где $\alpha(t)$, $\rho(x)$, $k(x)$, $q(x)$ – заданные неотрицательные функции, определяемые физической постановкой задачи, $f(x, t)$ – внешняя сила, отнесенная к единице массы.

Если ввести дифференциальные операторы с частными производными (см. разд. «Задача Штурма–Лиувилля и начально-краевые задачи для уравнений математической физики»)

$$\widehat{P}_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}, \quad (42.68)$$

$$\widehat{L}_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial}{\partial x}\right] - q(x), \quad (42.69)$$

то уравнение (42.67) примет вид

$$\rho(x)\widehat{P}_t u(x, t) = \widehat{L}_x u(x, t) + f(x, t). \quad (42.70)$$

Поставим для уравнения (42.70) смешанную задачу

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (42.71)$$

$$(a_1 u_x + b_1 u)|_{x=0} = (a_2 u_x + b_2 u)|_{x=l} = 0. \quad (42.72)$$

Сначала рассмотрим однородное уравнение (42.70), когда в правой части функция $f(x, t) = 0$. Частное решение этого однородного уравнения будем искать методом разделения переменных, положив

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (42.73)$$

Подставим (42.73) в (42.70). Разделив переменные, для определения функций $X(x)$, $T(t)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\widehat{L}_x X(x) = -\lambda \rho(x) X(x), \quad (42.74)$$

$$\widehat{P}_t T(t) = -\lambda T(t). \quad (42.75)$$

Функции $X(x)$ и $T(t)$, стоящие в уравнениях (42.74) и (42.75), зависят только от одной переменной x или t . Поэтому частные производные в операторах \widehat{P}_t и \widehat{L}_x можно заменить обыкновенными.

Уравнение (42.74) с учетом (42.73) и (42.71) следует дополнить граничными условиями

$$a_1 X'(0) + b_1 X(0) = a_2 X'(l) + b_2 X(l) = 0, \quad (42.76)$$

что приводит к задаче Штурма–Лиувилля для определения функции $X(x)$ и постоянной λ .

Пусть $X_n(x)$ – ортонормированные собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (42.74), (42.76) с собственными значениями λ_n ($n = \overline{0, \infty}$)

$$\langle X_n(x) | X_k(x) \rangle_{\rho(x)} = \int_0^l \rho(x) X_n(x) X_k(x) dx = \delta_{nk}. \quad (42.77)$$

Тогда, согласно принципу суперпозиции, функция

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (42.78)$$

– решение однородного $[f(x, t) = 0]$ уравнения (42.70), если функции $T_n(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\widehat{P}_t T_n(t) = -\lambda_n T_n(t), \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (42.79)$$

Последовательное применение метода Фурье в конкретных задачах связано с большим количеством промежуточных выкладок, которых можно избежать, если при вычислениях использовать следующие утверждения.

Утверждение 42.2. Если функция $T_n(t)$ является решением уравнения (42.79) с начальными условиями

$$T_n(0) = 1, \quad T'_n(0) = 0, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (42.80)$$

то решение задачи

$$\begin{aligned} \rho(x)\widehat{P}_t\mathbf{g}(x, y, t) &= \widehat{L}_x\mathbf{g}(x, y, t), \\ \mathbf{g}(x, y, t)|_{t=0} &= \delta(x - y), \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(x, y, t)|_{t=0} = 0 \end{aligned} \quad (42.81)$$

с граничными условиями (42.72) имеет вид

$$\mathbf{g}(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho(y)X_n(x)X_n(y)T_n(t). \quad (42.82)$$

С учетом соотношения полноты собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (см. разд. «Задача Штурма–Лиувилля» части III)

$$\delta(x - y) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho(y)X_n(x)X_n(y)$$

утверждение очевидно.

Утверждение 42.3. Если функции $T_n(t)$ ($n = \overline{0, \infty}$) удовлетворяют условиям утверждения 42.2, то решение задачи

$$\begin{aligned} \rho(x)\widehat{P}_t u(x, t) &= \widehat{L}_x u(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (42.83)$$

с граничными условиями (42.72) имеет вид

$$u(x, t) = \langle \varphi(y) | \mathbf{g}(x, y, t) \rangle = \int_0^l \mathbf{g}(x, y, t) \varphi(y) dy. \quad (42.84)$$

С учетом соотношений (42.80), (42.82) и свойств скалярного произведения (42.77) утверждение очевидно.

Утверждение 42.4. Если функции $T_n(t)$ ($n = \overline{0, \infty}$) являются решениями задачи Коши (42.79) с начальными условиями

$$T_n(0) = 0, \quad T'_n(0) = 1, \quad (42.85)$$

то решение задачи

$$\begin{aligned} \rho(x)\widehat{P}_t g(x, y, t) &= \widehat{L}_x g(x, y, t), \\ g(x, y, 0) &= 0, \quad g_t(x, y, 0) = \delta(x - y) \end{aligned} \quad (42.86)$$

с граничными условиями вида (42.72) имеет вид

$$g(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho(y) X_n(x) X_n(y) T_n(t). \quad (42.87)$$

Функции $g(x, y, t)$ и $\mathfrak{g}(x, y, t)$ называются функциями Грина смешанной задачи (42.70)–(42.72).

Доказательство аналогично доказательству утверждения 42.2.

Утверждение 42.5. Если функции $T_n(t)$ ($n = \overline{0, \infty}$) удовлетворяют условиям утверждения 42.4, то решение задачи

$$\begin{aligned} \rho(x) \widehat{P}_t u(x, t) &= \widehat{L}_x u(x, t), \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{aligned} \quad (42.88)$$

с граничными условиями (42.72) имеет вид

$$u(x, t) = \langle \psi(y) | g(x, y, t) \rangle = \int_0^l g(x, y, t) \psi(y) dy. \quad (42.89)$$

Доказательство аналогично доказательству утверждения 42.3.

◇ Как уже упоминалось, функции $\mathfrak{g}(x, y, t)$ и $g(x, y, t)$ являются функциями Грина соответствующих смешанных задач (42.83) и (42.88). Явный вид функций $\mathfrak{g}(x, y, t)$ и $g(x, y, t)$, найденный методом разделения переменных в форме (42.82), (42.87), позволяет не только формализовать запись решения этих задач в форме (42.84), (42.89), но и проясняет физический смысл решений как суммарного воздействия точечных источников начальных возмущений $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Утверждение 42.6. Если в операторе \widehat{P}_t (42.68) коэффициент α является постоянной величиной, то функции $\mathfrak{g}(x, y, t)$ и $g(x, y, t)$ связаны соотношением

$$\mathfrak{g}(x, y, t) = \alpha g(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial t} g(x, y, t). \quad (42.90)$$

Пусть $\alpha = 0$, тогда функции \mathfrak{g} и g удовлетворяют уравнениям

$$\rho(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{g} = \widehat{L}_x \mathfrak{g}, \quad (42.91)$$

$$\rho(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} g = \widehat{L}_x g \quad (42.92)$$

и связаны соотношением $\mathfrak{g}(x, y, t) = g_t(x, y, t)$. Подставив его в (42.91), имеем

$$\rho(x) \frac{\partial^3}{\partial t^3} g = \widehat{L}_x \frac{\partial}{\partial t} g,$$

откуда получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} g - \widehat{L}_x g \right] = 0,$$

которое, согласно (42.92), обращается в тождество.

Пусть $\alpha \neq 0$, тогда, подставив (42.90) в уравнение (42.81), имеем

$$\rho(x) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\alpha g + \frac{\partial g}{\partial t} \right) = \widehat{L}_x \left(\alpha g + \frac{\partial g}{\partial t} \right)$$

или

$$\rho(x) \left[\alpha \frac{\partial^2}{\partial t^2} g + \frac{\partial^3}{\partial t^3} g + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial t} g + \alpha \frac{\partial^2}{\partial t^2} g \right] = \alpha \widehat{L}_x g + \widehat{L}_x \frac{\partial g}{\partial t}.$$

Дифференцирование (42.86) по t дает

$$\rho(x) \frac{\partial^3}{\partial t^3} g = -\alpha \rho(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} g + \widehat{L}_x \frac{\partial}{\partial t} g,$$

и предыдущее уравнение приводится к виду

$$\alpha \rho(x) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} g + \alpha \frac{\partial}{\partial t} g \right) = \alpha \widehat{L}_x g,$$

откуда при $\alpha \neq 0$ имеем уравнение

$$\rho(x) \widehat{P}_t g = \widehat{L}_x g,$$

совпадающее с уравнением (42.86).

Таким образом, соотношение (42.90) справедливо при любых постоянных α . Для проверки начальных условий положим в (42.90) $t = 0$, тогда

$$\mathfrak{g}(x, y, t)|_{t=0} = \alpha g(x, y, t)|_{t=0} + \frac{\partial}{\partial t} g(x, y, t)|_{t=0},$$

и начальные условия для $g(x, y, t)$ (42.86) приводят к равенству

$$\mathfrak{g}(x, y, t)|_{t=0} = \delta(x - y)$$

в полном соответствии с первым начальным условием (42.82). Для проверки второго начального условия (42.82) продифференцируем (42.90) по t и выразим $\frac{\partial^2}{\partial t^2} g$ из уравнения (42.86). Это дает

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{g}(x, y, t) = \alpha \frac{\partial}{\partial t} g(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x, y, t)$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x, y, t) = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} g(x, y, t) + \frac{1}{\rho(x)} \widehat{L}_x g(x, y, t),$$

откуда

$$\rho(x) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g}(x, y, t) = \widehat{L}_x g(x, y, t).$$

Используя начальные условия для $g(x, y, t)$ (42.87), приходим ко второму начальному условию (42.82)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g}(x, y, t) \Big|_{t=0} = 0.$$

Здесь мы учли, что \mathbf{g} и g удовлетворяют одним и тем же граничным условиям. Таким образом, утверждение справедливо.

Утверждение 42.7. Если функция $g(x, y, t)$ является решением задачи (42.86), то решение задачи

$$\begin{aligned} \rho(x) \widehat{P}_t u(x, t) &= \widehat{L}_x u(x, t) + f(x, t), \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (42.93)$$

с граничными условиями (42.72) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \langle \tilde{f}(y, \tau) | g(x, y, t - \tau) \rangle d\tau = \\ &= \int_0^t d\tau \int_0^l g(x, y, t - \tau) f(y, \tau) dy, \end{aligned} \quad (42.94)$$

где $\tilde{f}(x, t) = f(x, t)/\rho(x)$.

Рассмотрим действие оператора \widehat{L}_x на функцию (42.94):

$$\widehat{L}_x u(x, t) = \int_0^t \langle \tilde{f}(y, \tau) | \widehat{L}_x g(x, y, t - \tau) \rangle d\tau. \quad (42.95)$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \int_0^t \langle \tilde{f}(y, \tau) | g_t(x, y, t - \tau) \rangle d\tau + \langle \tilde{f}(y, t) | g(x, y, 0) \rangle, \quad (42.96)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \int_0^t \langle \tilde{f}(y, \tau) | g_{tt}(x, y, t - \tau) \rangle d\tau + \langle \tilde{f}(y, t) | g_t(x, y, 0) \rangle. \quad (42.97)$$

С учетом начальных условий для функции $g(x, y, t)$ (42.86) получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) &= \int_0^t \langle \tilde{f}(y, \tau) | g_t(x, y, t - \tau) \rangle d\tau, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t) &= \int_0^t \langle \tilde{f}(y, \tau) | g_{tt}(x, y, t - \tau) \rangle d\tau + \frac{f(x, t)}{\rho(x)}.\end{aligned}\quad (42.98)$$

Подставим (42.95) и (42.98) в (42.93) и получим тождество. Выполнение нулевых начальных условий следует из (42.94), (42.98), а выполнение граничных условий – из определения функции $g(x, y, t)$. Таким образом, утверждение доказано.

После проведения последовательной редукции (42.83), (42.88), (42.93) решение исходной задачи (42.70), (42.71) можно записать в окончательном виде

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \langle \varphi(y) | \mathfrak{g}(x, y, t) \rangle + \langle \psi(y) | g(x, y, t) \rangle + \\ &+ \int_0^t \langle \tilde{f}(y, \tau) | g(x, y, t - \tau) \rangle d\tau.\end{aligned}\quad (42.99)$$

Если в операторе \widehat{P}_t (42.75) функция α – постоянная, то решение исходной задачи имеет вид

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \langle \varphi(y) | g_t(x, y, t) \rangle + \langle \alpha\varphi(y) + \psi(y) | g(x, y, t) \rangle + \\ &+ \int_0^t \langle \tilde{f}(y, \tau) | g(x, y, t - \tau) \rangle d\tau.\end{aligned}\quad (42.100)$$

Рассмотренный метод легко обобщается на случай задачи с неоднородными граничными условиями

$$\begin{aligned}(a_1u_x + b_1u)|_{x=0} &= \mu_1(t), \\ (a_2u_x + b_2u)|_{x=l} &= \mu_2(t).\end{aligned}\quad (42.101)$$

Действительно, заменой

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t), \quad (42.102)$$

где $w(x, t)$ – функция, удовлетворяющая граничным условиям (42.101), исходная задача (42.70), (42.71), (42.101) редуцируется к смешанной задаче для функции $v(x, t)$

$$\begin{aligned}\rho(x)\widehat{P}_tv(x, t) &= \widehat{L}_xv(x, t) + \bar{f}(x, t), \\ v(x, 0) &= \bar{\varphi}(x), \quad v_t(x, 0) = \bar{\psi}(x)\end{aligned}\quad (42.103)$$

с однородными граничными условиями вида (42.72). Здесь обозначено

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(x) &= \varphi(x) - w(x, 0), & \bar{\psi}(x) &= \psi(x) - w_t(x, 0), \\ \bar{f}(x, t) &= f(x, t) - \rho(x)\hat{P}_t w(x, t) + \hat{L}_x w(x, t).\end{aligned}\quad (42.104)$$

Явный вид функции $w(x, t)$ в зависимости от $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ приведен в предыдущем параграфе.

Таким образом, решение смешанной задачи с неоднородными граничными условиями, согласно (42.102) и (42.100), имеет вид

$$\begin{aligned}u(x, t) &= w(x, t) + \langle \bar{\varphi}(y) | g_t(x, y, t) \rangle + \langle \alpha \bar{\varphi}(y) + \bar{\psi}(y) | g(x, y, t) \rangle + \\ &+ \int_0^t \langle \bar{f}(y, \tau) | g(x, y, t - \tau) \rangle d\tau.\end{aligned}\quad (42.105)$$

Все сказанное позволяет сформулировать следующую схему метода Фурье для случая, когда $\alpha(t) = \text{const}$:

1. решить задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned}\hat{L}_x X(x) &= -\lambda \rho(x) X(x), \\ a_1 X'(0) + b_1 X(0) &= a_2 X'(l) + b_2 X(l) = 0;\end{aligned}\quad (42.106)$$

2. решить задачу Коши

$$\begin{aligned}\hat{P}_t T_n(t) &= -\lambda_n T_n(t), & n &= \overline{0, \infty}; \\ T_n(0) &= 0, & T_n'(0) &= 1,\end{aligned}\quad (42.107)$$

где λ_n – собственные функции предыдущей задачи;

3. по ортонормированным функциям $X_n(x)$ и функциям $T_n(t)$ построить фундаментальное решение в виде формального ряда

$$g(x, y, t) = \sum_n \rho(y) X_n(x) X_n(y) T_n(t); \quad (42.108)$$

4. по функциям $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, определяющим граничный режим исходной задачи, согласно (42.50), построить функцию $w(x, t)$ (в случае однородных граничных условий $w(x, t) \equiv 0$);
5. по формуле (42.105) с учетом (42.102) записать решение исходной задачи $u(x, t)$.

Указанная схема существенно уменьшает число промежуточных выкладок, а кроме того, позволяет достаточно просто учитывать вид и характер граничных условий. Принимая во внимание,

что уравнение (42.107) является уравнением с постоянными коэффициентами, функцию $T_n(t)$ можно представить в виде

$$T_n(t) = \frac{\bar{T}_n(t)}{\bar{T}'_n(0)}, \quad (42.109)$$

где $\bar{T}_n(t)$ – частное решение уравнения, удовлетворяющее условию $\bar{T}_n(0) = 0$ (т.е. $e^{-\alpha t/2}t$, $e^{-\alpha t/2} \sin \omega t$, $e^{-\alpha t/2} \operatorname{sh} \omega t$).

В заключение отметим, что предложенная схема с помощью теоремы 42.2 легко обобщается на случай, когда величина α является функцией времени. При этом используются свойства фундаментального решения $\mathfrak{g}(x, y, t)$. Если коэффициент q также является функцией t , а не x , и $\rho(x) = \operatorname{const}$, то соответствующее слагаемое переносится из оператора \hat{L}_x в оператор \hat{P}_t .

43. Задачи, сводящиеся к одномерному волновому уравнению

Пример 43.1. Решить первую краевую задачу о продольных колебаниях упругого неоднородного стержня длиной l , если его линейная плотность и модуль упругости возрастают пропорционально расстоянию от конца стержня. Начальные отклонения и скорости заданы, внешние силы и силы сопротивления среды отсутствуют.

Решение. Расположим стержень вдоль оси Ox , совместив левый торец с точкой $x = 0$, а правый – с точкой $x = l$. В обозначениях, принятых в разд. «Уравнение продольных колебаний струн и стержней», имеем $\rho(x) = \rho_0 x$, $E(x) = E_0 x$. Тогда, согласно (8.3), требуется решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 x} \frac{\partial}{\partial x} \left(E_0 x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (43.1)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (43.2)$$

Постановка граничного условия для правого торца стержня не вызывает затруднений:

$$u(l, t) = 0. \quad (43.3)$$

Аналогичная формулировка граничного условия для левого торца $x = 0$ не имеет смысла, так как $\rho(x)|_{x=0} = 0$, и должна быть заменена более общим условием

$$|u(0, t)| < \infty. \quad (43.4)$$

Таким образом, математическая постановка задачи определена соотношениями (43.1)–(43.4).

Согласно схеме, изложенной в предыдущем разделе, решим

1. Задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_0 x} \frac{d}{dx} \left(E_0 x \frac{d}{dx} \right) X(x) &= \lambda X(x); \\ |X(0, t)| < \infty, \quad |X(l, t)| &= 0. \end{aligned} \quad (43.5)$$

Эта задача эквивалентна задаче на отыскание собственных значений и собственных функций уравнения Бесселя индекса $\nu = 0$

$$\begin{aligned} x^2 X''(x) + xX'(x) + \frac{\rho_0}{E_0} \lambda x^2 X(x) &= 0; \\ |X(0, t)| < \infty, \quad |X(l, t)| &= 0. \end{aligned}$$

Ортонормированные решения этой задачи (см. разд. <Задача Штурма–Лиувилля для уравнений Бесселя> части III) имеют вид

$$X_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{l} \frac{J_0(\alpha_n^0 x/l)}{J_1(\alpha_n^0)}, \quad (43.6)$$

где α_n^0 – положительные нули функции $J_0(x)$, а соответствующие собственные значения определяются из соотношения

$$\frac{\rho_0}{E_0} \lambda_n = \left(\frac{\alpha_n^0}{l} \right)^2, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (43.7)$$

Получив выражения для λ_n , запишем

2. Задачу Коши

$$\begin{aligned} T_n''(t) &= -\frac{\rho_0}{E_0} \left(\frac{\alpha_n^0}{l} \right)^2 T_n(t), \\ T_n(0) &= 0, \quad T_n'(0) = 1, \end{aligned} \quad (43.8)$$

решение которой имеет вид

$$T_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t, \quad (43.9)$$

где

$$\omega_n = \frac{\alpha_n^0}{l} \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}}.$$

3. По функциям $X_n(x)$ (43.8) и T_n (43.9) построим фундаментальное решение смешанной задачи (43.1)

$$g(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y}{l^2 J_1^2(\alpha_n^0) \omega_n} J_0\left(\alpha_n^0 \frac{x}{l}\right) J_0\left(\alpha_n^0 \frac{y}{l}\right) \sin \omega_n t, \quad (43.10)$$

с помощью которого запишем решение задачи

$$u(x, t) = \langle \varphi(y) | g_t(x, y, t) \rangle + \langle \psi(y) | g(x, y, t) \rangle. \quad (43.11)$$

С учетом явного вида скалярного произведения для функций Бесселя решение (43.11) примет вид

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n^0 x/l)}{\alpha_n^0 J_1^2(\alpha_n^0)} \times \quad (43.12)$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\omega_n} \cos \omega_n t \int_0^l y \varphi(y) J_0\left(\alpha_n^0 \frac{y}{l}\right) dy + \sin \omega_n t \int_0^l y \psi(y) J_0\left(\alpha_n^0 \frac{y}{l}\right) dy \right\}.$$

Пример 43.2. Решить задачу о поперечных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса b , вызванных заданными начальными отклонениями и скоростями, зависящими только от расстояния до центра мембраны (осесимметричная задача). Внешние силы и силы сопротивления среды отсутствуют.

Решение. В разд. «Уравнение поперечных колебаний мембраны» было показано, что амплитуда колебаний мембраны $u(x, y, t)$ определяется уравнением

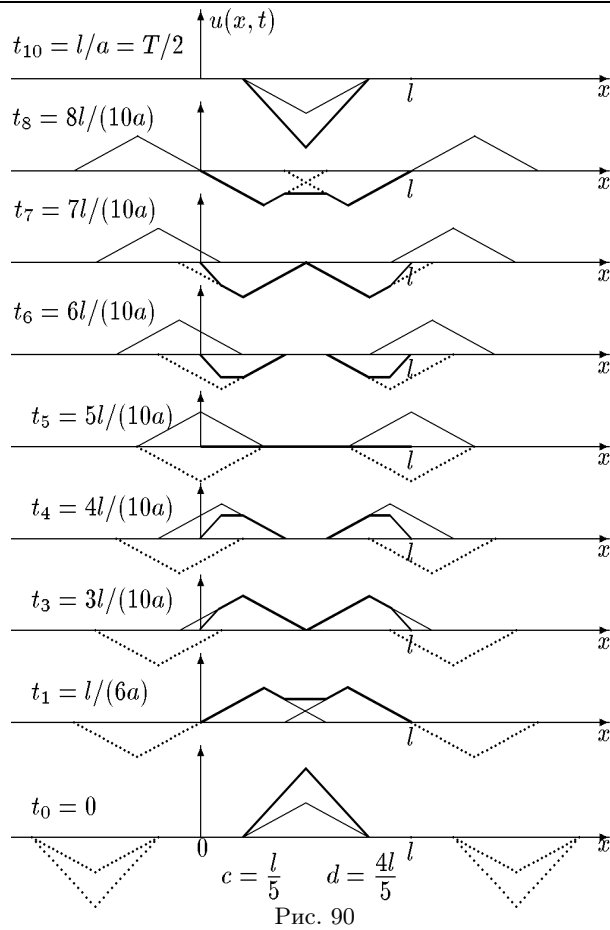
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) u, \quad (43.13)$$

которое с учетом геометрической формы мембраны удобнее записать в полярных координатах r, φ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (43.14)$$

Из постановки задачи запишем начальные условия

$$u(r, \varphi, 0) = \psi_0(r), \quad u_t(r, \varphi, 0) = \psi(r), \quad (43.15)$$



где $\psi_0(r)$, $\psi(r)$ – заданные функции начальных отклонений и скоростей, зависящих только от полярного радиуса r , и граничные условия

$$u(b, \varphi, t) = 0, \quad |u(0, \varphi, t)| < \infty. \quad (43.16)$$

Поскольку все дополнительные к уравнению (43.14) условия не зависят от азимутального угла φ , то и само решение свободно от этой зависимости и является функцией только переменных r и t . В результате этого математическая постановка

задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right), \\ u(r, 0) &= \psi_0(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r), \\ |u(0, t)| &< \infty, \quad u(b, t) = 0 \end{aligned} \quad (43.17)$$

и полностью совпадает с постановкой задачи, рассмотренной в предыдущем примере. Таким образом, решение задачи (43.17) дается формулой (43.12) предыдущего примера, где нужно сделать следующие замены: переменная x заменяется на переменную r , y – на ρ , l – на b , E_0/ρ_0 – на a^2 , $\varphi(x)$ – на $\psi_0(\rho)$.

Эти два примера наглядно иллюстрируют, что две физически различные задачи в математическом плане можно считать тождественными.

В частности, если в (43.15) положить

$$\psi_0(r) = AJ_0\left(\alpha_1^0 \frac{r}{b}\right), \quad \psi(r) = BJ_0\left(\alpha_3^0 \frac{r}{b}\right),$$

где A и B – некоторые постоянные, то из (43.12) с учетом ортогональности функций Бесселя получим

$$u(r, t) = \frac{Ab}{a\alpha_1^0} J_0\left(\alpha_1^0 \frac{r}{b}\right) \cos \frac{a}{b} \alpha_1^0 t + \frac{Bb}{a\alpha_3^0} J_0\left(\alpha_3^0 \frac{r}{b}\right) \sin \frac{a}{b} \alpha_3^0 t.$$

График этой функции при $a = 1$, $b = \alpha_3^0$, $A = 3$, $B = 4$ в моменты времени $t_k = \pi k/2$, $k = \overline{0, 14}$, приведен на рис. 90.

Рассмотрим еще несколько аналогичных примеров.

Пример 43.3. Найти закон колебаний струны, левый конец которой $x = 0$ колеблется по закону $A \sin \omega t$, а правый $x = l$ закреплен. Для моментов времени $t_k = kl/a$, $k = \overline{1, 4}$, построить профиль струны, положив $\omega_1 = 3\pi a/(2l)$, $\omega_2 = 2\pi a/l$.

Решение. Математическая формулировка сводится к смешанной задаче с краевыми условиями первого рода

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = A \sin \omega t, \quad u(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (43.18)$$

Согласно схеме разделения переменных, $\hat{P}_t = d^2/dt^2$, $\hat{L}_x = a^2 d^2/dx^2$. Тогда

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad n = \overline{1, \infty},$$

$$T_n(x) = \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t, \quad \omega_n = \frac{\pi n a}{l}, \quad (43.19)$$

$$g(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l \omega_n} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l} \sin \omega_n t.$$

Согласно (42.65),

$$w(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) A \sin \omega t,$$

откуда

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(x) &= 0, \quad \bar{\psi}(x) = -A \left(1 - \frac{x}{l}\right) \omega, \\ \bar{f}(x, t) &= A \omega^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \omega t \end{aligned} \quad (43.20)$$

и соответственно решение $u(x, t)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \omega t - A \omega \left\langle \left(1 - \frac{y}{l}\right) \middle| g(x, y, t) \right\rangle + \\ &+ A \omega^2 \int_0^t \left\langle \left(1 - \frac{y}{l}\right) \middle| g(x, y, t - \tau) \right\rangle d\tau. \end{aligned} \quad (43.21)$$

Решение (43.21) в развернутой форме имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \omega t - A \omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \sin \frac{\pi n x}{l} \times \\ &\times \left[\frac{2}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{y}{l}\right) \sin \frac{\pi n y}{l} dy \right] \sin \omega_n t + \\ &+ A \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \sin \frac{\pi n x}{l} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{y}{l}\right) \sin \frac{\pi n y}{l} dy \right] \times \\ &\times \int_0^t \sin \omega_n \tau \sin \omega_n (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (43.22)$$

Если учесть, что

$$\int_0^l \left(1 - \frac{y}{l}\right) \sin \frac{\pi n y}{l} dy = \frac{a}{\omega_n},$$

то (43.22) можно записать как

$$u(x, t) = A\left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \omega t - 2A \frac{a\omega}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \omega_n t + \\ + 2A \frac{a\omega^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \sin \frac{\pi n x}{l} \int_0^t \sin \omega_n \tau \sin \omega_n (t - \tau) d\tau. \quad (43.23)$$

Напомним, что аналогичная задача рассматривалась в примере 41.1 и было показано, что характер решения (43.23) существенно зависит от того, совпадает частота ω с одной из собственных частот ω_n или не совпадает. В связи с этим рассмотрим два случая:

1. Частота ω не совпадает ни с одной из собственных частот ω_n , $n = \overline{0, \infty}$ (отсутствие резонанса).

Учтя, что

$$\int_0^t \sin \omega t \sin \omega_n (t - \tau) d\tau = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} (\omega_n \sin \omega t - \omega \sin \omega_n t), \quad (43.24)$$

получим

$$u(x, t) = A\left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \omega t - 2A \frac{a\omega}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x / l)}{\omega_n^2} \sin \omega_n t + \\ + 2A \frac{a\omega^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x / l)}{\omega_n^2 (\omega_n^2 - \omega^2)} (\omega_n \sin \omega t - \omega \sin \omega_n t). \quad (43.25)$$

Для построения профиля струны в заданные моменты времени представим величину $(1 - x/l)$ в виде разложения по собственным функциям (43.19). Тогда из (43.25) имеем

$$u(x, t) = 2A \frac{a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x / l)}{\omega_n^2 - \omega^2} (\omega_n \sin \omega t - \omega \sin \omega_n t). \quad (43.26)$$

Формула (43.26) дает решение задачи для всех моментов времени. Если в этой формуле положить $t = t_k = kl/a$, $k = \overline{0, \infty}$, то $\sin(\omega_n kl/a) = \sin \pi nk = 0$ и с учетом известного разложения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nz}{n^2 - \alpha^2} = \pi \frac{\sin \alpha(\pi - z)}{2 \sin \pi \alpha}, \quad \alpha > 0,$$

решение (43.26) запишется достаточно простым выражением

$$u\left(x, \frac{kl}{a}\right) = A \frac{\sin(\omega kl/a) \sin[\omega(l-x)/a]}{\sin(\omega l/a)} \quad (43.27)$$

и совпадет с решением, полученным методом Даламбера (пример 41.1), график которого для $\omega = 3\pi a/(2l)$ изображен на рис. 87.

2. Частота ω совпадает с одной из собственных частот, т.е. $\omega = \omega_j$ (резонансный случай).

В этом случае вместо (43.24) имеем

$$\int_0^t \sin \omega t \sin \omega_n(t - \tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega_j^2} (\omega_n \sin \omega_j t - \omega_j \sin \omega_n t), & j \neq n; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_j} \sin \omega_j t - t \cos \omega_j t \right), & j = n, \end{cases}$$

а вместо (43.25)

$$\begin{aligned} u(x, t) = & A \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \omega_j t - 2A \frac{a\omega_j}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x/l)}{\omega_n^2} \sin \omega_n t + \\ & + 2A \frac{a\omega_j^2}{l} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x/l)}{\omega_n^2 (\omega_n^2 - \omega_j^2)} (\omega_n \sin \omega_j t - \omega_j \sin \omega_n t) + \\ & + A \frac{a}{l} \left(\frac{1}{\omega_j} \sin \omega_j t - t \cos \omega_j t \right) \sin \frac{\pi j x}{l}. \end{aligned} \quad (43.28)$$

Как следует из (43.28), в j -й гармонике возникает слагаемое, линейно зависящее от времени. Это означает, что амплитуда этой гармоники неограниченно возрастает со временем — возникает явление резонанса. Как уже отмечалось, область применения формулы (43.28) ограничена во времени условием $t < l/a$.

Для сравнения решения (43.28) с решением, полученным методом Даламбера, положим $j = 2$, $\omega_j = 2\pi a/l$, $t_k = kl/a$, $k = \overline{1, 4}$. Тогда

$$u\left(x, \frac{kl}{a}\right) = -Ak \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Это выражение полностью совпадает с решением, полученным в примере 41.1, график которого изображен на рис. 88.

Пример 43.4. Найти закон колебаний однородной струны с закрепленными концами, вызванных воздействием внешней силы $f(x) \sin \omega t$. Исследовать характер решения в зависимости от $f(x)$ и ω . Сопротивление среды отсутствует.

Решение. Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x) \sin \omega t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (43.29)$$

Из решения предыдущего примера имеем

$$g(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l\omega_n} \sin \frac{\pi nx}{l} \sin \frac{\pi ny}{l} \sin \omega_n t, \quad (43.30)$$

где $\omega_n = \pi na/l$. Отсюда получим

$$u(x, t) = \int_0^t \langle f(y) \sin \omega \tau | g(x, y, t - \tau) \rangle d\tau$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l\omega_n} \sin \frac{\pi nx}{l} \left[\int_0^l f(y) \sin \frac{\pi ny}{l} dy \right] \times \\ &\times \left[\int_0^t \sin \omega_n \tau \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (43.31)$$

Как и в предыдущем примере, рассмотрим два случая

1. Частота ω не совпадает ни с одной из собственных частот ω_n , $n = \overline{0, \infty}$.

В этом случае решение (43.31) можно записать

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\pi nx/l)}{l\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)} (\omega_n \sin \omega t - \omega \sin \omega_n t) \times$$

$$\times \int_0^l f(y) \sin \frac{\pi n y}{l} dy. \quad (43.32)$$

Вычислим интеграл

$$F_n = \int_0^l f(y) \sin \frac{\pi n y}{l} dy \quad (43.33)$$

при следующем выборе функций $f(x)$:

1а) $f(x) = f_0 - \text{const}$. В этом случае в решении (43.32) отсутствуют все гармоники с четными n , т.е. вынуждающая сила возбуждает колебания только с нечетными гармониками

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \sin(2k+1)\pi x/l}{l\omega_{2k+1}(\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)} \times \\ \times (\omega \sin \omega_{k+1}t - \omega_{2k+1} \sin \omega t); \quad (43.34)$$

1б) $f(x)$ с точностью до постоянного множителя f_0 совпадает с одной из собственных функций

$$X_k(x) = f_0 \sin \frac{k\pi x}{l},$$

тогда

$$F_n = \frac{l}{2} f_0 \delta_{nk},$$

и в решении (43.32) отсутствуют все гармоники, за исключением k -й, т.е.

$$u(x, t) = \frac{f_0 \sin(\pi k x/l)}{\omega_k(\omega_k^2 - \omega^2)} (\omega_k \sin \omega t - \omega \sin \omega_k t). \quad (43.35)$$

1в) $f(x) = f_0 \delta(x - x_0)$, сосредоточенная внешняя сила приложена в точке $x = x_0 \in]0, l[$. Тогда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2f_0 \sin(\pi n x/l) \sin(\pi n x_0/l)}{l\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)} \times \\ \times (\omega_n \sin \omega t - \omega \sin \omega_n t). \quad (43.36)$$

Отсюда следует, что амплитуда n -й гармоники в зависимости от положения точки x_0 на отрезке $[0, l]$ может изменять амплитуду этой точки от максимального значения, когда x_0 попадает в одну из пучностей n -й гармоники, до минимального (нулевого), когда точка x_0 попадает в один из узлов этой гармоники.

1з) $f(x) = f_0 \delta(x - x_0) X_k(x)$. Этот случай есть комбинация случаев 1б) и 1в), и решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{f_0 \sin(\pi n x_0 / l)}{\omega_k (\omega_k^2 - \omega^2)} (\omega_k \sin \omega t - \omega \sin \omega_k t) \quad (43.37)$$

со всеми последствиями, вытекающими из случая 1в) для одной оставшейся k -й гармоники.

2. Частота вынуждающей силы совпадает с одной из собственных частот: $\omega = \omega_k$. В этом случае решение (43.31) принимает вид (см. предыдущий пример)

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{2}{l \omega_n} \sin \frac{\pi n x}{l} \left[\int_0^l f(y) \sin \frac{\pi n y}{l} dy \right] \times \\ & \times \frac{1}{\omega_n^2 - \omega_k^2} (\omega_n \sin \omega_k t - \omega_k \sin \omega_n t) + \\ & + \frac{1}{l \omega_k} \sin \frac{\pi n x}{l} \left[f(y) \sin \frac{\pi n y}{l} dy \right] \left(\frac{1}{\omega_k} \omega_k t - t \cos \omega_k t \right). \end{aligned} \quad (43.38)$$

Таким образом, периодическая вынуждающая сила, частота которой совпадает с одной из собственных частот ω_k , вызывает на этой гармонике резонанс. В отличие от аналогичного явления, вызываемого периодическим граничным условием, явление резонанса может отсутствовать, если функция $f(x)$ удовлетворяет определенным условиям:

2а) $f(x) = f_0 - \text{const}$. Как было показано в 1а), в этом случае вынуждающая сила возбуждает колебания только с нечетными гармониками. Поэтому, если вынуждающая частота ω совпадает с одной из собственных частот четных гармоник, последнее слагаемое в (43.38) обращается в нуль и явление резонанса отсутствует. Сама формула (43.38) остается справедливой для всех моментов времени $t > 0$, а не только для $t < l/a$.

2б) $f(x)$ ортогональна собственной функции $\sin(\pi k x / l)$, соответствующей частоте ω_k [например, $f(x) = f_0 \sin(\pi m x / l)$,

$m \neq k$], т.е.

$$\int_0^l f(y) \sin \frac{\pi ky}{l} dy = 0.$$

Тогда последнее слагаемое в (43.38) обращается в нуль и явление резонанса отсутствует.

2б) $f(x) = f_0 \delta(x - x_0)$. Как следует из 1б), резонанса можно избежать, если точка x_0 совпадает с одной из точек, соответствующих узлам стоячей волны k -й гармоники.

Пример 43.5. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{4}{x^2}u + tJ_2(\alpha_1^2 x), \quad 0 < x < 1; \quad (43.39)$$

$$|u|_{x=0} < \infty, \quad u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0,$$

где α_1^2 — первый положительный нуль функции Бесселя $J_2(x)$.

Решение. Ищем решение в виде

$$u(x, t) = \Phi(t)J_2(\alpha_1^2 x). \quad (43.40)$$

Из начальных условий найдем

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = 0.$$

Подставив (43.40) в (43.39), получим

$$\Phi'' J_2(\alpha_1^2 x) = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} J_2(\alpha_1^2 x) + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} J_2(\alpha_1^2 x) - \frac{4}{x^2} J_2(\alpha_1^2 x) + \right.$$

$$\left. + (\alpha_1^2)^2 J_2(\alpha_1^2 x) \right\} \Phi - (\alpha_1^2)^2 J_2(\alpha_1^2 x) \Phi + t J_2(\alpha_1^2 x).$$

Так как $J_2(\alpha_1^2 x)$ есть решение уравнения Бесселя, то выражение в фигурных скобках равно нулю. Следовательно,

$$\Phi'' J_2(\alpha_1^2 x) = -(\alpha_1^2)^2 J_2(\alpha_1^2 x) \Phi + t J_2(\alpha_1^2 x).$$

В результате для функции $\Phi(t)$ получим

$$\Phi'' + (\alpha_1^2)^2 \Phi = t, \quad \Phi(0) = \Phi'(0) = 0.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{\Phi}(t) = A \cos(\alpha_1^2 t) + B \sin(\alpha_1^2 t), \quad A, B = \text{const}.$$

Частное решение неоднородного уравнения найдем методом неопределенных коэффициентов

$$\Phi^*(t) = C_1 t + C_2.$$

Поскольку

$$[\Phi^*(t)]'' = 0,$$

то

$$(\alpha_1^2)^2 C_2 + (\alpha_1^2)^2 C_1 t = t,$$

откуда

$$C_2 = 0, \quad t(\alpha_1^2)^2 C_1 = t, \quad C_1 = \frac{1}{(\alpha_1^2)^2}.$$

Окончательно получим

$$\Phi^*(t) = \frac{t}{(\alpha_1^2)^2}.$$

Тогда

$$\Phi(t) = \bar{\Phi}(t) + \Phi^*(t) = A \cos(\alpha_1^2 t) + B \sin(\alpha_1^2 t) + \frac{t}{(\alpha_1^2)^2}.$$

Из начальных условий определим постоянные A и B :

$$\Phi(0) = A = 0;$$

$$\Phi'(t) = \alpha_1^2 B \cos(\alpha_1^2 t) + \frac{1}{(\alpha_1^2)^2},$$

$$\Phi'(0) = \alpha_1^2 B + \frac{1}{(\alpha_1^2)^2},$$

$$B = -\frac{1}{(\alpha_1^2)^3}.$$

Окончательно

$$\Phi(t) = \frac{t}{(\alpha_1^2)^2} - \frac{1}{(\alpha_1^2)^3} \sin(\alpha_1^2 t),$$

а решение исходной задачи имеет вид

$$u(x, t) = \Phi(t) J_2(\alpha_1^2 x) = \left[\frac{t}{(\alpha_1^2)^2} - \frac{1}{(\alpha_1^2)^3} \sin(\alpha_1^2 t) \right] J_2(\alpha_1^2 x).$$

Пример 43.6. Записать закон поперечных колебаний однородной струны с закрепленными краями, вызванных начальным распределением скоростей $\psi(x)$, если среда оказывает сопротивление, пропорциональное смещению струны от положения равновесия.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} - qu, & q \geq 0, & \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & u_t(x, 0) &= \psi(x), \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (43.41)$$

Согласно схеме разделения переменных, для определения функции $X(x)$ получим задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} a^2 X''(x) - qX(x) &= -\lambda X(x), \\ X(0) = X(l) &= 0 \end{aligned}$$

со спектром собственных значений

$$\lambda_n = \omega_n^2 + q, \quad \omega_n = \frac{\pi na}{l}, \quad n = \overline{1, \infty} \quad (43.42)$$

и соответствующим ортонормированным набором собственных функций

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi nx}{l}. \quad (43.43)$$

Уравнение для функций $T_n(t)$ с учетом (43.42) имеет вид (42.75)

$$T_n''(t) = -(\omega_n^2 + q)T_n(t), \quad T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 1$$

с решением

$$T_n(t) = \frac{1}{\nu_n} \sin \nu_n t, \quad \nu_n = \sqrt{\omega_n^2 + q}. \quad (43.44)$$

Согласно (42.82), фундаментальное решение смешанной задачи (43.41) запишется в виде

$$g(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l\nu_n} \sin \frac{\pi nx}{l} \sin \frac{\pi ny}{l} \sin \nu_n t.$$

Формула (42.105) дает решение исходной задачи

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \langle \psi(y) | g(x, y, t) \rangle = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l\nu_n} \sin \frac{\pi nx}{l} \sin \nu_n t \int_0^l \psi(y) \sin \frac{\pi ny}{l} dy. \end{aligned} \quad (43.45)$$

При $q = 0$, как следует из (43.44), $\nu_n = \omega_n$ и решение (43.45) переходит в решение для свободных колебаний.

Таким образом, учет сил сопротивления, пропорциональных смещению, не вносит принципиальных изменений в характер колебаний струны, изменяя лишь спектр частот $\omega_n \rightarrow \nu_n = \sqrt{\omega_n^2 + q}$.

Пример 43.7. Решить пример 43.6 при условии, что сила сопротивления среды пропорциональна скорости отклонения струны от положения равновесия.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u_{tt} + \alpha u_t &= a^2 u_{xx}, \quad \alpha \geq 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (43.46)$$

Задача Штурма–Лиувилля для функции $X(x)$ имеет известный набор ортонормированных собственных функций

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi nx}{l} \quad (43.47)$$

с собственными значениями (см. пример 43.6 при $q = 0$)

$$\lambda_n = \omega_n^2, \quad \omega_n = \frac{\pi na}{l}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Уравнение для определения функций T_n с учетом (43.46), (43.47) можно записать в виде

$$T_n''(t) + \alpha T_n'(t) = -\omega_n^2 T_n(t), \quad T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 1. \quad (43.48)$$

Поскольку корни характеристических уравнений для уравнения (43.48) определяются из выражений

$$k_{1,2}^n = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \omega_n^2}, \quad (43.49)$$

то его решение существенным образом зависит от коэффициента сопротивления α .

1. Пусть $(\alpha/2)^2 < \omega_1^2 < (\pi a/l)^2$. В этом случае для всех n корни характеристических уравнений являются комплексными числами и частное решение задачи Коши (43.49) имеет вид

$$T_n(t) = \frac{1}{\nu_n} e^{-\alpha t/2} \sin \nu_n t, \quad \nu_n = \sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}. \quad (43.50)$$

Функцию $g(x, y, t)$, согласно (42.82), можно записать в виде

$$g(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l\nu_n} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l} e^{-\alpha t/2} \sin \nu_n t, \quad (43.51)$$

откуда в силу (42.105) найдем решение задачи

$$u(x, t) = \langle \psi(y) | g(x, y, t) \rangle \quad (43.52)$$

или в явном виде

$$u(x, t) = e^{-\alpha t/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_n} \Psi_n \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \nu_n t, \quad (43.53)$$

где

$$\Psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(y) \sin \frac{\pi n y}{l} dy. \quad (43.54)$$

При $\alpha = 0$, как следует из (43.53), $\nu_n = \omega_n$ и решение переходит в решение для свободных колебаний.

При наличии сопротивления среды ($\alpha \neq 0$) характер колебаний струны, согласно (43.53), принципиально отличается от характера свободных колебаний. Это отличие заключается не только в изменении спектра частот

$$\omega_n \rightarrow \nu_n = \sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2},$$

а главным образом в том, что колебания за счет множителя $e^{-\alpha t/2}$ со временем постепенно затухают, так что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0.$$

2. Пусть $(\alpha/2)^2 = \omega_1^2$. В этом случае корни характеристических уравнений (43.49) для $n \geq 2$ по-прежнему комплексны, а для $n = 1$ они действительны и кратны. В связи с этим для функции $g(x, y, t)$ вместо (43.51) имеем

$$g(x, y, t) = \frac{2}{l} e^{-\alpha t/2} \left\{ t \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_n} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l} \sin \nu_n t \right\}, \quad (43.55)$$

и соответственно решение исходной задачи (43.46) запишется в виде

$$u(x, t) = e^{-\alpha t/2} \left\{ t \Psi_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\nu_n} \Psi_n \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \nu_n t \right\}, \quad (43.56)$$

где ν_n и Ψ_n определены формулами (43.50) и (43.54).

Из решения (43.56) видно, что, как и в предыдущем случае, колебания со временем затухают, причем все гармоники с $n \geq 2$ затухают гораздо быстрее, нежели основная гармоника с $n = 1$, которая при больших временах описывает практически аperiodическое по времени поведение струны.

Если функцию $\psi(x)$ выбрать ортогональной собственной функции $X_1(x) = \sin(\pi x/l)$, то $\Psi_1 = 0$ и основная гармоника $n = 1$ в решении (43.56) отсутствует.

3. Пусть $(\alpha/2)^2 = \omega_2^2$. В этом случае корни характеристических уравнений (43.49) определяются следующим образом:

для $n = 1$ они действительны и различны;

для $n = 2$ они действительны и кратны;

для $n \geq 3$ они комплексны.

В связи с этим функция $g(x, y, t)$ определится соотношением

$$g(x, y, t) = \frac{2}{l} e^{-\alpha t/2} \left\{ \frac{1}{\nu_1} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l} \operatorname{sh} \bar{\nu}_1 t + t \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\nu_n} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l} \sin \nu_n t \right\},$$

где

$$\bar{\nu}_n = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \omega_n^2}, \quad \nu_n = \sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}, \quad (43.57)$$

и соответственно для решения исходной задачи получим

$$u(x, t) = \frac{2}{l} e^{-\alpha t/2} \left\{ \frac{1}{\bar{\nu}_1} \Psi_1 \sin \frac{\pi x}{l} \operatorname{sh} \bar{\nu}_1 t + t \Psi_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\nu_n} \Psi_n \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \nu_n t \right\}.$$

В общем случае, если

$$\omega_{k-1}^2 < \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 < \omega_k^2,$$

то решение задачи (43.46) имеет вид

$$u(x, t) = e^{-\alpha t/2} \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{\bar{\nu}_n} \Psi_n \sin \frac{\pi n x}{l} \operatorname{sh} \bar{\nu}_n t + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\nu_n} \Psi_n \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \nu_n t \right\}. \quad (43.58)$$

Если же α удовлетворяет условию $(\alpha/2)^2 = \omega_k^2$, то

$$u(x, t) = e^{-\alpha t/2} \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{\bar{\nu}_n} \Psi_n \sin \frac{\pi n x}{l} \operatorname{sh} \bar{\nu}_n t + t \Psi_k \sin \frac{k\pi x}{l} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{\nu_n} \Psi_n \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \nu_n t \right\}. \quad (43.59)$$

В формулах (43.58) и (43.59) частоты $\bar{\nu}_n$ и ν_n определены соотношениями (43.57).

Пример 43.8. Решить пример 43.6 при условии, что сила сопротивления среды пропорциональна скорости смещения струны от положения равновесия и на струну действует вынуждающая сила $f(x) \sin \omega t$.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$u_{tt} + \alpha u_t = a^2 u_{xx} + f(x) \sin \omega t, \quad \alpha \geq 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Из решения примеров 43.6 и 43.7 известно, что

$$g(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l\nu_n} \sin \frac{\pi nx}{l} \sin \frac{\pi ny}{l} e^{-\alpha t/2} \sin \nu_n t, \quad (43.60)$$

если $(\alpha/2)^2 < \omega_1^2$. Соответствующее этому условию решение имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_n} \Phi_n \sin \frac{\pi nx}{l} \times \\ \times \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)/2} \sin \omega \tau \sin \nu_n(t-\tau) d\tau. \quad (43.61)$$

Здесь

$$\Phi_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi ny}{l} dy, \quad (43.62)$$

а ν_n определяются формулой (43.57).

Вычислив интеграл по времени в (43.61), найдем

$$\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)/2} \sin \omega \tau \sin \nu_n(t-\tau) d\tau = \\ = \frac{\nu_n}{\Omega_n} \left\{ (\omega_n^2 - \omega^2) \sin \omega t - \omega \alpha \cos \omega t + \right. \\ \left. + \omega e^{-\alpha t/2} \left[\alpha \cos \nu_n t + \frac{\omega^2 + \omega_n^2 - 2\nu_n^2}{\nu_n} \sin \nu_n t \right] \right\}, \quad (43.63)$$

где

$$\Omega_n = \omega^2 + \omega_n^2 - 4\omega^2 \nu_n^2, \quad (43.64)$$

что позволяет записать решение исходной задачи следующим образом:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega_n} \Phi_n \sin \frac{\pi nx}{l} \left\{ (\omega_n^2 - \omega^2) \sin \omega t - \omega \alpha \cos \omega t + \right. \\ \left. + \omega e^{-\alpha t/2} \left[\alpha \cos \nu_n t + \frac{\omega^2 + \omega_n^2 - 2\nu_n^2}{\nu_n} \sin \nu_n t \right] \right\}. \quad (43.65)$$

Легко убедиться, что при $\alpha = 0$ решение (43.65) переходит в решение (43.63), не учитывающее сопротивление среды. При

$\alpha \neq 0$ решение (43.65) принципиально отличается от решения, полученного в примере 43.7, тем, что явление резонанса отсутствует для любых частот вынуждающей силы. Сила сопротивления среды, таким образом, играет роль фактора, стабилизирующего процесс колебаний. Со временем колебания с частотами ν_n в (43.65) затухают, что приводит к установившимся колебаниям с частотой ω , т.е.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega_n} \Phi_n \sin \frac{\pi n x}{l} \{(\omega_n^2 - \omega^2) \sin \omega t - \omega \alpha \cos \omega t\}. \quad (43.66)$$

Пример 43.7 позволяет обобщить решение задачи (43.65) на произвольное значение коэффициента сопротивления α .

44. Сферические волны

Часть многомерных задач может быть сведена к одномерным.

Ранее был рассмотрен процесс распространения волн на полупрямой. Покажем, что распространение волн, возбуждаемых точечным источником, в пространстве допускает аналогичное описание.

Если задано краевое условие в точке

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \quad (44.1)$$

а) $u|_{\vec{r}=0} = \varphi(t)$ либо б) $\frac{\partial u}{\partial r}|_{\vec{r}=0} = \psi(t),$

то решение уравнения (44.1) можно искать в виде

$$u(\vec{r}, t) = u(r, t), \quad \text{где } r = |\vec{r}|. \quad (44.2)$$

Запишем оператор Лапласа в сферической системе координат

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \quad (44.3)$$

Поскольку функция $u(\vec{r}, t)$ (44.2) не зависит от θ, φ , уравнение (44.1) примет вид

$$u_{tt} - a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0. \quad (44.4)$$

Заметим, что

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru). \quad (44.5)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= \frac{1}{r^2} \left[2r \frac{\partial u}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] = \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial(ru)}{\partial r} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[u + r \frac{\partial u}{\partial r} \right] = \frac{1}{r} \left[2 \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right], \end{aligned}$$

и соотношение (44.5) выполняется. Тогда уравнение (44.4) можно записать в виде

$$u_{tt} - \frac{a^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru) = 0. \quad (44.6)$$

Обозначив $ru(r, t) = v(r, t)$, получим для функции $v(r, t)$ уравнение

$$v_{tt} - a^2 v_{rr} = 0, \quad r \geq 0, \quad (44.7)$$

совпадающее с уравнением колебаний одномерной струны. Общее решение уравнения (44.7) нам известно:

$$v(r, t) = f_1(t + r/a) + f_2(t - r/a), \quad (44.8)$$

где f_1 и f_2 — произвольные гладкие функции. Тогда для $u(r, t)$ получим

$$u(r, t) = \frac{f_1(t + r/a) + f_2(t - r/a)}{r}. \quad (44.9)$$

Это — общее решение уравнения (44.1), описывающее процесс распространения возмущения, создаваемого сферически-симметричным (не обязательно точечным) источником, расположенным в начале координат ($\vec{r} = 0$).

◆ Функции $u(\vec{r}, t)$ вида (44.9) называются сферическими волнами.

Рассмотрим граничные условия типа а) в точке $r = 0$. Пусть $u(0, t) = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ ограничена. Тогда

$$v(0, t) = ru(r, t)|_{r=0} = 0, \quad f_1(t) = -f_2(t) = f(t)$$

и, следовательно,

$$u(r, t) = \frac{f(t + r/a) - f(t - r/a)}{r}. \quad (44.10)$$

Перейдем в (44.10) к пределу $r \rightarrow 0$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} u(r, t) = \frac{2}{a} f'(t) = u(0, t) = \varphi(t),$$

т.е.

$$f(t) = \frac{2}{a} \int_0^t \varphi(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$u(r, t) = \frac{2}{ar} \int_{t-r/a}^{t+r/a} \varphi(\tau) d\tau. \quad (44.11)$$

Краевая задача типа б) решается аналогично.

◇ Амплитуда сферической волны (если $|f(x)| \leq a$) убывает не медленнее, чем обратно пропорционально расстоянию до центра.

45. Задача Коши для уравнения Даламбера в пространстве

Рассмотрим задачу о распространении колебаний в бесконечном объеме — задачу Коши для волнового уравнения во всем пространстве ($\vec{x} \in \mathbb{R}^n$):

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + F(\vec{x}, t), \quad u = u(\vec{x}, t), \quad t > 0, \quad (45.1)$$

$$u(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x}), \quad u_t(\vec{x}, 0) = \psi(\vec{x}). \quad (45.2)$$

45.1. Метод усреднения и формула Кирхгофа

Теорема 45.1. Пусть функции $\varphi(\vec{x})$ и $\psi(\vec{x})$ соответственно трижды и дважды дифференцируемы в \mathbb{R}^3 , а функция $f(\vec{x}, t)$ непрерывно дифференцируема по всем своим переменным. Тогда классическое решение задачи Коши (45.1), (45.2) ($\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) имеет вид

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|\vec{x}-\vec{y}|=at} \psi(\vec{y}) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|\vec{x}-\vec{y}|=at} \varphi(\vec{y}) dS_y \right) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\vec{y}-\vec{x}| \leq at} \frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|} f\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{y}-\vec{x}|}{a}\right) d\vec{y}. \quad (45.3)$$

Соотношение (45.3) называется формулой Кирхгофа.

Доказательство. Решение задачи (45.1), (45.2) представим в виде

$$u(\vec{x}, t) = \tilde{u}(\vec{x}, t) + v(\vec{x}, t), \quad (45.4)$$

где функции $\tilde{u}(\vec{x}, t)$ и $v(\vec{x}, t)$ являются решениями следующих задач:

$$\tilde{u}_{tt} = a^2 \Delta \tilde{u}, \quad t > 0; \quad (45.5)$$

$$\tilde{u}(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x}), \quad \tilde{u}_t(\vec{x}, 0) = \psi(\vec{x}) \quad (45.6)$$

и

$$v_{tt} = a^2 \Delta v + F(\vec{x}, t), \quad t > 0; \quad (45.7)$$

$$v(\vec{x}, 0) = v_t(\vec{x}, 0) = 0. \quad (45.8)$$

Решение задачи (45.5), (45.6) основано на искусственном приеме, использующем усредненные по части переменных величины. Положим $\vec{x} = \vec{y} + \vec{R}$, где

$$\vec{R} = R(\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

и рассмотрим функцию

$$\bar{u}(\vec{y}, R, t) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{S_R} \tilde{u}(\vec{y} + \vec{R}, t) dS, \quad (45.9)$$

где S_R — сфера радиуса R с центром в начале координат, $dS = R^2 d\Omega$, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. Ее можно записать в виде

$$\bar{u}(\vec{y}, R, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Omega} \tilde{u}(\vec{y} + \vec{R}, t) d\Omega. \quad (45.10)$$

Интегрирование проводится по полному телесному углу Ω . Очевидно, что $\bar{u}(\vec{y}, 0, t) = \tilde{u}(\vec{y}, t)$ и

$$\Delta_{\vec{R}} \tilde{u}(\vec{y} + \vec{R}, t) = \frac{1}{a^2} \tilde{u}_{tt}(\vec{y} + \vec{R}, t). \quad (45.11)$$

Оператор Лапласа $\Delta_{\vec{R}}$ действует на переменную \vec{R} . Проинтегрируем левую и правую части соотношения (45.11) по шару V_R радиуса R (переменной \vec{R}). По формуле Остроградского

$$\int_{V_R} (\Delta_{\vec{R}} \tilde{u}) d\vec{R} = \oint_{S_R} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} dS = \oint_{S_R} R^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} d\Omega.$$

Поскольку для сферы $\partial \tilde{u} / \partial n = \partial \tilde{u} / \partial R$, то

$$\int_{V_R} (\Delta_{\vec{R}} \tilde{u}) d\vec{R} = R^2 \frac{\partial}{\partial R} \oint \tilde{u} d\Omega.$$

Последний интеграл, согласно (45.10), равен $4\pi \bar{u}$. Таким образом,

$$\int_{V_R} (\Delta_{\vec{R}} \tilde{u}) d\vec{R} = 4\pi R^2 \frac{\partial \bar{u}(\vec{y}, R, t)}{\partial R}. \quad (45.12)$$

Рассмотрим теперь интеграл по объему V_R от правой части соотношения (45.11)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \int_{V_R} \tilde{u}_{tt}(\vec{y} + \vec{R}, t) d\vec{R} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_R} u(\vec{y} + \vec{R}, t) d\vec{R} = \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \int_0^R R^2 dR \oint_{\Omega} \tilde{u}(\vec{y} + \vec{R}, t) d\Omega \right\}. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл равен $4\pi \bar{u}$. Следовательно,

$$\frac{1}{a^2} \int_{V_R} \tilde{u}_{tt}(\vec{y} + \vec{R}, t) d\vec{R} = \frac{4\pi}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^R R^2 \bar{u} dR. \quad (45.13)$$

Приравняв правые части соотношений (45.12) и (45.13), получим

$$R^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial R} = \frac{4\pi}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^R R^2 \bar{u} dR. \quad (45.14)$$

Продифференцируем левую и правую части (45.14) по R :

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial R} \right) = \frac{R^2}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}. \quad (45.15)$$

Сделаем в (45.15) замену $\bar{u} = v/R$ (аналогично разд. «Сферические волны»):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial R^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (45.16)$$

Следовательно,

$$v(R, t) = g\left(t + \frac{R}{a}\right) - g\left(t - \frac{R}{a}\right), \quad (45.17)$$

так как $\bar{u}(0, t) = \tilde{u}(\vec{y}, t)$ существует, что возможно только при условии $v(0, t) = 0$. Следовательно,

$$\bar{u}(R, t) = \frac{1}{R} \left[g\left(t + \frac{R}{a}\right) - g\left(t - \frac{R}{a}\right) \right], \quad (45.18)$$

причем

$$\bar{u}(0, t_0) = \frac{2}{a} g'(t_0) = \tilde{u}(\vec{y}, t_0). \quad (45.19)$$

Построим функцию L

$$L = \frac{\partial}{\partial R} R \bar{u}(R, t) + \frac{1}{a} R \frac{\partial \bar{u}(R, t)}{\partial t} = \frac{2}{a} g'\left(t + \frac{R}{a}\right). \quad (45.20)$$

Очевидно, что при $R = 0$ и $t = t_0$

$$L \Big|_{\substack{R=0 \\ t=t_0}} = \frac{2}{a} g'(t_0) = \tilde{u}(\vec{y}, t_0). \quad (45.21)$$

Аналогично при $R = at_0$, $t = 0$

$$L \Big|_{\substack{t=0 \\ R=at_0}} = \frac{2}{a} g'(t_0) = \tilde{u}(\vec{y}, t_0),$$

но

$$\bar{u}(\vec{y}, R, 0) = \frac{1}{4\pi} \oint \tilde{u}(\vec{y} + \vec{R}, 0) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \oint \varphi(\vec{y} + \vec{R}) d\Omega \quad (45.22)$$

и

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi} \oint \psi(\vec{y} + \vec{R}) d\Omega. \quad (45.23)$$

Подставим (45.23) и (45.22) в (45.20) и воспользуемся явным видом функции L (45.21):

$$\left[\frac{\partial}{\partial R} R \frac{1}{4\pi} \oint \varphi(\vec{y} + \vec{R}) d\Omega + \frac{1}{a} R \oint \frac{\psi(\vec{y} + \vec{R}) d\Omega}{4\pi} \right] \Big|_{\substack{t=0 \\ R=at_0}} = \tilde{u}(\vec{y}, t_0).$$

Обозначив $\vec{y} = \vec{x}$, $t_0 = t$, запишем

$$\tilde{u}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} t \oint_{\Omega} \varphi(\vec{x} + \vec{R}) d\Omega + t \oint_{\Omega} \psi(\vec{x} + \vec{R}) d\Omega \right], \quad (45.24)$$

$$\vec{R} = at(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta).$$

Таким образом, получили решение однородного волнового уравнения с произвольными начальными условиями во всем пространстве.

Положив $\vec{y} = \vec{x} + \vec{R}$ и перейдя от двойного интеграла к поверхностному по сфере $|\vec{x} - \vec{y}| = at$, из соотношения (45.24) с учетом $dS_y = (at)^2 d\Omega$ придем к формуле

$$\tilde{u}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{|\vec{x}-\vec{y}|=at} \varphi(\vec{y}) dS_y \right] + \frac{1}{t} \int_{|\vec{x}-\vec{y}|=at} \psi(\vec{y}) dS_y \right\}. \quad (45.25)$$

Для решения неоднородного уравнения (45.7), как и в одномерном случае, воспользуемся принципом Дюамеля, задающим решение $v(\vec{x}, t)$ в виде

$$v(\vec{x}, t) = \int_0^t U(\vec{x}, t, \tau) d\tau, \quad (45.26)$$

где $U(\vec{x}, t, \tau)$ является решением задачи Коши

$$U_{tt} = a^2 \Delta U, \quad (45.27)$$

$$U|_{t=\tau} = 0, \quad U_t|_{t=\tau} = F(\vec{x}, \tau).$$

Непосредственной проверкой, как и при доказательстве утверждения 40.1, убеждаемся в справедливости (45.26). Далее, воспользовавшись формулой (45.25), выпишем решение задачи (45.27)

$$U(\vec{x}, t, \tau) = \frac{1}{4\pi a^2 (t - \tau)} \int_{|\vec{x}-\vec{y}|=a(t-\tau)} F(\vec{y}, \tau) dS_y,$$

подстановка которого в (45.26) дает

$$v(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{d\tau}{t - \tau} \int_{|\vec{x}-\vec{y}|=a(t-\tau)} F(\vec{y}, \tau) dS_y,$$

откуда заменой $t - \tau = r/a$ находим

$$\begin{aligned} v(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \left[\int_{|\vec{x}-\vec{y}|=r} \frac{F(\vec{y}, t-r/a)}{r} dS_y \right] dr = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\vec{x}-\vec{y}| < at} \frac{F(\vec{y}, t-|\vec{x}-\vec{y}|/a)}{|\vec{x}-\vec{y}|} d\vec{y}. \end{aligned} \quad (45.28)$$

Подстановка (45.25) и (45.28) в (45.4) дает формулу Кирхгофа (45.3), что и требовалось доказать.

◇ Формула Кирхгофа (45.3) остается справедливой и для пространства размерности больше трех, т.е. $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Пример 45.1. Решить задачу Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (45.29)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \quad u_t|_{t=0} = \psi(\vec{x}), \quad (45.30)$$

если

$$a^2 = 8, \quad f(\vec{x}, t) = x_1^2 t^2, \quad \varphi(\vec{x}) = x_2^2, \quad \psi(\vec{x}) = x_3^2. \quad (45.31)$$

Решение. Решение задачи задается формулой Кирхгофа

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\vec{y}-\vec{x}| \leq at} \frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|} f\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{y}-\vec{x}|}{a}\right) d\vec{y} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|\vec{y}-\vec{x}|=at} \psi(\vec{y}) dS' + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{|\vec{y}-\vec{x}|=at} \varphi(\vec{y}) dS' \right]. \end{aligned} \quad (45.32)$$

Первый интеграл в (45.32) представляет собой тройной интеграл по шару радиуса at

$$(\vec{x} - \vec{y})^2 \leq (at)^2,$$

а остальные два — поверхностные по сфере $(\vec{x} - \vec{y})^2 = a^2 t^2$. Для их вычисления удобно перейти в сферическую систему координат с началом в точке $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y_2 &= x_2 + \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ y_3 &= x_3 + \rho \cos \theta. \end{aligned} \quad (45.33)$$

Вычислим первый интеграл в (45.32). С учетом (45.31) имеем

$$I_1 = \frac{1}{4\pi a^2} \times \int_{|\vec{y}-\vec{x}| \leq at} \frac{y_1^2 [t - \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}/a]^2}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}} d\vec{y} \quad (45.34)$$

и, перейдя в систему координат (45.33), запишем

$$I_1 = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(x_1 + \rho \sin \theta \cos \varphi)^2 (t - \rho/a)^2}{\rho}. \quad (45.35)$$

Последовательное вычисление интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (x_1 + \rho \sin \theta \cos \varphi)^2 d\varphi &= 2\pi x_1^2 + \pi \rho^2 \sin^2 \theta, \\ \int_0^\pi (2\pi x_1^2 + \pi \rho^2 \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta &= 4\pi \left(x_1^2 + \frac{\rho^2}{3} \right), \\ 4\pi \int_0^{at} \rho \left(t - \frac{\rho}{a} \right)^2 \left(x_1^2 + \frac{\rho^2}{3} \right) d\rho &= 4\pi a^2 \left[\frac{x_1^2 t^4}{12} + \frac{a^2 t^6}{180} \right] \end{aligned} \quad (45.36)$$

дает

$$\tilde{I}_1 = \frac{1}{4\pi a^2} 4\pi a^2 \left[\frac{x_1^2 t^4}{12} + \frac{a^2 t^6}{180} \right] = \frac{x_1^2 t^4}{12} + \frac{a^2 t^6}{180},$$

а поскольку $a^2 = 8$, то

$$\tilde{I}_1 = \frac{x_1^2 t^4}{12} + \frac{2}{45} t^6. \quad (45.37)$$

Вычислим второй интеграл в (45.32). С учетом (45.31) имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|\vec{y}-\vec{x}|=at} y_1^2 dS' = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (x_3 + at \cos \theta)^2 (at)^2 \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{t}{2} \int_0^\pi (x_3 + at \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta = t \left(x_3^2 + \frac{a^2 t^2}{3} \right) \end{aligned}$$

или окончательно

$$\tilde{I}_2 = t \left(x_3^2 + \frac{8t^2}{3} \right). \quad (45.38)$$

Аналогично вычислим третий интеграл в (45.32)

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{|\vec{y}-\vec{x}|=at} y_2^2 dS' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (x_2 + at \sin \theta \sin \varphi)^2 (at)^2 \sin \theta d\theta = \\ &= 4\pi (at)^2 \left(x_2^2 + \frac{a^2 t^2}{3} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\tilde{I}_3 = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} I_3 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[t \left(x_2^2 + \frac{a^2 t^2}{3} \right) \right] = x_2^2 + a^2 t^2$$

или при $a^2 = 8$

$$\tilde{I}_3 = x_2^2 + 8t^2. \quad (45.39)$$

Подставив (45.37), (45.38) и (45.39) в (45.32), найдем

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{x_1^2 t^4}{12} + \frac{2}{45} t^6 + t \left(x_3^2 + \frac{8t^2}{3} \right) + (x_2^2 + 8t^2).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в правильности полученного результата.

45.2. Метод спуска и формула Пуассона

Теорема 45.2. Классическое решение задачи Коши (45.1), (45.2) при $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 u(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2\pi a} \int_{|\vec{x}-\vec{y}| < at} \frac{\psi(\vec{y})d\vec{y}}{\sqrt{a^2t^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2}} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{|\vec{x}-\vec{y}| < at} \frac{\varphi(\vec{y})d\vec{y}}{\sqrt{a^2t^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2}} \right) + \\
 &+ \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int_{|\vec{y}-\vec{x}| < a(t-\tau)} \frac{F(\vec{y}, \tau)d\vec{y}}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\vec{y}-\vec{x}|^2}} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi a} \int_{|\vec{y}-\vec{x}| < at} \frac{\psi(\vec{y})d\vec{y}}{\sqrt{a^2t^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2}}, \quad (45.40)
 \end{aligned}$$

где $\varphi(\vec{x})$ – двукратно, а $\psi(\vec{x})$ – однократно непрерывно дифференцируемые функции в \mathbb{R}^2 , а функция $f(\vec{x}, t)$ непрерывно дифференцируема по всем своим переменным.

Соотношение (45.40) называется формулой Пуассона задачи Коши для волнового уравнения в \mathbb{R}^2 .

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 45.1, воспользуемся редукцией задачи (45.1), (45.2) в виде (45.4)–(45.8), положив в них $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Для нахождения функции $\tilde{u}(\vec{x}, t)$ используем метод спуска, предложенный Адамаром и позволяющий по известному решению в \mathbb{R}^{n+1} строить решения задачи меньшей размерности (\mathbb{R}^{k+1} с $k < n$). Смысл метода заключается в том, что решение (45.25) можно рассматривать как решение в \mathbb{R}^2 , положив начальные условия зависящими только от x_1 и x_2 , т.е. $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, x_2)$, $\psi(\vec{x}) = \psi(x_1, x_2)$, и учитывая, что $\partial\tilde{u}/\partial x_3 = 0$.

По известной из анализа формуле сведения поверхностных интегралов к двойным имеем

$$\begin{aligned}
 \int_S f(y_1, y_2, y_3)dS &= \\
 &= \int_E f(y_1, y_2, y_3(y_1, y_2)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2} dy_1 dy_2,
 \end{aligned}$$

где E – проекция поверхности S на плоскость $y_3 = 0$. Применим эту формулу к (45.25) и учтем, что поверхность S : $|\vec{x} - \vec{y}| = at$ или $x_3 - y_3 = \pm \sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}$ проецируется на плоскость $y_3 = x_3$ дважды (верхняя и нижняя полусферы). Учтем также, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_3}{\partial y_1} &= \pm \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}}, \\ \frac{\partial y_3}{\partial y_2} &= \pm \frac{x_2 - y_2}{\sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}}, \\ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2} &= \frac{t}{\sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}}. \end{aligned}$$

В результате для $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2\pi a} \int_{|\vec{x} - \vec{y}| < at} \frac{\psi(\vec{y}) d\vec{y}}{\sqrt{a^2 t^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2}} + \\ &+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|\vec{x} - \vec{y}| < at} \frac{\varphi(\vec{y}) d\vec{y}}{\sqrt{a^2 t^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2}}. \end{aligned} \quad (45.41)$$

Применив теперь принцип Дюамеля, функцию $v(\vec{x}, t)$ в \mathbb{R}^2 (см. теорему 45.1) с учетом (45.41) запишем в виде

$$v(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int_{|\vec{x} - \vec{y}| < a(t-\tau)} \frac{F(\vec{y}, \tau) d\vec{y}}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2}}. \quad (45.42)$$

Подстановка (45.41) и (45.42) в (45.4) дает формулу Пуассона (45.40), что и требовалось доказать.

◇ Применив метод спуска к формуле Пуассона, получим формулу Даламбера (37.2).

◇ Устойчивость решений задачи Коши (45.1), (45.2) в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 , т.е. формул Кирхгофа и Пуассона, доказывается так же, как и устойчивость формулы Даламбера.

◇ Формулы Кирхгофа, Пуассона и Даламбера описывают сферические, цилиндрические и плоские волны соответственно.

Пример 45.2. Решить задачу Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (45.43)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \quad u_t|_{t=0} = \psi(\vec{x}), \quad (45.44)$$

если

$$a = 1, \quad f(\vec{x}, t) = 6x_1x_2t, \quad \varphi(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2, \quad \psi(\vec{x}) = x_1x_2. \quad (45.45)$$

Решение. Решение задачи задается формулой Пуассона (45.40)

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) = & \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int_{|\vec{y}-\vec{x}| < a(t-\tau)} \frac{f(\vec{y}, \tau) d\vec{y}}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\vec{y}-\vec{x}|^2}} + \\ & + \frac{1}{2\pi a} \int_{|\vec{y}-\vec{x}| < at} \frac{\psi(\vec{y}) d\vec{y}}{\sqrt{a^2t^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2}} + \\ & + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|\vec{y}-\vec{x}| < at} \frac{\varphi(\vec{y}) d\vec{y}}{\sqrt{a^2t^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2}}. \end{aligned} \quad (45.46)$$

Все интегралы в (45.46) представляют собой двойные интегралы по кругу радиуса at

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \leq (at)^2,$$

для вычисления которых удобно перейти в полярную систему координат с началом в точке $\vec{x} = (x_1, x_2)$

$$y_1 = x_1 + \rho \cos \varphi, \quad y_2 = x_2 + \rho \sin \varphi. \quad (45.47)$$

Тогда для первого интеграла из (45.46) с учетом (45.45) и (45.47) имеем

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_{|\vec{y}-\vec{x}| < a(t-\tau)} \frac{6y_1y_2\tau dy_1dy_2}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} = \\ = & 6\tau \int_0^{a(t-\tau)} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(x_1 + \rho \cos \varphi)(x_2 + \rho \sin \varphi)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}}. \end{aligned} \quad (45.48)$$

Последовательное вычисление интегралов

$$\int_0^{2\pi} (x_1 + \rho \cos \varphi)(x_2 + \rho \sin \varphi) d\varphi = 2\pi x_1 x_2,$$

$$\int_0^{a(t-\tau)} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}} = -\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2} \Big|_0^{a(t-\tau)} = a(t-\tau)$$

дает

$$I_1 = 6\tau 2\pi x_1 x_2 a(t-\tau). \quad (45.49)$$

Величину I_1 , согласно формуле Пуассона (45.46), следует еще проинтегрировать по τ , тогда

$$\tilde{I}_1 = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t I_1 d\tau = 6x_1 x_2 \int_0^t \tau(t-\tau) d\tau = x_1 x_2 t^3. \quad (45.50)$$

Аналогично вычисляются два остальных интеграла. Действительно,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi a} \int_{|\bar{y}-\bar{x}| \leq at} \frac{y_1 y_2 dy_1 dy_2}{\sqrt{a^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^{at} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 t^2 - \rho^2}} \int_0^{2\pi} (x_1 + \rho \cos \varphi)(x_2 + \rho \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{x_1 x_2}{a} \int_0^{at} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 t^2 - \rho^2}} = x_1 x_2 t. \end{aligned} \quad (45.51)$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{|\bar{y}-\bar{x}| < at} \frac{(y_1^2 - y_2^2) dy_1 dy_2}{\sqrt{a^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} = \\ &= \int_0^{at} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 t^2 - \rho^2}} \int_0^{2\pi} [(x_1 + \rho \cos \varphi)^2 - (x_2 + \rho \sin \varphi)^2] d\varphi = \\ &= 2\pi(x_1^2 - x_2^2) \int_0^{at} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 t^2 - \rho^2}} = 2\pi(x_1^2 - x_2^2) at. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\tilde{I}_3 = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} [I_3] = \frac{\partial}{\partial t} [t(x_1^2 - x_2^2)] = x_1^2 - x_2^2. \quad (45.52)$$

Подставив (45.50), (45.51), (45.52) в (45.46), получим

$$u(\vec{x}, t) = x_1 x_2 t^3 + x_1 x_2 t + x_1^2 - x_2^2.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в правильности полученного результата.

46. Смешанная задача для волнового уравнения в пространстве. Метод Фурье

Рассмотрим задачу о распространении волн в ограниченных пространственных и плоских телах. Начнем с исследования колебаний круглой (радиуса R) мембраны с закрепленным краем. Обозначим через $u(r, \varphi, t)$ отклонение точки мембраны с полярными координатами (r, φ) в момент времени t от плоскости xOy . Как было показано в разд. <Уравнения поперечных колебаний мембраны>, математическая постановка такой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta_2 u, & u &= u(r, \varphi, t), & (46.1) \\ u(r, \varphi, 0) &= g_1(r, \varphi), & u_t(r, \varphi, 0) &= g_2(r, \varphi), & u(R, \varphi, t) &= 0, \end{aligned}$$

Частное решение будем искать в виде $u(r, \varphi, t) = T(t)Y(r, \varphi)$. Подставив его в уравнение (46.1), получим

$$T''Y = a^2 T \Delta_2 Y \quad \text{или} \quad \frac{T''}{T} = \frac{a^2 \Delta_2 Y}{Y} = \lambda.$$

Тогда

$$T'' - \lambda T = 0, \quad |T| < \infty, \quad (46.2)$$

$$\Delta_2 Y - \frac{\lambda}{a^2} Y = 0. \quad (46.3)$$

Частное решение уравнения (46.3) ищем в виде $Y(r, \varphi) = f(r)\Phi(\varphi)$. Так как

$$\Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

то

$$\frac{\Phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f') + \frac{f}{r^2} \Phi'' - \frac{\lambda}{a^2} \Phi f = 0.$$

Домножим это уравнение на $r^2/(\Phi f)$ и получим

$$\frac{r}{f} \frac{\partial}{\partial r} (r f') - \frac{\lambda r^2}{a^2} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu.$$

Следовательно,

$$\Phi'' + \mu \Phi = 0, \quad (46.4)$$

$$r^2 f'' + r f' - \left(\frac{\lambda r^2}{a^2} + \mu \right) f = 0. \quad (46.5)$$

Для уравнений (46.4) и (46.5) из постановки исходной задачи вытекают следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi + 2\pi) &= \Phi(\varphi), & |\Phi(\varphi)| < \infty, \\ f(R) &= 0, & |f(r)| < \infty, \quad 0 \leq r \leq R. \end{aligned} \quad (46.6)$$

Уравнение для $\Phi(\varphi)$ (46.4) с периодическими условиями (46.6) при $\mu = \pm n^2$ имеет решение

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (46.7)$$

Следовательно, для определения $f(r)$ получим уравнение

$$r^2 f'' + r f' + (\gamma r^2 - n^2) f = 0, \quad \gamma = -\frac{\lambda}{a^2}, \quad (46.8)$$

с условием

$$f(R) = 0, \quad |f(r)| < \infty, \quad 0 \leq r < R,$$

т.е. задачу, решение которой получено в разд. «Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя» части III:

$$\gamma = \left(\frac{\alpha_k^n}{R} \right)^2, \quad k = \overline{1, \infty},$$

где α_k^n — положительные корни уравнения $J_n(\alpha) = 0$,

$$\lambda = -a^2 \gamma = -\left(\frac{a}{R} \alpha_k^n \right)^2,$$

а

$$f_{n,k}(r) = C_{n,k} J_n \left(\alpha_k^n \frac{r}{R} \right). \quad (46.9)$$

Наконец, для функции $T(t)$ получим уравнение

$$T'' + (\omega_{nk})^2 T = 0, \quad \text{где} \quad \omega_{nk}^2 = \frac{a^2}{R} \alpha_k^n, \quad (46.10)$$

общее решение которого имеет вид

$$T_{n,k} = D_{nk} \cos \omega_{nk} t + E_{nk} \sin \omega_{nk} t. \quad (46.11)$$

Следовательно,

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n,k=0}^{\infty} [A_{n,k} \cos \omega_{nk} t + B_{n,k} \sin \omega_{nk} t] \times \\ \times J_n \left(\alpha_k^n \frac{r}{R} \right) [C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi]. \quad (46.12)$$

При этом должны выполняться начальные условия

$$g_1(r, \varphi) = \sum_{n,k} A_{nk} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) J_n \left(\alpha_k^n \frac{r}{R} \right), \\ g_2(r, \varphi) = \sum_{n,k} \omega_{n,k} B_{nk} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) J_n \left(\alpha_k^n \frac{r}{R} \right).$$

Разложив функции $g_1(r, \varphi)$ и $g_2(r, \varphi)$ в ряд Фурье, найдем, что при $n > 0$

$$A_{nk} C_n = \frac{2}{\pi R^2 [J'_n(\alpha_k^n)]^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \{ g_1(r, \varphi) J_n \left(\alpha_k^n \frac{r}{R} \right) \cos n\varphi \}; \\ A_{nk} D_n = \frac{2}{\pi R^2 [J'_n(\alpha_k^n)]^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \{ g_1(r, \varphi) J_n \left(\alpha_k^n \frac{r}{R} \right) \sin n\varphi \}; \\ \omega_{nk} B_{nk} C_n = \frac{2}{\pi R^2 [J'_n(\alpha_k^n)]^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \{ g_2(r, \varphi) J_n \left(\alpha_k^n \frac{r}{R} \right) \cos n\varphi \}; \\ \omega_{nk} B_{nk} D_n = \frac{2}{\pi R^2 [J'_n(\alpha_k^n)]^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \{ g_2(r, \varphi) J_n \left(\alpha_k^n \frac{r}{R} \right) \sin n\varphi \}$$

и при $n = 0$

$$A_{0k} C_0 = \frac{4}{\pi R^2 [J'_0(\alpha_k^0)]^2} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r g_1(r, \varphi) J_0 \left(\frac{r}{R} \alpha_k^0 \right) dr; \\ \omega_{0k} B_{0k} D_0 = \frac{4}{\pi R^2 [J'_0(\alpha_k^0)]^2} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r g_2(r, \varphi) J_0 \left(\frac{r}{R} \alpha_k^0 \right) dr.$$

◇ Если функции g_1 и g_2 зависят только от одной переменной r , то полученные формулы дают решение задач, рассмотренных

ранее в разд. «Задачи, сводящиеся к одномерному волновому уравнению».

Пример 46.1. Записать закон поперечных колебаний однородной прямоугольной мембраны $0 \leq x \leq p$, $0 \leq y \leq q$ с закрепленным краем, если колебания вызваны непрерывно распределенной по мембране поперечной силой с плотностью

$$f(x, y, t) = x \exp(-t) \sin\left(\frac{2\pi}{q}y\right).$$

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{1}{\rho}x \exp(-t) \sin\left(\frac{2\pi}{q}y\right), \\ u|_{x=0} &= u|_{x=p} = u|_{y=0} = u|_{y=q} = 0, \\ u|_{t=0} &= u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq q. \end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательную однородную задачу

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} &= a^2(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy}), \\ \tilde{u}|_{x=0} &= \tilde{u}|_{x=p} = \tilde{u}|_{y=0} = \tilde{u}|_{y=q} = 0. \end{aligned}$$

Частное решение будем искать методом разделения переменных

$$\tilde{u}(x, y, t) = \tilde{v}(x, y)\tilde{T}(t).$$

Отделив переменную t , получим уравнения

$$\tilde{T}'' + a^2\lambda\tilde{T} = 0, \quad \tilde{v}_{xx} + \tilde{v}_{yy} + \lambda v = 0$$

с граничными условиями

$$\tilde{v}(0, y) = 0, \quad \tilde{v}(p, y) = 0, \quad \tilde{v}(x, 0) = 0, \quad \tilde{v}(x, q) = 0.$$

Решение последней задачи ищем в виде

$$\tilde{v}(x, y) = \tilde{X}(x)\tilde{Y}(y).$$

Разделим переменные и получим

$$\tilde{X}'' + \nu\tilde{X} = 0, \quad \tilde{X}(0) = \tilde{X}(p) = 0 \quad (46.13)$$

и

$$\tilde{Y}'' + \mu\tilde{Y} = 0, \quad \tilde{Y}(0) = \tilde{Y}(q) = 0, \quad (46.14)$$

где $\mu + \nu = \lambda$. Решение задачи Штурма–Лиувилля (46.13) имеет вид

$$\tilde{X}_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{p}x, \quad \nu = \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2, \quad n = \overline{0, \infty},$$

а задачи (46.14) — вид

$$\tilde{Y}_m(y) = B_n \sin \frac{m\pi}{q} y, \quad \mu = \left(\frac{m\pi}{q} \right)^2, \quad m = \overline{0, \infty}.$$

Таким образом, собственные значения

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n\pi}{p} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{q} \right)^2$$

соответствуют собственным функциям

$$\tilde{v}_{n,m}(x, y) = B_{n,m} \sin \frac{n\pi}{p} x \sin \frac{m\pi}{q} y,$$

где $B_{n,m}$ — константа. Выберем ее так, чтобы норма функции $v_{n,m}$ с весом 1 равнялась единице, т.е.

$$\int_0^p \int_0^q \tilde{v}_{n,m}^2(x, y) dx dy = B_{n,m}^2 \int_0^p \sin^2 \frac{n\pi}{p} x dx \int_0^q \sin^2 \frac{m\pi}{q} y dy.$$

Тогда

$$B_{n,m} = \sqrt{\frac{4}{pq}}$$

и собственные функции однородной задачи имеют вид

$$\tilde{v}_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{pq}} \sin \frac{n\pi}{p} x \sin \frac{m\pi}{q} y.$$

Решение неоднородной задачи будем искать в виде ряда по собственным функциям однородной задачи

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sqrt{\frac{2}{pq}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,m}(t) \sin \frac{n\pi}{p} x \sin \frac{m\pi}{q} y; \\ u_{tt} &= \sqrt{\frac{2}{pq}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,m}''(t) \sin \frac{n\pi}{p} x \sin \frac{m\pi}{q} y; \\ u_{yy} &= -\left(\frac{m\pi}{q} \right)^2 \sqrt{\frac{2}{pq}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,m}(t) \sin \frac{n\pi}{p} x \sin \frac{m\pi}{q} y; \\ u_{xx} &= -\left(\frac{n\pi}{p} \right)^2 \sqrt{\frac{2}{pq}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,m}(t) \sin \frac{n\pi}{p} x \sin \frac{m\pi}{q} y. \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение перепишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{pq}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\gamma_{n,m}'' + a^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2} \right) \gamma_{n,m} \right] \sin \frac{n\pi}{p} x \sin \frac{m\pi}{q} y = \\ = \frac{1}{\rho} x \exp(-t) \sin \left(\frac{2\pi}{q} y \right). \end{aligned}$$

Разложим правую часть в ряд Фурье по $\sin(m\pi y/q)$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sin \frac{m\pi}{q} y = \sin \frac{2\pi}{q} y, \quad \beta_m = \delta_{m2}.$$

Тогда $\gamma_{n,m} = \gamma_{n,2}\delta_{m2}$ и

$$\frac{2}{\sqrt{pq}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\gamma''_{n,2} + \gamma_{n,2} \left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{4}{q^2} \right) a^2 \pi^2 \right] \sin \frac{n\pi}{p} x = \frac{1}{\rho} x e^{-t}.$$

Разложим функцию $x e^{-t}/\rho$ в ряд Фурье по $\sin(n\pi x/p)$:

$$\frac{1}{\rho} x e^{-t} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{n\pi}{p} x,$$

где

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \frac{2}{p} \int_0^p \frac{1}{\rho} x e^{-t} \sin \frac{n\pi}{p} x dx = \\ &= \frac{2}{p\rho} e^{-t} \left[-\frac{p}{n\pi} x \cos \frac{n\pi}{p} x \Big|_0^p + \frac{p}{n\pi} \int_0^p \cos \frac{n\pi}{p} x dx \right] = \\ &= \frac{2e^{-t}}{p\rho} \left[-(-1)^n \frac{p^2}{n\pi} \right] = -(-1)^n \frac{2p}{n\pi\rho} e^{-t}. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при $\sin(\pi n x/p)$. Получим

$$\gamma''_{n,2} + \gamma_{n,2} \left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{4}{q^2} \right) a^2 \pi^2 = -(-1)^n \frac{p}{n\pi\rho} e^{-t} \sqrt{pq}. \quad (46.15)$$

Обозначим

$$\left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{4}{q^2} \right) a^2 \pi^2 = \omega_{n,2}.$$

Общее решение однородного уравнения (46.15) имеет вид

$$\bar{\gamma}_{n,2} = A_{n,2} \cos \omega_{n,2} t + B_{n,2} \sin \omega_{n,2} t.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$\gamma_{n,2}^* = C_{n,2} e^{-t}, \quad (\gamma_{n,2}^*)'' = C_{n,2} e^{-t}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_{n,2}(1 + \omega_{n,2}^2) &= -(-1)^n \frac{p}{n\pi\rho} \sqrt{pq}, \\ C_{n,2} &= -\frac{(-1)^n p \sqrt{pq}}{n\pi\rho(1 + \omega_{n,2}^2)}. \end{aligned}$$

Общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$\gamma_{n,2}(t) = A_{n,2} \cos \omega_{n,2}t + B_{n,2} \sin \omega_{n,2}t - \frac{(-1)^n p \sqrt{pq}}{n\pi\rho(1 + \omega_{n,2}^2)} e^{-t}.$$

Из начальных условий найдем коэффициенты $A_{n,2}$ и $B_{n,2}$:

$$\gamma_{n,2}(0) = A_{n,2} - \frac{(-1)^n p \sqrt{pq}}{n\pi\rho(1 + \omega_{n,2}^2)} = 0,$$

$$A_{n,2} = \frac{(-1)^n p \sqrt{pq}}{n\pi\rho(1 + \omega_{n,2}^2)};$$

$$\gamma'_{n,2}(0) = B_{n,2}\omega_{n,2} + \frac{(-1)^n p \sqrt{pq}}{n\pi\rho(1 + \omega_{n,2}^2)} = 0,$$

$$B_{n,2} = \frac{(-1)^n p \sqrt{pq}}{\omega_{n,2} n\pi\rho(1 + \omega_{n,2}^2)}.$$

Тогда

$$\gamma_{n,2}(t) = \frac{(-1)^n p \sqrt{pq}}{n\pi\rho(1 + \omega_{n,2}^2)} \left[\cos \omega_{n,2}t - \frac{1}{\omega_{n,2}} \sin \omega_{n,2}t - e^{-t} \right].$$

Окончательно получим

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2p \sqrt{pq}}{n\pi\rho(1 + \omega_{n,2}^2)} \left[\cos \omega_{n,2}t - \frac{1}{\omega_{n,2}} \sin \omega_{n,2}t - e^{-t} \right] \sin \frac{n\pi}{p}x \sin \frac{2\pi}{q}y.$$

Пример 46.2. Оболочка сферического сосуда, заполненного газом, начиная с момента времени $t = 0$ совершает малые гармонические колебания вдоль одного из своих диаметров. Смещение оболочки описывается законом $A \sin \omega t$. Найти закон колебаний газа в сосуде в предположении, что при $t < 0$ газ покоился.

Решение. Следуя разд. «Уравнения гидродинамики и акустики», введем потенциал поля скоростей $u(\vec{x}, t)$:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \nabla u(\vec{x}, t).$$

Потенциал $u(r, \theta, t)$ поля скоростей является решением следующей смешанной задачи:

$$u_{tt} = a^2 \left\{ \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta \right\}, \quad (46.16)$$

$$t > 0, \quad r < R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi;$$

$$u(r, \theta, 0) = u_t(r, \theta, 0) = 0, \quad u_r(R, \theta, t) = \omega A \cos \theta \cos \omega t. \quad (46.17)$$

Функцию $u(r, \theta, t)$ будем искать в виде

$$u(r, \theta, t) = v(r, \theta, t) - \omega Ar \cos \theta \cos \omega t. \quad (46.18)$$

Тогда функция $v(r, \theta, t)$ — решение смешанной задачи

$$v_{tt} = a^2 \left\{ \frac{1}{r^2} (r^2 v_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta v_\theta)_\theta \right\} - \omega^3 Ar \cos \theta \cos \omega t; \quad (46.19)$$

$$v(r, \theta, 0) = \omega Ar \cos \theta, \quad v_t(r, \theta, 0) = 0, \quad v_r(R, \theta, t) = 0. \quad (46.20)$$

Искать эту функцию будем в виде

$$v(r, \theta, t) = W(r, \theta, t) + V(r, \theta, t), \quad (46.21)$$

где $W(r, \theta, t)$ и $V(r, \theta, t)$ определяются соответственно задачами

$$W_{tt} = a^2 \left\{ \frac{1}{r^2} (r^2 W_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta W_\theta)_\theta \right\}; \quad (46.22)$$

$$W(r, \theta, 0) = \omega Ar \cos \theta, \quad W_t(r, \theta, 0) = 0, \quad W_r(R, \theta, t) = 0 \quad (46.23)$$

и

$$V_{tt} = a^2 \left\{ \frac{1}{r^2} (r^2 V_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta V_\theta)_\theta \right\} - \omega^3 Ar \cos \theta \cos \omega t; \quad (46.24)$$

$$V(r, \theta, 0) = V_t(r, \theta, 0) = V_r(R, \theta, t) = 0. \quad (46.25)$$

Положим

$$W(r, \theta, t) = X(r)Y(\theta)T(t). \quad (46.26)$$

Тогда процедура разделения переменных в (46.22), (46.23) дает

$$\frac{1}{\sin \theta} [\sin \theta Y'(\theta)]' + \lambda Y(\theta) = 0, \quad (46.27)$$

$$\begin{aligned} |Y(\theta)| < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \\ [r^2 X'(r)]' - \lambda X(r) + \nu^2 r^2 X(r) = 0, \end{aligned} \quad (46.28)$$

$$\begin{aligned} |X(0)| < \infty, \quad X'(r)|_{r=R} = 0; \\ T''(t) = -a^2 \nu^2 T(t), \quad T'(0) = 0. \end{aligned} \quad (46.29)$$

Задача (46.27) есть задача Штурма–Лиувилля для уравнения Лежандра. Ее решение имеет вид (см. пример III.18.1)

$$Y_n(\theta) = A_n P_n(\cos \theta), \quad \lambda = n(n+1), \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (46.30)$$

Заменой $X(r) = Z(r)/\sqrt{r}$ сводим задачу Штурма–Лиувилля (46.28) к задаче Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя (см. разд. «Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя» части III). В результате получим

$$X_{nm}(r) = \frac{B_{nm}}{\sqrt{r}} J_{n+1/2} \left(\gamma_m^{n+1/2} \frac{r}{R} \right), \quad \nu_{nm} = \frac{\gamma_m^{n+1/2}}{R}, \quad (46.31)$$

где $m = \overline{1, \infty}$, а $\gamma_m^{n+1/2}$ – корни уравнения

$$\gamma J'_{n+1/2}(\gamma) - \frac{1}{2} J_{n+1}(\gamma) = 0. \quad (46.32)$$

С учетом (46.31) решение уравнения (46.29) можно записать

$$T_{nm}(t) = C_{nm} \cos \frac{a\gamma_m^{n+1/2}}{R} t. \quad (46.33)$$

Таким образом, функция $W(r, \theta, t)$ представляет собой следующую суперпозицию ($D_{nm} = A_n B_{nm} C_{nm}$):

$$\begin{aligned} W(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm} \frac{J_{n+1/2}(\gamma_m^{n+1/2} r/R)}{\sqrt{r}} \times \\ &\times P_n(\cos \theta) \cos \frac{a\gamma_m^{n+1/2}}{R} t. \end{aligned} \quad (46.34)$$

Коэффициенты D_{nm} определим из начального условия

$$W(r, \theta, 0) = \omega A r \cos \theta = \omega A r P_1(\cos \theta). \quad (46.35)$$

Положив в (46.34) $t = 0$ и приравняв его к (46.35), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}(\gamma_m^{n+1/2} r/R) P_n(\cos \theta) = \omega A r P_1(\cos \theta).$$

Это выражение домножим на

$$r^{3/2} J_{k+1/2}\left(\frac{\gamma_l^{k+1/2} r}{R}\right) P_k(\cos \theta) \sin \theta$$

и проинтегрируем по r и θ . Тогда

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm} \int_0^R r J_{n+1/2}\left(\frac{\gamma_m^{n+1/2} r}{R}\right) J_{k+1/2}\left(\frac{\gamma_l^{k+1/2} r}{R}\right) dr \times \\ &\times \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \omega A \int_0^R r^{5/2} J_{k+1/2}\left(\frac{\gamma_l^{k+1/2} r}{R}\right) dr \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (46.36)$$

С учетом соотношений ортогональности для полиномов Лежандра

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2k+1} \delta_{nk}$$

и функций Бесселя

$$\int_0^R r J_{n+1/2}\left(\frac{\gamma_m^{n+1/2} r}{R}\right) J_{k+1/2}\left(\frac{\gamma_l^{k+1/2} r}{R}\right) dr = \left\| J_{k+1/2}\left(\frac{\gamma_m^{k+1/2} r}{R}\right) \right\|^2$$

выражение (46.36) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm} \frac{2}{2k+1} \left\| J_{k+1/2}\left(\frac{\gamma_l^{k+1/2} r}{R}\right) \right\|^2 \delta_{nk} \delta_{ml} = \\ & = \omega A \frac{2}{2k+1} \left[\int_0^R r^{5/2} J_{k+1/2}(\gamma_l^{k+1/2} r/R) dr \right] \delta_{1k}, \end{aligned}$$

откуда

$$D_{kl} = \omega A \frac{\int_0^R r^{5/2} J_{k+1/2}(\gamma_l^{k+1/2} r/R) dr}{\left\| J_{k+1/2}(\gamma_l^{k+1/2} r/R) \right\|^2} \delta_{1k}. \quad (46.37)$$

Правая часть этого равенства отлична от нуля только при $k = 1$. Тогда

$$D_{nm} = \omega A \frac{\int_0^R r^{5/2} J_{3/2}(\gamma_l^{3/2} r/R) dr}{\left\| J_{3/2}(\gamma_l^{3/2} r/R) \right\|^2} \delta_{1k}. \quad (46.38)$$

Подстановка (46.38) в (46.34) дает

$$\begin{aligned} W(r, \theta, t) &= \sum_{l=1}^{\infty} \omega A \frac{\int_0^R r^{5/2} J_{3/2}(\gamma_l^{3/2} r/R) dr}{\left\| J_{3/2}(\gamma_l^{3/2} r/R) \right\|^2} \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{r}} J_{3/2}\left(\gamma_l^{3/2} \frac{r}{R}\right) P_1(\cos \theta) \cos\left(\frac{a\gamma_l^{3/2}}{R} t\right). \end{aligned} \quad (46.39)$$

Если обозначить

$$N_l = \frac{\int_0^R r^{5/2} J_{3/2}(\gamma_l^{3/2} r/R) dr}{\left\| J_{3/2}(\gamma_l^{3/2} r/R) \right\|^2}, \quad (46.40)$$

то (46.39) можно представить в виде

$$W(r, \theta, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \omega A N_l \frac{1}{\sqrt{r}} J_{3/2} \left(\gamma_l^{3/2} \frac{r}{R} \right) \cos \theta \cos \left(\frac{a \gamma_l^{3/2}}{R} t \right). \quad (46.41)$$

Поскольку числа $\gamma_l^{3/2}$ являются корнями уравнения

$$\gamma_l^{3/2} J'_{3/2}(\gamma_l^{3/2}) - \frac{1}{2} J_{3/2}(\gamma_l^{3/2}) = 0, \quad (46.42)$$

то норма в (46.40) запишется формулой

$$\left\| J_{3/2} \left(\gamma_l^{3/2} \frac{r}{R} \right) \right\|^2 = \frac{R^2}{2} \left\{ [J'_{3/2}(\gamma_l^{3/2})]^2 - \left[1 - \left(\frac{3}{2\gamma_l^{3/2}} \right)^2 \right] [J_{3/2}(\gamma_l^{3/2})]^2 \right\},$$

которую с учетом (46.42) можно упростить:

$$\left\| J_{3/2} \left(\gamma_l^{3/2} \frac{r}{R} \right) \right\|^2 = \frac{R^2}{2} \left[1 - \frac{2}{(\gamma_l^{3/2})^2} \right] J_{3/2}^2(\gamma_l^{3/2}). \quad (46.43)$$

Таким образом, решение задачи (46.22), (46.23) задается соотношением (46.41), где коэффициент N_l определен формулами (46.40) и (46.43).

Заметим, что решение задачи можно было несколько упростить, воспользовавшись явным видом начального условия (46.23). Действительно, вместо (46.26) решение можно было искать в виде

$$W(r, \theta, t) = X(r) \cos \theta T(t) = X(r) P_1(\cos \theta) T(t).$$

Перейдем к решению задачи (46.24), (46.25). Функцию $V(r, \theta, t)$ ищем в виде разложения

$$V(r, \theta, t) = \sum_{l=1}^{\infty} S_l(t) \frac{1}{\sqrt{r}} J_{3/2} \left(\gamma_l^{3/2} \frac{r}{R} \right) \cos \theta, \quad (46.44)$$

где неизвестная функция $S_l(t)$ удовлетворяет начальным условиям

$$S_l(0) = S'_l(0) = 0, \quad (46.45)$$

вытекающим из (46.25). Граничные условия (46.25) выполняются в силу (46.44).

Подстановка (46.44) в (46.24) с учетом (46.28) дает

$$\sum_{l=1}^{\infty} S''_l(t) \frac{1}{\sqrt{r}} J_{3/2} \left(\gamma_l^{3/2} \frac{r}{R} \right) \cos \theta =$$

$$= -\sum_{l=1}^{\infty} S_l(t) \left(\frac{a\gamma_l^{3/2}}{R} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{r}} J_{3/2} \left(\gamma_l^{3/2} \frac{r}{R} \right) \cos \theta - \omega^3 Ar \cos \omega t. \quad (46.46)$$

Для решения этого уравнения воспользуемся разложением

$$r = \sum_{l=1}^{\infty} N_l \frac{1}{\sqrt{r}} J_{3/2} \left(\gamma_l^{3/2} \frac{r}{R} \right), \quad (46.47)$$

где коэффициент N_l определен соотношениями (46.40) и (46.43). Тогда $S_l(t)$ удовлетворяет уравнениям

$$S_l''(t) = -\left(\frac{a\gamma_l^{3/2}}{R} \right)^2 S_l(t) - \omega^3 AN_l \cos \omega t, \quad l = \overline{1, \infty}. \quad (46.48)$$

Общее решение (46.48) находится достаточно просто и имеет вид

$$S_l(t) = p_l \cos \frac{a\gamma_l^{3/2}}{R} t + q_l \sin \frac{a\gamma_l^{3/2}}{R} t + \frac{\omega^3 AN_l}{\omega^2 - (a\gamma_l^{3/2}/R)^2}. \quad (46.49)$$

Произвольные постоянные p_l и q_l можно найти из условий (46.45). Действительно, подставив (46.49) в (46.47), находим

$$p_l = -\frac{\omega^3 AN_l}{\omega^2 - (a\gamma_l^{3/2}/R)^2}, \quad q_l = 0.$$

Следовательно,

$$S_l(t) = \frac{\omega^3 AN_l}{\omega^2 - (a\gamma_l^{3/2}/R)^2} \left[\cos \omega t - \cos \frac{a\gamma_l^{3/2}}{R} t \right]$$

и

$$V(r, \theta, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega^3 AN_l}{\omega^2 - (a\gamma_l^{3/2}/R)^2} \left[\cos \omega t - \cos \frac{a\gamma_l^{3/2}}{R} t \right] \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{r}} J_{3/2} \left(\gamma_l^{3/2} \frac{r}{R} \right) \cos \theta. \quad (46.50)$$

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид

$$u(r, \theta, t) = W(r, \theta, t) + V(r, \theta, t) - \omega Ar \cos \theta \cos \omega t,$$

где $W(r, \theta, t)$ определяется формулой (46.41), а $V(r, \theta, t)$ – формулой (46.50).

Эти формулы, а также формулы, определяющие коэффициент N_l , можно упростить, используя выражение функций Бесселя через элементарные функции, т.е.

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right).$$

В этом случае интеграл (46.40) достаточно просто вычисляется по частям, что мы и предлагаем выполнить самостоятельно.

47. Обобщенная задача Коши для одномерного волнового уравнения

Прежде чем перейти к обобщенной задаче Коши, напомним некоторые сведения относительно классической задачи для одномерного волнового уравнения (см. разд. «Задача Коши для одномерного волнового уравнения»)

$$\begin{aligned} \square u(x, t) &= F(x, t), & t > 0; \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x). \end{aligned} \quad (47.1)$$

Здесь \square – одномерный оператор Даламбера

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (47.2)$$

Решение задачи (47.1), как мы установили, дается формулой (40.16) и состоит из трех слагаемых

$$u(x, t) = U(x, t) + V(x, t) + W(x, t); \quad (47.3)$$

$$U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(y, \tau) dy, \quad (47.4)$$

$$V(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy, \quad (47.5)$$

$$W(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)], \quad (47.6)$$

которые иногда называют запаздывающими потенциалами, причем потенциалы (47.5) и (47.6) – запаздывающими потенциалами простого и двойного слоя с плотностями $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно.

Очевидно, что потенциалы (47.4)–(47.6) являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} \square W(x, t) &= 0, & t > 0; \\ W(x, 0) &= \varphi(x), & W_t(x, 0) = 0; \end{aligned} \quad (47.7)$$

$$\begin{aligned} \square V(x, t) &= 0, & t > 0; \\ V(x, 0) &= 0, & V_t(x, 0) = \psi(x); \end{aligned} \quad (47.8)$$

$$\begin{aligned} \square U(x, t) &= F(x, t), & t > 0; \\ U(x, 0) &= U_t(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (47.9)$$

Последняя задача (47.9) может быть решена не только непосредственно [см. (40.18)], но и с помощью задачи, аналогичной (47.8),

поскольку функцию $U(x, t)$ можно представить в виде

$$U(x, t) = \int_0^t \mathcal{U}(x, t, \tau) d\tau, \quad (47.10)$$

где функция $\mathcal{U}(x, t, \tau)$ является решением задачи [в чем можно убедиться простой проверкой (см. утверждение 40.1)], в которой неоднородность из уравнения переводится во второе начальное условие (принцип Дюамеля), т.е.

$$\begin{aligned} \square \mathcal{U}(x, t, \tau) &= 0, & t > \tau, \\ \mathcal{U}(x, t, \tau)|_{t=\tau} &= 0, & \mathcal{U}(x, t, \tau)|_{t=\tau} = F(x, \tau). \end{aligned} \quad (47.11)$$

Таким образом, исходная задача (47.1), вообще говоря, редуцируется фактически к двум задачам (47.7) и (47.8), решение которых мы нашли методом Даламбера. В связи с этим возникает вопрос: существует ли другой подход к решению исходной задачи (47.1), не связанный с указанной несложной, но громоздкой процедурой редукции, а также допускающий упоминавшиеся выше разрывные решения?

Такой подход существует и состоит в решении задачи Коши (47.1) в обобщенном смысле, позволяющем «свести» ее к одному неоднородному уравнению, «автоматически» учитывающему начальное условие, т.е.

$$\square u = \Phi(x, t). \quad (47.12)$$

В этом случае мы приходим к стандартной задаче о нахождении решения неоднородного уравнения с помощью фундаментального решения $\mathcal{E}_1(x, t)$ в виде свертки

$$u(x, t) = \mathcal{E}_1 * \Phi(x, t), \quad (47.13)$$

где $\mathcal{E}_1(x, t)$ есть решение уравнения

$$\square \mathcal{E}_1 = \delta(x)\delta(t). \quad (47.14)$$

Аналогично тому, как это делалось в задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. часть II), положим функции $u(x, t)$ и $F(x, t)$ равными нулю для $t < 0$, т.е.

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \theta(t)u(x, t), \\ \tilde{F}(x, t) &= \theta(t)F(x, t), \end{aligned}$$

и воспользуемся определением обобщенного решения уравнения (см. разд. «Постановка начальных и краевых задач»), согласно которому для любой основной функции $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{1+1})$ имеем

$$\langle \square \tilde{u} | g \rangle = \langle \tilde{u} | \square g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(x, t) \square g(x, t) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \square g(x,t) dx = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] g(x,t) dx. \quad (47.15)
\end{aligned}$$

Двукратное интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon}^{\infty} u \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} dt = -u(x, \varepsilon) \frac{\partial g(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=\varepsilon} + \\
&+ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=\varepsilon} g(x, \varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{\infty} g \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dt
\end{aligned}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\langle \square \bar{u} | g \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(x,t) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] u(x,t) dx - \right. \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \varepsilon) \frac{\partial g(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=\varepsilon} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=\varepsilon} g(x, \varepsilon) dx \left. \right\} = \\
&= \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] g(x,t) dx - \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0) \frac{\partial g(x,0)}{\partial t} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} g(x,0) dx.
\end{aligned}$$

Тогда с учетом (47.1) и определения функций $\delta(t)$ и $\delta'(t)$ найдем

$$\begin{aligned} \langle \square \tilde{u} | g \rangle &= \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty F(x, t) g(x, t) dx - \\ &- \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, 0) \frac{\partial g(x, 0)}{\partial t} dx + \int_{-\infty}^\infty \psi(x, 0) g(x, 0) dx = \\ &= \int_{-\infty}^\infty dt \int_{-\infty}^\infty \tilde{F}(x, t) g(x, t) dx - \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, 0) \frac{\partial g(x, 0)}{\partial t} dx + \\ &+ \int_{-\infty}^\infty \psi(x, 0) g(x, 0) dx = \langle \tilde{F}(x, t) + \varphi(x) \delta'(t) + \psi(x) \delta(t) | g(x, t) \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $\tilde{u}(x, t)$ удовлетворяет волновому уравнению в обобщенном смысле

$$\square \tilde{u} = \Phi(x, t) = \tilde{F}(x, t) + \varphi(x) \delta'(t) + \psi(x) \delta(t). \quad (47.16)$$

Классические решения задачи (47.1) находятся среди тех решений уравнения (47.16), которые обращаются в нуль при $t < 0$. Что касается обобщенной функции $\Phi(x, t)$, то, как следует из (47.16), если внутренние источники $F(x, t)$ действуют постоянно с момента времени $t \geq 0$, то начальные возмущения $\varphi(x) \delta'(t)$ и $\psi(x) \delta(t)$ играют роль источников, действующих мгновенно в момент времени $t = 0$. При этом начальному отклонению $\varphi(x)$ соответствует двойной слой $\varphi(x) \delta'(t)$, а начальному импульсу $\psi(x)$ – простой слой $\psi(x) \delta(t)$ на плоскости $t = 0$.

◆ Таким образом, обобщенной задачей Коши для одномерного волнового уравнения с источником $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+1})$ назовем задачу о нахождении обобщенной функции $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+1})$, обращающейся в нуль при $t < 0$ и удовлетворяющей волновому уравнению

$$\square u = \Phi(x, t) = F(x, t) + \varphi(x) \delta'(t) + \psi(x) \delta(t). \quad (47.17)$$

Как следует из (47.13), решение этой задачи определяется суммой потенциалов

$$u(x, t) = v(x, t) + W(x, t) + V(x, t),$$

где

$$v(x, t) = \mathcal{E}_1 * F(x, t) \quad (47.18)$$

— запаздывающий потенциал с плотностью $F(x, t)$;

$$W(x, t) = \mathcal{E}_1 * (\varphi(x) \delta'(t)) \quad (47.19)$$

— запаздывающий потенциал двойного слоя с плотностью $\varphi(x)$ и, наконец,

$$V(x, t) = \mathcal{E}_1 * (\psi(x)\delta(t)) \quad (47.20)$$

— запаздывающий потенциал простого слоя с плотностью $\psi(x)$.

Перейдем к уравнению (47.14), определяющему фундаментальное решение оператора Даламбера.

Применим к нему преобразования Фурье $F_{x \rightarrow \xi}$ (см. разд. «Преобразование Фурье обобщенных функций» части II)

$$F_{x \rightarrow \xi} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}_1}{\partial t^2} \right] - a^2 F_{x \rightarrow \xi} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}_1}{\partial x^2} \right] = F_{x \rightarrow \xi} [\delta(x)\delta(t)]$$

и воспользуемся формулами

$$F_{x \rightarrow \xi} [\delta(x)\delta(t)] = F_{x \rightarrow \xi} [\delta](\xi)\delta(t) = 1(\xi)\delta(t),$$

$$F_{x \rightarrow \xi} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}_1}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial^2 \mathcal{E}_1}{\partial t^2} F_{x \rightarrow \xi} [\mathcal{E}_1], \quad F_{x \rightarrow \xi} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}_1}{\partial x^2} \right] = -|\xi|^2 F_{x \rightarrow \xi} [\mathcal{E}_1].$$

Тогда для фурье-образа (пропагатора) фундаментального решения $\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t) = F_{x \rightarrow \xi} [\mathcal{E}_1(\xi, t)]$ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t)}{\partial t^2} + a^2 |\xi|^2 \tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t) = 1(\xi)\delta(t), \quad (47.21)$$

рассмотренное ранее. В части II было показано, что фундаментальным решением оператора $d^2/dt^2 + a^2$, т.е. решением уравнения

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{dt^2} + \omega^2 \mathcal{E} = \delta(t)$$

в S'_+ является обобщенная функция $\mathcal{E} = [\theta(t) \sin \omega t]/\omega$ (см. пример II.16.2).

Используя этот результат, имеем

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t) = \theta(t) \frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}. \quad (47.22)$$

Применив обратное преобразование Фурье $F_{\xi \rightarrow x}^{-1}$, найдем

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|).$$

Определив $\mathcal{E}_1(x, t)$, можем вернуться к формулам (47.18)–(47.20), которые дают решения (47.4)–(47.6) задачи (47.1)

$$v(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|) * F(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(y, \tau) dy; \quad (47.23)$$

$$V(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|) * (\psi(x)\delta(t)) =$$

$$= \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \psi(y) \delta(\tau) d\tau dy = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy; \quad (47.24)$$

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \frac{1}{2a} \theta(at - |x|) * (\varphi(x) \delta'(t)) = \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial t} (\theta(at - |x|) * \varphi(x)) = \\ &= \frac{1}{2a} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)]. \end{aligned} \quad (47.25)$$

Теперь, когда схема подхода, основанного на обобщенной задаче Коши, определена, можно вернуться к задачам (47.7) и (47.8). Нетрудно убедиться, что фурье-образ фундаментального решения

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t) = \frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}$$

можно рассматривать как решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t)}{\partial t^2} + a^2 |\xi|^2 \tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t) &= 0, \\ \tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t)|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 1. \end{aligned} \quad (47.26)$$

Но ранее было показано, что если преобразование Фурье понимать в обобщенном смысле, то $F_{\xi \rightarrow x}^{-1}[1] = \delta(x)$ (см. разд. «Преобразование Фурье обобщенных функций» части II). Поэтому, применив обратное преобразование Фурье, из задачи (47.26) получим

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_1(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_1(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (47.27)$$

$$\mathcal{E}_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_1(x, 0)}{\partial t} = \delta(x). \quad (47.28)$$

◆ Обобщенную функцию $\mathcal{E}_1(x, t)$ называют фундаментальным решением задачи Коши одномерного волнового уравнения, или функцией Грина этой задачи, если она удовлетворяет уравнению (47.27) и начальным условиям (47.28).

Теперь решение задачи Коши можно строить, исходя из задачи (47.27), (47.28). Так, например, решение задачи (47.8) представляется в виде свертки (47.20) или (47.24).

Аналогично функция Грина $\bar{\mathcal{E}}_1(x, t) = \partial \mathcal{E}_1(x, t) / \partial t$ дает решение задачи (47.7) в виде свертки (47.19) или в виде (47.25), если она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{E}}_1(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{E}}_1(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (47.29)$$

и начальным условиям

$$\bar{\mathcal{E}}_1(x, 0) = \delta(x), \quad \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}_1(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

◇ Решение задачи Коши в пространстве с размерностью 2, 3 и более находится аналогично с помощью функции $\mathcal{E}_n(\vec{x}, t)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Функцию $\mathcal{E}_n(\vec{x}, t)$ можно найти или как фундаментальное решение оператора

$$\square_n \mathcal{E}_n(\vec{x}, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n \right) \mathcal{E}_n(\vec{x}, t) = 0, \quad \mathcal{E}_n(\vec{x}, t) \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}^{n+1}), \quad (47.30)$$

или как функцию Грина задачи Коши

$$\begin{aligned} \square_n \mathcal{E}_n(\vec{x}, t) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n \right) \mathcal{E}_n(\vec{x}, t) = 0, \\ \mathcal{E}_n(\vec{x}, 0) &= 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_n(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \delta(x). \end{aligned} \quad (47.31)$$

Если однозначность функции Грина (47.31) обусловлена граничными условиями, то для уравнения (47.30) роль граничного играет условие

$$\mathcal{E}_n(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{для } t < 0. \quad (47.32)$$

Действительно, решение уравнения (47.30), как и любое фундаментальное решение, определяется с точностью до функции $\mathcal{E}_0(\vec{x}, t)$, являющейся решением однородного уравнения

$$\square_n \mathcal{E}_n(\vec{x}, t) = 0.$$

Условие (47.32) однозначно определяет функцию $\mathcal{E}_0(\vec{x}, t)$ и тем самым фундаментальное решение $\mathcal{E}_n(\vec{x}, t)$.

В заключение отметим, что решение задачи (47.1) может быть найдено непосредственно с помощью интегральных преобразований (Фурье, Лапласа) или сведено к интегродифференциальному уравнению.

Пример 47.1. Показать, что функция Грина (фундаментальное решение) задачи Коши

$$\begin{aligned} G_{tt} - a^2 G_{xx} &= 0, \quad t > 0; \\ G|_{t=0} &= 0, \quad G_t|_{t=0} = \delta(x - y) \end{aligned} \quad (47.33)$$

имеет вид

$$G(x, y, t) = \frac{1}{2a} [\theta(x + at - y) - \theta(x - at - y)]. \quad (47.34)$$

Решение. Подставив начальные условия (47.33) в формулу Даламбера (37.2), получим

$$G(x, y, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \delta(z-y) dz = \frac{1}{2a} [\theta(x+at-y) - \theta(x-at-y)],$$

что и требовалось доказать. Здесь мы воспользовались свойствами дельта-функции Дирака.

48. Обобщенная задача Коши в пространстве

Схема постановки и решения обобщенной задачи Коши для одномерного волнового уравнения применяется и для волновых уравнений в пространствах \mathbb{R}^n , $n \geq 2$.

◆ Обобщенной задачей Коши для волнового уравнения с источником

$$\Phi(\vec{x}, t) = \tilde{F}(\vec{x}, t) + \varphi(\vec{x})\delta'(t) + \psi(\vec{x})\delta(t), \quad \Phi(\vec{x}, t) \in S'(\mathbb{R}^{n+1}), \quad (48.1)$$

называется задача о нахождении обобщенной функции медленного роста $u(\vec{x}, t) \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$, обращающейся в нуль при $t < 0$ и удовлетворяющей волновому уравнению

$$\square u(\vec{x}, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n \right) u = \Phi(\vec{x}, t). \quad (48.2)$$

◇ Решение обобщенной задачи (48.2) для $\Phi(\vec{x}, t) = 0$ при $t < 0$ представляется в виде запаздывающих потенциалов

$$u = \mathcal{E}_n * \Phi = \mathcal{E}_n * F(\vec{x}, t) + \mathcal{E}_n * (\varphi(\vec{x})\delta'(t)) + \mathcal{E}_n * (\psi(\vec{x})\delta(t)), \quad (48.3)$$

где \mathcal{E}_n – фундаментальное решение оператора Даламбера в \mathbb{R}^n , т.е. решение уравнения

$$\square \mathcal{E}_n = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n \right) \mathcal{E}_n = \delta(\vec{x})\delta(t), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (48.4)$$

Так как мы не рассматривали детально теорию обобщенных функций в пространствах \mathbb{R}^{n+1} , $n \geq 2$, то сформулируем, не обращаясь к строгим доказательствам (см., например, [?]), основные этапы решения уравнений (48.1) и (48.4) и вывода классических формул Кирхгофа и Пуассона.

Начнем с уравнения (48.4). Применив к нему преобразования Фурье по пространственным переменным \vec{x} для обобщенной функции $F_{\vec{x} \rightarrow \vec{\xi}}[\mathcal{E}_n(\vec{x}, t)] = \tilde{\mathcal{E}}(\vec{\xi}, t)$, получим уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 |\vec{\xi}|^2 \right) \tilde{\mathcal{E}} = \delta(t).$$

Как было показано выше (см. разд. «Задача Коши для одномерного волнового уравнения»), его решением является функция

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(\vec{\xi}, t) = \theta(t) \frac{\sin a|\vec{\xi}|t}{a|\vec{\xi}|}. \quad (48.5)$$

Тогда обратное преобразование Фурье $F_{\vec{\xi} \rightarrow \vec{x}}^{-1}$ определяет функцию $\mathcal{E}_n(\vec{x}, t)$:

$$\mathcal{E}_n(\vec{x}, t) = F_{\vec{\xi} \rightarrow \vec{x}}^{-1}[\tilde{\mathcal{E}}_n(\vec{\xi}, t)] = \theta(t) F_{\vec{\xi} \rightarrow \vec{x}}^{-1} \left[\frac{\sin a|\vec{\xi}|t}{a|\vec{\xi}|} \right]. \quad (48.6)$$

Если $n = 3$, то (48.6) дает

$$\mathcal{E}_3(\vec{x}, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi at} \delta_{S_{at}}(\vec{x}) = \frac{\theta(t)}{4\pi at} \delta(a^2 t^2 - |\vec{x}|^2). \quad (48.7)$$

Обобщенная функция $\mathcal{E}_n(\vec{x}, t)$ действует по правилу

$$\langle \mathcal{E}_3 | g \rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_{S_{at}} g(\vec{x}, t) dS_x, \quad (48.8)$$

где $g(\vec{x}, t)$ — произвольная функция из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$.

◇ Согласно свойствам дельта-функции (см. разд. «Дельта-функция Дирака» части II), справедливо

$$\delta(a^2 t^2 + |\vec{x}|^2) = \frac{1}{2a} [\delta(at - |\vec{x}|) + \delta(at + |\vec{x}|)]. \quad (48.9)$$

Тогда среди решений уравнения (48.4) могут присутствовать функции, зависящие от аргумента $at - |\vec{x}|$. Такие функции называются опережающими функциями Грина. Они учитывают влияние источников, действующих при $t > 0$. Мы не будем подробно рассматривать такие решения, хотя некоторые задачи (например, классическое уравнение Дирака–Лоренца) невозможно корректно решить без учета опережающего воздействия.

В случае $n = 2$ вместо обратного преобразования Фурье можно воспользоваться рассмотренным выше методом спуска. Действительно, согласно (48.8), для \mathcal{E}_2 в предположении, что $g(\vec{x}, t)$ не зависит от x_3 , имеем

$$\langle \mathcal{E}_2 | g \rangle = \langle \mathcal{E}_2(\vec{x}, t) | g(\vec{x}, t) 1(x_3) \rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_{S_{at}} g(\vec{x}, t) dS.$$

Заменяя поверхностный интеграл по сфере S_{at} : $|\vec{x}|^2 + x_3^2 = a^2 t^2$ на удвоенный (по верхней и нижней полусферам) по кругу V_{at} : $|\vec{x}| < at$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, найдем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_2 | g \rangle &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^\infty dt \int_{|\vec{x}| < at} \frac{g(\vec{x}, t)}{\sqrt{a^2 t^2 - |\vec{x}|^2}} d\vec{x} = \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^\infty dt \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\theta(at - |\vec{x}|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |\vec{x}|^2}} d\vec{x}, \end{aligned}$$

откуда

$$\mathcal{E}_2(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\theta(at - |\vec{x}|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |\vec{x}|^2}}. \quad (48.10)$$

Явный вид фундаментальных решений (48.10) оператора Даламбера (48.7) в пространстве размерности n объясняет некоторые особенности распространения сферических и цилиндрических волн. Так, из (48.7) следует, что возмущение $\mathcal{E}_3(\vec{x}, t)$ от точечного мгновенно действующего источника $\delta(\vec{x})\delta(t)$ в момент времени $t > 0$ будет сосредоточено на сфере радиуса $R = at$ с центром в точке $\vec{x} = 0$. Это означает, что возмущение распространяется в виде сферической волны $f(r - at)$. Как было показано выше, после прохождения такой волны в точке наблюдения снова наступает покой, т.е. распространение волн в пространстве подчиняется принципу Гюйгенса.

Совершенно иная картина наблюдается в случае цилиндрических волн, т.е. волн на плоскости. Действительно, из (48.10) следует, что возмущение $\mathcal{E}_2(\vec{x}, t)$ от точечного мгновенно действующего источника $\delta(\vec{x})\delta(t)$ к моменту времени $t > 0$ будет сосредоточено не на окружности радиуса $R = at$, а в замкнутом круге радиуса $R = at$ с центром в точке $\vec{x} = 0$. Следовательно, наблюдатель с того момента, как он попадает в круг $|\vec{x}| < at$, после прохождения переднего фронта волны будет постоянно наблюдать отличные от нуля суммарные возмущения (задний фронт волны отсутствует). Таким образом, для волн на плоскости (цилиндрических) имеет место диффузия волн, нарушающая принцип Гюйгенса.

Возникновение диффузии цилиндрических волн можно объяснить, если источник цилиндрических возмущений рассматривать как

$$\delta(x_1)\delta(x_2)1(x_3)\delta(t),$$

т.е. как источник, сосредоточенный в каждой точке оси Ox_3 . Поэтому с некоторого момента времени наблюдатель будет постоянно фиксировать возмущения, приходящие от точек, лежащих на оси Ox_3 и все более удаленных от точки наблюдения, чем и объясняется отсутствие заднего фронта волны.

Распространение волн в \mathbb{R}^1 , т.е. на прямой, было рассмотрено ранее.

Как и для одномерного волнового уравнения, функцию $\tilde{\mathcal{E}}_n(\vec{\xi}, t)$ можно рассматривать как решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 |\vec{\xi}|^2 \right) \tilde{\mathcal{E}}_n(\vec{\xi}, t) &= 0, \\ \tilde{\mathcal{E}}_n(\vec{\xi}, t) \Big|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_n(\vec{\xi}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 1, \end{aligned}$$

которая для функции $\mathcal{E}_n(\vec{x}, t) = F_{\vec{\xi} \rightarrow \vec{x}}^{-1} \tilde{\mathcal{E}}_n(\vec{\xi}, t)$ примет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n \right) \mathcal{E}_n(\vec{x}, t) &= 0, & (48.11) \\ \mathcal{E}_n(\vec{x}, 0) &= 0, \quad \mathcal{E}_t(\vec{x}, 0) = \delta(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что классические формулы Кирхгофа и Пуассона можно получить подстановкой фундаментальных решений (48.7) и (48.10) в свертку (48.3).

Уравнения параболического типа

49. Задача Коши для одномерного уравнения теплопроводности. Функция Грина задачи Коши

49.1. Задача Коши. Метод разделения переменных

Рассмотрим бесконечно тонкий длинный однородный теплопроводящий стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована. Уравнение теплопроводности в этом случае имеет вид (см. разд. «Уравнение распространения тепла в стержне»)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (49.1)$$

◇ Если стержень достаточно длинный, то на процессы теплообмена, происходящие в средней его части, оказывает влияние только начальное распределение температуры, а краевыми условиями — характером теплового режима на его концах — можно пренебречь. Пусть начальное распределение температуры задано

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = \varphi(x). \quad (49.2)$$

◆ Задача нахождения решения уравнения (49.1) при условии (49.2) называется задачей Коши.

Частное решение уравнения (49.1) будем искать в виде

$$u(x, t) = T(t)X(x). \quad (49.3)$$

Подставив это выражение в (49.1), получим

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda, \quad T' - a^2 \lambda T = 0, \quad X'' - \lambda X = 0.$$

Общее решение уравнения для функции $T(t)$ имеет вид

$$T(t) = Ce^{\lambda a^2 t}. \quad (49.4)$$

Поскольку в стержне нет источников тепла, то температура стержня ни при каком x не может достигать бесконечного значения, т.е. $|u(x, t)| < \infty$. Следовательно, $|T(t)| < \infty$ и $|X(x)| < \infty$.

Таким образом, λ может быть только отрицательным. Положим $\lambda = -\omega^2$. Тогда

$$T(t) = Ce^{-\omega^2 a^2 t}, \quad (49.5)$$

а для определения функции $X(x)$ получим уравнение

$$X'' + \omega^2 X = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$X(x) = A_\omega \cos \omega x + B_\omega \sin \omega x.$$

Если ввести комплексный коэффициент C_ω , то

$$X(x) = C_\omega e^{i\omega x} + C_\omega^* e^{-i\omega x},$$

и соответственно для $u(x, t)$ получим

$$\begin{aligned} u_\omega(x, t) &= e^{-\omega^2 a^2 t} (A_\omega \cos \omega x + B_\omega \sin \omega x) = \\ &= e^{-\omega^2 a^2 t} (C_\omega e^{i\omega x} + C_\omega^* e^{-i\omega x}). \end{aligned}$$

Проинтегрировав по ω в пределах от нуля до бесконечности, получим

$$u(x, t) = \int_0^\infty d\omega e^{-\omega^2 a^2 t} (A_\omega \cos \omega x + B_\omega \sin \omega x)$$

или

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{-\omega^2 a^2 t} C_\omega e^{i\omega x}. \quad (49.6)$$

При $t = 0$ должно выполняться условие (49.2):

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^\infty d\omega C_\omega e^{i\omega x} = \varphi(x) = \int_{-\infty}^\infty d\omega \alpha_\omega e^{i\omega x},$$

где

$$\alpha_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(y) e^{-i\omega y} dy$$

– коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$. Из равенства двух интегралов Фурье следует, что $C_\omega = \alpha_\omega$, т.е.

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dy \varphi(y) e^{-\omega^2 a^2 t} e^{i\omega(x-y)}. \quad (49.7)$$

49.2. Функция Грина задачи Коши

◆ Обобщенная функция $G(x, y, t)$, удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial G(x, y, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 G(x, y, t)}{\partial x^2}, \quad (49.8)$$

$$G(x, y, 0) = \delta(x - y), \quad (49.9)$$

называется функцией Грина задачи Коши для уравнения теплопроводности (49.1).

Утверждение 49.1. Для функции Грина справедливо представление

$$G(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 a^2 t} e^{i\omega(x-y)} d\omega. \quad (49.10)$$

С учетом обозначений (49.10) соотношение (49.7) можно записать в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) \varphi(y) dy. \quad (49.11)$$

Поскольку функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (49.1), то из (49.11) следует, что функция $G(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению (49.8).

При $t = 0$ получим

$$G(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-y)} d\omega = \delta(x - y).$$

Здесь мы воспользовались представлением δ -функции интегралом Фурье (см. разд. «Преобразования Фурье обобщенных

функций медленного роста» части II). Справедливость уравнения (49.8) можно проверить непосредственной подстановкой (49.10) в (49.8), что и доказывает утверждение.

Из определения (49.10) нетрудно вывести следующие свойства функции $G(x, y, t)$.

Свойство 1. Справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) dx = 1. \quad (49.12)$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 a^2 t} e^{i\omega(x-y)} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-\omega^2 a^2 t} e^{i\omega y} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-\omega^2 a^2 t} e^{i\omega y} \delta(\omega) = e^{-\omega^2 a^2 t} e^{i\omega y} \Big|_{\omega=0} = 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Свойство 2. Справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) dy = 1.$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущего свойства.

Свойство 3. Справедливо соотношение

$$G(x, y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t a^2}} e^{-[(x-y)/(2a\sqrt{t})]^2}. \quad (49.13)$$

Доказательство. Вычислим в (49.10) интеграл по ω . Для этого представим функцию $G(x, y, t)$ в виде

$$G(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} [\cos \omega(x-y) + i \sin \omega(x-y)] d\omega.$$

Интеграл от второго слагаемого равен нулю в силу нечетности синуса. Поэтому

$$G(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t} \cos \omega(x-y) d\omega.$$

Сделаем в этом интеграле замену переменных

$$\omega = \frac{z}{a\sqrt{t}}, \quad d\omega = \frac{dz}{a\sqrt{t}}.$$

Тогда

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \varkappa z \frac{dz}{a\sqrt{t}}, \quad \varkappa = \frac{x-y}{a\sqrt{t}}. \quad (49.14)$$

Обозначив

$$J(\varkappa) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \varkappa z dz,$$

найдем

$$\frac{dJ(\varkappa)}{d\varkappa} = \int_0^{\infty} e^{-z^2} (-z) \sin \varkappa z dz.$$

Вычислим второй интеграл по частям, положив $U = \sin \varkappa z$, $dV = -ze^{-z^2} dz$. Тогда $dU = \varkappa \cos \varkappa z dz$, $V = e^{-z^2}/2$ и

$$\frac{dJ(\varkappa)}{d\varkappa} = \frac{1}{2} e^{-z^2} \sin \varkappa z \Big|_0^{\infty} - \frac{\varkappa}{2} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \varkappa z dz.$$

Внеинтегральное слагаемое равно нулю, а интеграл равен $J(\varkappa)$. Следовательно, для $J(\varkappa)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dJ(\varkappa)}{d\varkappa} = -\frac{\varkappa}{2} J(\varkappa),$$

решение которого есть функция

$$J(\varkappa) = C e^{-\varkappa^2/4}.$$

Постоянный множитель C определим из условия

$$J(0) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Сделаем замену переменных $z^2 = t$, $z = \sqrt{t}$, $dz = dt/(2\sqrt{t})$. Тогда

$$J(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

т.е.

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad J(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}.$$

Но

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\pi a \sqrt{t}} J(x),$$

что дает (49.13). Таким образом, свойство 5 доказано.

Следствие. Для процессов, описываемых уравнением теплопроводности, скорость распространения тепла равна бесконечности.

Доказательство. Пусть начальное распределение температуры в стержне имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases} \quad (49.15)$$

где $f(x)$ – непрерывная функция. Тогда, согласно (49.10),

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) \varphi(y) dy = \int_a^b G(x, y, t) f(y) dy. \quad (49.16)$$

Из явного вида функции Грина (49.13) следует, что функция (49.16) бесконечно дифференцируема по x и t при $t \neq 0$. Кроме того, $u(x, t) \neq 0$ при $t \neq 0$ (в том числе при сколь угодно малых) для любого x (в том числе для сколь угодно большого), тогда как начальная температура $u(x, 0) = \varphi(x)$ (49.15) равна

нулю при $x \notin [a, b]$. Следовательно, скорость теплопередачи бесконечна.

◇ Полученный вывод о бесконечности скорости передачи «взаимодействия» справедлив и для других уравнений параболического типа.

Пример 49.1. Найти уравнение Клейна–Гордона (15.7) в нерелятивистском пределе $c \rightarrow \infty$.

Решение. В уравнении Клейна–Гордона

$$\frac{\hbar^2}{c^2} \Psi_{tt} - \hbar^2 \Delta \Psi + m_0^2 c^2 \Psi = 0 \quad (49.17)$$

сделаем замену

$$\Psi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}, t) \exp\left(-i \frac{m_0 c^2}{\hbar} t\right). \quad (49.18)$$

С учетом соотношений

$$\begin{aligned} \Psi_t &= \left(\varphi_t - i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi\right) e^{-im_0 c^2 t / \hbar}, \\ \Psi_{tt} &= \left(\varphi_{tt} - 2i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi_t - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi\right) e^{-im_0 c^2 t / \hbar} \end{aligned}$$

получим

$$\frac{\hbar^2}{c^2} \varphi_{tt} + 2m_0(-i\hbar\varphi_t) + (-i\hbar)^2 \Delta \varphi = 0.$$

В пределе $c \rightarrow \infty$

$$(-i\hbar)\varphi_t - \frac{\hbar^2 \Delta \varphi}{2m_0} = O\left(\frac{1}{c^2}\right). \quad (49.19)$$

Таким образом, при $c \rightarrow \infty$ уравнение Клейна–Гордона переходит в уравнение Шрёдингера.

Функция Грина задачи Коши $G(x, y, t)$ позволяет найти частное решение неоднородного уравнения теплопроводности.

Свойство 4 (принцип Дюамеля). Решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности с однородным начальным условием

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + f(x, t), \quad \bar{u}|_{t=0} = 0$$

имеет вид

$$\bar{u}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dy G(x, y, t - \tau) f(y, \tau), \quad (49.20)$$

где $G(x, y, t)$ — функция Грина (49.13) уравнения теплопроводности.

◆ Соотношение (49.20) называется формулой Дюамеля для одномерного уравнения теплопроводности.

Доказательство. Действительно, из (49.20) запишем

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, 0) f(y, t) dy + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\partial G(x, y, t - \tau)}{\partial(t - \tau)} f(y, \tau).$$

Учтя, что $G(x, y, 0) = \delta(x - y)$, и обозначив $T = t - \tau$, получим

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = f(x, t) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\partial G(x, y, T)}{\partial T} f(y, \tau).$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\partial^2 G(x, y, T)}{\partial x^2} f(y, \tau).$$

Подставив эти производные в уравнение (49.1), найдем

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = f(x, t) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\frac{\partial G}{\partial T} - a^2 \frac{\partial^2 G(x, y, T)}{\partial x^2} \right) f(y, \tau).$$

Поскольку выражение в скобках равно нулю, то

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = f(x, t),$$

что и требовалось доказать.

Свойство 5 (сохранения четности). Четность начального состояния сохраняется, т.е. если функция $u(x, 0) = \varphi(x)$ – четная или нечетная:

$$\varphi(-x) = \pm\varphi(x), \quad (49.21)$$

то функция $u(x, t)$ будет четной или нечетной для всех $t \geq 0$:

$$u(-x, t) = \pm u(x, t). \quad (49.22)$$

Доказательство. Из явного вида функции $G(x, y, t)$ (49.13) следует, что

$$G(-x, -y, t) = G(x, y, t). \quad (49.23)$$

Для решения задачи Коши (49.1), (49.2), согласно (49.11), имеем

$$u(-x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(-x, y, t)\varphi(y)dy.$$

Сделав в этом интеграле замену переменных $y \rightarrow -y$ и воспользовавшись соотношениями (49.23) и (49.21), получим

$$\begin{aligned} u(-x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(-x, -y, t)\varphi(-y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t)\varphi(-y)dy = \pm u(x, t). \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение доказано.

Следствие. Если

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad (49.24)$$

то

$$u(0, t) = 0. \quad (49.25)$$

Доказательство непосредственно следует из (49.22).

50. Смешанная задача для одномерного уравнения теплопроводности на полупрямой

Рассмотрим полуограниченный стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована и левый торец расположен в точке $x = 0$. Распределение температуры в таком стержне определяется решением следующей смешанной задачи для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < \infty; \quad (50.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = k[u|_{x=0} - \mu(t)]. \quad (50.2)$$

Будем предполагать выполненным условие согласования

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = k[\varphi(x) - \mu(t)] \Big|_{t=0}.$$

Мы ограничимся рассмотрением краевых условий первого рода, т.е. $u(0, t) = \mu(t)$. Решение смешанной задачи (50.1) с краевыми условиями второго и третьего рода находится аналогичными способами.

50.1. Однородная смешанная задача

Рассмотрим смешанную задачу с однородным граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_{x=0} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0. \quad (50.3)$$

Для классического решения будем предполагать выполненным условие согласования $\varphi(0) = 0$.

Доопределим функцию $\varphi(x)$ для отрицательных значений x нечетным образом. Тогда из (49.24) и (49.25) следует, что $u(0, t) = 0$, а задача (50.3) сводится к задаче Коши для уравнения теплопроводности, рассмотренной в предыдущем разделе.

Теорема 50.1. *Решение смешанной задачи (50.3) имеет вид*

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} g(x, y, t) \varphi(y) dy, \quad (50.4)$$

где

$$g(x, y, t) = G(x, y, t) - G(x, -y, t), \quad (50.5)$$

а $G(x, y, t)$ – функция Грина задачи Коши (49.1).

Функция $g(x, y, t)$ называется функцией Грина смешанной задачи (50.3).

Доказательство. Продолжим функцию $\varphi(x)$ на отрицательную полуось нечетным образом и обозначим через $\tilde{\varphi}(x)$ такое продолжение

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } 0 < x < \infty, \\ -\varphi(-x) & \text{при } -\infty < x < 0. \end{cases} \quad (50.6)$$

Тогда при $t \geq 0$ функция

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) \tilde{\varphi}(y) dy \quad (50.7)$$

является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x).$$

Согласно (49.24), $u|_{x=0} = 0$, и, следовательно, функция (50.7) при $x \geq 0$ является решением задачи (50.3).

Выразим функцию $u(x, t)$ (50.7) через функцию $\varphi(x)$. Для этого разобьем область интегрирования в (50.7) на две части:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) \tilde{\varphi}(y) dy = \\ &= \int_0^{\infty} G(x, y, t) \tilde{\varphi}(y) dy + \int_{-\infty}^0 G(x, y, t) \tilde{\varphi}(y) dy = \\ &= \int_0^{\infty} [G(x, y, t) - G(x, -y, t)] \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} [G(x, y, t) - G(x, -y, t)] \varphi(y) dy, \quad (50.8)$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим основные свойства функции Грина $g(x, y, t)$.

Свойство 1. Справедливо соотношение

$$g(x, y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ta^2}} \{ e^{-(x-y)^2/(4a^2t)} - e^{-[(x+y)^2/(4a^2t)]} \}. \quad (50.9)$$

Доказательство непосредственно следует из (49.13).

Свойство 2. Справедливо соотношение

$$g(x, y, 0) = \delta(x - y). \quad (50.10)$$

Доказательство. Функция $u(x, t)$ (50.4) – решение смешанной задачи (50.3). В частности,

$$u(x, 0) = \int_0^\infty g(x, y, 0)\varphi(y)dy = \varphi(x).$$

В силу произвольности функции $\varphi(y)$ и определения δ -функции свойство 2 доказано.

Свойство 3 (принцип Дюамеля). Решение задачи Коши

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad u|_{t=0} = u|_{x=0} = 0 \quad (50.11)$$

имеет вид

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty g(x, y, t - \tau)f(y, \tau)dy. \quad (50.12)$$

Доказательство. Из (50.12) найдем

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \int_0^\infty g(x, y, 0)f(y, t)dy + \int_0^t d\tau \int_0^\infty g_t(x, y, t - \tau)f(y, \tau)dy = \\ &= f(x, t) + \int_0^t d\tau \int_0^\infty g_t(x, y, t - \tau)f(y, \tau)dy. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (50.10). Аналогично

$$u_{xx}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty g_{xx}(x, y, t - \tau)f(y, \tau)dy.$$

Подставив u_t и u_{xx} в (50.12), получим тождество.

50.2. Неоднородная смешанная задача

Рассмотрим на полупрямой неоднородную смешанную задачу с граничным условием первого рода

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x, t), & t \geq 0, \quad x \geq 0, \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \quad u|_{x=0} = \mu(t). \end{aligned} \quad (50.13)$$

Решение уравнения (50.13) будем искать в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (50.14)$$

где $v(x, t)$ – решение смешанной задачи

$$v_t = a^2 v_{xx} + f(x, t), \quad v|_{t=0} = \varphi(x), \quad v|_{x=0} = 0, \quad (50.15)$$

а функция $w(x, t)$ – решение задачи

$$w_t = a^2 w_{xx}, \quad w|_{t=0} = 0, \quad w|_{x=0} = \mu(t). \quad (50.16)$$

Согласно (50.4) и (50.12), решение смешанной задачи (50.15) имеет вид

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int_0^\infty g(x, y, t - \tau) \varphi(y) dy + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_0^\infty g(x, y, t - \tau) f(y, \tau) dy. \end{aligned} \quad (50.17)$$

Решение задачи (50.16) будем искать в виде

$$w(x, t) = S(x, t) + \mu(t). \quad (50.18)$$

Тогда для функции $S(x, t)$ получим следующую задачу:

$$S_t = a^2 S_{xx} - \mu'(t), \quad S|_{t=0} = -\mu(0), \quad S|_{x=0} = 0. \quad (50.19)$$

Согласно (50.4) и (50.12), решение задачи (50.19) можно представить в виде

$$S(x, t) = -\mu(0)\chi(x, t) - \int_0^t d\tau \chi(x, t - \tau)\mu'(\tau), \quad (50.20)$$

где обозначено

$$\chi(x, t) = \int_0^{\infty} g(x, y, t) dy. \quad (50.21)$$

Тогда

$$w(x, t) = -\mu(0)\chi(x, t) + \mu(t) - \int_0^t d\tau \chi(x, t - \tau) \mu'(\tau). \quad (50.22)$$

Рассмотрим некоторые свойства функций $\chi(x, t)$ и $w(x, t)$.

Свойство 1. Справедливо соотношение

$$\chi(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2a\sqrt{t})} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/(2a\sqrt{t})}^{x/(2a\sqrt{t})} e^{-z^2} dz. \quad (50.23)$$

Доказательство. Из определения (50.21) следует

$$\chi(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi ta^2}} \{ e^{[(x-y)^2/(4a^2t)]} - e^{[(x+y)^2/(4a^2t)]} \} dy.$$

Сделаем в первом интеграле замену $y = 2a\sqrt{tz} + x$, а во втором — $y = 2a\sqrt{tz} - x$. Получим

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/(2a\sqrt{t})}^{\infty} e^{-z^2} dz - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2a\sqrt{t})}^{\infty} e^{-z^2} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/(2a\sqrt{t})}^{x/(2a\sqrt{t})} e^{-z^2} dz, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Свойство 2. Справедливы соотношения

$$\chi(0, t) = 0, \quad \chi(x, 0) = 1. \quad (50.24)$$

Доказательство. Соотношение $\chi(0, t) = 0$ следует из (50.23).

Рассмотрим предел

$$\chi(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/(2a\sqrt{t})}^{x/(2a\sqrt{t})} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = 1,$$

что и требовалось доказать.

Свойство 3. Справедливо соотношение

$$w(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp \left\{ - \left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}} \right)^2 \right\} d\tau. \quad (50.25)$$

Доказательство. Проинтегрируем в (50.22) по частям, положив

$$\begin{aligned} U &= \chi(x, t - \tau), & dV &= \mu'(\tau) d\tau, \\ dU &= \frac{\partial \chi(x, t - \tau)}{\partial \tau} d\tau, & V &= \mu(\tau). \end{aligned}$$

С учетом соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi(x, t - \tau)}{\partial \tau} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{4a\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp \left\{ - \left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}} \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{x}{4a\sqrt{\pi}(t-\tau)^3} \exp \left\{ - \left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}} \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

следующего из (50.23), получим

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \chi(x, t - \tau) \mu(\tau) \Big|_0^t + \\ &+ \int_0^t \mu(\tau) \frac{\partial \chi(x, t - \tau)}{\partial \tau} d\tau - \mu(0) \chi(x, t) + \mu(t) = \\ &= \int_0^t \mu(\tau) \frac{\partial \chi(x, t - \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \mu(\tau) \frac{e^{-\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)^2}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

51. Смешанная задача для одномерного неоднородного уравнения теплопроводности на отрезке

Рассмотрим смешанную задачу для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (51.1)$$

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(x), & \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= k_1 \{u|_{x=0} - \mu_1(t)\}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} &= k_2 \{u|_{x=l} - \mu_2(t)\}. \end{aligned} \quad (51.2)$$

Будем предполагать выполненным условие согласования

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_1 [\varphi(x) - \mu_1(t)] \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = k_2 [\varphi(x) - \mu_2(t)] \Big|_{x=l}.$$

Ниже мы ограничимся подробным решением этой задачи с крайевыми условиями первого рода. Схема решения задачи (51.1), (51.2) для более общей ситуации была приведена в разделе, посвященном задаче Штурма–Лиувилля.

51.1. Однородная смешанная задача

Рассмотрим смешанную задачу с однородными крайевыми условиями для однородного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l, & (51.3) \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \end{aligned}$$

Частное решение уравнения (51.3) ищем в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (51.4)$$

Подставив (51.4) в (51.3), получим

$$\frac{1}{a^2} \frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

или

$$\dot{T} - \lambda a^2 T = 0, \quad X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0.$$

Решение задачи Штурма–Лиувилля для функции $X(x)$ получено в примере III.2.2:

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{\pi nx}{l}, \quad \lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2. \quad (51.5)$$

Подставив λ_n в уравнение для T , найдем

$$T_n(t) = B_n \exp \left\{ -\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t \right\}.$$

Следовательно, решение уравнения (51.3) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \exp \left\{ -\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t \right\} \sin \frac{\pi nx}{l}, \quad (51.6)$$

где $\bar{A}_n = A_n B_n$. Из начальных условий найдем

$$\bar{A}_n = \alpha_n, \quad (51.7)$$

где α_n – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{\pi nx}{l}, \quad \alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(y) \sin \frac{\pi ny}{l} dy. \quad (51.8)$$

◆ Обобщенная функция $g(x, y, t)$ называется функцией Грина (фундаментальным решением) смешанной задачи (51.1), (51.2) для уравнения теплопроводности, если она удовлетворяет уравнению

$$g_t(x, y, t) = a^2 g_{xx}(x, y, t), \quad (51.9)$$

начальному условию

$$g(x, y, 0) = \delta(x - y) \quad (51.10)$$

и однородным граничным условиям

$$(g_x - k_1 g)|_{x=0} = (g_x - k_2 g)|_{x=l} = 0. \quad (51.11)$$

Утверждение 51.1. *Функцию Грина смешанной задачи (51.3) можно представить в виде*

$$g(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{\pi nx}{l} \sin \frac{\pi ny}{l} \exp \left\{ -\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t \right\}. \quad (51.12)$$

Подставим коэффициенты α_n (51.8) в явном виде в функцию (51.6) и поменяем местами суммирование и интегрирование. Получим

$$u(x, t) = \int_0^l g(x, y, t) \varphi(y) dy, \quad (51.13)$$

где $g(x, y, t)$ определена соотношением (51.12). Следовательно, функция $g(x, y, t)$ – решение уравнения теплопроводности, для которого по построению выполняются граничные условия (51.3). При $t = 0$ получим

$$g(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l} = \delta(x - y).$$

Таким образом, утверждение доказано.

◇ Свойства функции $g(x, y, t)$ (51.12) полностью аналогичны свойствам функции Грина задачи Коши для уравнения теплопроводности.

51.2. Неоднородная смешанная задача

Теперь рассмотрим смешанную задачу для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными краевыми условиями первого рода

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l; \quad (51.14)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad u(x, 0) = \varphi(x). \quad (51.15)$$

Введем новую функцию $v(x, t)$ посредством соотношения

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t),$$

где $w(x, t)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям $w(0, t) = \mu_1(t)$, $w(l, t) = \mu_2(t)$, например

$$w(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Тогда функция $v(x, t)$ будет определяться как решение одной краевой задачи

$$v_t = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l; \quad (51.16)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad (51.17)$$

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - w(x, 0), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - [w_t - a^2 w_{xx}].$$

Аналогично одномерному уравнению Даламбера, решение задачи (51.16), (51.17) можно представить в виде суммы решений двух более простых задач: $v(x, t) = L(x, t) + M(x, t)$, где

а) $L(x, t)$ – решение однородного уравнения с ненулевыми начальными условиями

$$L_t = a^2 L_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l; \quad (51.18)$$

$$L(0, t) = 0, \quad L(l, t) = 0, \quad L(x, 0) = \bar{\varphi}(x). \quad (51.19)$$

Согласно (51.6), решение задачи (51.18), (51.19) имеет вид

$$L(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{\varphi}(y) \sin \left(\frac{\pi n}{l} y \right) dy. \quad (51.20)$$

б) $M(x, t)$ – решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями

$$M_t = a^2 M_{xx} + \bar{f}(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l; \quad (51.21)$$

$$M(0, t) = 0, \quad M(l, t) = 0, \quad M(x, 0) = 0. \quad (51.22)$$

Решение задачи (51.21), (51.22) ищем, аналогично решению уравнения Даламбера, в виде

$$M(\vec{x}, t) = \sum_{l=1}^{\infty} S_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (51.23)$$

Подставим (51.23) в (51.21) и разложим функцию $\bar{f}(x, t)$ в ряд Фурье:

$$\bar{f}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (51.24)$$

$$\bar{f}_n(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{f}(y, \tau) \sin \left(\frac{\pi n}{l} y \right) dy.$$

В результате получим следующее уравнение для функции $S_n(t)$:

$$S'_n + \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 S_n = \bar{f}_n(t), \quad S_n(0) = 0. \quad (51.25)$$

Решение уравнения (51.25) имеет вид

$$S_n(t) = \int_0^t \bar{f}_n(\tau) \exp \left\{ \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 (\tau - t) \right\} d\tau. \quad (51.26)$$

Следовательно,

$$M(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \bar{f}_n(\tau) \exp \left[\left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 (\tau - t) \right] d\tau \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (51.27)$$

Подставив коэффициенты Фурье $f_n(\tau)$ (51.23) в явном виде в функцию (51.26) и поменяв местами суммирование и интегрирование, получим

$$M(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l g(x, y, t - \tau) \bar{f}(y, \tau) dy, \quad (51.28)$$

где функция $g(x, y, t)$ определена соотношением (51.13).

♦ Формула (51.28) называется формулой Дюамеля.

Пример 51.1 (задача о безопасности ядерного реактора). Определить параметры ядерного реактора, при которых цепная реакция не произойдет ни при каком начальном распределении нейтронов в реакторе (реактор не «взорвется»).

Решение. Мы уже отмечали, что в диффузионном приближении процесс распространения нейтронов в реакторе описывается уравнением

$$u_t = D\Delta u + \gamma u, \quad (51.29)$$

где $u(\vec{x}, t)$ – концентрация нейтронов, D – эффективный коэффициент их диффузии, γ – коэффициент их размножения. Коэффициенты D и γ определяются экспериментально.

Будем предполагать, что рабочее тело реактора имеет форму шара радиуса b и начальное распределение нейтронов описывается сферически-симметричной функцией, т.е.

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Будем также предполагать, что концентрация нейтронов на поверхности шара равна нулю. В результате приходим к следующей задаче:

$$\begin{cases} u_t = D\Delta u + \gamma u, & t > 0, \quad r < b, \\ u|_{t=0} = \varphi(r), & u|_{r=b} = 0. \end{cases} \quad (51.30)$$

Если выражение для концентрации нейтронов $u(\vec{x}, t)$ будет содержать слагаемые, экспоненциально растущие по t , то будет протекать цепная реакция и реактор «взорвется». Поэтому параметры реактора должны гарантировать выполнение условия

$$|u(\vec{x}, t)| < \infty, \quad t > 0,$$

вне зависимости от выбора начальных данных — функции $\varphi(r)$.

В силу сферической симметрии решение задачи (51.30) будем искать в виде

$$u(\vec{r}, t) = u(r, t) = v(r, t)e^{\gamma t}. \quad (51.31)$$

В результате приходим к следующей задаче для функции $v(r, t)$ (см. разд. «Сферические волны»:

$$\begin{cases} \frac{1}{D}v_t = \frac{1}{r}(rv)_{rr}, & t > 0, \\ v|_{t=0} = \varphi(r), & v|_{r=b} = 0, \quad r < b. \end{cases} \quad (51.32)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде $rv(r, t) = w(r, t)$. Тогда для определения функции $w(r, t)$ имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{1}{D}w_t = w_{rr}, & t > 0, \quad r < b, \\ w|_{t=0} = r\varphi(r), & w|_{r=0} = w|_{r=b} = 0. \end{cases} \quad (51.33)$$

Решение этой задачи получено нами ранее [см. (51.14)] и имеет вид

$$w(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-(\pi n/b)^2 Dt} \sin \frac{\pi nr}{b}, \quad (51.34)$$

где

$$\alpha_n = \frac{2}{b} \int_0^b r\varphi(r) \sin \frac{\pi nr}{b} dr. \quad (51.35)$$

Возвратившись к исходным обозначениям, получим

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{1}{r} \sin \frac{\pi n r}{b} \exp \left\{ \left[\gamma - \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 D \right] t \right\}.$$

Таким образом, ответ на вопрос задачи определяется неравенством

$$\gamma - \frac{\pi^2 D}{b^2} < 0,$$

которому должны удовлетворять параметры реактора. Следовательно, при $b < b$ и заданных D и γ цепная реакция не произойдет. Критический радиус определяется соотношением

$$b = \pi \sqrt{\frac{D}{\gamma}}. \quad (51.36)$$

Ему соответствует критическая масса

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho b^3.$$

Пример 51.2. В однородном бесконечном цилиндре радиуса b , начиная с момента $t = 0$, действуют источники тепла постоянной плотности Q . Начальная температура цилиндра равна T . Найти распределение температуры в цилиндре при $t > 0$, если поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре Θ .

Решение. 1. Математическая постановка задачи имеет вид

$$u_t = a^2 \Delta u + Q; \quad u|_{t=0} = T, \quad u|_{r=b} = \Theta. \quad (51.37)$$

Запишем уравнение (51.37) в цилиндрических координатах. Поскольку условие задачи не зависит от переменных z и φ , то

$$u(r, \varphi, z, t) = u(r, t).$$

Тогда для функции $u(r, t)$ получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + Q.$$

2. Сведем исходную задачу к смешанной задаче с однородными граничными условиями заменой

$$u(r, t) = v(r, t) + \Theta.$$

Функция $v(r, t)$ является решением следующей смешанной задачи:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + Q, \quad v|_{t=0} = T - \Theta, \quad v|_{r=b} = 0. \quad (51.38)$$

Решение задачи (51.38) будем искать в виде

$$v(r, t) = w(r, t) + L(r, t), \quad (51.39)$$

где функция $w(r, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (51.40)$$

с начальным условием $w|_{t=0} = T - \Theta$ и граничным условием $w|_{r=b} = 0$.

Подставив (51.39) в (51.38), с учетом (51.40) получим следующую смешанную задачу для функции $L(r, t)$:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial r} \right) + Q, \quad L|_{t=0} = 0, \quad L|_{r=b} = 0. \quad (51.41)$$

3. Решение уравнения (51.40) будем искать методом разделения переменных

$$w(r, t) = R(r)T(t).$$

Разделив переменные, запишем

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{R''(r) + R'(r)/r}{R} = \lambda,$$

откуда для определения функции $T(t)$ получим

$$T' - \lambda a^2 T = 0; \quad |T(t)| < \infty, \quad t > 0, \quad (51.42)$$

а функция $R(r)$ является решением следующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \lambda R = 0, \quad |R(r)| < \infty, \quad R(b) = 0, \quad r < b. \quad (51.43)$$

Задача (51.43) была рассмотрена нами в разд. «Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя» части III, где было получено

$$R_n(r) = C_n J_0 \left(\alpha_n^0 \frac{r}{b} \right), \quad \lambda_n = - \left(\frac{\alpha_n^0}{b} \right)^2, \quad n = \overline{1, \infty},$$

где α_n^0 — корни функции Бесселя $J_0(x)$. Тогда из уравнения (51.42) найдем

$$T_n(t) = B_n e^{\lambda_n a^2 t} = B_n e^{-(\alpha_n^0 a/b)^2 t}, \quad n = \overline{1, \infty},$$

а решение задачи (51.40) запишется в виде

$$w(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\alpha_n^0 a/b)^2 t} J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{b}\right),$$

где $A_n = B_n C_n$. Для определения коэффициентов A_n используем начальное условие

$$w(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{b}\right) = T - \Theta.$$

Разложив функцию $T - \Theta$ на интервале $]0, b[$ в ряд Фурье–Бесселя по ортогональной системе функций $J_0(\alpha_n^0 r/b)$, $n = \overline{1, \infty}$, получим (см. пример III.13.1)

$$A_n = (T - \Theta) \int_0^b \frac{r J_0(\alpha_n^0 r/b)}{\|J_0(\alpha_n^0 r/b)\|^2} dr = \frac{2(T - \Theta)}{\alpha_n^0 J_1(\alpha_n^0)}. \quad (51.44)$$

4. Решение задачи (51.41) будем искать в виде

$$L(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t) J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{b}\right). \quad (51.45)$$

Правую часть уравнения (51.41) разложим в ряд Фурье–Бесселя. Аналогично (51.44) запишем

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{b}\right), \quad \beta_n = \frac{2Q}{\alpha_n^0 J_1(\alpha_n^0)}. \quad (51.46)$$

Подставив разложения (51.45) и (51.46) в уравнение (51.41) и приравняв коэффициенты при одинаковых функциях Бесселя, для определения функций $\theta_n(t)$ получим

$$\theta'_n - a^2 \lambda_n \theta_n = \beta_n, \quad \theta_n(0) = 0, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Отсюда

$$\theta_n(t) = \frac{\beta_n}{a^2 \lambda_n} (e^{a^2 \lambda_n t} - 1), \quad n = \overline{1, \infty}.$$

5. Решение исходной задачи (51.37) с учетом (51.40) и (51.42) имеет вид

$$u(r, t) = \Theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(T - \Theta)}{\alpha_n^0 J_1(\alpha_n^0)} e^{-(a\alpha_n^0/b)^2 t} + \frac{2Qb^2}{a^2 [\alpha_n^0]^3 J_1(\alpha_n^0)} (e^{-(a\alpha_n^0/b)^2 t} - 1) \right\} J_0\left(\alpha_n^0 \frac{r}{b}\right).$$

Пример 51.3. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx}, \quad u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = 0. \quad (51.47)$$

Решение. Решение задачи (51.47) будем искать в виде

$$u(x, t) = x - 1 + v(x, t). \quad (51.48)$$

Тогда для функции $v(x, t)$ получим смешанную задачу с однородными граничными условиями

$$v_t = v_{xx}, \quad v_x|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=1} = 0, \quad v|_{t=0} = 1 - x. \quad (51.49)$$

Решение задачи (51.49) будем искать методом разделения переменных

$$v(x, t) = X(x)T(t). \quad (51.50)$$

Для определения $T(t)$ получим уравнение

$$\dot{T} = \lambda T, \quad (51.51)$$

а функция $X(x)$ является решением следующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad X'(0) = X'(1) = 0 \quad (51.52)$$

с собственными функциями

$$X_n(x) = A_n \cos \frac{\pi(1+2n)x}{2}, \quad n = \overline{0, \infty} \quad (51.53)$$

и собственными значениями (см. пример III.2.3)

$$\lambda_n = - \left[\frac{\pi(1+2n)}{2} \right]^2, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Подставив (51.53) в (51.51), найдем

$$T_n(t) = B_n \exp \left\{ - \left[\frac{\pi(1+2n)}{2} \right]^2 t \right\}.$$

Тогда

$$v_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \exp \left\{ - \left[\frac{\pi(1+2n)}{2} \right]^2 t \right\} \cos \frac{\pi(1+2n)x}{2}. \quad (51.54)$$

Здесь $\bar{A}_n = A_n B_n$. Из граничного условия (51.48) найдем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \cos \frac{\pi(1+2n)x}{2} = x - 1.$$

Разложив правую часть в ряд Фурье по функциям $X_n(x)$ (51.53) и приравняв коэффициенты при одинаковых функциях $X_n(x)$, получим

$$\bar{A}_n = 2 \int_0^1 (x-1) \cos \frac{\pi(1+2n)x}{2} dx = \frac{8}{\pi^2(1+2n)^2}. \quad (51.55)$$

Подставив (51.55) и (51.54) в (51.48), получим решение задачи (51.47)

$$u(x, t) = x - 1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^2} \exp \left\{ - \left[\frac{\pi(1+2n)}{2} \right]^2 t \right\} \cos \frac{\pi(1+2n)x}{2}.$$

Пример 51.4. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} - 9u &= 4 \sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2, \\ u_x|_{x=0} &= 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi, \quad u|_{t=0} = x^2 + 2. \end{aligned} \quad (51.56)$$

Решение. Решение задачи (51.56) будем искать в виде

$$u(x, t) = x^2 + v(x, t). \quad (51.57)$$

Тогда функция $v(x, t)$ является решением смешанной задачи с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} - 9v &= 4 \sin^2 t \cos 3x, \\ v_x|_{x=0} &= 0, \quad v_x|_{x=\pi} = 0, \quad v|_{t=0} = 2. \end{aligned} \quad (51.58)$$

Проведем редукцию задачи (51.58)

$$v(x, t) = w(x, t) + \bar{w}(x, t).$$

Здесь функция $w(x, t)$ является решением смешанной задачи для однородного уравнения теплопроводности

$$w_t - w_{xx} - 9w = 0, \quad w_x|_{x=0} = w_x|_{x=\pi} = 0, \quad w|_{t=0} = 2, \quad (51.59)$$

а функция \bar{w} — для неоднородного уравнения, но с нулевыми начальными условиями

$$\begin{aligned} \bar{w}_t - \bar{w}_{xx} - 9\bar{w} &= 4 \sin^2 t \cos 3x, & (51.60) \\ \bar{w}_x|_{x=0} = \bar{w}_x|_{x=\pi} &= 0, \quad \bar{w}|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Решение задачи (51.59) имеет вид

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n e^{(9-n^2)t} \cos nx.$$

Из начального условия находим

$$w(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \cos nx = 2.$$

Следовательно, $\bar{A}_0 = 2$, $\bar{A}_n = 0$, $n = \overline{1, \infty}$, и

$$w(x, t) = 2e^{9t}. \quad (51.61)$$

Решение задачи (51.60) будем искать в виде

$$\bar{w}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \cos nx. \quad (51.62)$$

Подставив (51.62) в (51.60) и разложив правую часть в ряд Фурье по $X_n(x) = \cos nx$

$$4 \sin^2 t \cos 3x = 4 \sin^2 t \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n3} \cos nx,$$

получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} S'_n(t) \cos nx = 4 \sin^2 t \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n3} \cos nx.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях $X_n(x) = \cos nx$, получим для $n = 3$

$$S'_3 = 4 \sin^2 t, \quad S_3(0) = 0$$

и для $n \neq 3$

$$S'_n + (n^2 - 9)S_n = 0, \quad S_n(0) = 0.$$

Следовательно,

$$S_n(t) = (2t - \sin 2t)\delta_{n3}, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Окончательно получим

$$u(x, t) = x^2 + 2e^{9t} + (2t - \sin 2t) \cos 3x.$$

52. Задача Коши для многомерного уравнения теплопроводности. Функция Грина задачи Коши

◆ Функцией Грина уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u \quad (52.1)$$

называется обобщенная функция $G(\vec{x}, \vec{y}, t)$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая этому уравнению и начальному условию

$$G(\vec{x}, \vec{y}, 0) = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (52.2)$$

Утверждение 52.1. Функция Грина уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \Delta G, \quad G(\vec{x}, \vec{y}, 0) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (52.3)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{y}, t) &= G(x_1, y_1, t)G(x_2, y_2, t) \cdots G(x_n, y_n, t) = \\ &= \prod_{k=1}^n G(x_k, y_k, t), \end{aligned} \quad (52.4)$$

где $G(x_k, y_k, t)$, $k = \overline{1, n}$ — функция Грина задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности (49.13).

Найдем частные производные

$$\frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y}, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \frac{G(\vec{x}, \vec{y}, t)}{G(x_k, y_k, t)} \frac{\partial G(x_k, y_k, t)}{\partial t},$$

$$\Delta G(\vec{x}, \vec{y}, t) = \sum_{k=1}^n \frac{G(\vec{x}, \vec{y}, t)}{G(x_k, y_k, t)} \frac{\partial^2 G(x_k, y_k, t)}{\partial x_k^2}.$$

Но

$$\frac{\partial G(x_k, y_k, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial G(x_k, y_k, t)}{\partial x_k^2}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Таким образом, $G(\vec{x}, \vec{y}, t)$ удовлетворяет уравнению (52.3). При $t = 0$ получим

$$G|_{t=0} = \prod_{k=1}^n G(x_k, y_k, t)|_{t=0} = \prod_{k=1}^n \delta(x_k - y_k) = \delta(\vec{x} - \vec{y}),$$

что и требовалось показать.

Утверждение 52.2. *Решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (52.5)$$

имеет вид

$$u(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(\vec{x}, \vec{y}, t) \varphi(\vec{y}) d\vec{y}. \quad (52.6)$$

Очевидно, что функция (52.6) удовлетворяет уравнению (52.5). Кроме того,

$$u(\vec{x}, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} G(\vec{x}, \vec{y}, 0) \varphi(\vec{y}) d\vec{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \varphi(\vec{y}) d\vec{y} = \varphi(\vec{x}),$$

что и требовалось показать.

◇ Из явного вида функций Грина (49.13) нетрудно получить

$$G(\vec{x}, \vec{y}, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \exp \left[-\frac{(\vec{x} - \vec{y})^2}{4a^2 t} \right]. \quad (52.7)$$

Подставив (52.7) в (52.5), получим

$$u(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\vec{y}) \exp \left[-\frac{(\vec{x} - \vec{y})^2}{4a^2 t} \right] d\vec{y}. \quad (52.8)$$

◆ Соотношение (52.8) называется формулой Пуассона задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Утверждение 52.3. *Решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(\vec{x}, t), \quad u|_{t=0} = 0, \quad (52.9)$$

имеет вид

$$u(\vec{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) f(\vec{y}, \tau) d\vec{y}. \quad (52.10)$$

◆ Соотношение (52.10) называется формулой Дюамеля.

Доказательство аналогично доказательству для одномерного случая.

Следствие. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(\vec{x}, t), \quad u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

есть сумма решений (52.6) и (52.10) и имеет вид

$$u(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\vec{y}) \exp \left[-\frac{(\vec{x} - \vec{y})^2}{4a^2 t} \right] d\vec{y} + \int_0^t d\tau \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 (t - \tau)}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y}, \tau) \exp \left[-\frac{(\vec{x} - \vec{y})^2}{4a^2 (t - \tau)} \right] d\vec{y}. \quad (52.11)$$

Доказательство очевидно.

Пример 52.1. Найти решение задачи Коши

$$u_t = 2u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \exp(-4x^2 + 8x).$$

Решение. Согласно формуле Пуассона (52.8), решение задачи Коши для уравнения теплопроводности при $a = \sqrt{2}$ имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-4y^2 + 8y) \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{8t}\right] dy. \quad (52.12)$$

Выделим полный квадрат в показателе экспоненты

$$\begin{aligned} -4y^2 + 8y - \frac{(x-y)^2}{8t} &= -\frac{1}{8t}[32y^2t - 64yt + x^2 - 2xy + y^2] = \\ &= -\frac{1}{8t}\left\{(32t+1)\left[y^2 - 2\frac{32t+x}{32t+1}y\right] + x^2\right\} = \\ &= -\frac{1}{8t}\left[(32t+1)\left(y - \frac{32t+x}{32t+1}\right)^2 - \frac{(32t+x)^2}{32t+1} + x^2\right]. \end{aligned}$$

Сделаем в (52.12) замену

$$y = z + \frac{32t+x}{32t+1},$$

найдем

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{8t}\left[x^2 - \frac{(32t+x)^2}{32t+1}\right]\right\} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{32t+1}{8t}z^2\right) dz. \end{aligned}$$

С учетом значения гауссова интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

окончательно получим

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{32t+1}} \exp\left(\frac{4x^2 - 8x - 128t}{32t+1}\right).$$

Пример 52.2. Решить задачу Коши

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (52.13)$$

если

$$a^2 = 1, \quad f(x, t) = e^{-t} \cos x, \quad \varphi(x) = \cos x. \quad (52.14)$$

Решение. Решение задачи (52.13), (52.14) дается формулой Пуассона (52.8) при $n = 1$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4a^2t} \cos y \, dy + \\ + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{(x-y)^2/4a^2(t-\tau)} e^{-y} \cos y \, dy. \quad (52.15)$$

Первый интеграл в (52.15)

$$I_1 = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4a^2t} \cos y \, dy$$

заменой переменных

$$\frac{y-x}{2a\sqrt{t}} = z, \quad y = 2a\sqrt{t}z + x, \quad dy = 2a\sqrt{t} \, dz \quad (52.16)$$

сводится к интегралу вида

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos 2a\sqrt{t}z \cos x + \sin 2a\sqrt{t}z \sin x] e^{-z^2} \, dz, \quad (52.17)$$

вычисленному в разд. «Функции Грина задачи Коши» при доказательстве свойства 3:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \cos \varkappa z \, dz = \sqrt{\pi} e^{-\varkappa^2/4}, \quad (52.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \sin \varkappa z \, dz = 0. \quad (52.19)$$

Подставив (52.18) и (52.19) в (52.17), найдем

$$I_1 = \cos x e^{-a^2 t}. \quad (52.20)$$

Последовательное вычисление интегралов при $a = 1$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-x)^2/4a^2(t-\tau)} e^{-\tau} \cos y \, dy \Big|_{a=1} = \\ & = 2a\sqrt{\pi(t-\tau)} e^{-a^2(t-\tau)} \cos x \Big|_{a=1} = \\ & = 2\sqrt{\pi(t-\tau)} e^{-(t-\tau)} \cos x, \\ & \int_0^t \cos x e^{-\tau-(t-\tau)} d\tau = \cos x e^{-t} \int_0^t d\tau = e^{-t} t \cos x \end{aligned}$$

дает для второго интеграла из (52.15)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{(x-y)^2/4a^2(t-\tau)} e^{-\tau} \cos y \, dy \Big|_{a=1} = \\ & = e^{-t} t \cos x. \end{aligned} \quad (52.21)$$

Подставив (52.20) и (52.21) в (52.15), находим

$$u(x, t) = e^{-t}(1+t) \cos x.$$

Пример 52.3. На поверхности бесконечного однородного стержня происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры. Найти распределение температуры в стержне, если ее начальное распределение имеет вид $u|_{t=0} = 2\sqrt{\pi}\delta(x)$.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид (см. уравнение (12.5))

$$u_t = a^2 u_{xx} - u, \quad u|_{t=0} = 2\sqrt{\pi}\delta(x).$$

Решение задачи ищем в виде

$$u(x, t) = e^{-t} v(x, t).$$

Тогда для определения функции $v(x, t)$ получим задачу Коши

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad v|_{t=0} = 2\sqrt{\pi}\delta(x),$$

решение которой дается формулой Пуассона (52.8) при $n = 1$. С учетом свойств дельта-функции получим

$$u(x, t) = \frac{\exp(-t)}{\sqrt{a^2 t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2 t}\right]. \quad (52.22)$$

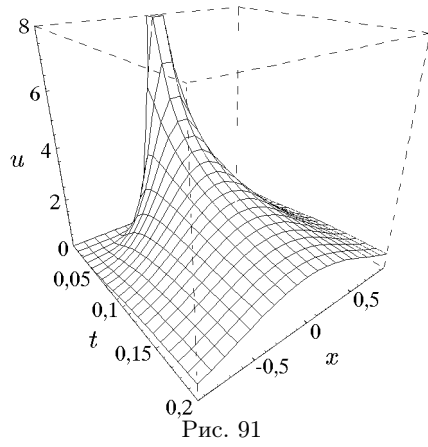


Рис. 91

График функции (52.22) при $a = 1$ приведен на рис. 91. Здесь в качестве дельта-функции использовалась дельтообразная последовательность

$$\delta(x, \varepsilon) = \begin{cases} 1/2\varepsilon & |x| \leq \varepsilon, \\ 0 & |x| > \varepsilon, \end{cases} \quad \varepsilon > 0$$

при $\varepsilon = 0.01$.

Пример 52.4. Решить задачу Коши

$$u_t = a^2 \Delta u + f(\vec{x}, t), \quad u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (52.23)$$

если

$$a = 1, \quad f(\vec{x}, t) = \sin x_1 \sin x_2 \sin t, \quad \varphi(\vec{x}) = 1. \quad (52.24)$$

Решение. Согласно формуле Пуассона (52.8), при $n = 2$ с учетом (52.24) найдем

$$u(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^2} e^{-[(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]/4t} dy_1 dy_2 + \\ + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^2} e^{-[(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]/4(t-\tau)} \times$$

$$\times \sin y_1 \sin y_2 \sin \tau dy_1 dy_2. \quad (52.25)$$

Замена переменных

$$\frac{y_1 - x_1}{2\sqrt{t}} = u, \quad \frac{y_2 - x_2}{2\sqrt{t}} = v, \quad \frac{y_1 - x_1}{2\sqrt{t - \tau}} = \bar{u}, \quad \frac{y_2 - x_2}{2\sqrt{t - \tau}} = \bar{v}$$

дает

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^t d\tau \sin \tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\bar{u}^2} \sin[2\sqrt{t - \tau}\bar{u} + x] d\bar{u} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\bar{v}^2} \sin[2\sqrt{t - \tau}\bar{v} + x] d\bar{v}, \end{aligned} \quad (52.26)$$

откуда с учетом соотношения

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

и формул (52.18), (52.19) получим

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= 1 + \sin x_1 \sin x_2 \int_0^t \sin \tau e^{-2(t-\tau)} d\tau = \\ &= 1 + \sin x_1 \sin x_2 e^{-2t} \int_0^t \sin \tau e^{2\tau} d\tau = \\ &= 1 + \sin x_1 \sin x_2 e^{-2t} \frac{1}{5} [e^{2\tau} (2 \sin \tau - \cos 2\tau)] \Big|_0^t = \\ &= 1 + \frac{1}{5} \sin x_1 \sin x_2 e^{-2t} [(2 \sin t - \cos 2t + e^{-2t})]. \end{aligned}$$

Пример 52.5. Решить задачу Коши

$$u_t = a^2 \Delta u + f(\vec{x}, t), \quad u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (52.27)$$

для

$$a^2 = 2, \quad f(\vec{x}, t) = t \cos x_1, \quad \varphi(\vec{x}) = \cos x_2 \cos x_3. \quad (52.28)$$

Решение. Согласно формуле Пуассона (52.8) для $n = 3$ (см. предыдущий пример), с учетом (52.28) имеем

$$u(\vec{x}, t) = I_1 + \int_0^t I_2 \tau d\tau, \quad (52.29)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-(x_1-y_1)^2/4a^2 t} dy_1 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-(x_2-y_2)^2/4a^2 t} \cos y_2 dy_2 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-(x_3-y_3)^2/4a^2 t} \cos y_3 dy_3 \end{aligned} \quad (52.30)$$

и

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-(x_1-y_1)^2/4a^2(t-\tau)} dy_1 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-(x_2-y_2)^2/4a^2(t-\tau)} \cos y_2 dy_2 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-(x_3-y_3)^2/4a^2(t-\tau)} \cos y_3 dy_3. \end{aligned} \quad (52.31)$$

Все интегралы, фигурирующие в (52.30), (52.31), вычислялись в двух предыдущих примерах, поэтому величины I_1 и I_2 можно записать сразу

$$I_1 = \cos x_2 \cos x_3 e^{-2a^2 t}, \quad (52.32)$$

$$I_2 = \cos x_1 e^{-a^2(t-\tau)}. \quad (52.33)$$

Интегрирование I_2 по τ дает

$$\int_0^t I_2 \tau d\tau = \int_0^t \cos x_1 e^{-a^2(t-\tau)} \tau d\tau =$$

$$= \cos x_1 e^{-a^2 t} \int_0^t e^{a^2 \tau} \tau d\tau = \frac{\cos x_1}{a^4} [a^2 t - 1 + e^{-a^2 t}]. \quad (52.34)$$

Подставив (52.32), (52.34) в (52.29), находим

$$u(\vec{x}, t) = \cos x_2 \cos x_3 e^{-2a^2 t} + \frac{\cos x_1}{a^4} [a^2 t - 1 + e^{-a^2 t}],$$

а с учетом того, что $a^2 = 2$, — соответственно

$$u(\vec{x}, t) = \cos x_2 \cos x_3 e^{-4t} + \frac{1}{4} \cos x_1 [2t - 1 + e^{-2t}].$$

53. Теорема единственности для одномерного уравнения теплопроводности

Теорема 53.1 (принцип максимума). *Всякое классическое решение $u(x, t)$ (непрерывное в замкнутой области $\bar{D} \equiv \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$) уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho(x) u_t \quad (53.1)$$

принимает наибольшее и наименьшее значения либо в начальный момент времени $u|_{t=0}$, либо на границе отрезка $u|_{x=0}$, $u|_{x=l}$.

Доказательство. 1. Если $u(x, t) = \text{const}$, то справедливость утверждения теоремы очевидна.

2. Пусть

$$M_1 = \max\{u|_{t=0}, u|_{x=0}, u|_{x=l}\}, \quad (53.2)$$

$$M_2 = \max_{\substack{x \in [0, l] \\ t \in [0, T]}} u(x, t), \quad M_2 = u(x_0, y_0). \quad (53.3)$$

Покажем, что $M_1 = M_2$. Предположим противное: $M_1 < M_2$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x, t) = u(x, t) + \alpha(T - t), \quad \text{где } 0 < \alpha < \frac{M_2 - M_1}{2T}.$$

Функция $v(x, t)$ непрерывна в \bar{D} и, следовательно, достигает в \bar{D} наибольшего значения в некоторой точке (x_1, t_1) , так как $M_3 = v(x_1, t_1)$

$$M = u(x_0, t_0) \leq u(x_0, t_0) + \alpha(T - t_0) = v(x_0, t_0) \leq M_3.$$

Точка (x_1, t_1) не может лежать на границе, так как

$$|v(x, 0)| \leq |u(x, 0)| + \alpha T < M_1 + \frac{1}{2}(M_2 - M_1) < M_2 \leq M_3;$$

$$|v(0, t)| \leq |u(0, t)| + \alpha(T - t) < M_1 + \frac{1}{2}(M_2 - M_1) < M_2 \leq M_3;$$

$$|v(l, t)| \leq |u(l, t)| + \alpha(T - t) < M_1 + \frac{1}{2}(M_2 - M_1) < M_2 \leq M_3.$$

Таким образом, точка $(x_1, t_1) \in \bar{D}$ и в ней функция $u(x, t)$ должна удовлетворять уравнению (53.1). Но, так как (x_1, t_1) — точка максимума, то

$$\begin{aligned} u_x(x_1, t_1) = v_x(x_1, t_1) = 0, \quad u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0, \\ u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + \alpha > 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$v_t(x_1, t_1) = \begin{cases} 0, & 0 < t < T; \\ v(x, t) \geq 0, & t = T, \end{cases}$$

и, следовательно, в точке (x_1, t_1) функция $u(x, t)$ не удовлетворяет уравнению (53.1). Следовательно, предположение $M_1 < M_2$ неверно, т.е. $M_1 = M_2$, что и требовалось доказать.

Доказательство для минимума аналогично.

Теорема 53.2 (о единственности). *Классическое решение смешанной задачи с краевыми условиями первого рода (непрерывное в области $0 \leq x \leq l, t \geq 0$)*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t) = \rho \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (53.4)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad (53.5)$$

единственно.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи (53.4), (53.5). Пусть $v = u_2 - u_1$, тогда

$$v(0, t) = v(l, t) = v(x, 0) = 0.$$

Это решение непрерывно и достигает наибольшего и наименьшего значений на границе. Следовательно, $v(x, t) = 0$, что и доказывает теорему.

Теорема 53.3. *Классическое решение задачи Коши (непрерывное и ограниченное при $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$)*

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (53.6)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad |\varphi(x)| \leq M < \infty,$$

единственно.

Доказательство. Пусть существуют функции u_1 и u_2 , удовлетворяющие уравнению (53.6), и функция $v = u_1 - u_2$, для которой $|v| \leq 2M$. Рассмотрим функцию

$$w(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{l} + a^2 t \right). \quad (53.7)$$

Очевидно, она удовлетворяет уравнению (53.6), причем

$$|w(x, 0)| = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{l} \right) \leq 2M \quad \text{при} \quad |x| \leq L,$$

$$|w(x, 0)| \geq v(x, 0) = 0,$$

$$|w(\pm L, t)| \geq 2M,$$

$$|w(\pm L, t)| \geq |v(\pm L, t)|.$$

Следовательно, по теореме об экстремуме

$$|v(x, t)| \leq w(x, t)$$

для всех x , принадлежащих отрезку $] -L, L[$. Зафиксировав x , перейдем в последнем равенстве к пределу при $L \rightarrow \infty$. Тогда

$$|v(x, t)| \leq 0,$$

что дает $v(x, t) = 0$. Таким образом, теорема доказана.

ГЛАВА 9
Интегральные уравнения

54. Основные понятия и определения

◆ Уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла, называется интегральным уравнением.

◇ Интегральные уравнения делятся на два основных класса: линейные и нелинейные.

◇ Линейные интегральные уравнения имеют вид

$$A(\vec{x})u(\vec{x}) + \int_E K(\vec{x}, \vec{y})u(\vec{y})d\vec{y} = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in E, \quad (54.1)$$

где E – подмножество \mathbb{R}^n и A, K, f – заданные функции, из которых $A(\vec{x})$ называется коэффициентом, $K(\vec{x}, \vec{y})$ – ядром, $f(\vec{x})$ – свободным членом (или правой частью); $u(\vec{x})$ – неизвестная функция.

Если $f(\vec{x}) = 0$, то уравнение (54.1) называется однородным, в противном случае – неоднородным.

◇ В зависимости от коэффициента A различают три типа линейных интегральных уравнений:

- 1) уравнения первого рода, если $A = 0$ для всех $\vec{x} \in E$;
- 2) уравнения второго рода, если $A \neq 0$ для всех $\vec{x} \in E$;
- 3) уравнения третьего рода, если $A = 0$ на некотором подмножестве E .

◇ В дальнейшем ограничимся одномерным случаем, когда область E – конечный или бесконечный интервал $]a, b[$, $E =]a, b[\subset \mathbb{R}$.

В этом случае линейные интегральные уравнения первого и второго рода можно представить в виде

$$\int_a^b K(x, y)u(y)dy = f(x), \quad x \in]a, b[; \quad (54.2)$$

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy = f(x), \quad x \in]a, b[. \quad (54.3)$$

◆ Уравнения (54.2), (54.3) называются уравнениями Фредгольма первого и второго рода соответственно.

◆ Комплексное число λ называется параметром интегрального уравнения.

◇ Мы ограничим рассмотрение случаем, когда функция $K(x, y)$ непрерывна в $E \times E$ (здесь $E = [a, b]$) или удовлетворяет условию

$$\int_{E \times E} |K(x, y)|^2 dx dy < \infty. \quad (54.4)$$

В этом случае интеграл

$$\int_a^b K(x, y)u(y) dy = v(x)$$

определяет непрерывную функцию $v(x)$ для квадратично интегрируемой на $[a, b]$ функции $u(x)$. Действительно, применив к приращению функции $\Delta v(x) = v(x + \Delta x) - v(x)$ неравенство Коши–Буняковского (П.17.2), имеем

$$|v(x + \Delta x) - v(x)| \leq \int_a^b [K(x + \Delta x, y) - K(x, y)]^2 dy \int_a^b u^2(y) dy.$$

Приняв во внимание непрерывность ядра $K(x, y)$ и квадратичную интегрируемость (не обязательно непрерывной или ограниченной) функции $u(x)$, найдем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{v(x + \Delta x) - v(x)\} = 0,$$

откуда и следует непрерывность $v(x)$. Поэтому для непрерывных функций $f(x)$ решение уравнения (54.3), если оно существует, является непрерывным. Соответственно, если функция $f(x)$ квадратично интегрируема на $[a, b]$, то $u(x)$ также принадлежит к этому классу функций.

◆ Решением интегральных уравнений (54.2), (54.3) будем называть любую функцию $u(x)$, при подстановке которой уравнения обращаются в тождество.

◇ Однородные уравнения (54.3), очевидно, всегда имеют решение $u(x) = 0$, которое называется тривиальным. Значение λ , при котором однородное уравнение имеет отличные от нуля решения, называется характеристическим, а ненулевые функции $u(x)$ – собственными функциями однородного уравнения (54.3).

◆ Функция $R(x, y, \lambda)$ переменных x, y и параметра λ называется резольвентой уравнения Фредгольма (54.3), если решение уравнения (54.3) можно представить в виде

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, y, \lambda) f(y) dy. \quad (54.5)$$

◆ Если ядро $K(x, y)$ обращается в нуль при $y > x$, такое ядро называется ядром Вольтерра, а уравнения (54.2), (54.3) принимают вид

$$\int_a^x K(x, y) u(y) dy = f(x); \quad (54.6)$$

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x, y) u(y) dy = f(x) \quad (54.7)$$

и называются уравнениями Вольтерра первого и второго рода соответственно.

Уравнение (54.5) в этом случае примет вид

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, y, \lambda) f(y) dy. \quad (54.8)$$

55. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям

Рассмотрим несколько задач, которые приводят к интегральным уравнениям. Прежде всего покажем, что некоторые задачи, рассмотренные нами в частях I и III, можно свести к интегральным уравнениям.

55.1. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши

$$\sum_{k=0}^n P_k(x) u^{(k)}(x) = f(x), \quad (55.1)$$

$$u(0) = C_0, \quad u'(0) = C_1, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(0) = C_{n-1}.$$

Если ввести функцию $v(x)$ соотношением

$$v(x) = u^{(n)}(x), \quad (55.2)$$

то последовательное n -кратное интегрирование этого выражения с учетом формулы (см. разд. «Свойства преобразования Лапласа» части I)

$$\int_{x_0}^x dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-y)^{n-1} f(y) dy$$

дает

$$\begin{aligned} u^{(n-1)}(x) - C_{n-1} &= \int_0^x v(y) dy; \\ \dots\dots\dots; \\ u(x) - \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{x^k}{k!} &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} v(y) dy. \end{aligned} \quad (55.3)$$

Подстановка (55.2), (55.3) в (55.1) приводит к интегральному уравнению Вольтерра второго рода для функции $v(x)$:

$$P_n(x)v(x) + \int_0^x K(x,y)v(y)dy = F(x), \quad (55.4)$$

где

$$\begin{aligned} K(x,y) &= \sum_{k=1}^n P_{n-k}(x) \frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!}, \\ F(x) &= f(x) - P_{n-1}(x)C_{n-1} - P_{n-2}(x)[C_{n-2} + C_{n-1}x] - \\ &\quad - \dots - P_0 \left[C_0 + C_1x + \frac{C_2x^2}{2!} + \dots + \frac{C_{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} \right]. \end{aligned} \quad (55.5)$$

◇ Отметим, что если коэффициенты $P_k(x)$ уравнения (55.1) постоянны, то ядро $K(x,y)$ интегрального уравнения (55.4) зависит только от разности аргументов x,y , т.е. $K(x,y) = K(x-y)$.

В некоторых частных случаях, как например

$$\begin{aligned} u^{(n)}(x) &= f(x, u(x)), \quad u(0) = C_0, \\ u'(0) &= C_1, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(0) = C_{n-1}, \end{aligned} \quad (55.6)$$

решение задачи Коши можно свести к решению интегрального уравнения непосредственно для искомой функции $u(x)$. Действительно, как и в предыдущем случае, n -кратное интегрирование (55.6) дает

$$u(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} f(y, u(y)) dy + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k C_k}{(k-1)!}. \quad (55.7)$$

Заметим, что если функция $f(x, u(x))$ линейна по $u(x)$, то уравнение (55.7) является линейным уравнением Вольтерра, в противном случае это нелинейное интегральное уравнение, называемое также уравнением Вольтерра–Гаммерштейна.

55.2. Краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} u''(x) + q(x)u(x) &= f(x), \\ u(0) = u(l) &= 0. \end{aligned} \quad (55.8)$$

В формуле (55.7) при $n = 2$ величины C_1 и C_2 считаем произвольными постоянными, а $f(x, u(x))$ — равной $f(x) - q(x)u(x)$. Тогда общее решение уравнения (55.8) можно найти из интегрального уравнения

$$u(x) = \int_0^x (x-y)[f(y) - q(y)u(y)] dy + C_1 + C_2 x. \quad (55.9)$$

Произвольные постоянные определим из граничных условий (55.8). Положив в (55.9) $x = 0$ и $x = l$, найдем

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{l} \int_0^l (l-y)[f(y) - q(y)u(y)] dy. \quad (55.10)$$

Подставив (55.10) в (55.9), имеем

$$u(x) = \int_0^x (x-y)[f(y) - q(y)u(y)]dy - \\ - \frac{x}{l} \int_0^l (l-y)[f(y) - q(y)u(y)]dy. \quad (55.11)$$

Уравнение (55.11) можно представить в «более симметричном» виде

$$u(x) = \int_0^x \frac{y(l-x)}{l} [f(y) - q(y)u(y)]dy - \\ - \int_x^l \frac{x(l-y)}{l} [f(y) - q(y)u(y)]dy. \quad (55.12)$$

Введем функцию

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{y(l-x)}{l}, & 0 < y < x; \\ \frac{x(l-y)}{l}, & x < y < l. \end{cases} \quad (55.13)$$

Тогда уравнение (55.12) примет вид

$$u(x) = F(x) + \int_0^l K(x, y)q(y)u(y)dy, \quad (55.14)$$

где

$$F(x) = - \int_0^l K(x, y)f(y)dy,$$

а функция $K(x, y)$ определена соотношением (55.13) и является функцией влияния $G(x, y)$ краевой задачи (55.8) (см. разд. «Функция Грина краевой задачи» части II).

Краевая задача (55.8) при $q(x) = \lambda$ и $f(x) = 0$ является задачей Штурма–Лиувилля. Интегральное уравнение (55.14)

в этом случае имеет вид

$$u(x) = \lambda \int_0^l K(x, y)u(y)dy \quad (55.15)$$

и для неоднородного интегрального уравнения

$$u(x) = F(x) + \lambda \int_0^l K(x, y)u(y)dy$$

играет ту же роль, что и задача Штурма–Лиувилля для краевых задач (55.8).

55.3. Задача обращения

Рассмотрим интегральное преобразование Фурье функции $\varphi(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \varphi(y) dy. \quad (55.16)$$

Задача о нахождении функции $\varphi(x)$, если известна функция $f(x)$ – ее фурье-образ (55.16), называется задачей обращения. Ее решение

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x) dx \quad (55.17)$$

было получено Фурье в 1811 г. Уравнение (55.16) для функции $\varphi(x)$ является уравнением Фредгольма первого рода.

55.4. Уравнение Шрёдингера

Рассмотрим стационарное уравнение Шрёдингера

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \quad \text{где} \quad \hat{H} = -\gamma\Delta - U(\vec{x}) \quad (55.18)$$

и $\gamma = \hbar^2/2m$, а $U(\vec{x})$ – потенциал внешнего поля. Пусть

$$\Psi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(\vec{k}, \vec{x})} \varphi(\vec{k}) d\vec{k}.$$

Тогда

$$\Delta\Psi = - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{k}^2 \varphi(\vec{k}) e^{i(\vec{k}, \vec{x})} d\vec{k}.$$

Потенциал $U(\vec{x})$ представим в виде

$$U(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(\vec{p}, \vec{x})} \bar{U}(\vec{p}) d\vec{p},$$

где $\bar{U}(\vec{p})$ – фурье-образ функции $U(\vec{x})$.

Подставив в (55.18), получим

$$\begin{aligned} & \gamma \int_{\mathbb{R}^3} \vec{k}^2 \varphi(\vec{k}) e^{i(\vec{k}, \vec{x})} d\vec{k} + \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{p} e^{i(\vec{p}, \vec{x})} \bar{U}(\vec{p}) \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k} e^{i(\vec{k}, \vec{x})} \varphi(\vec{k}) = \\ & = E \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\vec{k}) e^{i(\vec{k}, \vec{x})} d\vec{k}. \end{aligned}$$

В интеграле

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{p} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k} e^{i([\vec{p} + \vec{k}], \vec{x})} \bar{U}(\vec{p}) \varphi(\vec{k})$$

сделаем замену переменных $\vec{p} = \vec{k}' - \vec{k}$, $d\vec{p} = d\vec{k}'$. Тогда

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}' \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k} U(\vec{k} - \vec{k}') \varphi(\vec{k}) e^{i(\vec{k}', \vec{x})}.$$

Обозначим $\vec{k} = \vec{q}$, $\vec{k}' = \vec{k}$ и перепишем интеграл

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{q} U(\vec{q} - \vec{k}) \varphi(\vec{q}) e^{i(\vec{k}, \vec{x})}.$$

Тогда уравнение (55.18) примет вид

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k} e^{i(\vec{k}, \vec{x})} \left\{ \gamma \vec{k}^2 \varphi(\vec{k}) + \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{q} U(\vec{k} - \vec{q}) \varphi(\vec{q}) - E \varphi(\vec{k}) \right\} = 0.$$

Следовательно, уравнение Шрёдингера (55.18) эквивалентно уравнению

$$[\gamma \vec{k}^2 - E] \varphi(\vec{k}) + \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{q} U(\vec{k} - \vec{q}) \varphi(\vec{q}) = 0. \quad (55.19)$$

56. Резольвента уравнения Фредгольма и метод определителей Фредгольма

В уравнении Фредгольма (54.3) интеграл

$$\int_a^b K(x, y)u(y)dy$$

заменяем римановой интегральной суммой

$$\sum_{l=1}^n K(x, x_l)u(x_l)\Delta x,$$

где

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_l = a + l\Delta x, \quad l = \overline{1, n},$$

так, что

$$\int_a^b K(x, y)u(y)dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n K(x, x_l)u(x_l)\Delta x.$$

◇ Такая замена, строго говоря, недопустима, но предлагаемая ниже схема позволяет выяснить структуру резольвенты Фредгольма (54.3), хотя и имеет иллюстративный характер.

Итак, вместо (54.3) запишем

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{l=1}^n K(x, x_l)u(x_l)\Delta x. \quad (56.1)$$

Так как это уравнение обращается в тождество на всем отрезке $a \leq x \leq b$, то оно справедливо и тогда, когда x принимает значения x_j при $j = \overline{1, n}$. Положив в (56.1) $x = x_j$, получим систему

$$u(x_j) - \lambda \Delta x \sum_{l=1}^n K(x_j, x_l)u(x_l) = f(x_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (56.2)$$

Система (56.2) есть неоднородная система линейных алгебраических уравнений, в которой роль неизвестных играют $u(x_j)$.

Она имеет единственное решение, если определитель

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \Delta x K(x_1, x_1) & -\lambda \Delta x K(x_1, x_2) & \dots & -\lambda \Delta x K(x_1, x_n) \\ -\lambda \Delta x K(x_2, x_1) & 1 - \lambda \Delta x K(x_2, x_2) & \dots & -\lambda \Delta x K(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\lambda \Delta x K(x_n, x_1) & -\lambda \Delta x K(x_n, x_2) & \dots & 1 - \lambda \Delta x K(x_n, x_n) \end{vmatrix} \quad (56.3)$$

отличен от нуля. Согласно правилу Крамера, решение системы (56.2) в этом случае можно записать в виде

$$u(x_j) = \frac{1}{D_n(\lambda)} \left[f(x_1) D_n(x_j, x_1, \lambda) + f(x_2) D_n(x_j, x_2, \lambda) + \dots + f(x_n) D_n(x_j, x_n, \lambda) \right], \quad (56.4)$$

где $D_n(x_j, x_l, \lambda)$ – алгебраические дополнения к элементам определителя (56.3), стоящим на пересечении l -й строки и j -го столбца.

Разложение по степеням λ определителя $D_n(\lambda)$ дает

$$D_n(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{l=1}^n K(x_l, x_l) \Delta x + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{l,j=1}^n \begin{vmatrix} K(x_l, x_l) & K(x_l, x_j) \\ K(x_j, x_l) & K(x_j, x_j) \end{vmatrix} (\Delta x)^2 - \frac{\lambda^3}{3!} \sum_{l,j,i=1}^n \begin{vmatrix} K(x_l, x_l) & K(x_l, x_j) & K(x_l, x_i) \\ K(x_j, x_l) & K(x_j, x_j) & K(x_j, x_i) \\ K(x_i, x_l) & K(x_i, x_j) & K(x_i, x_i) \end{vmatrix} (\Delta x)^3 + \dots \quad (56.5)$$

и соответственно определителя

$$D_n(x_j, x_l, \lambda) = \lambda \Delta x \left\{ K(x_j, x_l) - \lambda \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} K(x_j, x_l) & K(x_j, x_i) \\ K(x_i, x_l) & K(x_i, x_i) \end{vmatrix} (\Delta x) + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{i,k=1}^n \begin{vmatrix} K(x_j, x_l) & K(x_j, x_i) & K(x_j, x_k) \\ K(x_i, x_l) & K(x_i, x_i) & K(x_i, x_k) \\ K(x_k, x_l) & K(x_k, x_i) & K(x_k, x_k) \end{vmatrix} (\Delta x)^2 - \dots \right\}. \quad (56.6)$$

Подчеркнем, что формула (56.6) справедлива только при $x_j \neq x_l$. Мы не выписали явный вид алгебраических дополнений $D(x_j, x_j, \lambda)$ к диагональным элементам определителя

(56.3), так как их структура в данном случае совпадает со структурой самого определителя, а следовательно, разложение $D(x_j, x_j, \lambda)$ по степеням λ аналогично разложению (56.5).

«Решение» (56.4) представим в виде

$$u(x_j) = f(x_j) \frac{D_n(x_j, x_j, \lambda)}{D_n(\lambda)} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n f(x_l) \frac{D_n(x_j, x_l, \lambda)}{D_n(\lambda)}. \quad (56.7)$$

Устремив $n \rightarrow \infty$ ($\Delta x \rightarrow 0$) и заменив соответствующие интегральные суммы интегралами, вместо (56.7) можем записать

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{D(x, y, \lambda)}{D(\lambda)} f(y) dy. \quad (56.8)$$

◇ В формуле (56.8) учтено, что при $n \rightarrow \infty$ справедливы предельные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{D_n(x_j, x_j, \lambda)}{D_n(\lambda)} &\rightarrow 1; \\ D_n(\lambda) &\rightarrow D(\lambda); \quad D_n(x_j, x_l, \lambda) \rightarrow \lambda D(x, y, \lambda), \end{aligned}$$

где $D(\lambda)$ и $D(x, y, \lambda)$ представляют собой ряды по степеням λ , явный вид которых получим из разложений (56.5) и (56.6):

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n C_n}{n!}, \quad (56.9)$$

$$D(x, y, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n B_n(x, y)}{n!}, \quad (56.10)$$

а коэффициенты C_n и $B_n(x, y)$ есть

$$C_0 = 1, \quad B_0 = K(x, y) \quad (56.11)$$

при $n = 0$ и

$$C_n = \int_a^b dy_1 \int_a^b dy_2 \cdots$$

$$\dots \int_a^b \left| \begin{array}{cccc} K(y_1, y_1) & K(y_1, y_2) & \dots & K(y_1, y_n) \\ K(y_2, y_1) & K(y_2, y_2) & \dots & K(y_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K(y_n, y_1) & K(y_n, y_2) & \dots & K(y_n, y_n) \end{array} \right| dy_n, \quad (56.12)$$

$$B_n(x, y, \lambda) = \int_a^b dy_1 \int_a^b dy_2 \dots \dots \int_a^b \left| \begin{array}{cccc} K(x, y) & K(x, y_1) & \dots & K(x, y_n) \\ K(y_1, y) & K(y_1, y_1) & \dots & K(y_1, y_n) \\ K(y_2, y) & K(y_2, y_1) & \dots & K(y_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K(y_n, y) & K(y_n, y_1) & \dots & K(y_n, y_n) \end{array} \right| dy_n \quad (56.13)$$

при $n \geq 1$.

Из (54.5) и (56.8) для резольвенты $R(x, y, \lambda)$ получим следующее представление:

$$R(x, y, \lambda) = \frac{D(x, y, \lambda)}{D(\lambda)}. \quad (56.14)$$

Величины $D(x, y, \lambda)$ и $D(\lambda)$ принято называть соответственно минорами и определителем Фредгольма.

Как уже отмечалось, предложенный вывод формулы (56.8) имеет иллюстративный характер. Существует и строгий (хотя и довольно громоздкий) вывод формулы (56.8) (см., например, [56]). Не вдаваясь в подробности, отметим его основные моменты. Прежде всего, из условия (54.4) доказывается сходимость рядов (56.9) и (56.10) к целым, аналитическим по λ функциям. Затем, исходя из формул (56.12), (56.13), выводится следующая зависимость между функциями (рядами) $D(x, y, \lambda)$ и $D(\lambda)$:

$$D(x, y, \lambda) = D(\lambda)K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, z)D(z, y, \lambda)dz, \quad (56.15)$$

которая соответствует интегральному уравнению

$$R(x, y, \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, z)R(z, y, \lambda)dz \quad (56.16)$$

для резольвенты $R(x, y, \lambda)$.

◇ Уравнение (56.16) можно получить непосредственно из соотношений (54.3) и (54.5). Действительно, подставим (54.5) в (54.3) и получим

$$f(x) + \lambda \int_a^b R(x, y, \lambda) f(y) dy - \\ - \lambda \int_a^b K(x, y) \left\{ f(y) + \lambda \int_a^b R(y, z, \lambda) f(z) dz \right\} dy = f(x)$$

или

$$\int_a^b R(x, y, \lambda) f(y) dy - \int_a^b dy \int_a^b dz K(x, y) \lambda R(y, z, \lambda) f(z) - \\ - \int_a^b dy K(x, y) f(y) = 0.$$

Заменяя во втором интеграле y на z , а z на y , получим

$$\int_a^b dy f(y) \left\{ R(x, y, \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, z) R(z, y, \lambda) dz - K(x, y) \right\} = 0.$$

В силу произвольности функции $f(x)$ получим

$$R(x, y, \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, z) R(z, y, \lambda) dz = K(x, y).$$

Таким образом, приходим к (56.16).

◇ Помимо уравнения (56.16) резольвента уравнения Фредгольма (54.3) как функция y удовлетворяет уравнению

$$R(x, y, \lambda) - \lambda \int_a^b K(z, y) R(x, z, \lambda) dz = K(x, y), \quad (56.17)$$

где x – фиксированное число.

Действительно, из (54.3) найдем

$$f(x) = u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy$$

и подставим в (54.5). Получим

$$u(x) = u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy + \\ + \lambda \int_a^b R(y, z, \lambda) \left\{ u(y) - \lambda \int_a^b K(y, z)u(z)dz \right\} dy.$$

Следовательно,

$$- \int_a^b K(x, y)u(y)dy + \\ + \int_a^b dy R(x, y, \lambda) \left\{ u(y) - \lambda \int_a^b K(x, y)u(z)dz \right\} = 0.$$

Переобозначив в последнем интеграле $y \rightarrow z$ и $z \rightarrow y$, получим

$$\int_a^b dy u(y) \left\{ -K(x, y) + R(x, y, \lambda) - \lambda \int_a^b R(x, z, \lambda)K(z, y)dz \right\} = 0.$$

В силу произвольности функции $u(x)$ получим

$$K(x, y) = R(x, y, \lambda) - \lambda \int_a^b R(x, z, \lambda)K(z, y)dz,$$

и уравнение (56.17) справедливо.

◇ Таким образом, резольвента $R(x, y, \lambda)$ как функция переменных x и y определяется только ядром и не зависит от $f(x)$. Если решение уравнения (54.3) существует, оно представимо в виде (54.5).

Теперь решение (56.8) можно получить, исходя только из уравнения (56.16). Действительно, пусть $u(x)$ – некоторое решение уравнения (54.3). Умножим это уравнение на $\lambda R(z, x, \lambda)$ и проинтегрируем по x . С учетом (56.16) получим

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^b R(z, x, \lambda) u(x) dx &= \lambda \int_a^b R(z, x, \lambda) f(x) dx + \\ &+ \lambda \int_a^b [R(z, y, \lambda) - K(z, y)] u(y) dy. \end{aligned}$$

Приведа подобные члены и еще раз использовав соотношение (54.3), получим уравнение

$$u(z) = f(z) + \lambda \int_a^b R(z, y, \lambda) f(y) dy, \quad (56.18)$$

которое после переобозначения z на x полностью совпадает с (56.8).

Из формулы (56.18) следует, что решение интегрального уравнения практически полностью определяется резольвентой $R(x, y, \lambda)$, являющейся ядром интеграла (56.18). Поэтому резольвенту $R(x, y, \lambda)$ иногда называют разрешающим ядром ядра $K(x, y)$.

Подводя итог вышесказанному, можно утверждать, что справедлива

Теорема 56.1. *Если значение λ не является нулем определителя Фредгольма $D(\lambda)$, то уравнение (54.3) при любой функции $f(x)$ имеет единственное решение, задаваемое формулой (56.18), в которой резольвента $R(x, y, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (56.16) или определяется через определители Фредгольма согласно (56.14).*

Следствие 56.1.1. Если $f(x) = 0$, то однородное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) u(y) dy \quad (56.19)$$

не имеет непрерывного решения, кроме тривиального $u(x) = 0$.

Доказательство следует непосредственно из (54.3) и (56.18).

Пример 56.1. Построить резольвенту ядра $K(x, y) = xe^y$ в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ ($a = 0$, $b = 1$) и с ее помощью найти решение уравнения

$$u(x) = e^{-x} + \lambda \int_0^1 K(x, y)u(y)dy, \quad \lambda \neq 1.$$

Решение. Согласно (56.11)–(56.13), имеем

$$B_0(x, y) = K(x, y) = xe^y, \quad C_0 = 1;$$

$$B_1(x, y) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^y & xe^{y_1} \\ y_1 e^y & y_1 e^{y_1} \end{vmatrix} dy_1 = 0, \quad C_1 = \int_0^1 y_1 e^{y_1} dy_1 = 1;$$

$$B_2(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^y & xe^{y_1} & xe^{y_2} \\ y_1 e^y & y_1 e^{y_1} & y_1 e^{y_2} \\ y_2 e^y & y_2 e^{y_1} & y_2 e^{y_2} \end{vmatrix} dy_1 dy_2 = 0,$$

$$C_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} y_1 e^{y_1} & y_1 e^{y_2} \\ y_2 e^{y_1} & y_2 e^{y_2} \end{vmatrix} dy_1 dy_2 = 0.$$

Очевидно, что все последующие $B_n(x, y)$ и C_n равны нулю. Тогда

$$D(x, y, \lambda) = B_0(x, y) = xe^y, \quad D(\lambda) = 1 - \lambda$$

и соответственно

$$R(x, y, \lambda) = \frac{D(x, y, \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{xe^y}{1 - \lambda}.$$

С учетом полученного выражения и формулы (54.5) решение интегрального уравнения с $f(x) = e^{-x}$ имеет вид

$$u(x) = e^{-x} + \lambda \int_0^1 \frac{xe^y}{1 - \lambda} e^{-y} dy = e^{-x} + \frac{x}{1 - \lambda}, \quad \lambda \neq 1.$$

◇ Отметим, что построение резольвенты по формулам (56.9)–(56.14) возможно лишь в очень редких случаях. Тем не менее, из этих формул можно вывести следующее полезное утверждение.

Утверждение 56.1. Для коэффициентов $B_n(x, y)$ и C_n справедливы рекуррентные соотношения

$$B_n(x, y) = C_n K(x, y) - n \int_a^b K(x, z) B_{n-1}(z, y) dz; \quad (56.20)$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(z, z) dz. \quad (56.21)$$

Действительно, формула (56.21) очевидным образом вытекает из сравнения (56.12) и (56.13). Для вывода соотношения (56.20) воспользуемся уравнением (56.15)

$$D(x, y, \lambda) = K(x, y) D(\lambda) + \lambda \int_a^b K(x, z) D(z, y, \lambda) dz.$$

Подставив в эту формулу вместо $D(\lambda)$ и $D(z, y, \lambda)$ ряды (56.9), (56.10) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ , придем к формуле (56.20).

Формулы (56.20), (56.21) дают возможность простого последовательного вычисления коэффициентов $B_n(x, y)$ и C_n и, следовательно, $R(x, y, \lambda)$ следующим образом. Положив в (56.21) $n = 1$ и приняв во внимание, что $B_0(x, y) = K(x, y)$, получим из этой формулы C_1 . Затем из формулы (56.20) при $n = 1$ получим $B_1(x, y)$ при условии, что $C_0 = 1$. На следующем шаге при $n = 2$ из формулы (56.21) найдем C_2 , а из (56.20) — $B_2(x, y)$ и т.д.

Пример 56.2. Построить резольвенту ядра $K(x, y) = \sin(x + y)$ в квадрате $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ ($a = 0, b = 2\pi$) и с ее помощью найти решение уравнения

$$u(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x + y) u(y) dy = 1 \quad (56.22)$$

при условии $\lambda \neq \pm\sqrt{2}/(2\pi)$.

Решение. Согласно (56.12), (56.13), имеем $C_0 = 1$, $B_0(x, y) = K(x, y) = \sin(x + y)$. С помощью формулы (56.21) найдем

$$C_1 = \int_0^{2\pi} \sin 2z \, dz = 0.$$

По формуле (56.20) получим

$$B_1(x, y) = - \int_0^{2\pi} \sin(x + z) \sin(z + y) \, dz = -\pi \cos(x - y).$$

Далее имеем

$$C_2 = \int_0^{2\pi} [-\pi \cos 0] \, dz = -2\pi^2;$$

$$B_2(x, y) = -2\pi^2 \sin(x + y) -$$

$$-2 \int_0^{2\pi} \sin(x + z) [-\pi \cos(z - y)] \, dz = 0;$$

$$C_3 = C_4 = \dots = 0, \quad B_3(x, y) = B_4(x, y) = \dots = 0.$$

Следовательно,

$$D(\lambda) = 1 - 2\pi^2\lambda^2, \quad D(x, y, \lambda) = \sin(x + y) + \lambda\pi \cos(x - y),$$

$$R(x, y, \lambda) = \frac{\sin(x + y) + \lambda\pi \cos(x - y)}{1 - 2\pi^2\lambda^2}.$$

Явный вид резольвенты позволяет записать решение интегрального уравнения (56.22) в виде

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^{2\pi} \frac{\sin(x + y) + \lambda\pi \cos(x - y)}{1 - 2\pi^2\lambda^2} \, dy = 1.$$

Подставив $u(x) = 1$ в (56.22), убеждаемся в правильности полученного решения

$$1 - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x + y) \, dy = 1.$$

В заключение рассмотрим две теоремы, полезные при дальнейшем исследовании интегральных уравнений.

Теорема 56.2. *Всякий нуль функции $D(\lambda)$ является полюсом резольвенты $R(x, y, \lambda)$.*

Доказательство. Пусть λ_0 – нуль функции $D(\lambda)$ кратности n , т.е.

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n D_0(\lambda), \quad D_0(\lambda_0) \neq 0.$$

Положим в формуле (56.10) $x = y$ и проинтегрируем по x . Тогда

$$\int_a^b D(x, x, \lambda) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n B_n(x, x)}{n!} dx$$

или с учетом (56.20) и (56.21)

$$\int_a^b D(x, x, \lambda) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n C_{n+1}}{n!} = -\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}. \quad (56.23)$$

Предположим теперь, что λ_0 является еще и нулем функции $D(x, y, \lambda)$ кратности k , т.е.

$$D(x, y, \lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k D_0(x, y, \lambda),$$

где $D_0(x, y, \lambda_0)$ – ряд по целым положительным степеням $(\lambda - \lambda_0)$, свободный член которого отличен от нуля при некоторых значениях x и y . Тогда в силу (56.23)

$$-\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = (\lambda - \lambda_0)^k \int_a^b D_0(x, x, \lambda) dx.$$

Левая часть полученного уравнения как производная от $D(\lambda)$ имеет корень $\lambda - \lambda_0$ кратности $n - 1$, тогда как в правой части уже имеется множитель $(\lambda - \lambda_0)^k$ и, кроме того, может случиться, что после интегрирования по x выделится еще целая положительная степень $\lambda - \lambda_0$. Это приводит нас к неравенству $k \leq n - 1$, означающему, что если $\lambda = \lambda_0$ и является нулем функции $D(x, y, \lambda)$, то его кратность, во всяком случае, ниже n – кратности нуля функции $D(\lambda)$. Последнее означает, что λ_0 – полюс резольвенты $R(x, y, \lambda)$.

Теорема 56.3. Если λ_0 является полюсом резольвенты неоднородного уравнения (56.1), то соответствующее ему однородное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy \quad (56.24)$$

имеет нетривиальное решение.

Доказательство. Пусть λ_0 – полюс резольвенты $R(x, y, \lambda)$ кратности n . Тогда в окрестности точки λ_0 справедливо разложение

$$R(x, y, \lambda) = \frac{a_{-n}(x, y)}{(\lambda - \lambda_0)^n} + \dots \\ \dots + \frac{a_{-1}(x, y)}{\lambda - \lambda_0} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, y)(\lambda - \lambda_0)^k, \quad (56.25)$$

в котором коэффициент $a_{-n}(x, y)$ не равен тождественно нулю и является непрерывной функцией своих аргументов в $E \times E$. Подставив (56.25) в (56.16), умножив обе части на $(\lambda - \lambda_0)^n$ и положив затем $\lambda = \lambda_0$, получим

$$a_{-n}(x, y) = \lambda_0 \int_a^b K(x, z)a_{-n}(z, y)dz.$$

Таким образом, коэффициент $a_{-n}(x, y)$ как функция аргумента x при любом значении y является решением однородного уравнения (56.24). Учтем, что $a_{-n}(x, y)$ не является тождественным нулем и удовлетворяет уравнению (56.24), и можем считать $a_{-n}(x, y)$ нетривиальным решением однородного уравнения (56.24).

57. Построение резольвенты уравнения Фредгольма с помощью итерированных ядер. Ряд Неймана

Рассмотрим уравнение Фредгольма

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy + f(x). \quad (57.1)$$

Решение этого уравнения, в отличие от предыдущего раздела, будем искать в виде разложения по степеням параметра λ :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(x), \quad (57.2)$$

где функции $u_n(x)$ не зависят от λ и подлежат определению. Будем предполагать, что существует область значений параметра λ , для которых ряд (57.2) сходится равномерно. Подставим (57.2) в (57.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(x) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K(x, y) u_n(y) dy = f(x).$$

Положим $n + 1 = k$, тогда

$$u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \left\{ u_k(x) - \int_a^b K(x, y) u_{k-1}(y) dy \right\} = f(x).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим

$$\begin{cases} u_0(x) = f(x), \\ u_n(x) = \int_a^b K(x, y) u_{n-1}(y) dy, \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (57.3)$$

Распишем подробнее систему (57.3):

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_a^b K(x, y) f(y) dy, \\ u_2(x) &= \int_a^b dy \int_a^b dy_1 K(x, y_1) K(y_1, y) f(y), \\ &\dots\dots\dots, \\ u_n(x) &= \int_a^b dy \int_a^b dy_1 \dots \int_a^b dy_{n-1} K(x, y_1) K(y_1, y_2) \dots \\ &\quad \dots K(y_{n-1}, y) f(y). \end{aligned}$$

Обозначим

$$K_n(x, y) = \int_a^b dy_1 \int_a^b dy_2 \dots \int_a^b dy_{n-1} K(x, y_1) K(y_1, y_2) \dots K(y_{n-1}, y), \quad (57.4)$$

тогда

$$u_n(x) = \int_a^b K_n(x, y) f(y) dy, \quad n \geq 1. \quad (57.5)$$

◆ Функция $K_n(x, y)$ (57.4) называется n -м итерированным (или повторным) ядром.

◇ Для итерированных ядер из (57.4) вытекает следующее рекуррентное соотношение:

$$K_n(x, y) = \int_a^b K(x, z) K_{n-1}(z, y) dz, \quad n = \overline{2, \infty}. \quad (57.6)$$

Здесь мы использовали обозначение $K_1(x, y) = K(x, y)$. Воспользовавшись рекуррентным соотношением (57.6) m раз, получим

$$K_n(x, y) = \int_a^b K_n(x, z) K_{n-m}(z, y) dz. \quad (57.7)$$

Подставив (57.5) в (57.2), найдем

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \int_a^b K_n(x, y) f(y) dy. \quad (57.8)$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования, запишем

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, y, \lambda) f(y) dy. \quad (57.9)$$

Здесь обозначено

$$R(x, y, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, y). \quad (57.10)$$

♦ Ряд (57.10) называется рядом Неймана для резольвенты ядра $K(x, y)$.

Теорема 57.1. *Если ядро $K(x, y)$ непрерывно по переменным $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$, а функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то ряд (57.8) равномерно сходится к функции $u(x)$, являющейся решением уравнения (57.1).*

Доказательство. Так как ядро $K(x, y)$ непрерывно в области $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$, то $|K(x, y)| \leq A$, так же как $|f(x)| \leq B$ при $x \in [a, b]$. А так как $|K(x, y)| \leq A$, то $|K_n(x, y)| \leq A^n (b-a)^{n-1}$. Отсюда следует оценка интеграла

$$\left| \int_a^b K_n(x, y) f(y) dy \right| \leq A^n (b-a)^{n-1} \int_a^b f(y) dy \leq A^n B (b-a)^n.$$

Следовательно, числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} B A^n |\lambda|^n (b-a)^n \quad (57.11)$$

является мажорирующим для (57.8). При

$$|\lambda| < \frac{1}{A(b-a)} \quad (57.12)$$

ряд (57.11) сходится и, следовательно, ряд (57.8) сходится равномерно, что и требовалось доказать.

♦ Условие (54.4) позволяет более точно определить область сходимости ряда Неймана. Действительно, неравенство

$$|\lambda| < \left[\int_a^b \int_a^b K^2(x, y) dx dy \right]^{-1/2} \quad (57.13)$$

в силу соотношения

$$A^2 (b-a)^2 \geq \int_a^b \int_a^b K^2(x, y) dx dy$$

расширяет область сходимости ряда (57.10) по сравнению с (57.13). Если же ряд (57.10) допускает аналитическое продолжение через границу

$$\lambda = \left[\int_a^b \int_a^b K^2(x, y) dx dy \right]^{-1/2}$$

на любую конечную область комплексной плоскости λ (кроме особых точек этой области), то по формуле (57.9) мы получим решение уравнения (57.1) для всех λ , за исключением особых точек.

Более того, ниже будут приведены примеры, когда ряд Неймана и, следовательно, резольвента $R(x, y)$ вообще не зависит от λ .

Пример 57.1. Решить уравнения

$$\text{а) } u(x) - \lambda \int_{-1}^1 xy u(y) dy = x + 1;$$

$$\text{б) } u(x) - \lambda \int_{-1}^1 x^2 y^2 u(y) dy = x^2.$$

Решение. а) Здесь $K(x, y) = xy$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x + 1$. Согласно (57.5), найдем

$$K_1(x, y) = xy;$$

$$K_2(x, y) = \int_{-1}^1 (xz)(zy) dz = \frac{2}{3} xy;$$

$$K_3(x, y) = \int_{-1}^1 (xz) \left(\frac{2}{3} zy \right) dz = \left(\frac{2}{3} \right)^2 xy;$$

.....;

$$K_n(x, y) = \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} xy;$$

.....

Полученная последовательность итерированных ядер дает возможность записать ряд (57.10) для резольвенты

$$R(x, y, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} xy \left(\frac{2\lambda}{3}\right)^{n-1},$$

сходящийся к

$$R(x, y, \lambda) = xy \frac{1}{1 - 2\lambda/3} = \frac{3xy}{3 - 2\lambda},$$

если $|\lambda| < 3/2$, что также следует из неравенства

$$|\lambda| < \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xy)^2 dx dy \right]^{-1/2} = \frac{3}{2}.$$

Явный вид резольвенты позволяет записать решение уравнения в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= x + 1 + \lambda \int_{-1}^1 \frac{3xy}{3 - 2\lambda} (y + 1) dy = \\ &= x + 1 + \frac{2\lambda x}{3 - 2\lambda} = 1 + \frac{3x}{3 - 2\lambda}. \end{aligned} \quad (57.14)$$

Отметим, что функция (57.14) является решением не только для $|\lambda| < 3/2$, но и для $|\lambda| > 3/2$, что легко проверить непосредственной подстановкой. Это возможно в силу того, что ряд Неймана допускает аналитическое продолжение через границу

$$|\lambda| = \frac{3}{2},$$

на которой точка $\lambda = 3/2$ является простым полюсом резольвенты $R(x, y, \lambda)$.

б) Здесь $K(x, y) = x^2 y^2$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x^2$. Аналогично случаю а) с учетом соотношения

$$\int_{-1}^1 z^4 dz = \frac{2}{5}$$

найдем

$$K_n(x, y) = \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} x^2 y^1,$$

и, следовательно,

$$R(x, y, \lambda) = \frac{5x^2 y^2}{5 - 2\lambda}.$$

Последнее выражение получено для $|\lambda| < 5/2$. Но так же как и в случае а), ряд Неймана допускает аналитическое продолжение через границу

$$|\lambda| = \frac{5}{2}.$$

Решение уравнения имеет вид

$$u(x) = x^2 + \lambda \int_{-1}^1 \frac{5x^2 y^4}{5 - 2\lambda} dy = \frac{5x^2}{5 - 2\lambda}. \quad (57.15)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция (57.15) является решением исходного уравнения.

◆ Ядра $L(x, y)$ и $M(x, y)$ называются ортогональными на $[a, b] \times [a, b]$, если

$$\int_a^b L(x, z)M(z, y)dz = \int_a^b M(x, z)L(z, y)dz = 0. \quad (57.16)$$

◇ Существуют ядра, ортогональные сами себе.

Пример 57.2. Показать, что

а) ядра $L(x, y) = xy$ и $M(x, y) = (xy)^2$ ортогональны на $[-1, 1] \times [-1, 1]$;

б) ядро $K(x, y) = \cos(x - 2y)$ ортогонально само себе на $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

Решение. Согласно (57.16), имеем

а) для $L(x, y)$ и $M(x, y)$

$$\int_{-1}^1 (xz)(zy)^2 dz = xy^2 \int_{-1}^1 z^3 dz = 0,$$

$$\int_{-1}^1 (xz)^2(zy) dz = x^2 y \int_{-1}^1 z^3 dz = 0,$$

откуда и следует их ортогональность;

$$\text{б) для } L(x, y) = M(x, y) = K(x, y) = \cos(x - 2y)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x - 2z) \cos(z - 2y) dz = \\ & = \frac{1}{2} \left[-\sin(x - 2y - z) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{3} \sin(x + 2y - 3z) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = 0. \end{aligned}$$

◇ Ортогональные сами себе ядра обладают важной особенностью: резольвента такого ядра не зависит от параметра λ и, более того, совпадает с самим ядром, т.е.

$$R(x, y, \lambda) = K(x, y),$$

поскольку ряд Неймана вырождается в этом случае в одно слагаемое $K(x, y)$, так как $K_2(x, y)$ и все последующие $K_n(x, y)$ равны нулю.

Пример 57.3. Решить уравнение

$$u(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x - 2y) u(y) dy = x.$$

Решение. Так как ядро интегрального уравнения ортогонально само себе (см. пример 57.2), то

$$R(x, y, \lambda) = \cos(x - 2y)$$

и, следовательно,

$$u(x) = x + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x - 2y) y dy = x - \lambda \pi \sin x.$$

◇ Рассмотрим ядро $K(x, y)$, представляющее собой сумму двух ортогональных на $\bar{E} \times \bar{E}$ ядер $L(x, y)$ и $M(x, y)$. Вычислим для него второе итерированное ядро

$$\begin{aligned} K_2(x, y) &= \int_a^b K(x, z) K(z, y) dz = \\ &= \int_a^b [L(x, z) + M(x, z)][L(z, y) + M(z, y)] dz. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (57.16) имеем

$$K_2(x, y) = L_2(x, y) + M_2(x, y),$$

где $L_2(x, y)$ и $M_2(x, y)$ – вторые итерированные ядра соответственно ядер $L(x, y)$ и $M(x, y)$.

Продолжив вычисление итерированных ядер $K_n(x, y)$, с учетом (57.8) и (57.16) найдем

$$K_n(x, y) = L_n(x, y) + M_n(x, y). \quad (57.17)$$

Из соотношения (57.17) вытекает, что

$$R(x, y, \lambda) = R_L(x, y, \lambda) + R_M(x, y, \lambda). \quad (57.18)$$

Таким образом, резольвента, соответствующая ядру $K(x, y) = L(x, y) + M(x, y)$, состоящему из двух ортогональных ядер $L(x, y)$ и $M(x, y)$, равна сумме резольвент $R_L(x, y, \lambda)$, $R_M(x, y, \lambda)$, соответствующих каждому из этих ядер.

Пример 57.4. Решить уравнение

$$u(x) - \lambda \int_{-1}^1 xy(1 + xy)u(y)dy = x + 1.$$

Решение. Ядро уравнения $K(x, y)$ можно представить в виде

$$K(x, y) = L(x, y) + M(x, y),$$

где

$$L(x, y) = xy, \quad M(x, y) = (xy)^2.$$

В примере 57.2 показано, что ядра $L(x, y)$ и $M(x, y)$ ортогональны на $[-1, 1] \times [-1, 1]$. В примере 57.1 найдены резольвенты, соответствующие этим ядрам:

$$R_L(x, y, \lambda) = \frac{3xy}{3 - 2\lambda}, \quad R_M(x, y, \lambda) = \frac{5x^2y^2}{5 - 2\lambda}.$$

Тогда с учетом (57.18) получим

$$R(x, y, \lambda) = R_L(x, y, \lambda) + R_M(x, y, \lambda) = \frac{3xy}{3 - 2\lambda} + \frac{5x^2y^2}{5 - 2\lambda},$$

откуда

$$u(x) = 1 + \frac{3x}{3 - 2\lambda} + \frac{10}{3} \frac{\lambda x^2}{5 - 2\lambda}.$$

58. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами

◆ Ядро $K(x, y)$ называется вырожденным, если его можно представить в виде

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(y), \quad n < \infty, \quad (58.1)$$

где $a_i(x)$ и $b_i(y)$, $i = \overline{1, n}$, – семейства линейно независимых функций.

◇ Интегральные уравнения с вырожденными ядрами сводятся к системам линейных алгебраических уравнений и, следовательно, могут быть решены известными методами линейной алгебры.

Подставим ядро (58.1) в уравнение (54.3):

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy = f(x). \quad (58.2)$$

Тогда имеем

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n C_i a_i(x), \quad (58.3)$$

где

$$C_i = \int_a^b b_i(y)u(y)dy.$$

Подставив (58.3) в (58.2), получим

$$\sum_{i=1}^n a_i \left\{ C_i - \lambda \sum_{j=1}^n C_j \alpha_{ij} - \beta_i \right\} = 0, \quad (58.4)$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_a^b a_j(y)b_i(y)dy, \quad \beta_i = \int_a^b f(y)b_i(y)dy.$$

Так как a_i – линейно независимые функции, то выражение (58.4) равно нулю тогда и только тогда, когда выражение в

фигурной скобке равно нулю. Отсюда получим систему алгебраических уравнений

$$C_i = \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} C_j + \beta_i, \quad (58.5)$$

определитель которой зависит от параметра λ . Если определитель системы не равен нулю, то она имеет единственное решение. Решив эту систему, найдем C_i , а, следовательно, по формуле (58.3) определим $u(x)$.

Пример 58.1. Решить уравнение

$$u(x) = x + \lambda \int_0^1 (xy^2 + x^2y)u(y)dy. \quad (58.6)$$

Решение. Здесь

$$f(x) = x, \quad a_1(x) = x, \quad a_2(x) = x^2, \quad b_1(y) = y^2, \quad b_2(y) = y.$$

Следовательно, согласно (58.3) и (58.4),

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{4}, & \alpha_{12} &= \frac{1}{5}, & \beta_1 &= \frac{1}{4}; \\ \alpha_{21} &= \frac{1}{3}, & \alpha_{22} &= \frac{1}{4}, & \beta_2 &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

а система (58.5) примет вид

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)C_1 - \frac{\lambda}{5}C_2 &= \frac{1}{4}, \\ -\frac{\lambda}{3}C_1 + \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)C_2 &= \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (58.7)$$

Решение системы найдем методом Крамера. Для этого вычислим

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{4} & -\frac{\lambda}{5} \\ -\frac{\lambda}{3} & 1 - \frac{\lambda}{4} \end{vmatrix} = \frac{240 - 120\lambda - \lambda^2}{240}, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\lambda}{5} \\ \frac{1}{3} & 1 - \frac{\lambda}{4} \end{vmatrix} = \frac{60 + \lambda}{240}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\lambda}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Тогда

$$C_1 = \frac{60 + \lambda}{240 - 120\lambda - \lambda^2}, \quad C_2 = \frac{80}{240 - 120\lambda - \lambda^2}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} u(x) &= x + \lambda x \frac{60 + \lambda}{240 - 120\lambda - \lambda^2} + \lambda x^2 \frac{80}{240 - 120\lambda - \lambda^2} = \\ &= \frac{240x - 60\lambda x + 80\lambda x^2}{240 - 120\lambda - \lambda^2}. \end{aligned} \quad (58.8)$$

◇ Существуют два значения λ , при которых решение уравнения (58.6), согласно (58.8), не существует. Такие λ , как уже отмечалось, соответствуют характеристическим числам, к рассмотрению свойств которых мы и переходим.

59. Характеристические числа и собственные функции

Обратимся теперь к однородному уравнению Фредгольма

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy = 0. \quad (59.1)$$

Как уже отмечалось, это уравнение всегда имеет тривиальное решение $u(x) = 0$.

◆ Значения параметра λ , при которых уравнение (59.1) имеет нетривиальные решения, называются характеристическими числами уравнения (59.1) или ядра этого уравнения, а каждое нетривиальное решение, соответствующее характеристическому числу λ , – собственной функцией.

◇ Иногда вместо характеристических чисел λ рассматривают собственные значения $\mu = 1/\lambda$.

◇ Число $\lambda = 0$ не является характеристическим, так как, согласно (59.1), ему соответствует тривиальное решение $u(x) = 0$.

◇ Собственные функции определяются с точностью до произвольной постоянной C . Так, если $u(x)$ – собственная функция, соответствующая характеристическому числу λ , то $Cu(x)$ – собственная функция, соответствующая тому же характеристическому числу λ .

♦ Рангом характеристического числа λ называется число линейно независимых собственных функций, соответствующих этому числу.

Заметим, что в соответствии с теоремами 56.2 и 56.3 характеристические числа можно определить как нули определителя Фредгольма $D(\lambda)$ или полюсы резольвенты $R(x, y, \lambda)$ ядра $K(x, y)$. Отсюда следует, что уравнение (59.1) может иметь конечное или бесконечное множество характеристических чисел или вообще их не иметь.

◇ Характеристические числа уравнения (59.1) оказываются полезными при решении неоднородного уравнения Фредгольма

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy = f(x). \quad (59.2)$$

С их помощью можно сформулировать так называемую альтернативу Фредгольма, вытекающую из теорем 56.1–56.3.

Теорема 59.1 (альтернатива Фредгольма). *Либо неоднородное уравнение (59.2) имеет единственное решение для любой функции $f(x) \in L_2(a, b)$, либо соответствующее однородное уравнение (59.1) имеет по крайней мере одно нетривиальное решение.*

Другими словами, уравнение (59.2) будет иметь единственное решение только в том случае, если параметр λ не является характеристическим числом однородного уравнения (59.1). В противном случае решения либо вообще не существует, либо оно, как мы увидим ниже, не единственно.

Рассмотрим задачу нахождения характеристических чисел и собственных функций для некоторых классов интегральных уравнений.

59.1. Уравнения с вырожденным ядром

Рассмотрим интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$u(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(y) \right] u(y)dy = 0. \quad (59.3)$$

Собственные функции будем искать в виде (58.3), положив там $f(x) = 0$. Тогда для коэффициентов C_k вместо неоднородной

системы (58.5) получим однородную:

$$C_i = \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} C_j. \quad (59.4)$$

Условием существования нетривиального решения однородной системы (59.4) является равенство нулю ее определителя

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \dots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1 - \lambda\alpha_{22} & \dots & -\lambda\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \dots & 1 - \lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (59.5)$$

Алгебраическое уравнение (59.5) является уравнением для нахождения характеристических чисел λ . Если уравнение (59.5) имеет m ($1 \leq m \leq n$) корней, то интегральное уравнение (59.1) имеет m характеристических чисел. Каждому характеристическому числу λ_l ($l = \overline{1, m}$) соответствует ненулевое решение системы (59.5):

$$C_1^{(l)}, C_2^{(l)}, \dots, C_n^{(l)}, \quad l = \overline{1, m}, \quad (59.6)$$

с собственной функцией

$$u_l(x) = \sum_{k=1}^n C_k^{(l)} a_k(x), \quad l = \overline{1, m}. \quad (59.7)$$

Пример 59.1. Найти характеристические числа λ и отвечающие им собственные функции уравнения Фредгольма

$$u(x) - \lambda \int_0^1 (xy^2 + x^2y)u(y)dy = 0. \quad (59.8)$$

Решение. С учетом результатов примера 58.1 собственные функции ищем в виде

$$u(x) = \lambda C_1 x + \lambda C_2 x^2, \quad (59.9)$$

где C_1, C_2 удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)C_1 - \frac{\lambda}{5}C_2 &= 0, \\ -\frac{\lambda}{3}C_1 + \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)C_2 &= 0, \end{aligned} \quad (59.10)$$

вытекающей из (58.5).

Поскольку определитель $\Delta(\lambda)$ системы (59.10) равен

$$\Delta(\lambda) = \frac{240 - 120\lambda - \lambda^2}{240},$$

то характеристические числа являются решениями квадратного уравнения

$$240 - 120\lambda - \lambda^2 = 0. \quad (59.11)$$

Отсюда

$$\lambda_{1,2} = \frac{-120 \pm 32\sqrt{15}}{2} = -60 \pm 16\sqrt{15}$$

или

$$\lambda_l = -60 + (-1)^l 16\sqrt{15}, \quad l = 1, 2. \quad (59.12)$$

Подставив (59.12) в систему (59.10), найдем ее нетривиальные решения

$$C_1^{(l)}, \quad C_2^{(l)} = \frac{5(4 - \lambda_l)}{4\lambda_l} C_1^{(l)}$$

и соответственно собственные функции уравнения (59.8)

$$u_l(x) = C_1^{(l)} \left[\lambda_l x + \frac{5}{4}(4 - \lambda_l)x^2 \right],$$

где λ_l определяются формулой (59.12), причем их ранг, согласно (59.10), равен единице.

59.2. Уравнения с симметричным ядром

◆ Вещественное ядро, для которого

$$K(x, y) = K(y, x), \quad (59.13)$$

называется симметричным.

Справедливо следующее

Утверждение 59.1. *Итерированные ядра $K_n(x, y)$ симметричного ядра $K(x, y)$ также симметричны, причем $K_n(x, y)$, $n = \overline{1, \infty}$, не равны тождественно нулю.*

Действительно, первое утверждение следует непосредственно из (59.7) и (59.13). Для доказательства второго допустим, что $K_p(x, y) \equiv 0$ при $2^{n-1} < p \leq 2^n$. Тогда, согласно (57.7),

$$\begin{aligned} K_{2^n}(x, x) &= \int_a^b K_{2^{n-1}}(x, z)K_{2^n-2^{n-1}}(z, x)dz = \\ &= \int_a^b [K_{2^{n-1}}(x, z)]^2 dz = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $K_{2^{n-1}}(x, y) \equiv 0$. Применяв подобное преобразование n раз, приходим к равенству $K_1(x, y) = K(x, y) = 0$, что противоречит начальному условию $K(x, y) \not\equiv 0$. Полученное противоречие и доказывает второе утверждение.

Теорема 59.2 (Шмидта). *Если ядро $K(x, y)$ уравнения (59.1) симметрично, то оно имеет по меньшей мере одно характеристическое число.*

Доказательство. Теорема будет доказана, если мы покажем, что резольвента уравнения (59.1) имеет по меньшей мере один полюс или, что то же самое, функция $D(\lambda)$ имеет по меньшей мере один нуль, т.е. определитель Фредгольма для симметричного ядра не может быть функцией, не имеющей нулей вообще.

Воспользуемся равенствами (56.23) и (57.6) и получим

$$-\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = \int_a^b D(x, x, \lambda)dx = \int_a^b \frac{R(x, x, \lambda)}{D(\lambda)}dx = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{n=1}^{\infty} k_n \lambda^{n-1}$$

или

$$-\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \lambda^{n-1}, \quad (59.14)$$

где

$$k_n = \int_a^b K_n(x, x)dx.$$

Далее воспользуемся очевидным для вещественных α неравенством

$$\int_a^b \int_a^b [\alpha K_{n-1}(x, y) + K_{n+1}(x, y)]^2 dx dy \geq 0,$$

которое с учетом условия симметрии (59.13) можно преобразовать к виду

$$\alpha^2 k_{2n-2} + 2\alpha k_{2n} + k_{2n+2} \geq 0. \tag{59.15}$$

Из (59.15) в силу вещественности α имеем

$$k_{2n-2} > 0, \quad k_{2n}^2 - k_{2n-2}k_{2n+2} \leq 0.$$

Таким образом, все $k_{2n} > 0$, причем

$$\frac{k_{2n+2}}{k_{2n}} \geq \frac{k_{2n}}{k_{2n-2}}.$$

Положив $k_4/k_2 = \nu$, по индукции находим $k_{2n+2}/k_2 \geq \nu^n$. Тогда, если $\nu \geq |\lambda|^{-2}$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n \lambda^{n-1}$$

расходится, а это означает, что функция $D'(\lambda)/D(\lambda)$ в области $|\lambda| \leq 1/\sqrt{\nu}$ имеет по меньшей мере одну особую точку. Поскольку $D(\lambda)$ – целая функция, то единственно возможными особыми точками функции $D'(\lambda)/D(\lambda)$ являются нули определителя Фредгольма $D(\lambda)$. Поэтому можно утверждать, что $D(\lambda)$ имеет по крайней мере один нуль, $R(x, y, \lambda)$ – один полюс, а интегральное уравнение (59.1) – одно характеристическое число.

Теорема 59.3. *Собственные функции $u_k(x)$, $u_j(x)$ уравнения (59.1) с симметричным ядром, соответствующие различным характеристическим числам $\lambda_k \neq \lambda_j$, ортогональны на отрезке $[a, b]$, т.е.*

$$\int_a^b u_k(x)u_j(x)dx = 0. \tag{59.16}$$

Доказательство. Согласно условиям теоремы, имеем два тождества

$$\frac{u_k(x)}{\lambda_k} = \int_a^b K(x, y)u_k(y)dy, \quad \frac{u_j(x)}{\lambda_j} = \int_a^b K(x, y)u_j(y)dy.$$

Умножим первое из них на $u_j(x)$, второе на $u_k(x)$ и проинтегрируем по x . Тогда

$$\frac{1}{\lambda_k} \int_a^b u_k(x)u_j(x)dx = \int_a^b \int_a^b K(x,y)u_k(y)u_j(x)dx dy,$$

$$\frac{1}{\lambda_j} \int_a^b u_j(x)u_k(x)dx = \int_a^b \int_a^b K(x,y)u_j(y)u_k(x)dx dy.$$

Вычтя из первого уравнения второе, с учетом (59.13) найдем

$$\left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_j}\right) \int_a^b u_k(x)u_j(x)dx = 0$$

или

$$\int_a^b u_k(x)u_j(x)dx = 0,$$

поскольку $\lambda_k \neq \lambda_j$, что и требовалось доказать.

Теорема 59.4. Все характеристические числа уравнения Фредгольма (59.1) с симметричным ядром вещественны, причем ранг r каждого из них не превышает R_λ (т.е. $r \leq R_\lambda$), где

$$R_\lambda = \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K^2(x,y)dx dy. \quad (59.17)$$

Доказательство. 1. Допустим противное: пусть из некоторого множества характеристических чисел число λ_n – комплексное с собственной функцией $u_n(x) = v_n(x) + iw_n(x)$. Далее воспользуемся тождеством

$$u_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x,y)u_n(y)dy,$$

комплексное сопряжение которого дает

$$u_n^*(x) = \lambda_n^* \int_a^b K(x,y)u_n^*(y)dy.$$

Отсюда следует, что λ_n^* также является характеристическим числом с собственной функцией $u_n^*(x) = v_n(x) - iw_n(x)$. Но собственные функции, принадлежащие различным характеристическим числам, ортогональны на отрезке $[a, b]$ и, следовательно,

$$0 = \int_a^b u_n(x)u_n^*(x)dx = \int_a^b [v_n^2(x) + w_n^2(x)]dx \neq 0,$$

что невозможно. Таким образом, $\lambda_n, n = \overline{1, \infty}$, – вещественные характеристические числа.

2. Пусть теперь λ_n – вещественное характеристическое число, которому соответствует r линейно независимых собственных функций

$$u_n^{(1)}(x), u_n^{(2)}(x), \dots, u_n^{(j)}(x), \dots, u_n^{(r)}(x), \quad (59.18)$$

удовлетворяющих одному уравнению

$$\frac{u_n^{(j)}(x)}{\lambda_n} = \int_a^b K(x, y)u_n^{(j)}(y)dy, \quad (59.19)$$

которые без ограничения общности можно считать ортонормированной системой (в противном случае к ним всегда можно применить метод ортогонализации и нормировки), т.е.

$$\int_a^b u_n^{(j)}(x)u_n^{(k)}(x)dx = \delta_{jk}. \quad (59.20)$$

Интеграл в правой части (59.19) есть j -й коэффициент разложения ядра $K(x, y)$ как функции аргумента y в ряд Фурье по ортонормированной системе функций (59.18). Согласно неравенству Бесселя (II.17.15), имеем

$$\sum_{j=1}^r \frac{[u_n^{(j)}(x)]^2}{|\lambda_n|^2} \leq \int_a^b K^2(x, y)dy. \quad (59.21)$$

Интегрирование (59.21) по x с учетом (59.20) дает

$$\sum_{j=1}^r \frac{1}{|\lambda_n|^2} \leq \int_a^b \int_a^b K^2(x, y)dx dy,$$

откуда

$$r \leq |\lambda_n|^2 \int_a^b \int_a^b K^2(x, y) dx dy,$$

что и требовалось доказать.

Выше было установлено, что характеристические числа являются полюсами резольвенты уравнения (59.1) по переменной λ . Следовательно, их совокупность представляет собой либо конечное, либо бесконечное счетное множество. Это позволяет пронумеровать их в порядке возрастания абсолютных величин

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots,$$

причем так, чтобы в этой последовательности характеристическое число ранга r присутствовало именно r раз. Если принять во внимание, что во всякой ограниченной области λ может существовать лишь конечное множество характеристических чисел (полюсов резольвенты), то $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. В соответствии с нумерацией характеристических чисел λ_n пронумеруются и соответствующие им вещественные собственные функции

$$u_1(x), \quad u_2(x), \quad \dots, \quad u_n(x), \quad \dots, \quad (59.22)$$

которые мы без ограничения общности можем считать ортонормированной системой.

◆ Конечную или бесконечную ортонормированную систему функций (59.22) будем называть системой собственных функций ядра $K(x, y)$ или соответствующего ему уравнения (59.1).

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Утверждение 59.2. *Существуют последовательность характеристических чисел $\{\lambda_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$, и соответствующая им последовательность собственных функций $\{u_n(x)\}$, $n = \overline{1, \infty}$ уравнения Фредгольма (59.1) с симметричным ядром, причем все характеристические числа можно пронумеровать в порядке возрастания их абсолютного значения.*

◇ Отметим, что система собственных функций ядра $K(x, y)$ может и не быть замкнутой, как, например, для вырожденного ядра, имеющего конечное число собственных функций. Тем не менее, эта система обладает весьма важным свойством.

Теорема 59.5. Если $K(x, y)$ – непрерывное симметричное ядро уравнения (59.1), то для него справедливо представление с помощью системы его собственных функций (59.22)

$$K(x, y) = \sum_k \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k} \quad (59.23)$$

при условии, что ряд (59.23) сходится равномерно, когда $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$.

Доказательство. Рассмотрим симметричное непрерывное ядро

$$\kappa(x, y) = K(x, y) - \sum_{k=1} \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k}, \quad (59.24)$$

где $u_k(x)$ и λ_k – все собственные функции и соответствующие им характеристические числа ядра $K(x, y)$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что ядро $\kappa(x, y)$ есть тождественный нуль. Предположим противное. Тогда по теореме Шмидта ядро $\kappa(x, y)$ должно иметь по меньшей мере одно характеристическое число μ_1 . Пусть $v_1(x)$ – собственная функция, соответствующая указанному характеристическому числу μ_1 , т.е.

$$v_1(x) = \mu_1 \int_a^b \kappa(x, y)v_1(y)dy. \quad (59.25)$$

Умножив (59.25) на $u_n(x)$ и проинтегрировав, получим

$$\int_a^b u_n(x)v_1(x)dx = \mu_1 \int_a^b \int_a^b \kappa(x, y)v_1(y)u_n(x)dy dx.$$

С учетом представления (59.24), равномерной сходимости ряда

(59.23) и симметрии ядра (59.13) находим

$$\begin{aligned} \int_a^b v_1(x)u_n(x)dx &= \mu_1 \int_a^b \int_a^b K(x,y)v_1(y)u_n(x)dy dx - \\ &- \mu_1 \sum_{k=1}^b \int_a^b \int_a^b \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k} v_1(y)u_n(x)dy dx = \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_n} \int_a^b v_1(y)u_n(y)dy - \frac{\mu_1}{\lambda_n} \int_a^b u_n(y)v_1(y)dy = 0. \end{aligned}$$

Полученное равенство означает, что функция $v_1(x)$ ортогональна собственным функциям $u_n(x)$ ядра $K(x,y)$. Тогда, возвратившись к (59.25), имеем

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \mu_1 \int_a^b \left[K(x,y) - \sum_{k=1} \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k} \right] v_1(y)dy = \\ &= \mu_1 \int_a^b K(x,y)v_1(y)dy, \end{aligned}$$

т.е. μ_1 и $v_1(x)$ являются характеристическим числом и собственной функцией не только ядра $\kappa(x,y)$, но и исходного ядра $K(x,y)$. Но в таком случае характеристическое число μ_1 должно совпадать с одним из характеристических чисел λ_k , а функция $v_1(x)$ должна быть линейной комбинацией собственных функций $u_n^{(k)}(x)$ ядра $K(x,y)$, соответствующих характеристическому числу λ_k . Но ортогональные функции $v_1(x)$ и $u_n^{(k)}(x)$ не могут быть линейно зависимыми. Полученное противоречие доказывает, что ядро $\kappa(x,y)$ тождественно равно нулю и, следовательно, справедливо разложение (59.23).

Приведем несколько очевидных следствий из этой теоремы.

Следствие 59.5.1. Представление (59.23) справедливо и для конечного множества характеристических чисел, т.е.

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^n \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k}. \quad (59.26)$$

Ранее было показано, что вырожденное ядро $K(x, y)$ имеет конечное множество характеристических чисел. Объединение этого свойства со свойством (59.26) позволяет сформулировать

Следствие 59.5.2. Для того чтобы симметричное непрерывное ядро было вырожденным, необходимо и достаточно, чтобы множество его характеристических чисел было конечным.

Доказанная выше теорема неудовлетворительна в том смысле, что в каждом частном случае требуется проверка сходимости ряда (59.23). Отметим, однако, что для симметричных ядер $K(x, y)$, имеющих характеристические числа только одного знака, можно доказать (см., например, [56]) справедливость следующего утверждения.

Теорема 59.6 (Мерсера). Если $K(x, y)$ – непрерывное симметричное ядро с системой собственных функций $\{u_n(x)\}$ – имеет характеристические числа одного знака (за исключением, может быть, конечного количества чисел с противоположным знаком), то ряд (59.23) сходится абсолютно и равномерно для $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$.

Пример 59.2. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения

$$u(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)u(y)dy = 0 \quad (59.27)$$

с симметричным ядром (55.13) при $l = 1$, т.е.

$$K(x, y) = \begin{cases} y(1-x), & 0 < y < x; \\ x(1-y), & x < y < 1. \end{cases}$$

Решение. Представим уравнения (59.27) в виде

$$u(x) - \lambda \int_0^x K(x, y)u(y)dy - \lambda \int_x^1 K(x, y)u(y)dy = 0$$

или

$$u(x) - \lambda \int_0^x y(1-x)u(y)dy - \lambda \int_x^1 x(1-y)u(y)dy = 0. \quad (59.28)$$

Продифференцировав (59.28) по x , найдем

$$u'(x) + \lambda \int_0^x yu(y)dy - \lambda x(1-x)u(x) - \\ - \lambda \int_x^1 (1-y)u(y)dy + \lambda x(1-x)u(x) = 0$$

или

$$u'(x) + \lambda \int_0^x yu(y)dy - \lambda \int_x^1 (1-y)u(y)dy.$$

Повторное дифференцирование дает

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0. \quad (59.29)$$

Уравнение (59.29) нужно дополнить граничными условиями

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (59.30)$$

вытекающими из явного вида ядра: $K(0, y) = K(1, y) = 0$. Уравнение (59.29) с условием (59.30) представляет собой задачу Штурма–Лиувилля, решение которой дано в примере 2.2 части III: спектр собственных значений определяется выражением

$$\lambda = \lambda_n = (\pi n)^2, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (59.31)$$

а ортонормированные собственные функции имеют вид

$$u(x) = u_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x. \quad (59.32)$$

Таким образом, характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения (59.27) совпадают с собственными значениями и собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля (59.29), (59.30) и определяются формулами (59.31) и (59.32).

Рассмотрим сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(y)}{\lambda_n} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi y}{n^2} = \\ = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi(x-y) + \cos n\pi(x+y)}{n^2},$$

которую с использованием известного разложения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kz}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi z}{2} + \frac{z^2}{4}, \quad 0 \leq z \leq 2\pi,$$

можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(y)}{\lambda_n} = \begin{cases} y(1-x), & 0 < y < x; \\ x(1-y), & x < y < 1 \end{cases}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(y)}{\lambda_n} = K(x, y).$$

Таким образом, мы установили, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(y)}{\lambda_n}$$

сходится и его сумма равна ядру исходного интегрального уравнения (59.27). Поскольку все характеристические числа уравнения (59.27) положительны, полученный результат можно было предсказать, исходя из теоремы Мерсера.

Отметим, что ряд

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi y}{n^2} = \\ & = K(x, y) = \begin{cases} y(1-x), & 0 < y < x; \\ x(1-y), & x < y < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (59.33)$$

можно рассматривать либо как ряд Фурье ядра $K(x, y)$ по ортонормированной системе функций $\sqrt{2} \sin n\pi x$ (y – параметр), либо как ряд Фурье ядра $K(x, y)$ по ортонормированной системе функций $2 \sin n\pi x \sin k\pi y$ ($n, k = \overline{1, \infty}$), определенной на квадрате $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Пример 59.3. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$u(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x-y)u(y)dy = 0, \quad (59.34)$$

если ядро $K(x-y)$ является четной функцией, которую можно периодически продолжить на всю ось Ox так, что

$$K(x-y) = K(y-x). \quad (59.35)$$

Решение. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(x-y) \cos ky \, dy,$$

который заменой переменной $x-y = z$ с учетом четности функции $K(z)$ можно записать

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-y) \cos ky \, dy &= \\ &= - \int_{x+\pi}^{x-\pi} K(x) [\cos kx \cos kz + \sin kx \sin kz] dz = \\ &= \cos kx \int_{-\pi}^{\pi} K(z) \cos kz \, dz + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} K(z) \sin kz \, dz = \\ &= \cos kx \int_{-\pi}^{\pi} K(z) \cos kz \, dz = \pi C_k \cos kx, \end{aligned} \quad (59.36)$$

где обозначено

$$\pi C_k = \int_{-\pi}^{\pi} K(z) \cos kz \, dz. \quad (59.37)$$

Аналогично получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(x-y) \sin ky \, dy = \pi C_k \sin kx. \quad (59.38)$$

Возвратившись к уравнению (59.33) и сравнив его с (59.36), (59.38), заключаем, что уравнение (59.33) имеет характеристические числа

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi C_k}, \quad k = \overline{0, \infty}, \quad (59.39)$$

которым соответствует ортонормированная система собственных функций для $n = \overline{1, \infty}$

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad u_n^{(1)}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad u_n^{(2)}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}. \quad (59.40)$$

Характеристические числа определены формулой (59.39) в предположении, что C_k отличны от нуля. Характеристическое число

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(z) dz$$

имеет ранг, равный единице, все остальные λ_n имеют ранг, равный двум (см. пример 2.8 части III).

Система (59.40) замкнута и, следовательно, исчерпывает всю систему собственных функций ядра $K(x - y)$ уравнения (59.33). Разложение ядра $K(x - y)$ по системе собственных функций (59.40), согласно (59.23), имеет вид

$$\begin{aligned} K(x - y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(y)}{\lambda_n} = \\ &= \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (\cos kx \cos ky + \sin kx \sin ky) = \\ &= \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k(x - y) \end{aligned} \quad (59.41)$$

и представляет собой ряд Фурье. Нельзя утверждать, что в общем случае ряд (59.41) сходится, однако если, начиная с некоторого k , все $C_k > 0$ (или $C_k < 0$), то ряд (59.41) сходится к ядру $K(x - y)$ абсолютно и равномерно в силу теоремы Мерсера.

Пример 59.4. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения Фредгольма

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} G(x, y, z) u(y) dy$$

с ядром (II.17.11) [см. также (26.3)]

$$G(x, y, z) = \frac{1 - z^2}{2\pi[1 - 2z \cos(x - y) + z^2]}, \quad |z| < 1. \quad (59.42)$$

Решение. Симметричное ядро (59.42) можно разложить в ряд Тейлора по z

$$G(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cos(x - y). \quad (59.43)$$

Так как $|\cos(x - y)| \leq 1$, то при $|z| < 1$ ряд (59.43) сходится абсолютно и равномерно. Следовательно, его можно почленно интегрировать:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} G(x, y, z) dy &= 1, \\ \int_{-\pi}^{\pi} G(x, y, z) \cos ny dy &= z^n \cos nx, \\ \int_{-\pi}^{\pi} G(x, y, z) \sin ny dy &= z^n \sin nx. \end{aligned}$$

Таким образом, получим характеристические числа

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_{2n-1} = \lambda_{2n} = \frac{1}{z^n}, \quad n = \overline{1, \infty},$$

которым соответствуют ортонормированные собственные функции

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & u_{2n-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \\ u_{2n}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, & n &= \overline{1, \infty}. \end{aligned}$$

Пример 59.5. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения Фредгольма

$$v(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_u(x, y, z) v(y) dy = 0,$$

где ядро $\sigma_u(x, y, z)$ определяется выражением (25.5)

$$\sigma_u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-z^2)}} \exp\left[\frac{4xyz - (1+z^2)(x^2+y^2)}{2(1-z^2)}\right]. \quad (59.44)$$

Решение. С помощью соотношений (25.1) и (25.5) найдем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_u(x, y, z) u_n(y) dy = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi} (1-z^2)} \exp\left[-\frac{x^2(1+z^2)}{2(1-z^2)}\right] \times \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{2xyz - y^2}{1-z^2}\right) H_n(y) dy, \end{aligned}$$

где $u_n(x)$ – функция Эрмита, а $H_n(x)$ – полином Эрмита. Последний интеграл легко вычисляется с учетом формулы (III.24.5), что немедленно приводит к выражению (59.45). Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_u(x, y, z) u_n(y) dy = z^n u_n(x). \quad (59.45)$$

Следовательно, характеристические числа и отвечающие им ортонормированные собственные функции имеют вид

$$\lambda_n = \frac{1}{z^n}, \quad v_n(x) = u_n(x).$$

Пример 59.6. Найти характеристические числа и собственные функции уравнений:

$$\text{а) } u(x) = \lambda \int_0^{\infty} K_\alpha(x, y, z) u(y) dy, \quad (59.46)$$

$$\text{б) } u(x) = \lambda \int_0^{\infty} R_\alpha(x, y, z) u(y) dy, \quad (59.47)$$

где ядра $K_\alpha(x, y, z)$ и $R_\alpha(x, y, z)$ определяются соотношениями

$$K_\alpha(x, y, z) = \frac{z^{-\alpha/2}}{1-z} \exp\left(\frac{z+1}{z-1} \frac{x+y}{2}\right) I_\alpha\left(\frac{\sqrt{xyz}}{1-z}\right), \quad (59.48)$$

$$R_\alpha(x, y, z) = \frac{z^{-\alpha/2}}{1+z} \exp\left(\frac{z-1}{z+1} \frac{x+y}{2}\right) J_\alpha\left(\frac{\sqrt{xyz}}{1+z}\right). \quad (59.49)$$

Здесь α, z – комплексные параметры, причем $\operatorname{Re} \alpha > -1$; $J_\alpha(x)$ – функция Бесселя первого рода, а $I_\alpha(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода.

Решение. 1. Легко заметить, что

$$R_\alpha(x, y, z) = K_\alpha(x, y, -z) \quad (59.50)$$

и ядра $K_\alpha(x, y, z)$ и $R_\alpha(x, y, z)$ симметричны по переменным x и y .

2. Положим в формуле (36.19)

$$a = \frac{1}{2} \frac{1+z}{1-z}, \quad b = \frac{zx}{(1-z)^2}$$

и умножим правую и левую части (36.19) на

$$\frac{z^{-1/2}}{1-z} \exp\left(\frac{z+1}{z-1} \frac{x}{2}\right).$$

Тогда (36.19) запишется с учетом (59.48) в виде

$$\int_0^\infty K_\alpha(x, y, z) I_{\alpha+n, n}(y) dy = (z)^n I_{\alpha+n, n}(x), \quad (59.51)$$

а область $a > 1/2$ переходит в область

$$|2z - 1| < 1. \quad (59.52)$$

Здесь $I_{\alpha, \beta}(x)$ – функция Лагерра.

Положив в формуле (36.22)

$$a = \frac{1}{2} \frac{1-z}{1+z}, \quad b = \frac{zx}{(1+z)^2}, \quad \operatorname{Re} a > \frac{1}{2} \rightarrow |2z + 1| < 1$$

и умножив обе части равенства (36.22) на

$$\frac{z^{-1/2}}{1+z} \exp\left(\frac{z-1}{z+1} \frac{x}{2}\right),$$

с учетом (59.49) получим

$$\int_0^\infty R_\alpha(x, y, z) I_{\alpha+n, n}(y) dy = (ze^{i\pi})^n I_{\alpha+n, n}(x). \quad (59.53)$$

Равенства (59.51) и (59.53) доказывают, что при произвольных n и условии (59.52) функция $u_n(x) = I_{\alpha+n, n}(x)$ есть собственная функция задачи а) с собственным значением $\lambda_n = z^n$, а при

$$|2z + 1| < 1 \quad (59.54)$$

она является собственной функцией задачи б) с собственным значением $\lambda_n = (-z)^n$. Если число n – целое неотрицательное, то область допустимых значений z задачи а) есть

$$\operatorname{Re} z < 1, \quad (59.55)$$

а задачи б)

$$\operatorname{Re} z > -1. \quad (59.56)$$

Область (59.52) есть внутренняя часть круга единичного диаметра, причем окружность проходит через точки $z = 0$, $z = 1$. Область (59.54) – внутренняя часть круга единичного диаметра с границей, проходящей через точки $z = 0$, $z = -1$. Таким образом, области (59.52) и (59.54) не пересекаются, тогда как области (59.55) и (59.56) имеют непустое пересечение

$$-1 < \operatorname{Re} z < 1. \quad (59.57)$$

Для целых неотрицательных n область $\operatorname{Re} a > -1/2$ переходит в область (59.55) для (59.51) и в область (59.56) для (59.53).

Для ядер $K_\alpha(x, y, z)$ и $R_\alpha(x, y, z)$ справедливы разложения (35.33) и (35.34), что вытекает из теоремы 59.3.

59.3. Уравнения с симметричным нагруженным ядром

Рассмотренный выше класс уравнений можно расширить уравнениями вида

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \rho(y) u(y) dy = 0, \quad (59.58)$$

которые называются уравнениями с симметричным нагруженным ядром (или симметричным ядром с нагрузкой $\rho(y)$) и простым преобразованием приводятся к интегральным уравнениям с симметричным ядром (59.1). Действительно, введя вместо $u(x)$ функцию $v(x) = u(x) \sqrt{\rho(x)}$, приходим к интегральному уравнению

$$v(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \sqrt{\rho(x) \rho(y)} v(y) dy = 0 \quad (59.59)$$

с симметричным ядром

$$L(x, y) = K(x, y) \sqrt{\rho(x) \rho(y)}. \quad (59.60)$$

Очевидно, что если $\{v_n(x)\}$ ($n = \overline{1, \infty}$) – ортонормированная система функций ядра $L(x, y)$, то $\{u_n(x)\}$ – ортонормированная система собственных функций ядра $K(x, y)\rho(x)$ с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int_a^b u_n(x)u_k(x)\rho(x)dx = \delta_{nk}.$$

Пример 59.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения Фредгольма

$$w(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y, z)w(y) dy = 0,$$

где ядро $K(x, y, z)$ определяется выражением (25.5)

$$K(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-z^2)}} \exp\left[\frac{2xyz - z^2x^2 - y^2}{1-z^2}\right]. \quad (59.61)$$

Решение. Нетрудно заметить, что уравнение Фредгольма с ядром (59.61) является интегральным уравнением с симметричным нагруженным ядром и весом $\rho(x) = e^{-x^2/2}$. Введем вместо $w(x)$ функцию

$$v(x) = e^{-x^2/2}w(x).$$

Тогда

$$K(x, y, z)e^{x^2/2}e^{-y^2/2} = \sigma_u(x, y, z),$$

где $\sigma_u(x, y, z)$ определяется соотношением (59.44). Задача на собственные функции для уравнения Фредгольма с симметричным ядром $\sigma_u(x, y, z)$ решена в примере 59.5, с учетом результатов которого для характеристических чисел и отвечающих им ортонормированных собственных функций получим

$$\lambda_n = \frac{1}{z^n}, \quad w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x),$$

где $H_n(x)$ – полином Эрмита.

60. Теорема Гильберта–Шмидта и ее следствия

В предыдущем разделе было показано, что интегральные уравнения с симметричным ядром обладают ортогональной системой собственных функций. В связи с этим возникает вопрос о возможности использования этой системы для нахождения решения уравнения Фредгольма (54.3). Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим последовательность непрерывных симметричных ядер

$$k_n(x, y) = K(x, y) - \sum_{k=1}^n \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (60.1)$$

где $u_k(x)$ – ортонормированная система собственных функций ядра $K(x, y)$ с характеристическими числами λ_k . Покажем, что для них справедлива

Теорема 60.1. *Для симметричного непрерывного ядра (60.1) интегрального уравнения*

$$u(x) - \lambda \int_a^b k_n(x, y)u(y)dy = 0 \quad (60.2)$$

ортонормированная система функций

$$u_{n+1}(x), \quad u_{n+2}(x), \quad \dots \quad (60.3)$$

и характеристические числа

$$\lambda_{n+1}(x), \quad \lambda_{n+2}(x), \quad \dots \quad (60.4)$$

представляют собой все его собственные функции и характеристические числа, причем

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}^2} = \max \left\| \int_a^b k_n(x, y)u(y)dy \right\|. \quad (60.5)$$

Доказательство. Поскольку $u_n(x)$ – ортонормированная система собственных функций и λ_n – отвечающие им характеристические числа ядра $K(x, y)$, то, умножив (60.1) на $u_m(y)$

и проинтегрировав, получим

$$\begin{aligned} \int_a^b k_n(x, y)u_m(y)dy &= \\ &= \int_a^b K(x, y)u_m(y)dy - \sum_{k=1}^n \int_a^b \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k} u_m(y)dy. \end{aligned} \quad (60.6)$$

Тогда

$$\int_a^b k_n(x, y)u_m(y)dy = \frac{1}{\lambda_m} u_m(x) - \sum_{k=1}^n \frac{u_k(x)}{\lambda_k} \delta_{km},$$

откуда

$$\int_a^b k_n(x, y)u_m(y)dy = \begin{cases} 0, & m \leq n; \\ u_m(x)/\lambda_m, & m \geq n + 1. \end{cases} \quad (60.7)$$

Если ядро $K(x, y)$ имеет конечное число собственных функций (60.3), то выражение (60.7) доказывает первую часть теоремы. Если же ядро $K(x, y)$ имеет бесконечное множество собственных функций, то следует показать, что (60.3) представляет собой полную систему собственных функций ядра $k_n(x, y)$.

Пусть $u(x)$ – некоторая собственная функция уравнения (60.2) с характеристическим числом λ . Тогда, умножив (60.2) на $u_m(x)$ ($m \leq n$) и проинтегрировав, найдем

$$\int_a^b u(x)u_m(x)dx = 0, \quad m \leq n. \quad (60.8)$$

С другой стороны, подставив (60.1) в (60.2), получим уравнение

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy = 0. \quad (60.9)$$

Формулы (60.8) и (60.9) позволяют утверждать, что $u(x)$ является собственной функцией не только ядра $k_n(x, y)$, но

и ядра $K(x, y)$, причем ортогональной всем функциям $u_m(x)$ для $m \leq n$. Таким образом, функция $u(x)$ является одной из функций полной системы (60.3) с характеристическим числом из (60.4), что и доказывает первую часть теоремы.

Для доказательства (60.5) положим решение $u(x)$ равным $u_{n+1}(x)$ с минимальным характеристическим числом λ_{n+1} . Тогда, согласно (60.7),

$$\frac{u_{n+1}(x)}{\lambda_{n+1}} = \int_a^b k_n(x, y)u_{n+1}(y)dy$$

и, следовательно,

$$\frac{\|u_{n+1}(x)\|}{\lambda_{n+1}^2} = \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} = \left\| \int_a^b k_n(x, y)u_{n+1}(y)dy \right\|. \quad (60.10)$$

Приняв во внимание, что последовательности (60.4) соответствует убывающая последовательность

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}^2} > \frac{1}{\lambda_{n+2}^2} > \dots,$$

видим, что из (60.10) следует (60.5).

Следствие 60.1.1. Справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_a^b k_n(x, y)u(y)dy \right\| = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_a^b \left[K(x, y) - \sum_{k=1}^n \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k} \right] u(y)dy \right\| = 0. \end{aligned} \quad (60.11)$$

Доказательство непосредственно следует из соотношения (60.10) и условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

◇ Формулы (60.11) можно рассматривать как некоторую оценку ядра $k_n(x, y)$ и, следовательно, ядра $K(x, y)$ в отсутствие равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k}. \quad (60.12)$$

Если ряд (60.12) сходится равномерно, то

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k}$$

в полном соответствии с формулировкой теоремы (59.3), требующей равномерной сходимости (60.12).

Для формулировки теоремы Гильберта–Шмидта введем одно весьма важное понятие.

◆ Непрерывную функцию $f(x)$ будем называть истокообразно представимой через ядро $K(x, y)$, если для нее существует непрерывная на $[a, b]$ функция $h(x)$ такая, что

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)h(y)dy. \quad (60.13)$$

Теорема 60.2 (Гильберта–Шмидта). *Если функция $f(x)$ истокообразно представима через симметричное ядро $K(x, y)$, то ее ряд Фурье по ортонормированной системе собственных функций $u_n(x, y)$ ядра $K(x, y)$ сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$ к этой функции:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda_k} u_k(x), \quad (60.14)$$

где

$$f_k = \int_a^b f(x)u_k(x)dx, \quad h_k = \int_a^b h(x)u_k(x)dx. \quad (60.15)$$

Доказательство. Преобразуем выражение для коэффициентов Фурье f_k функции $f(x)$, определяемое (60.15), с учетом (60.13) и симметрии ядра $K(x, y)$, тогда

$$\begin{aligned} f_k &= \int_a^b f(x)u_k(x)dx = \int_a^b \int_a^b K(x, y)h(y)u_k(x)dy dx = \\ &= \frac{1}{\lambda_k} \int_a^b h(y)u_k(y)dy = \frac{h_k}{\lambda_k}. \end{aligned} \quad (60.16)$$

Если ядро $K(x, y)$ вырождено, то оно имеет конечное количество собственных чисел и для него справедливо представление

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^n \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k}.$$

Подставив это представление в (60.13), получим

$$f(x) = \int_a^b \sum_{k=1}^n \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k} h(y) dy = \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{\lambda_k} u_k(x), \quad (60.17)$$

что и доказывает справедливость соотношения (60.14).

Пусть теперь ядро $K(x, y)$ имеет бесконечное множество собственных чисел. Воспользуемся неравенством Бесселя для функций $h(x)$, $K(x, y)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2 \leq \int_a^b h^2(x) dx, \quad (60.18)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k^2(x)}{\lambda_k^2} \leq \int_a^b K^2(x, y) dy. \quad (60.19)$$

Напомним, что неравенство (60.19) вытекает из равенства

$$\frac{u_k(x)}{\lambda_k} = \int_a^b K(x, y) u_k(y) dy,$$

для которого величины $u_k(x)/\lambda_k$ являются коэффициентами ряда Фурье ядра $K(x, y)$ как функции аргумента y .

В свою очередь, из неравенства Коши–Буняковского

$$\sum_{k=m}^{m+l} \left| h_k \frac{u_k(x)}{\lambda_k} \right| \leq \sqrt{\sum_{k=m}^{m+l} h_k^2} \sqrt{\sum_{k=m}^{m+l} \left[\frac{u_k(x)}{\lambda_k} \right]^2},$$

во-первых, и из неравенства (60.19), во-вторых, следует, что

$$\sum_{k=m}^{m+l} \left[\frac{u_k(x)}{\lambda_k} \right]^2 \leq \sum_{k=m}^{\infty} \left[\frac{u_k(x)}{\lambda_k} \right]^2 \leq \int_a^b K^2(x, y) dy = K^2(b-a),$$

где

$$K = \max_{a \leq x, y \leq b} |K(x, y)|.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=m}^{m+l} \left[\frac{h_k}{\lambda_k} u_k(x) \right]^2 \leq \sqrt{\sum_{k=m}^{m+l} h_k^2 K \sqrt{b-a}}. \quad (60.20)$$

Сумма, стоящая в правой части (60.20), не зависит от x и стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$ и любом l , поскольку ряд (60.18) из величин h_k^2 сходится. Но это и означает, что ряд (60.14) сходится на $[a, b]$ абсолютно и равномерно.

Остается показать, что сумма этого ряда равна именно $f(x)$. Для этого разность

$$f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{\lambda_k} u_k(x)$$

с учетом (60.13) и (60.15) представим в виде

$$f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{\lambda_k} u_k(x) = \int_a^b K(x, y) h(y) dy - \sum_{k=1}^n \int_a^b \frac{u_k(x) u_k(y)}{\lambda_k} h(y) dy$$

или

$$f(x) - \sum_{k=1}^n f_k u_k(x) = \int_a^b \left[K(x, y) - \sum_{k=1}^n \frac{u_k(x) u_k(y)}{\lambda_k} \right] h(y) dy = \int_a^b k_n(x, y) h(y) dy. \quad (60.21)$$

Поскольку

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k u_k(x) \right\| = \left\| \int_a^b k_n(x, y) h(y) dy \right\|,$$

то из соотношения (60.11) и равномерной сходимости ряда (60.14) вытекает

$$f(x) - \sum_{k=1}^n f_k u_k(x) = 0,$$

откуда и следует, что сумма ряда (60.14) совпадает с функцией $f(x)$. Теорема доказана.

Теорема Гильберта–Шмидта имеет ряд важных следствий.

Следствие 60.2.1. Для итерированных ядер $K_n(x, y)$ справедливо разложение в равномерно сходящийся в квадрате $[a, b] \times [a, b]$ ряд Фурье

$$K_n(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k^n}, \quad n = \overline{2, \infty}. \quad (60.22)$$

Доказательство. Действительно, согласно определению (60.13), функция $K_2(x, y)$ истокообразно представима через ядро $K(x, y)$, а коэффициенты Фурье функции $K(x, y)$ равны $u_k(x)/\lambda_k$. Тогда в силу теоремы Гильберта–Шмидта соотношение (60.22) справедливо при $n = 2$. Методом математической индукции можно убедиться в справедливости этого соотношения для произвольного n .

Следствие 60.2.2. Для итерированных ядер $K_n(x, y)$ справедливо соотношение

$$\int_a^b K_n(x, x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^n}, \quad n = \overline{2, \infty}. \quad (60.23)$$

Доказательство. Действительно, формула (60.23) вытекает из (60.22), если в ней положить $x = y$, а затем проинтегрировать по x на отрезке $[a, b]$.

Следствие 60.2.3. Для резольвенты $R(x, y, \lambda)$ справедливо представление

$$R(x, y, \lambda) = K(x, y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}. \quad (60.24)$$

Ряд (60.24) при любых $\lambda \neq \lambda_k$ сходится абсолютно и равномерно в квадрате $[a, b] \times [a, b]$.

Доказательство. Формула (60.24) получается подстановкой (60.22) в ряд Неймана (57.10). Из формулы (60.24) следует, что характеристические числа λ_k являются простыми полюсами резольвенты $R(x, y, \lambda)$.

Следствие 60.2.4. Резольвента $R(x, y, \lambda)$ может быть разложена в ряд Фурье

$$R(x, y, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k - \lambda}. \quad (60.25)$$

Доказательство. Ряд (60.25) естественным образом вытекает из разложения (60.24), если для ядра $K(x, y)$ воспользоваться разложением (59.23). Действительно,

$$R(x, y, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k - \lambda}.$$

В разд. «Задача Штурма–Лиувилля» мы без доказательства сформулировали теорему разложения Стеклова в виде одного из свойств системы собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Теорема Гильберта–Шмидта позволяет достаточно просто провести доказательство этой теоремы. Напомним предварительно ее формулировку.

Теорема 60.3 (Стеклова В.А.). Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $]a, b[$ и удовлетворяет условиям

$$\alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, \quad \alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0,$$

то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на $]a, b[$ ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x), \quad f_k = \int_a^b f(x) \rho(x) u_k(x) dx \quad (60.26)$$

по ортонормированной системе собственных функций задачи Штурма–Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] - q(x)u(x) + \lambda \rho(x)u(x) = 0; \quad (60.27)$$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b).$$

Доказательство проведем в предположении, что $\beta_1 = \beta_2 = 0$, т.е. при условии

$$f(a) = f(b) = 0, \quad u(a) = u(b) = 0.$$

В этом случае соответствующая (60.27) краевая задача

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] - q(x)u(x) = F(x), \quad u(a) = u(b) = 0$$

имеет решение в виде (см. разд. «Функция Грина краевой задачи» части II)

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) F(y) dy,$$

где $G(x, y)$ – симметричная по аргументам функция Грина этой краевой задачи. Таким образом, задача Штурма–Лиувилля (60.27) эквивалентна интегральному уравнению с нагруженным ядром

$$u(x) = -\lambda \int_a^b G(x, y) \rho(y) u(y) dy$$

[роль неоднородности $F(x)$ играет произведение $-\lambda \rho(x) u(x)$] или уравнению с симметричным ядром

$$v(x) = -\lambda \int_a^b G(x, y) \sqrt{\rho(x)\rho(y)} v(y) dy, \quad (60.28)$$

где

$$v(x) = u(x) \sqrt{\rho(x)}. \quad (60.29)$$

Так как $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то существует некоторая непрерывная функция $h(x)$ такая, что

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{df(x)}{dx} \right] - q(x)f(x) + h(x) = 0. \quad (60.30)$$

В силу (60.30) с учетом условия $f(a) = f(b) = 0$ имеем

$$f(x) = - \int_a^b G(x, y) h(y) dy,$$

т.е. $f(x)$, а следовательно, и $f(x)\sqrt{\rho(x)}$ истокообразно представимы через ядро $G(x, y)$, так как

$$f(x)\sqrt{\rho(x)} = - \int_a^b G(x, y)\sqrt{\rho(x)\rho(y)} \frac{h(y)}{\sqrt{\rho(y)}} dy. \quad (60.31)$$

С учетом (60.28) и (60.31) и теоремы Гильберта–Шмидта можно записать

$$\begin{aligned} f(x)\sqrt{\rho(x)} &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k(x), \\ f_k &= \int_a^b \sqrt{\rho(x)} f(x) v_k(x) dx, \end{aligned} \quad (60.32)$$

где $v_k(x)$ – система собственных ортонормированных функций симметричного ядра $G(x, y)\sqrt{\rho(x)\rho(y)}$. Возвратившись к задаче (60.27), формулы (60.32) с учетом (60.29) можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x), \quad f_k = \int_a^b \rho(x) f(x) u_k(x) dx,$$

где $u_k = v_k(x)/\sqrt{\rho(x)}$ – система собственных ортонормированных функций нагруженного ядра $G(x, y)\rho(x)$ и, следовательно, ортонормированная система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (60.27). Таким образом, теорема доказана.

61. Неоднородное уравнение Фредгольма

61.1. Уравнение Фредгольма с симметричным ядром

Воспользуемся теоремой Гильберта–Шмидта и следствиями из нее, чтобы найти решения неоднородных уравнений Фредгольма второго рода с симметричным ядром $K(x, y)$, т.е.

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy = f(x). \quad (61.1)$$

Как уже отмечалось ранее, его решение можно записать через резольвенту $R(x, y, \lambda)$ (54.7):

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, y, \lambda) f(y) dy. \quad (61.2)$$

В свою очередь, система собственных функций $u_k(x)$ однородного уравнения, соответствующего уравнению (61.1), дает возможность найти резольвенту $R(x, y, \lambda)$ в виде (60.25).

Подставив (60.25) в (61.2), находим

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x) u_k(y)}{\lambda_k - \lambda} f(y) dy. \quad (61.3)$$

Если воспользоваться введенным ранее обозначением

$$f_k = \int_a^b f(y) u_k(y) dy, \quad (61.4)$$

то (61.3) можно записать

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x) f_k}{\lambda_k - \lambda}. \quad (61.5)$$

Решение (61.5) является единственным и непрерывным в силу теоремы Гильберта–Шмидта и следствий из нее при условии, что значение параметра λ не совпадает ни с одним из характеристических чисел λ_k . Если же значение параметра λ совпадает с одним из характеристических чисел, например λ_n , то решение уравнения (61.1) в общем случае не существует. Однако, как и при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром (а ранее в линейной алгебре), существует возможность найти семейство решений, если функция $f(x)$ ортогональна собственной функции $u_n(x)$, соответствующей характеристическому числу λ_n , т.е.

$$f_n = \int_a^b f(y) u_n(y) dy = 0. \quad (61.6)$$

Тогда решение уравнения (61.1) имеет вид

$$u(x) = f(x) + \lambda_n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{u_k(x)f_k}{\lambda_k - \lambda_n} + C u_n(x), \quad (61.7)$$

где C – произвольная постоянная.

Сказанное выше легко обобщается на случай характеристического числа ранга r . Ранее отмечалось, что если ранг характеристического числа λ_n равен r , то в системе характеристических чисел оно фигурирует ровно r раз как $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+r-1}$. Хотя $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+r-1}$, соответствующие собственные функции, имеющие те же номера, т.е. $u_n(x), u_{n+1}(x), \dots, u_{n+r-1}(x)$, различны и линейно независимы. Поэтому для существования решения функция $f(x)$ должна быть ортогональна одновременно всем этим функциям, т.е.

$$f_{n+j} = \int_a^b f(y)u_{n+j}(y)dy = 0, \quad j = \overline{0, r-1}. \quad (61.8)$$

Тогда решение уравнения (61.1) имеет вид

$$u(x) = f(x) + \lambda_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k(x)f_k}{\lambda_k - \lambda_n} + \sum_{j=0}^{r-1} C_j u_{n+j}(x) + \lambda_n \sum_{k=n+r}^{\infty} \frac{u_k(x)f_k}{\lambda_k - \lambda_n}, \quad (61.9)$$

где C_j – произвольные постоянные.

Наконец, если хотя бы одно из условий (61.8) не выполняется, то уравнение (61.1) решения не имеет. Если же функция $f(x)$ ортогональна всем без исключения собственным функциям $u_k(x)$, то решением уравнения (61.1) является сама функция $f(x)$, т.е. $u(x) = f(x)$.

Отметим, что для симметричных вырожденных ядер приведенные выше формулы остаются справедливыми, если ряды заменить конечными суммами (из-за конечного количества характеристических чисел).

Подводя итог, коротко сформулируем основные из полученных результатов в следующем утверждении.

Утверждение 61.1. *Если для интегрального уравнения (61.1) с ядром, имеющим ортонормированную систему собственных функций $u_k(x)$ с характеристическими числами λ_k :*

- а) $\lambda \neq \lambda_k$ для любого k , то решение этого уравнения существует, единственно и представляется формулой (61.5);
 б) $\lambda = \lambda_n$ для $k = n$, а функция $f(x)$ ортогональна всем собственным функциям, соответствующим характеристическому числу λ_n , то его решение существует, не является единственным и представляется формулой (61.9);
 в) $\lambda = \lambda_n$ для $k = n$, а функция $f(x)$ не ортогональна хотя бы одной собственной функции, соответствующей характеристическому числу λ_n , то решение уравнения (61.1) не существует.

Пример 61.1. Решить уравнение

$$u(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)u(y)dy = 1 \quad (61.10)$$

с симметричным ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} y(1-x), & 0 < y < x; \\ x(1-y), & x < y < 1, \end{cases} \quad (61.11)$$

если а) $\lambda \neq n^2\pi^2$, $n = \overline{1, \infty}$; б) $\lambda = 4\pi^2$; в) $\lambda = \pi^2$.

Решение. С учетом результатов примера 59.2 ортонормированную систему собственных функций ядра (61.11) можно записать в виде

$$u_n(x) = \sqrt{2} \sin \pi n x, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (61.12)$$

с характеристическими числами

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (61.13)$$

Разложим правую часть уравнения (61.10) в ряд Фурье по ортогональной системе функций (61.12). Для коэффициентов Фурье получим

$$\begin{aligned} f_n &= \int_0^1 1 \cdot \sqrt{2} \sin \pi n x \, dx = -\frac{\sqrt{2}}{\pi n} (\cos \pi n - 1) = \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \frac{2\sqrt{2}}{\pi(2k-1)}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad k = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (61.14)$$

С помощью (61.14) и в силу (61.5) находим решение уравнения (61.10)

$$u(x) = 1 + \frac{4\lambda}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi(2k-1)x}{(2k-1)[(2k-1)^2\pi^2 - \lambda]}. \quad (61.15)$$

Решение (61.15) является единственным в случае а) при $\lambda \neq n^2\pi^2$, $n = \overline{1, \infty}$. В случае б), т.е. когда $\lambda = 4\pi^2$, решение уравнения существует, так как функция $f(x) = 1$ ортогональна собственной функции $u_2(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi x$:

$$\int_0^1 1 \cdot \sqrt{2} \sin 2\pi x \, dx = 0. \quad (61.16)$$

Однако оно становится не единственным, поскольку решение (61.15) можно дополнить функцией $C \sin 2\pi x$, являющейся собственной функцией, соответствующей характеристическому числу $\lambda_2 = 4\pi^2$. Таким образом, при $\lambda = 4\pi^2$ решение задачи имеет вид

$$u(x) = 1 + C \sin 2\pi x + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi(2k-1)x}{(2k-1)[(k-1/2)^2 - 1]}, \quad (61.17)$$

где C – произвольная постоянная.

Наконец, в случае в): $\lambda = \pi^2$, уравнение не имеет решений, поскольку функция $f(x) = 1$ не ортогональна собственной функции $u_1(x) = \sqrt{2} \sin \pi x$, т.е.

$$\int_0^1 1 \cdot \sqrt{2} \sin \pi x \, dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \neq 0. \quad (61.18)$$

Заметим, что условия (61.16) и (61.18) очевидным образом вытекают из (61.14).

Пример 61.2. Решить уравнение

$$u(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+y)u(y)dy = \sin x - \cos x. \quad (61.19)$$

Решение. Уравнение (61.19) – интегральное уравнение Фредгольма с симметричным вырожденным ядром

$$K(x, y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \quad (61.20)$$

Воспользуемся обозначениями, принятыми в предыдущих разделах. Тогда

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \sin x, & b_1(y) &= \cos y, \\ a_2(x) &= \cos x, & b_2(y) &= \sin y, \end{aligned} \quad (61.21)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = 0, & \alpha_{12} &= \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}, \\ \alpha_{21} &= \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}, & \alpha_{22} &= \int_0^{\pi} \cos x \sin x \, dx = 0. \end{aligned} \quad (61.22)$$

Таким образом, система (59.4) для нахождения собственных функций

$$u(x) = \lambda[C_1 a_1(x) + C_2 a_2(x)]$$

ядра (61.20) имеет вид

$$C_1 - \frac{\lambda\pi}{2}C_2 = 0, \quad -\frac{\lambda\pi}{2}C_1 + C_2 = 0. \quad (61.23)$$

Поскольку определитель $\Delta(\lambda)$ системы (61.23) равен

$$\Delta(\lambda) = 1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2,$$

то характеристические числа находятся из уравнения

$$1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = \frac{2}{\pi}, \quad \lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$$

и соответственно

$$u_1 = N_1(\sin x + \cos x), \quad u_2 = N_2(\sin x - \cos x), \quad (61.24)$$

где N_1, N_2 – произвольные постоянные. Нормировка собственных функций (61.24) дает ортонормированную систему

$$u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x + \cos x), \quad u_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x - \cos x). \quad (61.25)$$

С помощью (61.25) найдем f_1 и f_2 :

$$\begin{aligned} f_1 &= \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)u_1(x)dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)dx = 0, \\ f_2 &= \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)u_2(x)dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x)dx = \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

откуда в силу (61.5) можем записать

$$u(x) = \sin x - \cos x + \lambda \frac{\sin x - \cos x}{\lambda_2 - \lambda} = \frac{\sin x - \cos x}{1 + \lambda\pi/2}. \quad (61.26)$$

Исследуем решение (61.26) для различных значений параметра λ . При $\lambda \neq \pm 2/\pi$ выражение (61.26) является единственным решением уравнения (61.19). При $\lambda = \lambda_1 = \pi/2$ решение (61.26) становится не единственным, так как к нему можно добавить функцию

$$Cu_1(x) = \frac{C}{\sqrt{\pi}}(\sin x + \cos x),$$

являющуюся собственной функцией ядра (61.20) с характеристическим числом $\lambda_1 = \pi/2$. Последнее оказывается возможным в силу ортогональности правой части уравнения (61.19) с собственной функцией $u_1(x)$. Таким образом, в этом случае решение уравнения имеет вид

$$u(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{C}{\sqrt{\pi}}(\sin x + \cos x),$$

где C – произвольная постоянная.

Наконец, при $\lambda = \lambda_2 = -2/\pi$ уравнение (61.19) решения не имеет, так как правая часть уравнения не ортогональна функции

$$u_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x - \cos x)$$

и знаменатель дроби обращается в нуль ($f_2 \neq 0$).

61.2. Уравнение Фредгольма с разностным ядром

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма

$$u(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)u(y)dy = f(x) \quad (61.27)$$

с разностным ядром $K(x, y) = K(x - y)$. Оно имеет важные приложения и отличается от рассмотренных ранее бесконечным интервалом интегрирования. Решение этого уравнения будем искать в классе непрерывных и ограниченных на вещественной оси $(] - \infty, \infty[)$ функций $u(x)$. Можно показать, что в этом случае функции $f(x)$ и $K(x)$ должны быть непрерывными и абсолютно интегрируемыми, причем решение будет единственным, если

$$|\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} |K(x)|dx < 1. \quad (61.28)$$

Обозначим через $\bar{f}(\omega)$, $\bar{K}(\omega)$, $\bar{u}(\omega)$ фурье-образы функций $f(x)$, $K(x)$ и $u(x)$ соответственно. Напомним, что функция

$$v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)u(y)dy$$

представляет собой свертку двух функций $K(x)$ и $u(x)$:

$$v(x) = K(x) * u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)u(y)dy,$$

так что ее фурье-образ является произведением фурье-образов $\bar{K}(\omega)\bar{u}(\omega)$. Применим к уравнению (61.27) преобразование Фурье. Тогда для фурье-образов $\bar{f}(\omega)$, $\bar{K}(\omega)$, $\bar{u}(\omega)$ получим уравнение

$$\bar{u}(\omega) - \lambda\sqrt{2\pi}\bar{K}(\omega)\bar{u}(\omega) = \bar{f}(\omega),$$

решение которого имеет вид

$$\bar{u}(\omega) = \frac{\bar{f}(\omega)}{1 - \lambda\sqrt{2\pi}\bar{K}(\omega)}. \quad (61.29)$$

Если к выражению (61.29) применить обратное преобразование Фурье, получим решение уравнения (61.27)

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(\omega)}{1 - \lambda\sqrt{2\pi}\bar{K}(\omega)} e^{i\omega x} d\omega. \quad (61.30)$$

Решение (61.30) можно записать в более привычной для интегральных уравнений форме с использованием резольвенты. Для этого преобразуем соотношение (61.29) к виду

$$\bar{u}(\omega) = \bar{f}(\omega) + \frac{\lambda\sqrt{2\pi}\bar{K}(\omega)}{1 - \lambda\sqrt{2\pi}\bar{K}(\omega)} \bar{f}(\omega)$$

и подставим его в (61.30). В результате получим

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{K}(\omega)}{1 - \lambda\sqrt{2\pi}\bar{K}(\omega)} \bar{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (61.31)$$

Выражение

$$\bar{R}(\omega, \lambda) = \frac{\bar{K}(\omega)}{1 - \lambda\sqrt{2\pi}\bar{K}(\omega)} \quad (61.32)$$

является фурье-образом резольвенты $R(x, \lambda)$. Тогда (61.31) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda R(x, \lambda) * f(x) = \\ &= f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} R(x-y, \lambda) f(y) dy, \end{aligned} \quad (61.33)$$

где фурье-образ резольвенты $R(x, \lambda)$ определяется выражением (61.32).

Пример 61.3. Решить уравнение

$$u(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} u(y) dy = e^{-|x|}. \quad (61.34)$$

Решение. Определим значения параметра λ , для которых уравнение (61.34) имеет единственное ограниченное решение. Для этого воспользуемся условием (61.28)

$$|\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = 2|\lambda| \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2|\lambda| < 1,$$

из которого следует $|\lambda| < 1/2$.

Поскольку ядро $K(x) = e^{-|x|}$ и правая часть $f(x) = e^{-|x|}$ уравнения совпадают, то в данном случае удобнее воспользоваться выражением (61.30). Действительно, так как фурье-образы функций $K(x)$ и $f(x)$ равны

$$\begin{aligned} \bar{K}(\omega) &= \bar{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{x-i\omega x} dx + \int_0^{\infty} e^{-x-i\omega x} dx \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}, \end{aligned}$$

то, согласно (61.29), имеем

$$\bar{u}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^2 + 1 - 2\lambda}.$$

Легко убедиться, что знаменатель этой дроби для $|\lambda| < 1/2$ ни при каких вещественных значениях ω не обращается в нуль, и, следовательно, возможно использование формулы обращения (61.30):

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\omega} d\omega}{\omega^2 + 1 - 2\lambda} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\omega} d\omega}{(\omega + i\sqrt{1-2\lambda})(\omega - i\sqrt{1-2\lambda})}.$$

Полученный несобственный интеграл можно вычислить с помощью вычетов (см. разд. «Приложение теории вычетов» части I)

$$u(x) = \begin{cases} 2i \operatorname{Res}_{\omega=i\sqrt{1-2\lambda}} \frac{e^{ix\omega}}{(\omega+i\sqrt{1-2\lambda})(\omega-i\sqrt{1-2\lambda})} \\ -2i \operatorname{Res}_{\omega=-i\sqrt{1-2\lambda}} \frac{e^{ix\omega}}{(\omega+i\sqrt{1-2\lambda})(\omega-i\sqrt{1-2\lambda})} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{e^{-x\sqrt{1-2\lambda}}}{\sqrt{1-2\lambda}}, & x > 0; \\ \frac{e^{x\sqrt{1-2\lambda}}}{\sqrt{1-2\lambda}}, & x < 0, \end{cases}$$

откуда следует

$$u(x) = \frac{e^{-|x|\sqrt{1-2\lambda}}}{\sqrt{1-2\lambda}}.$$

62. Уравнение Вольтерра второго рода

Во введении к этой главе мы отмечали, что уравнение Вольтерра второго рода

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)u(y)dy = f(x) \quad (62.1)$$

является частным случаем уравнения Фредгольма второго рода, для которого ядро

$$K(x, y) = 0 \quad (62.2)$$

при $a \leq x < y \leq b$.

Итак, обратимся к рассмотрению уравнения (62.1), предположив, что $K(x, y)$ и $f(x)$ непрерывны для $a \leq x < y \leq b$.

Теорема 62.1. *Уравнение (62.1) при любом параметре λ имеет единственное непрерывное решение, задаваемое формулой*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, y, \lambda)f(y)dy, \quad (62.3)$$

где резольвента $R(x, y, \lambda)$ определяется абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$R(x, y, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, y) \quad (62.4)$$

итерированных ядер

$$\begin{aligned} K_1(x, y) &= K(x, y), \\ K_n(x, y) &= \int_y^x K(x, z) K_{n-1}(z, y) dz, \quad n = \overline{2, \infty}. \end{aligned} \quad (62.5)$$

Доказательство этой теоремы во многом напоминает доказательство теоремы 57.1, но имеет при этом, как мы увидим, некоторую особенность. Будем искать решение уравнения (62.1) в виде, аналогичном (57.2), т.е.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x). \quad (62.6)$$

Подставим (62.6) в (62.1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_a^x K(x, y) \varphi_n(y) dy = f(x).$$

В полученном уравнении перегрупулируем слагаемые

$$\varphi_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \left[\varphi_n(x) - \int_a^x K(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy \right] = f(x)$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x); \\ \varphi_n(x) &= \int_a^x K(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy, \quad n = \overline{1, \infty}. \end{aligned}$$

Для $K(x, y)$ и $f(x)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |K(x, y)| &\leq A, \quad a \leq y \leq x \leq b; \\ |f(x)| &\leq B, \quad a \leq x \leq b. \end{aligned}$$

В результате можно получить оценки для функций $\varphi_n(x)$. Действительно,

$$\begin{aligned}
 |\varphi_0(x)| &\leq B; \\
 |\varphi_1(x)| &\leq \int_a^x |K(x, y)| |\varphi_0(y)| dy \leq AB(x-a); \\
 |\varphi_2(x)| &\leq \int_a^x |K(x, y)| |\varphi_1(y)| dy \leq AB^2 \int_a^x (x-a) dx = \\
 &= AB^2 \frac{(x-a)^2}{2!}; \quad (62.7) \\
 &\dots\dots\dots; \\
 |\varphi_n(x)| &\leq \int_a^x |K(x, y)| |\varphi_{n-1}(y)| dy \leq A \frac{[B(x-a)]^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, на отрезке $[a, b]$ ряд (62.6) мажорируется сходящимся при *любом* λ числовым рядом

$$A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[|\lambda|B(b-a)]^n}{n!} = Ae^{|\lambda|B(b-a)}.$$

В этом и состоит основное отличие доказываемой теоремы от теоремы 57.1. Введение итерированных ядер для (62.5), резольвенты (62.4) и представление решения (62.6) в виде (62.3) проводится с учетом (62.7) точно так же, как это делалось в разд. 57. В результате убеждаемся в справедливости сделанного утверждения.

Следствие 62.1.1. Однородное уравнение Вольтерра

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)u(y)dy = 0 \quad (62.8)$$

не имеет характеристических чисел и вследствие этого имеет только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$.

Это утверждение естественным образом вытекает из абсолютной и равномерной сходимости ряда (62.4) при любых λ , означающей, что резольвента $R(x, y, \lambda)$ есть целая функция. В

справедливости этого можно убедиться также, воспользовавшись выражением (56.9) для определителя Фредгольма $D(\lambda)$. Учет (62.2) в (56.9) приводит к следующему выражению для $D(\lambda)$:

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\lambda A_1)^n, \quad A_1 = \int_a^x K(x, x) dx$$

или

$$D(\lambda) = e^{-\lambda A_1}, \quad (62.9)$$

означающему, что определитель Фредгольма ни при каких вещественных λ не имеет нулей, т.е. характеристических чисел.

◇ В силу этого параметр λ при записи уравнения Вольтерра иногда опускают (полагают $\lambda = 1$).

◇ Резольвента $R(x, y, \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$R(x, y, \lambda) - \lambda \int_y^x K(x, z) R(z, y, \lambda) dz = K(x, y), \quad (62.10)$$

которое вытекает из (62.1) и (62.3). Решение уравнения (62.10) представляет собой более сложную задачу по сравнению с решением исходного уравнения (62.1), однако оно оказывается полезным при качественном анализе задач, различного рода эквивалентных и упрощающих преобразованиях (как, впрочем, и в случае уравнения Фредгольма) и для обоснования асимптотических оценок.

◇ Отсутствие характеристических чисел для уравнений Вольтерра (62.8) не случайно и обусловлено их связью с задачей Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Так, например, можно получить представление для решения уравнения (62.1), аналогичное формуле Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, выполнив формальное интегрирование по частям в (62.3), найдем

$$u(x) = v(x, a) f(a) + \int_a^x v(x, y) d(f(y)),$$

где

$$v(x, y) = 1 + \lambda \int_y^x R(x, y, \lambda) dy.$$

Пример 62.1. Решить уравнение

$$u(x) - \int_0^x e^{x-y} u(y) dy = x. \quad (62.11)$$

Решение. *Первый способ.* Имеем $\lambda = 1$ и

$$K(x, y) = K_1(x, y) = e^{x-y}.$$

Далее, согласно соотношениям (62.5), для итерированных ядер найдем

$$K_2(x, y) = \int_y^x e^{x-z} e^{z-y} dz = e^{x-y} \int_y^x dz = e^{x-y}(x-y),$$

$$K_3(x, y) = \int_y^x e^{x-z} e^{z-y} (z-y) dz =$$

$$= e^{x-y} \int_y^x (z-y) dz = e^{x-y} \frac{(x-y)^2}{2};$$

.....;

$$K_n(x, y) = \int_y^x e^{x-z} e^{z-y} \frac{(z-y)^{n-2}}{(n-2)!} dz = e^{x-y} \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Согласно определению (62.4), находим резольвенту

$$R(x, y) = e^{x-y} \left[1 + (x-y) + \frac{(x-y)^2}{2!} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right] = e^{2(x-y)},$$

а с ее помощью и решение уравнения (62.11)

$$u(x) = x + \int_0^x e^{2(x-y)} y dy = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}(e^{2x} - 1). \quad (62.12)$$

◇ В правильности полученного решения можно убедиться непосредственной подстановкой (62.12) в (62.11). Отметим, что в данном случае возможен

Второй способ решения, основанный на сведении интегрального уравнения (62.11) к задаче Коши для дифференциального уравнения. Продифференцировав (62.11) по x , найдем

$$u'(x) - \int_0^x e^{x-y} u(y) dy - u(x) = 1. \quad (62.13)$$

Из (62.11) следует, что

$$\int_0^x e^{x-y} u(y) dy = u(x) - x, \quad u(0) = 0. \quad (62.14)$$

Подставив (62.14) в (62.13), получим линейное дифференциальное уравнение

$$u'(x) - 2u(x) = 1 - x \quad (62.15)$$

с начальным условием

$$u(0) = 0. \quad (62.16)$$

Так как общее решение уравнения (62.15) имеет вид

$$u(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{2x} \right),$$

то, определив с помощью начального условия (62.16) постоянную C , получим решение исходной задачи

$$u(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}(e^{2x} - 1),$$

совпадающее с (62.12).

63. Уравнение Вольтерра второго рода с ядрами специального вида

Рассмотрим некоторые специальные виды ядер $K(x, y)$ уравнения Вольтерра (62.1), для которых процедуру нахождения резольвенты (62.4) или решения (62.3) можно упростить.

I. Пусть ядро $K(x, y)$ является полиномом по y

$$K(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{k!} (x-y)^k \quad (63.1)$$

с коэффициентами $a_k(x)$, непрерывными для $x \in [a, b]$.

Определим функцию $L(x, y)$ как решение уравнения

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\lambda} \frac{d^n L(x, y, \lambda)}{dx^n} + a_0(x) \frac{d^{n-1} L(x, y, \lambda)}{dx^{n-1}} + \\ & + a_1(x) \frac{d^{n-2} L(x, y, \lambda)}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1}(x) L(x, y, \lambda) = 0 \end{aligned} \quad (63.2)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) \Big|_{x=y=0} &= \frac{dL(x, y, \lambda)}{dx} \Big|_{x=y=0} = \dots = \\ &= \dots = \frac{d^{n-2} L(x, y, \lambda)}{dx^{n-2}} \Big|_{x=y=0} = 0, \\ & \frac{d^{n-1} L(x, y, \lambda)}{dx^{n-1}} \Big|_{x=y=0} = 1. \end{aligned} \quad (63.3)$$

Тогда резольвента $R(x, y, \lambda)$ уравнения (62.1) с ядром вида (63.1) определится равенством

$$R(x, y, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{d^n L(x, y, \lambda)}{dx^n}. \quad (63.4)$$

Соотношение (63.4) очевидным образом вытекает из формул (55.1)–(55.5), иллюстрирующих эквивалентность задачи Коши и интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Пример 63.1. Решить уравнение

$$u(x) - \int_0^x (x-y)u(y)dy = x^2. \quad (63.5)$$

Решение. Имеем $\lambda = 1$ и ядро $K(x, y) = x - y$, представляющее собой частный случай ядра (63.1) при $a_1 = 1$ и равных нулю остальных коэффициентах. Уравнение (63.2) в этом случае принимает вид

$$\frac{d^2 L(x, y)}{dx^2} - L(x, y) = 0$$

с начальными условиями

$$L(x, y, \lambda)|_{x=y=0} = 0, \quad \frac{dL(x, y, \lambda)}{dx}|_{x=y=0} = 1.$$

Положив

$$L(x, y) = C_1(y)e^x + C_2(y)e^{-x},$$

приходим к алгебраической системе уравнений, вытекающей из начальных условий

$$\begin{aligned} C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} &= 0, \\ C_1(x)e^x - C_2(x)e^{-x} &= 0, \end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$C_1 = \frac{1}{2}e^{-x}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}e^x.$$

В результате

$$L(x, y) = \frac{1}{2}[e^{x-y} - e^{-(x-y)}] = \text{sh}(x - y).$$

Отсюда, согласно (63.4),

$$R(x, y) = \frac{d^2}{dx^2}L(x, y) = \frac{d^2}{dx^2}\text{sh}(x - y) = \text{sh}(x - y),$$

и, следовательно,

$$u(x) = x^2 + \int_0^x y^2 \text{sh}(x - y) dy = 2(\text{ch } x - 1). \quad (63.6)$$

II. Для ядра $K(x, y)$, представляющего полином степени $n - 1$ по x :

$$K(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k(y)}{k!} (y - x)^k, \quad (63.7)$$

резольвента $R(x, y, \lambda)$ [по аналогии с (63.1)] имеет вид

$$R(x, y, \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d^n L(x, y, \lambda)}{dx^n}, \quad (63.8)$$

где $L(x, y, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{1}{\lambda} \frac{d^n L(x, y, \lambda)}{dx^n} + b_0(y) \frac{d^{n-1} L(x, y, \lambda)}{dx^{n-1}} + \\ + b_1(y) \frac{d^{n-2} L(x, y, \lambda)}{dx^{n-2}} + \dots + b_{n-1}(x) L(x, y, \lambda) = 0 \quad (63.9)$$

с начальными условиями (63.3).

III. Для ядра, зависящего от разности аргументов:

$$K(x, y) = K(x - y), \quad (63.10)$$

уравнение (63.1) можно записать в виде

$$u(x) - \lambda \int_0^x K(x - y) u(y) dy = f(x). \quad (63.11)$$

Интеграл в уравнении (63.11) представляет собой свертку функций $K(x)$ и $u(x)$ (см. разд. «Свойства преобразования Лапласа» части I)

$$K(x) * u(x) = \int_0^x K(x - y) u(y) dy, \quad (63.12)$$

естественно, при условии, что $K(x)$ и $u(x)$ можно рассматривать как оригиналы. Этот факт оказывается полезным при решении уравнения (63.11), которое иногда называют уравнением Вольтерра типа свертки.

Пусть изображения $K(x)$, $f(x)$ существуют и могут быть найдены. Обозначим

$$K(x) \rightarrow \bar{K}(p), \quad f(x) \rightarrow \bar{f}(p), \quad u(x) \rightarrow \bar{u}(p). \quad (63.13)$$

Тогда

$$\int_0^x K(x - y) u(y) dy \rightarrow \bar{K}(p) \bar{u}(p),$$

и уравнение (63.11) в операторной форме примет вид

$$\bar{u}(p) - \lambda \bar{K}(p) \bar{u}(p) = \bar{f}(p)$$

с решением

$$\bar{u}(p) = \frac{\bar{f}(p)}{1 - \lambda \bar{K}(p)}. \quad (63.14)$$

Если к выражению (63.14) применить обратное преобразование Лапласа, то

$$u(x) \leftrightarrow \bar{u}(p) = \frac{\bar{f}(p)}{1 - \lambda \bar{K}(p)}$$

определяет решение уравнения (63.11). Отметим, что из выражения (63.14) непосредственно не вытекает возможность применения обратного преобразования Лапласа. Однако из тождественного выражения

$$\bar{u}(p) = \bar{f}(p) + \frac{\lambda \bar{K}(p)}{1 - \lambda \bar{K}(p)} \bar{f}(p) \quad (63.15)$$

такая возможность очевидна. Примечательно, что выражение

$$\bar{R}(p, \lambda) = \frac{\bar{K}(p)}{1 - \lambda \bar{K}(p)}$$

можно рассматривать как изображение резольвенты, т.е.

$$R(x, \lambda) \leftrightarrow \bar{R}(p, \lambda) = \frac{\bar{K}(p)}{1 - \lambda \bar{K}(p)}. \quad (63.16)$$

Это позволяет записать решение (63.11) в более привычном виде

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda R(x, \lambda) * f(x) = \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x R(x-y, \lambda) f(y) dy, \end{aligned} \quad (63.17)$$

где изображение резольвенты $R(x-y, \lambda)$ определено выражением (63.16).

Подводя итог, коротко сформулируем полученные результаты следующим утверждением:

Утверждение 63.1. Пусть $K(x)$ и $f(x)$ являются оригиналами с изображениями (63.13). Тогда решение уравнения

(63.11) определяется обратным преобразованием Лапласа изображения (63.14), т.е.

$$u(x) \leftrightarrow \bar{u}(p) = \frac{\bar{f}(p)}{1 - \lambda \bar{K}(p)},$$

или выражением (63.17).

◇ Заметим, что если функции $K(x)$ и $f(x)$ непрерывны и являются оригиналами с показателями роста s_1 и s_2 , соответственно $[|K(x)| \leq M_1 e^{s_1 x}, |f(x)| \leq M_2 e^{s_2 x}]$. Тогда если $K(x) \leftrightarrow \bar{K}(p)$ и $f(x) \leftrightarrow \bar{f}(p)$, то решение уравнения (63.11) с учетом формулы Мелина (см. разд. <Преобразование Лапласа> части I) можно представить в виде

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\bar{f}(p)}{1 - \lambda \bar{K}(p)} e^{px} dp, \quad (63.18)$$

где $\alpha > \max(s_1, s_2)$.

Пример 63.2. Решить уравнение

$$u(x) - \int_0^x (x-y)u(y) dy = x^2.$$

Решение. Имеем $\lambda = 1$, $K(x) = x$, $f(x) = x^2$. Найдем изображения

$$K(x) = x \leftrightarrow \bar{K}(p) = \frac{1}{p^2}, \quad f(x) = x^2 \leftrightarrow \bar{f}(p) = \frac{2}{p^3}.$$

Первый способ. Воспользуемся формулой (63.14), тогда

$$\bar{u}(p) = \frac{2}{p^3} / \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{2}{p(p^2 - 1)}.$$

Разложив полученное выражение на простейшие дроби и перейдя к оригиналу, находим

$$\bar{u}(p) = \frac{2}{p(p^2 - 1)} = 2 \left[\frac{p}{p^2 - 1} - \frac{1}{p} \right] \leftrightarrow 2(\operatorname{ch} x - 1) = u(x). \quad (63.19)$$

Второй способ. Воспользуемся формулой (63.16), тогда

$$\bar{u}(p) = \frac{1}{p^2} / \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p^2 - 1} \leftrightarrow \operatorname{sh} x = R(x),$$

откуда, согласно (63.17), получим

$$u(x) = x^2 + \int_0^x y^2 \operatorname{sh}(x - y) dy = 2(\operatorname{ch} x - 1),$$

в полном согласии с (63.19), а также с (63.6).

Пример 63.3. Решить уравнение

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x (x - y)^2 u(y) dy = \sin x.$$

Решение. Перейдя к изображениям, имеем

$$u(x) \leftrightarrow \bar{u}(p), \quad \sin x \leftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1}, \quad \int_0^x (x - y)^2 u(y) dy \leftrightarrow \frac{2}{p^3} \bar{u}(p).$$

Решение операторного уравнения

$$\bar{u}(p) - \frac{1}{p^3} \bar{u}(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

имеет вид

$$\bar{u}(p) = \frac{p^3}{(p - 1)(p^2 + 1)(p^2 + p + 1)}.$$

После разложения на простейшие дроби

$$\bar{u}(p) = \frac{1}{6(p - 1)} + \frac{p + 1}{1(p^2 + 1)} + \frac{2(p + 1/2)}{3(p^2 + p + 1)}$$

возвращение к оригиналам дает решение

$$u(x) = \frac{1}{6} e^x + 3(\cos x + \sin x) - \frac{2}{3} e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

Пример 63.4. Найти решение уравнения

$$u(x) - \int_0^x \operatorname{ch}(x-y)u(y)dy = \operatorname{sh} x. \quad (63.20)$$

Решение. Обозначим $u(x) \leftrightarrow \bar{u}(p)$ и учтем, что

$$\operatorname{ch} x \leftrightarrow \frac{p}{p^2 - 1}, \quad \operatorname{sh} x \leftrightarrow \frac{1}{p^2 - 1}$$

(см. разд. «Свойства преобразования Лапласа» части I). Тогда преобразование Лапласа уравнения (63.20) дает

$$\bar{u}(p) - \frac{p}{p^2 - 1}\bar{u}(p) = \frac{1}{p^2 - 1}$$

или

$$\bar{u}(p) = \frac{1}{p^2 - p - 1}.$$

Возвратившись к оригиналам, найдем (см. там же)

$$u(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}e^x \operatorname{sh} \frac{\sqrt{5}}{2}x.$$

Пример 63.5. Найти решение интегрального уравнения

$$u(x) - \int_0^x J_1(x-y)u(y)dy = J_0(x). \quad (63.21)$$

Решение. С учетом соотношения (III.15.11)

$$u(x) \leftrightarrow \bar{u}(p), \quad J_n(x) \leftrightarrow \frac{(\sqrt{1+p^2} - p)^n}{\sqrt{1+p^2}} \quad (63.22)$$

находим

$$\bar{u}(p) - \frac{\sqrt{1+p^2} - p}{\sqrt{1+p^2}}\bar{u}(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Следовательно,

$$\bar{u}(p) = \frac{1}{p} \leftrightarrow u(x) = 1.$$

64. Интегральные уравнения первого рода

Рассмотрим введенные ранее интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра первого рода

$$\int_a^b K(x, y)u(y)dy = f(x), \quad (64.1)$$

$$\int_a^x K(x, y)u(y)dy = f(x), \quad (64.2)$$

строгое и систематическое изучение которых выходит за рамки нашего курса. Однако, учитывая все возрастающее значение этих уравнений во многих физических приложениях, рассмотрим некоторые вопросы, связанные с нахождением их решений.

Особенностью уравнений (64.1), (64.2), отличающей их от рассмотренных ранее, является некорректность постановки задачи (см. разд. «Постановка задач математической физики»). Действительно, нетрудно видеть, что непрерывность функции $f(x)$, вообще говоря, не гарантирует существования непрерывного решения для сколь угодно «хорошего» ядра $K(x, y)$. Для примера рассмотрим уравнение

$$\int_a^b (y^2 + yx + yx^2)u(y)dy = e^x. \quad (64.3)$$

При любой непрерывной функции $u(x)$ левая часть (64.3) после интегрирования представляет собой полином

$$A + Bx + Cx^2,$$

который ни при каких значениях коэффициентов A, B, C не равен тождественно на $[a, b]$ правой части уравнения (64.3) — функции e^x . Отсюда следует, что это уравнение в классе интегрируемых на $[a, b]$ функций решения не имеет.

Однако, если функцию e^x на $[a, b]$ аппроксимировать некоторым квадратичным полиномом $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, то, вообще говоря, существует некоторое решение уравнения (64.3). Таким образом, незначительные изменения правой части уравнения могут привести к существенным изменениям решения $u(x)$,

вплоть до полного его отсутствия. Сказанное выше не означает, что некорректно поставленные задачи не имеют смысла. Дело в том, что такие задачи требуют специальных методов решения в отличие от задач, поставленных корректно. Мы ограничимся рассмотрением некоторых частных видов уравнений (64.1), (64.2), допускающих решение рассмотренными ранее методами.

64.1. Уравнения Вольтерра первого рода

Большинство задач, сводящихся к уравнениям Вольтерра первого рода, являются в определенном смысле «обратными» по отношению к задачам анализа физических объектов и явлений. Примером «прямой» задачи анализа может служить задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Если для тех же уравнений поставить задачу определения правой части по известному решению, то получим один из примеров «обратной» задачи, описываемой уравнением (64.2). Рассмотрим некоторые виды уравнений (64.2).

I. Пусть $K(x, y)$, $\partial K(x, y)/\partial x$, $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны при $a \leq y \leq x \leq b$, причем $f(a) = 0$. Дифференцирование уравнения (64.2) по x дает

$$K(x, x)u(x) + \int_a^x \left[\frac{\partial}{\partial x} K(x, y) \right] u(y) dy = f'(x). \quad (64.4)$$

Если $K(x, x)$ не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $[a, b]$, то уравнение (64.4) можно записать в виде

$$u(x) + \int_a^x \bar{K}(x, y) u(y) dy = \bar{f}(x), \quad (64.5)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{K}(x, y) &= \left[\frac{\partial}{\partial x} K(x, y) \right] / K(x, x), \\ \bar{f}(x) &= f'(x) / K(x, x). \end{aligned} \quad (64.6)$$

Таким образом, в рамках сделанных предположений уравнение Вольтерра первого рода (64.2) можно свести к уравнению Вольтерра второго рода с ядром и правой частью (64.6).

Если $K(x, x) = 0$ для некоторого $x \in [a, b]$, то повторное дифференцирование (64.4) в предположении, что $\partial K(x, y)/\partial x \neq 0$, а $\partial^2 K(x, y)/\partial x^2$ и $f''(x)$ существуют и непрерывны, дает

$$u(x) + \int_a^x \bar{\bar{K}}(x, y)u(y)dy = \bar{\bar{f}}(x),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\bar{K}}(x, y) &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y) \right] / \left[\frac{\partial}{\partial x} K(x, y) \Big|_{y=x} \right], \\ \bar{\bar{f}}(x) &= f''(x) / \left[\frac{\partial}{\partial x} K(x, y) \Big|_{y=x} \right] \end{aligned}$$

и т.д.

Пример 64.1. Решить уравнение

$$\int_0^x e^{x-y}u(y)dy = x. \quad (64.7)$$

Решение. Ядро и правая часть интегрального уравнения (64.7) удовлетворяют указанным выше требованиям, и, следовательно, дифференцированием по x оно может быть преобразовано к виду

$$u(x) + \int_0^x e^{x-y}u(y) = 1,$$

представляющему собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода типа свертки.

Применив преобразование Лапласа, получим

$$\bar{u}(p) + \frac{1}{p-1}\bar{u}(p) = \frac{1}{p},$$

откуда

$$\bar{u}(p) = \frac{p-1}{p^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}.$$

Возвратившись к оригиналам, находим решение уравнения (64.7)

$$\bar{u}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \leftrightarrow 1 - x = u(x),$$

в справедливости которого нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

II. Пусть $K(x)$ и $f(x)$ являются оригиналами с изображениями $\bar{K}(p)$ и $\bar{f}(p)$ соответственно.

◆ Интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^x K(x-y)u(y)dy = f(x), \quad (64.8)$$

ядро которого $K(x-y)$ зависит лишь от разности $x-y$, называется интегральным уравнением Вольтерра первого рода типа свертки.

Применив в обеих частях (64.8) преобразование Лапласа и воспользовавшись теоремой о свертке, получим

$$\bar{u}(p)\bar{K}(p) = \bar{f}(p),$$

откуда

$$\bar{u}(p) = \frac{\bar{f}(p)}{\bar{K}(p)} \Leftrightarrow u(x). \quad (64.9)$$

Оригинал $u(x)$ для функции $\bar{u}(p)$, определяемый равенством (64.9), и будет искомым решением интегрального уравнения (64.8).

Пример 64.2. Решить уравнение

$$\int_0^x \cos(x-y)u(y)dy = \sin x. \quad (64.10)$$

Решение. Ядро $\cos(x-y)$ и правая часть $\sin x$ уравнения являются оригиналами с изображениями

$$\cos x \Leftrightarrow \frac{p}{p^2+1}, \quad \sin x \Leftrightarrow \frac{1}{p^2+1},$$

причем $f(0) = \sin 0 = 0$. Операторное уравнение имеет вид

$$\frac{p}{p^2+1}\bar{u}(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Отсюда

$$\bar{u}(p) = \frac{1}{p} \Leftrightarrow 1 = u(x).$$

Функция $u(x) = 1$ является решением уравнения (64.10).

Пример 64.3. Найти решение интегрального уравнения

$$\int_0^x J_0(x-y)u(y)dy = \sin x. \quad (64.11)$$

Решение. С учетом (63.20) и (63.22) найдем

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\bar{u}(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Следовательно,

$$\bar{u}(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \Leftrightarrow u(x) = J_0(x).$$

III. Уравнение Абеля

◆ Уравнение вида

$$\int_a^x \frac{u(y)dy}{(x-y)^\alpha} = f(x), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (64.12)$$

называется уравнением Абеля.

Теорема 64.1. *Функция*

$$u(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x f(z)(x-z)^{\alpha-1} dz \quad (64.13)$$

является решением уравнения (64.12).

Доказательство. Запишем (64.12) в виде

$$\int_a^z \frac{u(y)}{(z-y)^\alpha} dy = f(z).$$

Домножим его левую и правую части на $(x-z)^{\alpha-1}$ и проинтегрируем по z в пределах от a до x :

$$\int_a^x dz (x-z)^{\alpha-1} \int_a^z \frac{u(y)}{(z-y)^\alpha} dy = \int_a^x f(z)(x-z)^{\alpha-1} dz$$

или

$$\int_a^x dz \int_a^z \frac{u(y)}{(z-y)^\alpha (x-z)^{1-\alpha}} dy = \int_a^x f(z)(x-z)^{\alpha-1} dz.$$

Изменим в левой части порядок интегрирования

$$\int_a^x dy \int_y^x dz \frac{u(y)}{(z-y)^\alpha (x-z)^{1-\alpha}} = \int_a^x f(z)(x-z)^{\alpha-1} dz.$$

В интеграле

$$I = \int_y^x \frac{dz}{(z-y)^\alpha (x-z)^{1-\alpha}}$$

сделаем замену переменных $z = y + (x-y)\zeta$ и $dz = (x-y)d\zeta$. Тогда

$$I = \int_0^1 \frac{(x-y)d\zeta}{(x-y)^\alpha \zeta^\alpha [x-y-(x-y)\zeta]^{1-\alpha}}.$$

С учетом соотношения $[x-y-(x-y)\zeta]^{1-\alpha} = (x-y)^{1-\alpha}(1-\zeta)^{1-\alpha}$ получим

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta^\alpha (1-\zeta)^{1-\alpha}} = \int_0^1 \zeta^{-\alpha} (1-\zeta)^{\alpha-1} d\zeta = B(1-\alpha, \alpha) = \\ &= \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha+\alpha)} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались определением бета-функции и формулой дополнения для гамма-функции. В результате запишем

$$\int_a^x \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} u(y) dy = \int_a^x f(z)(x-z)^{\alpha-1} dz,$$

откуда

$$u(y) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x f(z)(x-z)^{\alpha-1} dz,$$

что и требовалось доказать.

◇ Последнее подынтегральное выражение имеет особенности, и его в общем случае нельзя дифференцировать под знаком интеграла.

64.2. Уравнения Фредгольма первого рода

Выясним условия, при которых существует непрерывное решение уравнения Фредгольма первого рода (64.1). Из (64.1) следует, что функцию $f(x)$ можно рассматривать как истокообразно представимую через ядро $K(x, y)$. Согласно теореме Гильберта–Шмидта, коэффициенты разложения Фурье f_n и u_n по системе собственных функций ядра $K(x, y)$ связаны соотношением $\lambda_n f_n = u_n$. Если для системы собственных функций ядра $K(x, y)$ выполнено условие полноты, то, согласно неравенству Бесселя, из этого условия следует сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2.$$

Однако непрерывность функции $f(x)$, обеспечивая сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$, не гарантирует, вообще говоря, сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2$. Таким образом, решение уравнения (64.1) может существовать не для любой непрерывной функции $f(x)$, а лишь для такой, для которой сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2$, т.е. коэффициенты f_n которой убывают достаточно быстро, поскольку $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

При выполнении этих условий решение уравнения (64.1) находится в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k u_k(x), \quad (64.14)$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой:

$$\begin{aligned} \int_a^b K(x, y) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k u_k(y) dy &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \lambda_k \int_a^b K(x, y) u_k(y) dy = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x) = f(x). \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 64.2 (Пикара). Если $K(x, y)$ – симметричное ядро с полной ортонормированной системой собственных функций $u_n(x)$ и характеристических чисел λ_n , а функция $f(x)$ такова, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2 \quad (64.15)$$

из коэффициентов Фурье этой функции

$$f_k = \int_a^b f(x) u_k(x) dx$$

сходится, то решение уравнения (64.1) существует, единственно и определяется формулой (64.14).

Пример 64.4. Решить уравнение

$$\int_0^1 K(x, y) u(y) dy = \sin 2\pi x \cos 2\pi x, \quad (64.16)$$

где

$$K(x, y) = \begin{cases} y(1-x), & 0 < y < x; \\ x(1-y), & x < y < 1. \end{cases} \quad (64.17)$$

Решение. В примере 59.2 была получена полная ортонормированная система функций ядра (64.17)

$$u_n = \sqrt{2} \sin \pi n x, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (64.18)$$

с характеристическими числами

$$\lambda_n = (\pi n)^2, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Для исследования сходимости ряда (64.15) найдем коэффициенты Фурье функции $f(x) = \sin 2x \cos x$ по ортонормированной системе функций (64.18). Для этого воспользуемся тождеством

$$\sin 2\pi x \cos \pi x = \frac{1}{2} \sin 3\pi x + \frac{1}{2} \sin \pi x,$$

с помощью которого правую часть (64.16) можно записать в виде

$$\sin 2\pi x \cos \pi x = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2} \sin \pi x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2} \sin 3\pi x), \quad (64.19)$$

откуда, в свою очередь, следует, что отличны от нуля только коэффициенты

$$f_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad f_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad (64.20)$$

Таким образом, для (64.15) с учетом (64.20) и характеристических чисел $\lambda_1 = \pi^2$ и $\lambda_3 = (3\pi)^2$ имеем

$$\sum_k \lambda_k^2 f_k^2 = \pi^4 \frac{1}{8} + (3\pi)^4 \frac{1}{8} = \frac{41}{4} \pi^4.$$

Это означает, что ряд (64.15) сходится, и, следовательно, все условия разрешимости исходного интегрального уравнения выполнены. Обратившись к формуле (64.14), находим решение уравнения

$$u(x) = \frac{\pi^2}{2} [\sin \pi x + 27 \sin 3\pi x].$$

Как и в случае уравнений Фредгольма второго рода, для решения уравнений Фредгольма первого рода с разностным ядром можно использовать преобразование Фурье. Действительно, с учетом принятых выше обозначений для разрешимого уравнения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)u(y)dy = f(x) \quad (64.21)$$

находим

$$\bar{u}(\omega) = \frac{\bar{f}(\omega)}{\sqrt{2\pi}\bar{K}(\omega)},$$

откуда

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(\omega)}{\bar{K}(\omega)} e^{ix\omega} d\omega. \quad (64.22)$$

Пример 64.5. С помощью преобразования Фурье найти решение интегрального уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{a^2 + (x-y)^2} dy = \frac{1}{b^2 - x^2}, \quad (64.23)$$

где $b > a$.

Решение. Уравнение (64.23) – уравнение Фредгольма первого рода с разностным ядром, в котором

$$K(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad f(x) = \frac{1}{b^2 + x^2}.$$

С учетом соотношений

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{b} e^{-\alpha b},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^2 + b^2} dx = 0, \quad \alpha > 0, b > 0$$

(см. разд. «Несобственные интегралы от осциллирующих функций» части I) найдем фурье-образы функций $K(x)$ и $f(x)$:

$$\bar{f}(\omega) = F_{x \rightarrow \omega} \frac{1}{b^2 + x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2b^2}} e^{-b|\omega|},$$

$$\bar{K}(\omega) = F_{x \rightarrow \omega} \frac{1}{a^2 + x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2a^2}} e^{-a|\omega|}.$$

Тогда

$$\bar{u}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{b} e^{-(b-a)|\omega|}.$$

С учетом результатов примера 61.3 получим

$$u(x) = F_{\omega \rightarrow x}^{-1} \bar{u}(\omega) = \frac{a}{b} \frac{b-a}{\pi} \frac{1}{(b-a)^2 + x^2}.$$

65. Применение метода интегральных преобразований при решении уравнений в частных производных

◆ Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $]a, b[$, конечном или бесконечном. Интегральным преобразованием функции $f(x)$ называется функция

$$F(\omega) = \widehat{V}f(x) = \int_a^b K(x, \omega) f(x) dx, \quad (65.1)$$

где $K(x, \omega)$ – ядро преобразования. Оператор, ставящий в соответствие функции $f(x)$ функцию $F(\omega)$ по закону (65.1) называется интегральным оператором.

Примеры интегральных преобразований:

1) преобразование Фурье

$$\begin{aligned} \bar{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx, \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \bar{f}(\omega) d\omega; \end{aligned}$$

2) преобразование Лапласа

$$\begin{aligned} \tilde{f}(p) &= \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx, \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \tilde{f}(p) e^{px} dp; \end{aligned}$$

3) преобразование Мелина

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{f}(s)x^{-s}ds;$$

4) преобразование Ханкеля

$$f(y) = \int_0^{\infty} \sqrt{yx}J_{\nu}(xy)u(x)dx,$$

$$u(x) = \int_0^{\infty} \sqrt{xy}J_{\nu}(xy)f(y)dy.$$

Метод интегральных преобразований оказывается эффективным при решении некоторых классов уравнений в частных производных. Проиллюстрируем возможности метода интегральных преобразований на примере преобразования Лапласа. В этом случае необходимо, чтобы независимая переменная, по которой проводится преобразование, изменялась в интервале от нуля до бесконечности.

Неизвестная функция $u(x, y)$ может быть определена с помощью однократного или двукратного преобразования Лапласа. В первом случае проводят преобразование по одной переменной, считая вторую переменную неизменной. Результатом будет обыкновенное дифференциальное уравнение, которое решается каким-либо неоператорным методом, а затем обратным преобразованием Лапласа находится решение исходной задачи.

Во втором случае в полученном посредством преобразования Лапласа обыкновенном дифференциальном уравнении проводят преобразование Лапласа по второй переменной (интегрируют операторным методом). Затем, решив операторное (алгебраическое) уравнение, с помощью двукратного обратного преобразования Лапласа восстанавливают $u(x, y)$.

Описанную схему можно применять и для уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, если соответствующее операторное уравнение проще исходного. Рассмотрим ряд примеров.

Пример 65.1. С помощью преобразования Лапласа найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \quad (65.2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u(0, t) = A.$$

Решение. Применим к заданному уравнению, а также к начальным и краевым условиям преобразования Лапласа относительно переменной t

$$u(x, t) \rightarrow \tilde{u}(x, p), \quad u(0, t) \rightarrow \tilde{u}(0, p), \quad u(l, t) \rightarrow \tilde{u}(l, p).$$

Тогда для определения функции $\tilde{u}(x, p)$ получили следующую задачу:

$$p^2 \tilde{u}(x, p) = a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, p)}{\partial x^2}, \quad \tilde{u}(0, p) = \frac{A}{p}, \quad \tilde{u}(l, p) = 0. \quad (65.3)$$

Отсюда найдем

$$\tilde{u}(x, p) = C_1 \operatorname{ch} \frac{px}{a} + C_2 \operatorname{sh} \frac{px}{a}.$$

Из граничных условий следует, что

$$C_1 = \frac{A}{p}, \quad C_2 = -\frac{A \operatorname{ch}(pl/a)}{p \operatorname{sh}(pl/a)}.$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, p) &= \frac{A}{p} \left\{ \operatorname{ch} \frac{px}{a} - \frac{\operatorname{sh}(px/a) \operatorname{ch}(pl/a)}{\operatorname{sh}(pl/a)} \right\} = \\ &= \frac{A \operatorname{sh}(p[l-x]/a)}{p \operatorname{sh}(pl/a)}. \end{aligned} \quad (65.4)$$

Найдем оригинал функции (65.4). Воспользовавшись соотношением (см. пример 36.20 разд. «Свойства преобразования Лапласа» части I)

$$\frac{\operatorname{sh} ap}{p \operatorname{sh} bp} \leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{\pi ak}{b} \cos \frac{\pi kt}{b}, \quad (65.5)$$

получим

$$u(x, t) = A \frac{l-x}{l} - \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{\pi k(l-x)}{l} \cos \frac{\pi kat}{l}. \quad (65.6)$$

Пример 65.2. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < 1, & \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= A, & u_x|_{x=0} &= \mu_1(t), & u_x|_{x=1} &= \mu_2(t). \end{aligned} \quad (65.7)$$

Решение. Проведем преобразование Лапласа по независимой переменной t . Обозначим

$$u(x, t) \rightarrow \tilde{u}(x, p), \quad \mu_1(t) \rightarrow \tilde{\mu}_1(p), \quad \mu_2(t) \rightarrow \tilde{\mu}_2(p).$$

Тогда

$$u_{xx}(x, t) \rightarrow \tilde{u}_{xx}(x, p), \quad u_t(x, t) \rightarrow p\tilde{u}(x, p) - A$$

и

$$\tilde{u}_{xx} - p\tilde{u} + A = 0. \quad (65.8)$$

Общее решение уравнения (65.8) имеет вид

$$\tilde{u}(x, p) = C_1(p)e^{-x\sqrt{p}} + C_2(p)e^{x\sqrt{p}} + \frac{A}{p}, \quad (65.9)$$

где $C_1(p)$ и $C_2(p)$ — произвольные функции параметра p . Из (65.9) найдем

$$\tilde{u}_x(x, p) = -C_1(p)\sqrt{p}e^{-x\sqrt{p}} + C_2(p)\sqrt{p}e^{x\sqrt{p}}.$$

Из граничных условий

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x(0, p) &= [-C_1(p) + C_2(p)]\sqrt{p} = \tilde{\mu}_1(p), \\ \tilde{u}_x(1, p) &= [-C_1(p)e^{-\sqrt{p}} + C_2(p)e^{\sqrt{p}}]\sqrt{p} = \tilde{\mu}_2(p) \end{aligned}$$

найдем

$$C_1(p) = -\frac{\tilde{\mu}_1(p)e^{\sqrt{p}} - \tilde{\mu}_2(p)}{2\sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{p}}, \quad C_2(p) = -\frac{\tilde{\mu}_1(p)e^{-\sqrt{p}} - \tilde{\mu}_2(p)}{2\sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{p}}.$$

Тогда

$$\tilde{u}(x, p) = \frac{A}{p} - \frac{\tilde{\mu}_1(p) \operatorname{ch}[(1-x)\sqrt{p}] - \tilde{\mu}_2(p) \operatorname{ch}(x\sqrt{p})}{\sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{p}}. \quad (65.10)$$

Найдем оригинал функции (65.10). Поскольку (см. разд. «Свойства преобразования Лапласа» части I)

$$\frac{\operatorname{ch} a\sqrt{p}}{\sqrt{p} \operatorname{sh} b\sqrt{p}} \leftrightarrow \frac{1}{b} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-(\pi k/b)^2 t} \cos \frac{\pi a k}{b} \right],$$

то с учетом теоремы об умножении оригиналов получим

$$\begin{aligned} u(x, t) = & A - \int_0^t \mu_1(t - \tau) \times \\ & \times \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 \pi^2 \tau} \cos [(1-x)\pi k] \right\} d\tau + \\ & + \int_0^t \mu_2(t - \tau) \left\{ 1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 \pi^2 \tau} \cos \pi k x \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (65.11)$$

Пример 65.3. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\begin{aligned} u_y = u_{xx} + u + e^x + x; \quad (65.12) \\ x > 0, \quad y > 0; \quad u(0, y) = u_x(0, y) = 0. \end{aligned}$$

Решение. Проведем преобразование Лапласа по независимой переменной x

$$u(x, y) \rightarrow \tilde{u}(p, y).$$

Тогда с учетом начальных условий получим

$$\begin{aligned} u_x(x, y) \rightarrow p\tilde{u}(p, y) - u(0, y) = p\tilde{u}(p, y); \\ u_{xx}(x, y) \rightarrow p^2\tilde{u}(p, y) - u_x(0, y) = p^2\tilde{u}(p, y). \end{aligned}$$

Аналогично

$$u_y(x, y) \rightarrow \tilde{u}_y(p, y); \quad e^x \rightarrow \frac{1}{p-1} \quad x \rightarrow \frac{1}{p^2}.$$

Тогда уравнение (65.12) примет вид

$$\tilde{u}_y(p, y) = p^2\tilde{u}(p, y) - \tilde{u}(p, y) + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2}. \quad (65.13)$$

Решения уравнения (65.13) должны быть изображениями, т.е., как минимум, удовлетворять условию

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{u}(p, y) = 0. \quad (65.14)$$

В результате приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\tilde{u}_y(p, y) - \tilde{u}(p, y)(p^2 + 1) = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2},$$

решение которого ищем методом Бернулли:

$$\tilde{u}(p, y) = W(p, y)V(p, y),$$

т.е.

$$W'V + WV' - WV(p^2 + 1) = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2}. \quad (65.15)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной y . Потребуем, чтобы функция $V(p, y)$ удовлетворяла уравнению

$$V' - (p^2 + 1)V = 0,$$

и, разделив переменные, получим

$$\frac{dV}{V} = (p^2 + 1)dp.$$

Тогда

$$V(p, y) = e^{(p^2+1)y}.$$

Подставив $V(p, y)$ в (65.15), получим

$$W'e^{(p^2+1)y} = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2}.$$

Разделив переменные, найдем

$$dW = \left[\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2} \right] e^{-(p^2+1)y} dy.$$

Следовательно,

$$W(p, y) = - \left[\frac{1}{(p-1)(p^2+1)} + \frac{1}{p^2(p^2+1)} \right] e^{-(p^2+1)y} + C(y);$$

$$\tilde{u}(p, y) = \left(- \frac{e^{-(p^2+1)y}}{(p-1)(p^2+1)} - \frac{e^{-(p^2+1)y}}{p^2(p^2+1)} + C(y) \right) e^{(p^2+1)y} =$$

$$= C(y) e^{(p^2+1)y} - \frac{1}{(p-1)(p^2+1)} - \frac{1}{p^2(p^2+1)}.$$

Из условия ограниченности решения (65.14) найдем

$$C(y) = 0.$$

Следовательно,

$$\tilde{u}(p, y) = - \frac{1}{(p-1)(p^2+1)} - \frac{1}{p^2(p^2+1)}. \quad (65.16)$$

Разложим первую дробь на элементарные:

$$- \frac{1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1} =$$

$$= \frac{Ap^2 + A + Bp^2 + Cp - Bp - C}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p

$$\begin{array}{l|l} p^2 & A + B = 0 \\ p^1 & C - B = 0 \\ p^0 & A - C = -1, \end{array}$$

получим

$$A = -B, \quad C = B = -A, \quad A + A = -1,$$

$$B = \frac{1}{2}, \quad A = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$- \frac{1}{(p-1)(p^2+1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \frac{p+1}{p^2+1}.$$

Сделаем обратное преобразование Лапласа

$$- \frac{1}{(p-1)(p^2+1)} \leftrightarrow -\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x.$$

Для второго слагаемого из (65.16) с учетом соотношений

$$\frac{1}{p^2} \leftrightarrow x, \quad \frac{1}{p^2 + 1} \leftrightarrow \sin x$$

по теореме об умножении оригиналов (см. разд. «Свойства преобразования Лапласа» части I) найдем

$$-\frac{1}{p^2(p^2 + 1)} \leftrightarrow -\int_0^x (x-z) \sin z \, dz = -x + \sin x.$$

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид

$$u(x, y) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x - x.$$

Пример 65.4. С помощью преобразования Лапласа решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & t > 0, & \quad 0 < x < \pi/2; & \quad (65.17) \\ u(t, 0) &= e^{-t}, & u(t, \pi/2) &= 1, & \quad u(0, x) = \cos x + \frac{2}{\pi}x. \end{aligned}$$

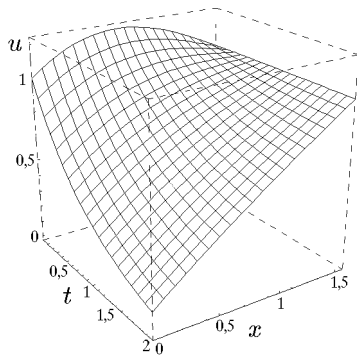


Рис. 92

изменялась в пределах $-\infty, \infty$.

Решение аналогично рассмотренным выше примерам и имеет вид (см. рис. 92)

$$u(x, t) = e^{-t} \cos x + \frac{2x}{\pi}.$$

В заключение рассмотрим уравнение в частных производных, допускающее решение с помощью интегрального преобразования Фурье. Напомним, что для его применения необходимо, чтобы независимая переменная, по которой проводится преобразование Фурье,

Пример 65.5. С помощью преобразования Фурье получить формулу Даламбера (37.2) для решения задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & t > 0, & \quad x \in \mathbb{R}^1, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}$$

Решение. Проведем преобразование Фурье по переменной x . Обозначим

$$\bar{u}(p, t) = F_{x \rightarrow p} u(x, t), \quad \bar{\varphi}(p) = F_{x \rightarrow p} \varphi(x), \quad \bar{\psi}(p) = F_{x \rightarrow p} \psi(x).$$

Тогда функция $\bar{u}(p, t)$ удовлетворяет операторному уравнению

$$\frac{\partial^2 \bar{u}(p, t)}{\partial t^2} + p^2 \bar{u}(p, t) = 0 \quad (65.18)$$

и дополнительным условиям $\bar{u}(p, 0) = \bar{\varphi}(p)$, $\bar{u}_t(p, 0) = \bar{\psi}(p)$. Общее решение уравнения (65.18) имеет вид

$$\bar{u}(p, t) = A(p) \cos pt + B(p) \sin pt = \bar{\varphi}(p) \cos pt + \frac{\bar{\psi}(p)}{p} \sin pt,$$

откуда получаем формулу для решения

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F_{p \rightarrow x} \bar{u}(p, t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixp} \bar{\varphi}(p) \cos pt \, dp + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixp} \frac{\bar{\psi}(p)}{p} \sin pt \, dp. \end{aligned}$$

Вычислим отдельно каждый интеграл в правой части этой формулы. Первый интеграл вычисляется непосредственно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixp} \bar{\varphi}(p) \cos pt \, dp &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip(x+t)} \bar{\varphi}(p) \, dp + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip(x-t)} \bar{\varphi}(p) \, dp = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2}. \end{aligned}$$

Второй интеграл обозначим через $I(t)$, тогда $I(0) = 0$ и

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixp} \bar{\psi}(p) \cos pt \, dp = \frac{\psi(x+t) + \psi(x-t)}{2}.$$

Следовательно, для второго интеграла получим

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \psi(x + \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \psi(x - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_x^{x+t} \psi(\eta) d\eta + \frac{1}{2} \int_{x-t}^x \psi(\eta) d\eta \end{aligned}$$

и окончательно

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + t) + \varphi(x - t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\eta) d\eta,$$

что совпадает с формулой Даламбера (37.2) при $a = 1$.

Задания для самоконтроля по курсу «Уравнения математической физики»

Теоретические вопросы

1. Сформулировать основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений в частных производных. Привести примеры решений простейших дифференциальных уравнений в частных производных.
2. Дать определение характеристической системы и доказать теорему об общем решении линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.
3. Поставить задачу Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Дать определение характеристических линий и доказать теорему об однозначной разрешимости задачи Коши.
4. Записать уравнение Гамильтона–Якоби. Выразить решение произвольного линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка через решение уравнения Гамильтона–Якоби.
5. Записать уравнение Гамильтона. Поставить задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби. Привести алгоритм решения задачи.
6. Сформулировать свойства полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби и показать его связь с общим решением уравнения Гамильтона–Якоби и первыми интегралами уравнения Гамильтона.
7. Сформулировать основные понятия, определения для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Привести их классификацию.
8. Сформулировать алгоритм приведения дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными к каноническому виду.
9. Поставить задачу Коши для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Привести алгоритм решения задачи методом характеристик.
10. Вывести одномерное волновое уравнение. На примере поперечных или продольных колебаний стержней или электрических колебаний в проводах (на выбор) сформулировать для него возможные постановки начально-краевых задач.
11. Вывести двумерное (трехмерное) волновое уравнение и сформулировать для него возможные постановки начально-краевых задач на примере колебаний мембраны или твердого тела.
12. Вывести одномерное уравнение теплопроводности и сформулировать для него возможные постановки начально-краевых задач.
13. Вывести уравнение распространения тепла (диффузии) в пространстве. Сформулировать возможные постановки начально-краевых задач.

14. Поставить возможные краевые задачи для уравнений эллиптического типа. Дать физическую интерпретацию поставленной задачи.
15. Дать понятие классических и обобщенных решений задач математической физики. Дать определение корректно поставленной задачи.
16. Провести редукцию начально-краевой задачи для уравнений математической физики.
17. Показать связь начально-краевой задачи для однородного уравнения (волнового или теплопроводности) с однородными граничными условиями с задачей Штурма–Лиувилля.
18. Показать связь начально-краевой задачи для неоднородного уравнения (волнового или теплопроводности) с однородными граничными условиями с задачей Штурма–Лиувилля.
19. Показать связь начально-краевой задачи для однородного уравнения с однородными начальными и неоднородными граничными условиями с задачей Штурма–Лиувилля.
20. Записать решение краевых задач для уравнений эллиптического типа через функцию Грина.
21. Вывести первую и вторую формулы Грина.
22. Получить фундаментальное решение уравнения Гельмгольца и Лапласа (плоский или пространственный случай).
23. Сформулировать основные свойства гармонических функций. Доказать любые два.
24. Дать понятие преобразования Кельвина и охарактеризовать поведение гармонических функций на бесконечности.
25. Поставить первую и третью краевые задачи. Сформулировать условия единственности и устойчивости их решения.
26. Привести схему метода разделения переменных (Фурье) для краевых задач для уравнения Лапласа (декартова или полярная система координат).
27. Привести схему метода разделения переменных (Фурье) для краевых задач уравнения Лапласа (цилиндрическая или сферическая система координат).
28. Вывести интеграл Пуассона или Дини.
29. Привести схему метода разделения переменных (Фурье) для краевых задач уравнения Гельмгольца (система координат на выбор). Сформулировать условия существования однозначного решения.
30. Решить задачу Дирихле методом функций Грина.
31. Сформулировать один из методов построения функции Грина задачи Дирихле.
32. Вывести формулу Пуассона задачи Дирихле в пространстве.
33. Определить функцию Грина (Неймана) задачи Неймана для уравнения Лапласа и с ее помощью найти решение соответствующей задачи.
34. Сформулировать один из методов построения функции Грина задачи Неймана для уравнения Лапласа.

35. Решить двумерные краевые задачи для уравнения Лапласа методами комплексного анализа.
36. Решить задачу Коши для одномерного однородного волнового уравнения методом Даламбера.
37. Решить задачу Коши для одномерного неоднородного волнового уравнения методом Даламбера. Сформулировать принцип Дюамеля.
38. Решить смешанную задачу для одномерного волнового уравнения на полупрямой методом Даламбера (четного и нечетного продолжения на выбор).
39. Решить смешанную задачу для одномерного волнового уравнения на конечном отрезке методом Даламбера.
40. Решить смешанную задачу для одномерного однородного волнового уравнения на конечном отрезке методом Фурье. Дать определение фундаментального решения задачи.
41. Решить смешанную задачу для одномерного неоднородного волнового уравнения на конечном отрезке методом Фурье.
42. Сформулировать общую схему метода Фурье для одномерного волнового уравнения.
43. Получить решение уравнения Даламбера в виде сферической волны.
44. Поставить задачу Коши для уравнения Даламбера в пространстве. Вывести формулу Кирхгофа.
45. Поставить задачу Коши для уравнения Даламбера на плоскости. Вывести формулу Пуассона.
46. Сформулировать обобщенную задачу Коши для волнового уравнения в пространстве. Найти ее фундаментальное решение.
47. Методом Фурье решить задачу о колебаниях мембран или твердых тел (на выбор).
48. Решить задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности методом Фурье.
49. Найти функцию Грина задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности и доказать ее свойства.
50. Решить задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности методом функций Грина.
51. Решить смешанную задачу для одномерного уравнения теплопроводности методом функций Грина или методом Фурье (на выбор).
52. Доказать принцип максимума и теорему о единственности решения смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности на конечном отрезке.
53. Определить функцию Грина смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности на конечном отрезке. Решить задачу методом функций Грина или методом Фурье (на выбор).
54. Найти функцию Грина задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве.
55. Привести общую схему решения уравнения теплопроводности в пространстве.

56. Сформулировать основные понятия и определения теории интегральных уравнений. Привести физические задачи, решение которых можно получить с помощью интегральных уравнений.
57. Получить интегральное уравнение для резольвенты уравнения Фредгольма методом определителей Фредгольма или методом вариационного исчисления (на выбор).
58. Построить резольвенту интегрального уравнения Фредгольма с помощью миноров и определителя Фредгольма или с помощью итерированных ядер (ряд Неймана).
59. Решить интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром.
60. Дать определение характеристических чисел и собственных функций уравнения Фредгольма. Сформулировать альтернативу Фредгольма.
61. Доказать основные свойства характеристических чисел и собственных функций интегральных уравнений с вырожденным ядром.
62. Доказать основные свойства характеристических чисел и собственных функций интегральных уравнений с симметричным ядром и нагруженным симметричным ядром.
63. Доказать теорему Гильберта–Шмидта и ее следствия.
64. Доказать теорему Стеклова.
65. Сформулировать условия существования и единственности решения неоднородных интегральных уравнений Фредгольма.
66. Решить интегральное уравнение Фредгольма с разностным ядром.
67. Сформулировать условия существования и единственности решения уравнения Вольтерра второго рода.
68. Решить уравнение Вольтерра второго рода с ядром специального вида (на выбор).
69. Получить решение уравнения Вольтерра первого рода (уравнение с разностным ядром или уравнение Абеля).
70. Доказать теорему Пикара.
71. Дать обзор применения метода интегральных преобразований для решения некоторых задач математической физики.

Индивидуальные задания

Вариант № 1

1.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xu_x - yu_y + zu_z = 0.$$

1.2. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - yu_y = 0, \quad u|_{y=1} = x.$$

1.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

а) $3u_{xx} + 8u_{xy} + 4u_{yy} = 0;$

б) $4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 10u_x + 5u_y = 0.$

1.4. Поставить краевую задачу об остывании однородного шара радиусом b с центром в начале координат, если он нагрет до температуры u_0 , поверхность шара теплоизолирована, а в каждой точке этого шара вследствие химической реакции поглощается количество тепла, пропорциональное температуре u в этой точке.

1.5. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса b с центром в начале координат, такую, что $\partial u / \partial r|_{r=b} = \sin^3 \varphi$.

1.6. Цилиндр, радиус основания которого b и высота h , имеет температуру нижнего основания и боковой поверхности, равную нулю. Температура верхнего основания есть функция $A(b^2 - r^2)$. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

1.7. Решить задачу о колебаниях струны $0 < x < l$ с закрепленными концами, если $u|_{t=0} = A \sin(\pi n x / l); u_t|_{t=0} = 0$.

1.8. Определить поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны $0 \leq x \leq q; 0 \leq y \leq p$ с закрепленным краем для случая, когда начальное отклонение мембраны равно $\sin(\pi x / q) \sin(\pi y / p)$, а начальная скорость равна нулю.

1.9. Дан тонкий стержень $0 < x < l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне, если левый конец стержня теплоизолирован, правый поддерживается при постоянной температуре u_2 , а начальная температура равна Ax/l , где $A = \text{const}$.

1.10. В кубе $0 \leq x, y, z \leq q$ происходит диффузия вещества, частицы которого распадаются со скоростью, пропорциональной его концентрации. Определить концентрацию вещества в этом кубе при $t > 0$, если начальная концентрация в нем постоянна и равна u_0 . Концентрация вещества на границе поддерживается равной нулю.

1.11. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = u_{xx} - 2u + x + 2t; \quad 0 < x < 1;$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = t; \quad u|_{t=0} = \sin \pi x.$$

1.12. Найти решение задачи Коши:

- а) $u_{xy} + u_x = 0$, $u|_{y=x} = A \sin x$, $u_x|_{y=x} = 1$;
 б) $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + 2$, $u|_{t=0} = x$, $u_t|_{t=0} = y$;
 в) $4u_t = u_{xx}$, $u|_{t=0} = \sin x \exp(-x^2)$.

1.13. Операционным методом решить уравнение в частных производных ($0 < x, y < \infty$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + u = f(x), \quad u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = y^n.$$

1.14. Доказать, что функции

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2ki} e^{ik|x|} \quad \text{и} \quad \bar{\mathcal{E}}(x) = -\frac{1}{2ki} e^{-ik|x|}$$

– фундаментальные решения оператора Гельмгольца

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2.$$

1.15. Построить функцию Грина оператора Лапласа для полупространства $y > 0$.

1.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в квадрате, если

$$u_x(0, y) = u(1, y) = u(x, 1) = u_y(x, 2) = 0.$$

Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

1.17. Найти распределение потенциала электростатического поля внутри двугранного угла $x > 0$, $y > 0$, $-\infty < z < \infty$, при условии, что его граница заряжена до потенциала $u_0 = \text{const}$.

1.18. Найти резольвенту и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2} \varphi(t) dt.$$

1.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \cos^2(x-t) \varphi(t) dt + 1 + \cos 4x.$$

1.20. Найти итерированное ядро $K_2(x, t)$ для уравнения Фредгольма с $K(x, t) = \exp(|x+t|)$; $a = -1$; $b = 1$.

1.21. Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi [\sin x \sin 4t + \sin 2x \sin 3t + \sin 3x \sin 2t + \sin 4x \sin t] \varphi(t) dt.$$

1.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x \varphi(t) dt.$$

Вариант № 2

2.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xu_x - yu_y + zu_z = u.$$

2.2. Найти решение задачи Коши

$$u_x + (2e^x - y)u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y.$$

2.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

$$\begin{aligned} \text{а) } & u_{xx} + 36u_{xy} + 243u_{yy} = 0; \\ \text{б) } & u_{xx} - 8u_{xy} + 16u_{yy} + 3u_x - 12u_y = 0. \end{aligned}$$

2.4. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня поддерживается постоянный тепловой поток.

2.5. Найти функцию, гармоническую вне шара радиуса b и такую, что $(u - u_r)|_{r=b} = \sin^2 \theta$.

2.6. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра $u(r, z)$ с радиусом основания b и высотой h , если температура верхнего и нижнего оснований равна нулю, а температура в каждой точке боковой поверхности зависит только от расстояния этой точки до нижнего основания (т.е. от z).

2.7. В полуполосе $0 < x < l, 0 < t$ решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}; & u_x(0, t) &= u(l, t) = 0; \\ u(x, 0) &= 0; & u_t(t, 0) &= \sin(2\pi x/l). \end{aligned}$$

2.8. В однородной прямоугольной мембране $0 \leq x \leq q; 0 \leq y \leq p$ часть границы $x = q, 0 \leq y < p$ и $y = p, 0 \leq x < q$ свободна, а остальная часть закреплена. Найти поперечные колебания мембраны, вызванные начальным отклонением $Axy, A = \text{const}$.

2.9. Начальная температура однородного шара радиуса b равна T . Найти температуру шара при $t > 0$, если поверхность шара поддерживается при постоянной температуре T_0 .

2.10. В прямоугольнике $0 < x < p, 0 < y < q$ решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2(u_{xx} + u_{yy}); & u|_{t=0} &= B \sin(\pi x/2p) \cos(3\pi y/2q); \\ u|_{x=0} &= u_x|_{x=p} = u|_{y=0} = u|_{y=q} = 0; & t > 0; & B = \text{const}. \end{aligned}$$

2.11. Решить смешанную задачу

$$u_t - u_{xx} - u = xt(2-t) + 2 \cos t, \quad 0 < x < \pi;$$

$$u_x|_{x=0} = t^2; \quad u_x|_{x=\pi} = t^2; \quad u|_{t=0} = \cos 2x.$$

2.12. Решить задачу Коши:

а) $u_{xx} - u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 4,$
 $u(0, y) = -y, \quad u_x(0, y) = y - 1, \quad |x| < \infty;$

б) $u_{tt} = \Delta u_{xx} + 2xyz, \quad u|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2, \quad u_t|_{t=0} = 1;$

в) $u_t = u_{xx}, \quad u(x, 0) = x \exp(-x^2).$

2.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_y = u_{xx} + u + 2 \cos x, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

$$u(0, y) = \exp(-3y), \quad u_x(0, y) = 0.$$

2.14. Доказать, что функция

$$\mathcal{E}(x, y) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr),$$

где $H_0^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля, является фундаментальным решением оператора $\widehat{L} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$).

2.15. Найти решение задачи Дирихле (методом функции Грина)

$$\Delta u = 0, \quad y > 0; \quad u|_{y=0} = x(1 + x^2).$$

2.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в круге радиуса a , если $u|_{r=a} = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

2.17. Вычислить потенциал простого слоя $u(x, y)$ масс, распределенных по окружности $x^2 + y^2 = b^2$ с плотностью $\rho = 1$.

2.18. Найти резольвенту и решить уравнение

$$\varphi(x) = \exp(x^2 + 2x) + 2 \int_0^x \exp(x^2 + t^2) \varphi(t) dt.$$

2.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi (\sin t + t \cos t) \varphi(t) dt + 1 - \frac{2x}{p}.$$

2.20. Найти итерированное ядро $K_2(x, t)$ для уравнения Фредгольма с $K(x, t) = \exp|x - t|$; $a = 0$; $b = 1$.

2.21. Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 [(x/t)^{2/5} + (t/x)^{2/5}] \varphi(t) dt.$$

2.22. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = \exp x + 2 \int_0^x \varphi(t) \cos(x-t) dt.$$

Вариант № 3

3.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$yu_x - xu_y = 0.$$

3.2. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - yu_y + zu_z = 0, \quad u|_{x=1} = y + z.$$

3.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду

$$\begin{aligned} \text{а) } & 49u_{xx} + 28u_{xy} + 3u_{yy} = 0; \\ \text{б) } & u_{xx} - 12u_{xy} + 36u_{yy} + 2u_x - 12u_y = 0. \end{aligned}$$

3.4. Поставить краевую задачу о колебаниях круглой однородной мембраны, закрепленной по контуру, в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. К поверхности мембраны приложена внешняя сила плотностью $f(r, \varphi, t)$, действующая перпендикулярно плоскости невозмущенной мембраны. Начальные скорости и начальные отклонения отсутствуют.

3.5. Найти функцию, гармоническую в круговом секторе $0 < r < b$, $0 < \varphi < \alpha$ и такую, что $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, \alpha) = 0$, $u(b, \varphi) = V\varphi$, где $V = \text{const}$.

3.6. Найти функцию, гармоническую внутри единичной сферы и такую, что $u|_{r=1} = \cos(2\varphi + \pi/3) \sin^2 \theta$.

3.7. Решить задачу о колебаниях струны $0 < x < l$ с закрепленными концами, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение имеет форму ломаной, где $(0, 0)$, $A(l/2, h)$, $B(l, 0)$.

3.8. Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны $0 < x < p$; $0 < y < q$, закрепленной вдоль контура, если

$$u|_{t=0} = Axy(x-p)(y-q); \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad A = \text{const}.$$

3.9. На поверхности неограниченного кругового цилиндра с радиусом основания b поддерживается все время нулевая температура. Найти распределение температуры внутри цилиндра в момент времени $t > 0$, если $u|_{t=0} = AJ_0(\mu_k^{(0)} r/b)$, где $\mu_k^{(0)}$ – положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

3.10. В прямоугольнике $0 < x < q$, $0 < y < p$, $t > 0$ решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A \sin(\pi x/q) \cos(\pi y/2p); \\ u|_{x=0} &= u|_{x=q} = u|_{y=0} = u|_{y=p} = 0; \\ u|_{t=0} &= 0; \quad A = \text{const.} \end{aligned}$$

3.11. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 6u + 2t(1 - 3t) - 6x + 2 \cos x \cos 2x, \\ 0 < x < \pi/2; \quad u_x|_{x=0} &= 1; \quad u_x|_{x=\pi/2} = t^2 + \pi/2; \quad u|_{t=0} = x. \end{aligned}$$

3.12. Решить задачу Коши:

$$\begin{aligned} \text{а) } u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} &= 2, \\ u|_{y=0} &= 0; \quad u_y|_{y=0} = x + \cos x, \quad |x| < \infty; \\ \text{б) } u_{tt} &= u_{xx} + u_{yy} + 6xyt, \quad u|_{t=0} = x^2 - y^2, \quad u_t|_{t=0} = xy; \\ \text{в) } u_t &= u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \exp(2x - x^2). \end{aligned}$$

3.13. Используя интегральное преобразование Лапласа, решить задачу

$$\begin{aligned} u_y &= u_{xx} + u + \cos x, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty, \\ u(0, y) &= \exp(-3y), \quad u_x(0, y) = 0. \end{aligned}$$

3.14. Доказать, что функция

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2k} \exp(-k|x|)$$

является фундаментальным решением оператора $\widehat{L} = \partial_x^2 - k^2$.

3.15. Методом функции Грина решить задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad z < 0; \quad u(x, y, 0) = (1 + x^2 + y^2)^{-3/2}.$$

3.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в круге радиуса a , если $u_r|_{r=a} = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

3.17. Вычислить потенциал простого слоя $u(x, y)$ масс, распределенных по сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ с плотностью $\rho(x) = 1$.

3.18. Найти резольвенту и решить уравнение

$$\varphi(x) = \exp x \sin x + \int_0^x \frac{2 + \cos x}{2 + \cos t} \varphi(t) dt.$$

3.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(3x + t) \varphi(t) dt + \cos x.$$

3.20. Найти итерированные ядра для уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = \exp x \cos t$ и $a = 0$, $b = \pi$.

3.21. Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 t^2 - 2/45) \varphi(t) dt.$$

3.22. С помощью интегрального преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = 1 + 2 \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt.$$

Вариант № 4

4.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$u_x + yu = 0.$$

4.2. Найти решение задачи Коши

$$2\sqrt{x}u_x - yu_y = 0, \quad u|_{x=1} = yz.$$

4.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду

$$\begin{aligned} \text{а) } & 4u_{xx} + 3u_{xy} - u_{yy} = 0; \\ \text{б) } & 36u_{xx} + 12u_{xy} + u_{yy} + 18u_x + 3u_y = 0. \end{aligned}$$

4.4. Поставить краевую задачу о малых радиальных колебаниях идеального однородного газа, заключенного в сферический сосуд радиуса b , если начальные скорости и начальные отклонения заданы как функции от r . Граница непроницаема.

4.5. Найти функцию, удовлетворяющую внутри круга единичного радиуса уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$, если $u|_{r=1} = 25 \sin^3 \varphi$.

4.6. Найти стационарную температуру внутри однородного изотропного шара радиуса b , если на поверхности шара поддерживается температура $u|_{x=b} = \cos^2 \theta$.

4.7. В полуполосе $0 < x < l$, $0 < t$ для уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u(0, t) = u_x(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = x, \\ u_t(x, 0) = \sin(\pi x/2l) + \sin(3\pi x/2l). \end{aligned}$$

4.8. Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса b , закрепленной по краю, если

$$u|_{t=0} = A(r^2 - b^2), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

4.9. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - 4u, & u|_{t=0} &= x^2 - \pi x; \\ 0 < x < \pi; & & u|_{x=0} &= u|_{x=\pi} = 0. \end{aligned}$$

4.10. Дана тонкая квадратная пластинка $0 < x < l$, $0 < y < l$ с начальным распределением температуры $u|_{t=0} = f(x, y)$. Края пластинки все время удерживаются при нулевой температуре. Найти температуру любой точки пластины в момент времени $t > 0$.

4.11. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u; & 0 < x < 2; & & t > 0; \\ u|_{x=0} &= 2t; & u|_{x=2} &= 0; & u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

4.12. Решить задачу Коши:

$$\begin{aligned} \text{а) } & u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0, \\ & u|_{y=3x} = 0, \quad u_x|_{y=3x} = \exp(-5x^2), \quad x < 1; \\ \text{б) } & u_{tt} = 8\Delta u + t^2 x^2, \quad u|_{t=0} = y^2, \quad u_t|_{t=0} = z^2; \\ \text{в) } & u_t = 4u_{xx} + t + \exp t; \quad u|_{t=0} = 2. \end{aligned}$$

4.13. Методом преобразования Лапласа решить задачу

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < \infty, & & t > 0, \\ u|_{t=0} &= 0; & u|_{x=0} &= \frac{1}{\sqrt{t}}, & u(\infty, t) = 0. \end{aligned}$$

4.14. Доказать, что функции

$$\mathcal{E}(x, y) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr), \quad \bar{E}(x, y) = \frac{i}{4}H_0^{(2)}(kr)$$

являются фундаментальным решением оператора $\hat{L} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2$. Здесь $H_0^{(l)}$, $l = 1, 2$, — функции Ханкеля, а $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.15. Методом функции Грина найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad y < 0; \quad u|_{y=0} = \frac{1}{1+x^2}.$$

4.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в прямоугольнике, если $u(a, y) = u(b, y) = u_x(x, 0) = u_y(x, l) = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

4.17. Найти потенциал двойного слоя $u(x, y)$ масс, распределенных по окружности $x^2 + y^2 = 1$ с плотностью $\mu = x$.

4.18. Найти резольвенту и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 1 - 2x - \int_0^x \exp(x^2 - t^2)\varphi(t)dt.$$

4.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(2x+t)\varphi(t)dt + \sin x.$$

4.20. Найти итерированные ядра для уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = x \exp t$ и $a = 0$, $b = 1$.

4.21. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} [\cos^2(x+t) + 1/2]\varphi(t)dt.$$

4.22. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = \operatorname{sh} x - \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)dt.$$

Вариант № 5

5.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xu_x - yu_y = 0.$$

5.2. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - yu_y + zu_z = u, \quad u|_{x=1} = y + z.$$

5.3. Найти общее решение уравнения

- а) $25u_{xx} + 20u_{xy} + 3u_{yy} = 0$;
 б) $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$.

5.4. Однородный шар радиуса b с центром в начале координат нагрет до температуры T . Поставить краевую задачу об остывании шара, когда в шаре имеются тепловые источники постоянной мощности Q , а на его поверхности S происходит теплообмен с внешней средой нулевой температуры.

5.5. Найти функцию, гармоническую вне шара радиуса b и такую, что $u_r|_{r=b} = \sin^2 \theta$.

5.6. Круговой цилиндр, радиус основания которого R , а высота h , имеет температуру обеих оснований, равную нулю, а температура боковой поверхности постоянна и равна T . Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра.

5.7. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения $u_{tt} = 4u_{xx}$ на отрезке $0 < x < 1$; $t > 0$, если

$$u(x, 0) = x(x-1), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

5.8. Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны $0 < x < \pi$; $0 < y < \pi$, закрепленной вдоль контура, если

$$u|_{t=0} = 3 \sin x \sin 2y, \quad u_t|_{t=0} = 5 \sin 3x \sin 4y.$$

5.9. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры в стержне, если левый конец стержня поддерживается при постоянной температуре T , а на правый подается постоянный тепловой поток Q и $u|_{t=0} = \sin(5\pi x/2l) + 2 \sin(3\pi x/l)$.

5.10. Решить смешанную задачу

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}); \quad u|_{t=0} = f(x, y), \quad t > 0;$$

$$u|_{x=0} = u_x|_{x=p} = u|_{y=0} = u|_{y=l} = 0; \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < q.$$

5.11. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + \frac{u_{yy}}{x} - \frac{u}{x^2}; \quad 0 < x < 1, \quad |u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{t=0} = 0;$$

$$u|_{x=1} = \sin 2t \cos t, \quad u_t|_{t=0} = \frac{J_1(x)}{2J_1(1)} + \frac{3}{2} \frac{J_1(3x)}{J_1(3)}.$$

5.12. Решить задачу Коши:

- а) $xu_{xx} - u_{yy} + u_x/2 = 0$, $u|_{y=0} = x$, $u_y|_{y=0} = 0$, $x > 0$;
 б) $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + x^3 - 3xy^2$,
 $u|_{t=0} = e^x \cos y$, $u_t|_{t=0} = e^y \sin x$;
 в) $u_t = u_{xx} + 3t^2$; $u|_{t=0} = \sin x$.

5.13. Струна длиной l закреплена на концах. В момент времени $t = 0$ она оттянута в точке $x = c$ ($0 < c < l$) на расстояние, равное единице, от оси. Затем струна отпущена без сообщения ее точкам начальной скорости. Используя преобразование Лапласа, определить отклонение $u(x, t)$ точек струны для любого момента времени.

5.14. Доказать, что функция

$$\mathcal{E}(x, t) = -\frac{i\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left[i\frac{x^2}{4t} - i\frac{\pi}{4}\right]$$

– фундаментальное решение оператора Шредингера $\widehat{L}_S = i\partial_t + \partial_x^2$.

5.15. Методом функции Грина найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге $x^2 + y^2 < 1$, если на окружности $x^2 + y^2 = 1$ функция равна $\sin 2\varphi$.

5.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в прямоугольнике, если $u_x(2, y) = u_x(5, y) = u(x, 0) = u_y(x, 2) = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

5.17. Показать, что потенциал $u(x, y)$ масс, распределенных по кругу $x^2 + y^2 < 1$ с плотностью $\mu = x$, дается формулой

$$u(x, y) = \begin{cases} -\pi \ln r, & r \geq 1 \\ \pi(1 - r^2)/2, & r \leq 1 \end{cases}, \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

5.18. Найти резольвенту и решить уравнение

$$\varphi(x) = x \cdot 3^x - \int_0^x 3^{x-t} \varphi(t) dt.$$

5.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x - 2t) \varphi(t) dt + \cos 2x.$$

5.20. Найти итерированные ядра для уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = x + \sin t$ и $a = -\pi$, $b = \pi$.

5.21. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} [\sin(x + t) + 1/2] \varphi(t) dt.$$

5.22. Используя преобразование Лапласа, решить уравнение

$$\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt.$$

Вариант № 6

6.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$u_x = u_y.$$

6.2. Найти решение задачи Коши

$$u_x + u_y + 2u_z = 0, \quad u|_{x=1} = yz.$$

6.3. Найти общее решение уравнения

$$\begin{aligned} \text{а) } & u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x - 3u_y = 0; \\ \text{б) } & xu_{xx} - yu_{yy} + (u_x - u_y)/2 = 0, \quad x > 0, \quad y > 0. \end{aligned}$$

6.4. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны, закрепленной на краях, в среде с сопротивлением, пропорциональным первой степени скорости.

6.5. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в прямоугольнике $0 < x < p$, $0 < y < q$, если:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= A \sin(\pi y/q), & u(p, y) &= 0, \\ u(x, 0) &= B \sin(\pi x/p), & u(x, q) &= 0. \end{aligned}$$

6.6. Найти стационарную температуру внутренних точек полусферы радиуса b , если сферическая поверхность поддерживается при постоянной температуре T , а основание полусферы – при нулевой.

6.7. Решить задачу о колебаниях струны $0 < x < l$ с закрепленными концами, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение имеет форму параболы, осью симметрии которой служит прямая $x = l/2$, а вершиной – точка $M(l/2, h)$.

6.8. Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса b , закрепленной по краю, если $u|_{t=0} = AJ_0(\alpha_k^0 r/R)$, где α_k^0 – положительный корень уравнения $J_0(\alpha) = 0$. Начальная скорость равна нулю.

6.9. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1; \quad u_x|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = x^2 - 1.$$

6.10. Дан неограниченный круговой цилиндр радиуса b . Найти распределение температуры внутри цилиндра в момент времени $t > 0$, если поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре, а начальная температура внутри цилиндра равна нулю.

6.11. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + u_x/x - u, & 0 < x < 1; \\ |u|_{x=0}| &< \infty, & u|_{x=1} &= \cos 2t + \sin 3t, \\ u|_{t=0} &= \frac{J_0(x\sqrt{3})}{J_0(\sqrt{3})}, & u_t|_{t=0} &= \frac{3J_0(2x\sqrt{2})}{J_0(2\sqrt{2})}. \end{aligned}$$

6.12. Решить задачу Коши:

$$\begin{aligned} \text{а) } & xu_{xx} + (x+y)u_{xy} + yu_{yy} = 0, \\ & u|_{y=1/x} = x^3, \quad u_x|_{y=1/x} = 2x^2, \quad x > 0; \\ \text{б) } & u_{tt} = 3\Delta u + 6(x^2 + y^2 + z^2), \\ & u|_{t=0} = x^2 y^2 z^2, \quad u_t|_{t=0} = xy^2; \\ \text{в) } & u_t = u_{xx} + \exp(-t) \cos x, \quad u|_{t=0} = \cos x. \end{aligned}$$

6.13. Используя интегральное преобразование Лапласа, решить задачу

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_y + u &= x, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty, \\ u(0, y) &= y, \quad u_x(0, y) = 0. \end{aligned}$$

6.14. Доказать, что фундаментальным решением оператора Клейна–Гордона–Фока $\widehat{L}_{\text{КГ}} = \partial_t^2 - a^2 \partial_x^2 - a^2 \partial_y^2 + m^2$ является функция

$$\mathcal{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi a^2} \theta(at - |\vec{x}|) \frac{\cos(m\sqrt{t^2 - a^{-2}|\vec{x}|^2})}{\sqrt{t^2 - a^{-2}|\vec{x}|^2}}.$$

6.15. Методом функции Грина найти решение уравнения Лапласа в полукруге $E : \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ при условии

$$u|_{|z|=1} = \sin \varphi, \quad u|_{\arg z=0} = 0, \quad u|_{\arg z=\pi} = 0.$$

6.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в прямоугольнике, если $u(0, y) = u_x(2, y) = u(x, 1) = u(x, 2) = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

6.17. Найти потенциал двойного слоя масс, распределенных по окружности $x^2 + y^2 = 1$ с плотностью $\mu = 1$.

6.18. Найти резольвенту и решить уравнение

$$\varphi(x) = \sin x + 2 \int_0^x \exp(x-t)\varphi(t)dt.$$

6.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(2x+t)\varphi(t)dt + \pi - 2x.$$

6.20. Найти итерированные ядра для уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = (x-t)^2$ и $a = -1, b = 1$ ($n = 2, 3$).

6.21. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра $K(x, y) = 3x + xy - 5x^2y^2$ и при всех λ и a решить уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 K(x, y)\varphi(y)dy + ax.$$

6.22. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt.$$

Вариант № 7

7.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(x + 2y)u_x - yu_y = 0.$$

7.2. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - yu_y = 0, \quad u|_{x=1} = y^2.$$

7.3. Найти общее решение уравнения:

- а) $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} - u_x - 4u_y = 0$;
 б) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$.

7.4. Поставить краевую задачу об определении установившейся (стационарной) концентрации неустойчивого газа в цилиндре радиуса b и высоты h , если в цилиндре имеются источники газа постоянной мощности Q , а скорость распада газа пропорциональна его концентрации u . На основаниях цилиндра концентрация газа поддерживается равной нулю, а боковая поверхность газонепроницаема.

7.5. Найти функцию, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и такую, что $u|_{r=1} = 1 + \cos^2 \varphi$, $u|_{r=2} = \sin^2 \varphi$.

7.6. Найти функцию, гармоническую внутри единичной сферы и такую, что $u|_{r=1} = (\sin \theta + \sin 2\theta) \sin(\varphi + \pi/6)$.

7.7. Для уравнения $u_{tt} = u_{xx} + \cos t$ решить смешанную задачу

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

7.8. Определить поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны $0 \leq x \leq p$; $0 \leq y \leq q$ с закрепленным краем, если колебания вызваны непрерывно распределенной по мембране силой с плотностью $f(x, y, t) = \exp(-t) \sin(2\pi y/q)$.

7.9. В полуполосе $0 < x < l$, $0 < t$ решить смешанную задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u_x(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = A(l - x), \quad A = \text{const.}$$

7.10. В однородном шаре радиуса b , начиная с момента $t = 0$, действуют источники тепла постоянной плотности Q . Начальная температура шара равна T . Определить распределение температуры в шаре при $t > 0$, если с поверхности шара происходит теплоотдача потоком постоянной мощности q .

7.11. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + u_x/x - 4u/x^2 + tJ_2(\alpha_1^2 x); \quad 0 < x < 1, \quad |u|_{x=0} < \infty;$$

$$u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0,$$

где α_1^2 – положительный корень уравнения $J_2(\alpha) = 0$.

7.12. Решить задачу Коши:

- а) $u_{xx} + 2(1 + 2x)u_{xy} + 4x(1 + x)u_{yy} + 2u_y = 0$,
 $u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = 2, \quad |y| < \infty$;
 б) $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + t \sin y; \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = \sin y$;
 в) $u_t = u_{xx} + \exp t \sin x; \quad u|_{t=0} = \sin x$.

7.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}; \quad t > 0, \quad x > 0, \quad u(0, t) = 0; \quad u(x, 0) = u_1 = \text{const.}$$

7.14. Доказать, что фундаментальным решением оператора Шредингера

$$\hat{L}_S = i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2)$$

является функция

$$\mathcal{E}(x, y) = -\frac{i}{\hbar}\theta(t)\frac{m}{2\pi\hbar t}\exp\left[i\frac{m}{2\hbar t}(x^2 - y^2) - i\frac{\pi}{2}\right].$$

7.15. Методом функции Грина найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad z > 0; \quad u|_{z=0} = (1 + x^2 + y^2)^{-1/2}.$$

7.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в прямоугольнике с границами $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $x = 0$, если на границе функция обращается в нуль. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

7.17. Вычислить объемный потенциал $u(x, y, z)$ для шара $r < b$ с плотностью $\rho = r$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

7.18. Найти резольвенту и решить уравнение

$$\varphi(x) = \exp x + \int_0^x \exp(x-t)\varphi(t)dt.$$

7.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 [5 + 4xy - 3x^2 - 3y^2 + 9x^2y^2]dy + x.$$

7.20. Найти для $n = 2, 3$ итерированные ядра уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = \sin(x-t)$ и $a = 0$, $b = \pi/2$.

7.21. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции однородного интегрального уравнения с симметричным ядром

$$K(x, t) = \begin{cases} -\exp(-t)\operatorname{sh} x, & 0 < x < t; \\ -\exp(-x)\operatorname{sh} t, & t < x < 1. \end{cases}$$

7.22. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt.$$

8.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xu_x + yu_y + zu_z = 0.$$

8.2. Найти решение задачи Коши

$$xu_x + yu_y + xyu_z = 0, \quad u|_{z=0} = \frac{x^2}{y^2}.$$

8.3. Найти общее решение уравнения

$$\begin{aligned} \text{а) } & u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 3u_x - 6u_y = 0; \\ \text{б) } & x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0. \end{aligned}$$

8.4. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $x = 0$, $x = l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня происходит конвективный теплообмен со средами заданной температуры.

8.5. Найти стационарное распределение температуры $u(r, \varphi)$ внутри бесконечного цилиндра радиуса b , если на его поверхности поддерживается температура $u(b, \varphi) = A \sin \varphi$.

8.6. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра $u(r, z)$ с радиусом основания b и высотой h , если основания цилиндра теплоизолированы, а температура боковой поверхности есть заданная функция от z .

8.7. Решить задачу о колебаниях однородной струны $0 < x < l$ с закрепленными концами под действием непрерывно распределенной силы с плотностью $p(x, t) = A \rho \sin \omega t$, $\omega \neq k\pi a/l$ ($k = \overline{1, \infty}$). Начальные условия нулевые.

8.8. В однородной прямоугольной мембране $0 \leq x \leq p$; $0 \leq y \leq q$ часть границы $x = 0$; $0 \leq y < q$ свободна, а остальная часть закреплена. Найти поперечные колебания мембраны, вызванные начальным отклонением $u(x, y, 0) = \cos(\pi x/2p) \sin(\pi y/q)$, начальные скорости отсутствуют.

8.9. В полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$ решить смешанную задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = u.$$

8.10. Для уравнения теплопроводности $u_t = a^2 \Delta u + f(x, y, t)$ решить смешанную задачу

$$u(0, y, t) = u_x(p, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, q, t) = 0; \quad u(x, y, 0) = 0$$

в прямоугольнике $0 < x < p$; $0 < y < q$.

8.11. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + u_x/x - 4u/x^2; \quad 0 < x < 1, \quad |u|_{x=0} < \infty; \\ u|_{x=1} &= 0, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = J_2(\alpha_k^2 x), \end{aligned}$$

где α_k^2 — k -ый положительный корень уравнения $J_2(\alpha) = 0$.

8.12. Решить задачу Коши

- а) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} + 2yu_y = 0$,
 $u|_{x=1} = y$, $u_x|_{x=1} = y$, $y < 0$;
- б) $u_{tt} = 10\Delta u$, $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = (3x + 2y + 4z)^2$;
- в) $u_t = u_{xx} + \sin t$; $u|_{t=0} = \exp(-x^2)$.

8.13. Пользуясь интегральным преобразованием Лапласа, определить температуру $u(x, t)$ в полубесконечном стержне ($0 < x < \infty$) при $t > 0$, если $u(0, t) = \delta(t)$, $u(\infty, t) = 0$, а начальная температура стержня равна нулю.

8.14. Доказать, что функция

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|)$$

– фундаментальное решение волнового оператора $\widehat{L}_D = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2$.

8.15. Построить функцию Грина задачи Дирихле для полупространства $z > 0$.

8.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в квадрате, если $u_x(0, y) = u_x(1, y) = u(1, y) = u(x, 1) = u(x, 2) = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

8.17. Найти потенциал $u(x, y)$ для круга $r < b$ с плотностью $\rho = r^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

8.18. Найти резольвенту и решить уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_0^x (t - x)\varphi(t)dt.$$

8.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - xt)\varphi(t)dt + x^2 + x.$$

8.20. Найти итерированные ядра $K(x, t) = x - t$ при $a = -1$, $b = 1$.

8.21. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции однородного интегрального уравнения с симметричным ядром

$$K(x, t) = \begin{cases} -\sin(x - \pi/n)\sin(t - \pi/n), & 0 \leq x \leq t; \\ -\sin(t + \pi/n)\sin(x - \pi/n), & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

8.22. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x - t)\varphi(t)dt.$$

Вариант № 9

9.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(x - z)u_x + (y - z)u_y + 2zu_z = 0.$$

9.2. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - u = 0, \quad u|_{x=1} = \sin y.$$

9.3. Найти общее решение уравнения:

$$\begin{aligned} \text{а) } & u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x - 4u_y = 0; \\ \text{б) } & \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

9.4. Сформулировать задачу о продольных колебаниях однородного упругого стержня постоянного сечения S длины l при заданных начальном отклонении и скорости, если концы стержня закреплены упруго, т.е. испытывают сопротивление, пропорциональное их отклонению.

9.5. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса R и такую, что $u_r|_{r=R} = A \cos 2\varphi$.

9.6. Найти функцию, гармоническую внутри единичной сферы и такую, что $u|_{r=1} = \sin \theta (\sin \varphi + \sin \theta)$.

9.7. Решить задачу о колебаниях струны $0 < x < l$ с закрепленными концами, если в начальном положении струна находится в покое, а

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} G_0, & x \in [\alpha, \beta]; \\ 0, & x \notin [\alpha, \beta], \end{cases} \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq l.$$

9.8. В однородной прямоугольной мембране $0 \leq x \leq p$; $0 \leq y \leq q$ часть границы $x = 0$, $0 \leq y < q$ свободна, а остальная часть закреплена. Найти поперечные колебания мембраны, вызванные начальным распределением скоростей $u_t(x, y, 0) = A(p - x) \sin(\pi y/q)$.

9.9. В полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$ решить смешанную задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} - \beta u; \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = \sin(\pi x/2l).$$

9.10. Определить температуру в однородном прямоугольном бесконечном стержне $0 \leq x \leq p$; $0 \leq y \leq q$, $-\infty < z < \infty$, если температура поверхности стержня поддерживается равной нулю. Начальная температура стержня – произвольная функция $f(x, y)$.

9.11. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + u_x/x - 4u/x^2 + \cos t J_2(\alpha_k^2 x); \quad 0 < x < 1; \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где $\alpha_k^{(2)}$ $-k$ -й положительный корень уравнения $J_2(\alpha) = 0$.

9.12. Решить задачу Коши:

- а) $a^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0$,
 $u|_{x=1} = y$, $u_x|_{x=1} = 2$, $|y| < \infty$;
 б) $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + t \sin y$; $u|_{t=0} = x^2$, $u_t|_{t=0} = \sin y$;
 в) $u_t = u_{xx} + \exp t \sin x$; $u|_{t=0} = \sin x$.

9.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_y = u_{xx} + u + e^x; \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty, \quad u(0, y) = u_x(0, y) = 0.$$

9.14. Доказать, что функция $\mathcal{E}(x) = \ln r/2\pi$ является фундаментальным решением оператора Лапласа $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Выяснить ее физический смысл.

9.15. Построить функцию Грина задачи Дирихле для двугранного угла $y > 0$, $z > 0$.

9.16. Найти волновые функции стационарных состояний и уровни энергии частицы в двумерной потенциальной яме вида

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < a; \\ \infty, & r \geq a. \end{cases}$$

9.17. Найти логарифмический потенциал двойного слоя для окружности радиуса b с постоянной плотностью $\mu = \mu_0$.

9.18. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, t) = -\frac{4x-2}{2x+1} + \frac{8(x-t)}{2x+1}.$$

9.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (2xt^3 + 5x^2t^2)\varphi(t)dt + 7xx^4 + 3.$$

9.20. Построить резольвенту для ядра $K(x, t) = \exp(x+t)$ при $a = 0$, $b = 1$.

9.21. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального (однородного) уравнения с симметричным ядром

$$K(x, t) = \begin{cases} \sin x \sin(t-1), & -\pi \leq x \leq t; \\ \sin t \sin(x-1), & t \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

9.22. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x \exp(-2x+2t)\varphi(t)dt.$$

Вариант № 10

10.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$yu_x + xu_y = x - y.$$

10.2. Найти решение задачи Коши

$$y^2 u_x + xyu_y = x, \quad u|_{x=0} = y^2.$$

10.3. Найти общее решение уравнения:

а) $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 8u_x + 4u_y = 0;$

б) $(x - y)u_{xy} + u_x - u_y = 0.$

10.4. Поставить задачу об определении температуры в бесконечном теплоизолированном стержне, по которому с момента $t > 0$ в положительном направлении со скоростью v начинает двигаться точечный тепловой источник, дающий q единиц тепла в единицу времени.

10.5. В круге радиуса b решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -1, \quad u|_{\sqrt{x^2+y^2}=b} = \frac{y^2}{2}|_{\sqrt{x^2+y^2}=b}.$$

10.6. Выяснить, разрешима ли внутренняя задача Неймана для шара радиуса R , если $u_r|_{r=R} = A \cos \theta$. Найти соответствующее решение.

10.7. Решить задачу о продольных колебаниях однородного цилиндрического стержня, один конец которого заделан, а к другому концу приложена сила $Q = A \sin \omega t$, направление которой совпадает с осью стержня ($\omega \neq a\pi(2k+1)/2l$, $k = \overline{0, \infty}$).

10.8. В однородной прямоугольной мембране $0 \leq x \leq p$; $0 \leq y \leq q$ часть границы $x = 0$, $0 \leq y \leq q$ свободна, а остальная часть закреплена. Найти поперечные колебания мембраны, вызванные распределенной по мембране поперечной силой с плотностью $f(x, y, t) = B(p - x) \sin(\pi y/q) \sin t$.

10.9. В полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$ решить смешанную задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}; \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = Ax.$$

10.10. В однородном шаре радиуса b начиная с момента $t = 0$ действуют источники тепла постоянной мощности Q . Начальная температура шара равна T . Найти распределение температуры в шаре при $t > 0$, если на его поверхности поддерживается постоянная температура u_0 .

10.11. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x - 3x - t; \quad 0 < x < \pi;$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = \pi t; \quad u|_{t=0} = \exp(-x), \quad u_t|_{t=0} = x.$$

10.12. Решить задачу Коши:

- а) $u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$,
 $u|_{y=0} = x$, $u_y|_{y=0} = 0$, $|x| < \infty$;
 б) $u_{tt} = 12\Delta u$; $u|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2$, $u_t|_{t=0} = 0$;
 в) $u_t = 8u_{xx}$; $u|_{t=0} = \exp(-3x^2)$.

10.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_{xx} - u_y + a^2 u = x^2, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

$$u(0, y) = u_x(0, y) = 0.$$

10.14. Доказать, что функция $\mathcal{E}(x) = \theta(x) \exp(\pm ax)$ является фундаментальным решением оператора Гельмгольца $\widehat{L}_H = \partial_x \pm a$.

10.15. Построить функцию Грина задачи Дирихле для октанта $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

10.16. Найти волновые функции стационарных состояний и уровни энергии частицы в сферической бесконечно глубокой потенциальной яме радиуса a .

10.17. Для оператора Лапласа вычислить потенциал простого слоя u , распределенного с постоянной плотностью μ_0 на сфере единичного радиуса.

10.18. Решить интегральное уравнение и построить его резольвенту

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + x^2.$$

10.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (2x^4 + 5x^3t)\varphi(t)dt + x^2 - x^4.$$

10.20. Построить резольвенту для ядра $K(x, t) = \sin x \sin t$ при $a = 0$, $b = 1$.

10.21. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром $K(x, t) = 1 + xt + x^2t^2$, $-1 \leq x, t \leq 1$.

10.22. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = \cos x - \int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt.$$

11.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$2xu_x + (y - x)u_y = x^2.$$

11.2. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - u = 0, \quad u|_{x=1} = y.$$

11.3. Найти общее решение уравнения:

а) $u_{xx} - 10u_{xy} + 25u_{yy} + 2u_x - 10u_y = 0;$

б) $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0.$

11.4. Поставить краевую задачу об остывании тонкого однородного кольца радиуса b , на поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей заданную температуру. Неравномерностью распределения температуры по толщине кольца пренебречь.

11.5. Найти стационарное распределение температуры внутри бесконечного цилиндра радиуса b , если на одной половине поверхности цилиндра ($0 \leq \varphi < \pi$) поддерживается температура $-T$, а на другой половине ($\pi \leq \varphi < 2\pi$) – температура T .

11.6. Найти гармоническую внутри шарового слоя $1 < r < 2$ функцию, такую, что $u|_{r=1} = \cos^2 \theta$, $u|_{r=2} = (\cos^2 \theta + 1)/8$.

11.7. Решить задачу о свободных колебаниях однородной струны длины l , закрепленной на концах и колеблющейся в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. Начальные условия произвольны.

11.8. Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса b , закрепленной по краю, если начальное отклонение имеет форму параболоида вращения, начальная скорость равна нулю.

11.9. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры в стержне, если концы стержня имеют постоянную температуру $u(0, t) = u(l, t) = u_1$, а начальная температура задается формулой $u(x, 0) = Ax(l - x)$, где $A = \text{const}$. Найти $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

11.10. Начальная температура шара $0 \leq r < b$ равна T . Найти температуру шара при $t > 0$, если внутрь шара через его поверхность подается постоянный поток тепла мощности Q (считать шар однородным).

11.11. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + 4u_x + x - 4t + 1 + \exp(-2x) \cos(\pi x);$$

$$0 < x < 1, \quad u|_{x=0} = t, \quad u|_{x=1} = 2t; \quad u|_{t=0} = 0.$$

11.12. Решить задачу Коши:

- а) $u_{xy} = 0$, $u|_{y=x^2} = 0$, $u_y|_{y=x^2} = x$, $|x| < 1$;
 б) $u_{tt} = 3u_{xx} + 3u_{yy} + x^2 + y^2$; $u|_{t=0} = x^2$, $u_t|_{t=0} = y^2$;
 в) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + \exp t$; $u|_{t=0} = \cos x \sin y$.

11.13. С помощью преобразования Лапласа найти распределение температуры в однородном тонком полуограниченном стержне $0 < x < \infty$, когда начальная температура стержня равна нулю, а на его левом краю поддерживается температура $u_0 = \text{const}$.

11.14. Доказать, что функция

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{a}\theta(x) \sin ax$$

является фундаментальным решением оператора $\widehat{L} = \partial_x^2 + a^2$.

11.15. Построить функцию Грина задачи Дирихле для шара $|\vec{x}| < b$.

11.16. Найти волновые функции двумерного изотропного гармонического осциллятора

$$V(\vec{r}) = \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2).$$

11.17. Найти распределение потенциала электростатического поля внутри двугранного угла при условии, что его граница заряжена до потенциала $V_0 = \text{const}$, если $0 < \varphi < \varphi_0$, $\varphi_0 < \pi/2$, $0 \leq r < \infty$.

11.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt + x^2.$$

11.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^{1/3} + t^{1/3}) \varphi(t) dt - 1 + 6x^2.$$

11.20. Построить резольвенту уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = x \exp t$ при $a = -1$, $b = 1$.

11.21. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра $K(x, t)$ и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos t + \sin x \sin t) \varphi(t) dt + a + b \cos x; \quad a, b = \text{const}.$$

11.22. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = x - \lambda \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt.$$

Вариант № 12

12.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xyu_x - x^2u_y = yx.$$

12.2. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - 2yu_y = x^2 + y^2, \quad u|_{y=1} = x^2.$$

12.3. Найти общее решение уравнения:

$$\begin{aligned} \text{а) } & u_{xx} + 28u_{xy} + 147u_{yy} = 0; \\ \text{б) } & yu_{xx} + (x-y)u_{xy} - xu_{yy} = 0, \quad x > -y. \end{aligned}$$

12.4. Сформулировать краевую задачу о малых продольных колебаниях упругого однородного стержня переменного сечения $S = S(x)$ длины l при произвольных начальных условиях, если стержень имеет форму усеченного конуса с радиусами оснований r и b , $r < b$, которые закреплены.

12.5. Найти решение уравнения Пуассона $\Delta u = -Axy$ в круге радиуса b с центром в начале координат, если $u|_{r=b} = 0$ и $A = \text{const}$.

12.6. Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра с радиусом b и высотой h , если к нижнему основанию $z = 0$ подводится постоянный тепловой поток Q , верхнее основание поддерживается при нулевой температуре, а на боковой поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры.

12.7. Стержень длиной l , один конец которого $x = 0$ закреплен, находится в состоянии покоя. В момент времени $t = 0$ к его свободному концу $x = l$ приложена сила $Q = \text{const}$, действующая вдоль стержня. Найти смещение $u(x, t)$ стержня.

12.8. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения $u_{tt} = \Delta u$ в прямоугольнике $0 < x < 5$, $9 < y < 3$, $t > 0$, если

$$\begin{aligned} u_{t=0} &= xy(5-x)(3-y), \\ u_t|_{t=0} &= 0, \quad u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=5} = u|_{y=3} = 0. \end{aligned}$$

12.9. Дан тонкий однородный стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне, если концы стержня теплоизолированы, а начальная температура задается формулой

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & 0 < x < l/2, \\ 0, & l/2 < x < l, \end{cases} \quad A = \text{const}.$$

12.10. Решить первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности $u_t = \Delta u$ в круге $0 \leq r < 7$, $t > 0$, если $u(r, 0) = 49 - r^2$, $u(7, t) = 0$.

12.11. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1 - 6t) - 2(t + 3x) \sin 2x;$$

$$0 < x < 1, \quad u_x|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi t + 1; \quad u|_{t=0} = x.$$

12.12. Решить задачу Коши:

- а) $yu_{xx} + x(2y - 1)u_{xy} - 2x^2u_{yy} - yu_x/x = 0,$
 $u|_{y=0} = x^2, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad x > 0;$
 б) $u_{tt} = u_{xx} + \exp x; \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = x + \sin x;$
 в) $u_t = iu_{xx} + tx^3; \quad u|_{t=0} = x^4.$

12.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_{xx} - u_y + a^2u = f(x), \quad x > 0, \quad y > 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u_x(0, y) = 0.$$

12.14. Доказать, что функция

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{a}\theta(x) \operatorname{sh} ax$$

является фундаментальным решением оператора $\widehat{L} = \partial_x^2 - a^2$.

12.15. Построить функцию Грина задачи Дирихле для полушара $|\vec{r}| < b, z > 0$.

12.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в прямоугольнике, если $u(0, y) = u_x(1, y) = u_y(x, 1) = u(x, 4) = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

12.17. С помощью потенциалов двойного и простого слоя найти стационарную температуру точек полуплоскости $y > 0$, если на границе $y = 0$ поддерживается заданная температура $u_0(x)$.

12.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \exp(x+t)\varphi(t)dt = x.$$

12.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xt + x^2t^2)\varphi(t)dt + 6x^2 + x^4.$$

12.20. Построить резольвенту уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = (1+x)(1-t)$ при $a = -1, b = 1$.

12.21. Исследовать уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \cos x\varphi(t)dt$$

на разрешимость при всех значениях параметра λ .

12.22. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = \exp 2x + \int_0^x \exp(t-x)\varphi(t)dt.$$

Вариант № 13

13.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xu_x + 2yu_y = x^2y + u.$$

13.2. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - u = 0, \quad u|_{x=1} = y.$$

13.3. Найти общее решение уравнения:

а) $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0;$

б) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0.$

13.4. Пренебрегая реакцией окружающей среды, поставить краевую задачу о поперечных колебаниях однородной прямоугольной мембраны $0 < x < p; 0 < y < q$ с закрепленным краем, если в начальный момент времени $t = 0$ мембрана получает поперечный сосредоточенный импульс I в точке (x_0, y_0) , $0 < x_0 < p, 0 < y_0 < q$, а начальное положение произвольно.

13.5. Найти функцию, гармоническую в прямоугольнике $0 < x < p; 0 < y < q$ и такую, что $u_x(0, y) = u(p, y) = 0, u(x, 0) = 0, u_y(x, l) = Bx$.

13.6. Найти функцию, гармоническую внутри сферы радиуса R и такую, что $u_r|_{r=R} = \sin(3\varphi + \pi/6) \sin^3 \theta$.

13.7. Решить задачу о свободных колебаниях однородной струны, один конец которой $x = 0$ закреплен, а другой $x = l$ свободен, если

$$u(x, 0) = \sin \frac{5\pi}{2l}x, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2l}x.$$

13.8. Решить задачу о свободных колебаниях квадратной мембраны $0 < x, y < p$, закрепленной вдоль контура, если

$$u|_{t=0} = A \sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{p}; \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

13.9. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} - u; \quad 0 < x < l, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 1.$$

13.10. Начальная температура однородного бесконечного прямоугольного стержня $0 \leq x \leq p; 0 \leq y \leq q, -\infty < z < \infty$ является произвольной функцией $f(x, y)$. Определить температуру в стержне при $t > 0$, если часть поверхности стержня $x = 0, 0 < y < q$

теплоизолирована, а остальная поддерживается при нулевой температуре.

13.11. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 6u + 2t(1 - 3t) - 6x + 2 \cos t \cos 2x; \quad 0 < x < \pi/2;$$

$$u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\pi/2} = t^2 + \pi/2, \quad u|_{t=0} = x.$$

13.12. Решить задачу Коши:

а) $yu_{xx} - (x + y)u_{xy} + xu_{yy} = 0,$
 $u|_{y=0} = x^3, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad x > 0;$

б) $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x; \quad u|_{t=0} = 1, \quad u_t|_{t=0} = 1;$

в) $8u_t = u_{xx} + u_{yy} + 1; \quad u|_{t=0} = \exp[-(x - y)^2].$

13.13. С помощью интегрального преобразования Лапласа решить задачу

$$u_{xx} - u_y + u = \sin x; \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

$$u(0, y) = y; \quad u(0, y) = u_x(0, y) = 0.$$

13.14. Доказать, что функция

$$\mathcal{E}(x) = \theta(x) \exp(\pm ax) \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

является фундаментальным решением оператора $\widehat{L} = (\partial_x \mp a)^m,$
 $m = \overline{2, \infty}.$

13.15. Построить функцию Грина задачи Дирихле для четверти шара $|\vec{r}| < b, y > 0, z > 0.$

13.16. Решить задачу Штурма–Лиувилля

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{r=a} = 0.$$

Записать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

13.17. С помощью потенциалов двойного и простого слоя найти стационарную температуру точек полуплоскости $y > 0,$ если на границе $y = 0$ поддерживается заданный поток тепла $\partial u_0 / \partial n|_{y=0} = u_1(x).$ Источников тепла нет.

13.18. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, t) = 2 - (x - t) \quad \lambda = 1.$$

13.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\cos x \cos t + \cos 2x \cos 2t) \varphi(t) dt + \cos 3x.$$

13.20. Построить резольвенту интегрального уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = x^2 t^2$ при $a = -1$, $b = 1$.

13.21. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} x) \varphi(t) dt = 0.$$

13.22. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x [3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2] \varphi(t) dt.$$

Вариант № 14

14.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(x^2 + y^2)u_x + 2xyu_y + u^2 = 0.$$

14.2. Найти решение задачи Коши

$$xu_x + yu_y = u - xy, \quad u|_{x=2} = y^2 + 1.$$

14.3. Найти общее решение уравнения:

$$\begin{aligned} \text{а) } & 9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 12u_x - 4u_y = 0; \\ \text{б) } & x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0 \quad x \neq 0, \quad y \neq 0. \end{aligned}$$

14.4. Внутри однородного и изотропного тела V происходит свободный теплообмен. Между телом и окружающей средой, температура которой равна $\Psi(t)$, также происходит свободный теплообмен. Какому уравнению и каким начальным и граничным условиям удовлетворяет температура тела $u(\vec{r}, t)$, если в начальный момент оно имело температуру $f(\vec{r})$?

14.5. В круговом секторе $0 < r < b$, $0 < \varphi < \alpha$ найти гармоническую функцию, удовлетворяющую краевым условиям $u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0$, $u(b, \varphi) = \varphi$.

14.6. Найти функцию, гармоническую вне единичной сферы и такую, что $u_r|_{r=1} = \sin(\pi/4 - \varphi) \sin \theta$.

14.7. В полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$ для уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_x(0, t) = u(l, t) = 0; \quad u(x, 0) &= \cos \frac{\pi x}{2l}; \\ u_t(x, 0) &= \cos \frac{3\pi x}{2l} + \cos \frac{5\pi x}{2l}. \end{aligned}$$

14.8. Решить задачу о колебаниях однородной круглой мембраны радиуса b , закрепленной по краю, если эти колебания вызваны равномерно распределенным давлением $p = p_0 \sin \omega t$, приложенным к одной стороне мембраны. Предполагается, что среда не оказывает сопротивления и что $\omega \neq a\alpha_n^0/b$, где α_n^0 ($n = \overline{1, \infty}$) – положительные корни уравнения $J_0(\alpha) = 0$ (нет резонанса).

14.9. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx}; \quad 0 < x < 1; \quad u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = 0.$$

14.10. В шаре $0 \leq r \leq b$ найти решение $u(r, t)$ следующей задачи:

$$u_t = a^2 \Delta u - \beta u; \quad t > 0, \quad \beta > 0, \quad |u(\tau, t)| < \infty, \\ u_r(b, t) = 0, \quad u(r, 0) = \begin{cases} u, & 0 \leq r < b/2, \\ 0, & b/2 < r < b. \end{cases}$$

14.11. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} - u_{xx} - 9u = 4 \sin^2 x \cos 3x - 9x^2 - 2; \quad 0 < x < \pi; \\ u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 2\pi, \quad u|_{t=0} = x^2 + 2.$$

14.12. Решить задачу Коши:

$$\text{а) } 3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0, \\ u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u_y|_{y=0} = \psi(x); \\ \text{б) } u_{tt} = a^2 \Delta u + \cos x \sin x e^z, \\ u|_{t=0} = x^2 e^{y+z}, \quad u_t|_{t=0} = \sin x e^{y+z}; \\ \text{в) } u_t = u_{xx} + u_{yy} + \sin x \sin y \sin z, \quad u|_{t=0} = 1.$$

14.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_y = u_{xx} + u + x; \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty, \\ u(0, y) = 0; \quad u_x(0, y) = 0.$$

14.14. Найти фундаментальное решение оператора $\hat{L} = \partial_x^2 + 4\partial_x$.

14.15. Построить функцию Грина задачи Дирихле для восьмой части шара $|\vec{r}| < b$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

14.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в кольце $a \leq r \leq b$, если $u|_{r=a} = 0$, $u_r|_{r=b} = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

14.17. Методом потенциалов найти стационарное распределение температуры внутри и вне бесконечного цилиндра радиуса b при условии, что на границе поддерживается температура

$$u(b, \varphi) = \begin{cases} u_0, & -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < \varphi < 3\pi/2, \end{cases} \quad u_0 = \text{const.}$$

14.18. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = -2 + 3(x - t)$, $\lambda = 1$.

14.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\cos x \cos t + 2 \sin 2x \sin 2t) \varphi(t) dt + \cos x.$$

14.20. Построить резольвенту интегрального уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = xt$ при $a = -1$, $b = 1$.

14.21. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{ch} t - t^2 \operatorname{sh} x) \varphi(t) dt = 0.$$

14.22. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = \exp x - \int_0^x \exp(x - t) \varphi(t) dt.$$

Вариант № 15

15.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$2y^4 u_x - xy u_y = x \sqrt{u^2 + 1}.$$

15.2. Найти решение задачи Коши

$$x u_x - u = 0, \quad u|_{x=1} = y + 1.$$

15.3. Найти общее решение уравнения:

$$\text{а) } 16u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} - 16u_x - 4u_y = 0;$$

$$\text{б) } x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} - 2xu_x = 0.$$

15.4. Доказать, что уравнение продольных колебаний конического стержня имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где u есть перемещение сечения стержня с абсциссой x , а h – высота конуса.

15.5. Вне круга $0 \leq r < b$ найти гармоническую функцию, удовлетворяющую граничным условиям

$$u_r(b, \varphi) = \sin 2\varphi.$$

15.6. Найти функцию, гармоническую внутри сферы радиуса b с центром в начале координат и такую, что

$$u|_{r=b} = \sin^2 \theta \sin(2\varphi - \pi/4) + \sin \theta \sin \varphi.$$

15.7. В полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$ для уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ решить смешанную задачу

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = x; \quad u_t(x, 0) = 1.$$

15.8. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения $u_{tt} = 25\Delta u$ в прямоугольнике

$$u|_{t=0} = xy(4-x)(2-y), \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=4} = u|_{y=2} = 0.$$

15.9. Дан тонкий однородный стержень длины $l = 3$, поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне, если $a = 4$, концы стержня поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура равна

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^3/3, & 0 \leq x \leq 3/2; \\ 3-x, & 3/2 < x \leq 3. \end{cases}$$

15.10. Решить первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности $u_t = 36\Delta u$ в круге $0 \leq r < 7$, $t > 0$, если

$$u(r, 0) = 49 - r^2, \quad u(7, t) = 0.$$

15.11. Решить смешанную задачу

$$u_t - u_{xx} - u = xt(2-t) - \cos t; \quad 0 < x < \pi; \\ u_x|_{x=0} = t^2, \quad u_x|_{x=\pi} = t^2, \quad u|_{t=0} = \cos 2x.$$

15.12. Решить задачу Коши:

- а) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$, $u(x, 0) = 3x^2$, $u_y(x, 0) = 0$;
 б) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega x$, $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = 0$;
 в) $4u_t = \Delta u + \sin 2z$, $u|_{t=0} = \cos 2y \exp(-x^2)$.

15.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_{xx} - u_y + a^2 u = \cos x; \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty, \\ u(0, y) = 0; \quad u_x(0, y) = 0.$$

15.14. Найти фундаментальное решение оператора

$$\widehat{L} = \partial_x^2 - 2\partial_x + 1.$$

15.15. Пользуясь методом отражений, построить функцию Грина задачи Дирихле для части пространства, заключенного между двумя параллельными плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

15.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в кольце $a \leq r \leq b$, если $u|_{r=a} = 0$, $u|_{r=b} = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

15.17. Методом потенциалов найти стационарное распределение температуры внутри и вне бесконечного цилиндра радиусом b при условии, что на границе поддерживается температура $u|_{r=b} = \sin \varphi$.

15.18. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, t) = 2 \frac{3 + \cos x}{3 + \cos t}.$$

15.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \sin t + 3 \cos 2x \sin 2t) \varphi(t) dt + \sin x.$$

15.20. Построить резольвенту интегрального уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = \sin x \cos t + \cos 2x \sin 2t$ при $a = 0$, $b = 2\pi$.

15.21. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \varphi(t) dt = 0.$$

15.22. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^x J_1(x-t) \varphi(t) dt.$$

Вариант № 16

16.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$x^2 u u_x + y^2 u u_y = x + y.$$

16.2. Найти решение задачи Коши

$$\operatorname{tg} x u_x + y u_y = u, \quad u|_{y=x} = x^3.$$

16.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

а) $u_{xx} + 10u_{xy} + 25u_{yy} + u_x + 5u_y = 0$;

б) $75u_{xx} + 20u_{xy} + u_{yy} = 0$.

16.4. Поставить краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного упругого стержня, один конец которого закреплен, а другой испытывает сопротивление, пропорциональное скорости. Сопротивлением среды пренебречь.

16.5. Боковая поверхность цилиндра, радиус основания которого b и высота h , покрыта непроницаемым для тепла чехлом. Температура нижнего основания поддерживается равной нулю, а температура верхнего основания есть функция $A(r^2 - 2rb)$. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

16.6. Внутри сферы радиуса b происходит безвихревое потенциальное движение несжимаемой жидкости. Найти закон этого движения (т.е. скорость в каждой точке внутри шара), если известно, что проекция скорости на внешнюю нормаль к поверхности шара в точках границы равна $v_0 \sin 2\theta$. Указание: $\vec{v} = \text{grad } u$, u – потенциал скорости.

16.7. Неограниченная струна возбуждена локальным начальным отклонением

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & |x| \geq c; \\ x + c, & -c < x \leq 0; \\ -x + c, & 0 < x < c. \end{cases}$$

Построить профиль струны для моментов $t_k = kc/4a$, $k = \overline{0, 5}$.

16.8. Однородная круглая мембрана радиуса R с центром в начале координат и закрепленным краем совершает поперечные колебания в среде без сопротивления. Определить колебания мембраны, вызванные постоянной начальной скоростью v точек мембраны.

16.9. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= 9u_{xx}; & u(x, 0) &= 8 \sin(3\pi x) + 6 - 2x; \\ u(0, t) &= 6, & u(4, t) &= -2. \end{aligned}$$

16.10. Начальная температура в однородном конечном цилиндре $0 \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq l$ равна $A(b^2 - r^2)z$. Определить распределение температуры в этом цилиндре в любой момент времени $t > 0$, если верхнее основание поддерживается при нулевой температуре, нижнее теплоизолировано, а на боковой поверхности происходит теплообмен с внешней средой нулевой температуры.

16.11. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 17 \sin 4t \sin 6x;$$

$$u(x, 0) = 21 \sin 12x + 5\pi - 3x, \quad u(0, t) = 5\pi, \quad u(\pi, t) = 2\pi.$$

16.12. Решить задачу Коши:

$$\text{а) } u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0,$$

$$u|_{y=\sin x} = f(x), \quad u_y|_{y=\sin x} = \varphi(x);$$

$$\text{б) } u_{tt} = a^2 \Delta u + xe^t \cos(3y + 4z); \quad u|_{t=0} = xy \cos z, \quad u_t|_{t=0} = yze^x;$$

$$\text{в) } u_t = 3\Delta u + e^t; \quad u|_{t=0} = \sin(x - y - z).$$

16.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_t = u_{xx}; \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = x^2; \quad u(0, t) = 27, \quad u(1, t) = 2t + 1.$$

16.14. Найти фундаментальное решение оператора

$$\widehat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + 3\frac{d}{dx} + 2.$$

16.15. С помощью функции Грина найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0; \quad u|_{z=0} = \cos x \cos y, \quad z > 0.$$

16.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в кольце $a \leq r \leq b$, если $u_r|_{r=a} = 0$, $u|_{r=b} = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

16.17. Для оператора Лапласа вычислить потенциал для шара $|x| < b$ с плотностью $\rho = \rho(|\vec{x}|)$.

16.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt.$$

16.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{t}) \varphi(t) dt + x^2.$$

16.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = 1 + (2x - 1)(2t - 1)$ при $a = 0$, $b = 1$.

16.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t) dt = 0.$$

16.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \exp(-4x) - 6 \int_0^x \operatorname{ch} 4(x-t) \varphi(t) dt.$$

17.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$yuu_x - xuu_y = e^u.$$

17.2. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - yu_y = u^2(x - 3y), \quad u|_{x=1} = -\frac{1}{y}.$$

17.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

а) $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x + 3u_y = 0;$

б) $3u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0.$

17.4. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная (при $t = 0$) температура равна $\varphi(x)$, а концы стержня теплоизолированы.

17.5. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра с радиусом основания b и высотой h , если температура его нижнего основания равна нулю, боковая поверхность свободно охлаждается в воздухе нулевой температуры, а температура верхнего основания постоянна и равна u_0 .

17.6. Внутри сферы радиуса b происходит безвихревое потенциальное движение несжимаемой жидкости. Найти закон этого движения (т.е. скорость в каждой точке внутри шара), если известно, что проекция скорости на внешнюю нормаль к поверхности шара в точках границы равна $v_0 \cos \theta$. Указание: поставить задачу для потенциала скорости u . Тогда $\vec{v} = \text{grad } u$.

17.7. Решить задачу о колебаниях струны, закрепленной на концах $x = 0$, $x = l$, если в начальный момент времени центру струны сообщается ударный импульс величины P . Начальное отклонение равно нулю.

17.8. Однородная круглая мембрана радиуса b с центром в начале координат и закрепленным краем совершает поперечные колебания в среде без сопротивления. Определить колебания мембраны, вызванные начальным отклонением $f(r) = A(b^2 - r^2)$.

17.9. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= 6u_{xx}; & u(x, 0) &= 8 \sin(4\pi x) + 3 - 4x; \\ u(0, t) &= 3, & u(2, t) &= -5. \end{aligned}$$

17.10. Определить температуру внутри шара радиуса b , если на поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей нулевую температуру, а $u|_{t=0} = f(r)$.

17.11. Найти решение смешанной задачи

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{16}u_{xx} + 37 \sin 6t \sin 4x; \\ u(x, 0) &= 9 \sin 8x + 5\pi - 4x, & u(0, t) &= 5\pi, & u(\pi, t) &= \pi. \end{aligned}$$

17.12. Решить задачу Коши:

а) $u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0$, $u|_{x=0} = \varphi(y)$, $u_x|_{x=0} = \psi(y)$;

б) $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = (x^2 + y^2)^2$;

в) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + \cos t$; $u|_{t=0} = xy e^{-x^2 - y^2}$.

17.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}; \quad x > 0, \quad t > 0, \quad u(0, t) = 0; \quad u(x, 0) = u_0 = \text{const.}$$

17.14. Найти фундаментальное решение оператора

$$\widehat{L} = \frac{d^2}{dx^2} - 4\frac{d}{dx} + 5.$$

17.15. С помощью функции Грина найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = e^{-7} \sin x \cos y; \quad u|_{z=0} = 0, \quad z > 0.$$

17.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в кольце $a \leq r \leq b$, если $u_r|_{r=a} = 0$, $u_r|_{r=b} = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

17.17. Для оператора Лапласа вычислить объемный потенциал шара $|x| < b$ с плотностью $\rho = \rho_0 = \text{const}$.

17.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \varphi(t) e^{x-t} dt = x.$$

17.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x-1)\varphi(t) dt + x.$$

17.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = x - \text{sh } t$ при $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq t \leq 1$.

17.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \sin t \varphi(t) dt = 0.$$

17.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x J_1(x-t)\varphi(t) dt.$$

Вариант № 18

18.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(u - y)^2 u_x + x u u_y = xy.$$

18.2. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$x u u_x + x u u_y = xy$$

и проходящую через заданную кривую $x^2 + y^2 = 1$, на которой $u = 1$.

18.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

а) $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 9u_x - 3u_y = 0$;

б) $147u_{xx} + 28u_{xy} + u_{yy} = 0$.

18.4. Внутри однородного и изотропного тела V происходит свободный теплообмен. Поверхность тела теплоизолирована. Какому уравнению и каким граничным условиям удовлетворяет температура $u(x, y, z, t)$ точек этого тела.

18.5. Найти стационарную температуру $u(r, z)$ внутренних точек цилиндра с радиусом основания b и высотой h , если его основания теплоизолированы, а температура боковой поверхности есть заданная функция от z .

18.6. Найти функцию, гармоническую внутри сферы радиуса b и такую, что

$$[u + u_r]_{r=b} = 1 + \cos^2 \theta.$$

18.7. Неограниченной струне сообщена начальная скорость

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} \sin \pi(x + c)/2c, & |x| \leq c; \\ 0, & |x| > c, \end{cases}$$

начальное отклонение $u(x, 0) = 0$. Построить профиль струны для моментов $t_k = kc/4a$.

18.8. Найти свободные колебания круглой мембраны радиуса b , закрепленной вдоль контура, если

$$u|_{t=0} = b(1 - r^2/b^2), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

18.9. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= 5u_{xx}; & u(x, 0) &= 19 \sin(3\pi x); \\ u(0, t) &= 0, & u_x(1/2, t) &= 0. \end{aligned}$$

18.10. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра $0 \leq r \leq b$, если его начальная температура равна $u = u_0(1 - r^2/b^2)$, а на поверхности поддерживается нулевая температура.

18.11. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 17 \sin 2t \sin 6x;$$

$$u(x, 0) = 22 \sin 8x - 5\pi + 4x, \quad u(0, t) = -5\pi, \quad u(\pi, t) = -\pi.$$

18.12. Решить задачу Коши:

$$\text{а) } u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0, \\ u|_{y=\sin x} = x + \cos x, \quad u_y|_{y=\sin x} = \sin x;$$

$$\text{б) } u_{tt} = a^2 \Delta u; \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = \cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\text{в) } u_t = 2\Delta u + t \cos x; \quad u|_{t=0} = \cos y \cos z.$$

18.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{2}, \\ A = \text{const}, \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

18.14. Найти фундаментальное решение оператора

$$\widehat{L} = \frac{d^3}{dx^3} - a^3.$$

18.15. С помощью функции Грина найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0; \quad u|_{z=0} = \theta(x - y), \quad z > 0.$$

18.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в шаре радиуса a , если $u|_{r=a} = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

18.17. Для оператора Лапласа вычислить объемный потенциал шара $|x| < b$ с плотностью $\rho = e^{-|x|}$.

18.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt + e^x.$$

18.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 2e^{x+t} \varphi(t) dt + e^\lambda.$$

18.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = \sin(x + t)$ при $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

18.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x + t) \varphi(t) dt = 0.$$

18.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = x^3 + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt.$$

Вариант № 19

19.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xyu_x + (x - 2u)u_y = yu.$$

19.2. Найти решение задачи Коши

$$yu_x - xyu_y = 2xu, \quad u|_{x+y=2} = \frac{1}{y}.$$

19.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

- а) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - 2u_y = 0$;
 б) $27u_{xx} + 12u_{xy} + u_{yy} = 0$.

19.4. Поставить краевую задачу для определения малых отклонений точек струны при $t = 0$, если струна натянута с силой F_0 и находится в прямолинейном положении равновесия, а ее концы неподвижно закреплены. В момент $t = 0$ точкам струны сообщаются начальные отклонения и скорости.

19.5. Найти стационарное распределение температуры внутри бесконечного кругового цилиндра радиуса b , если на его поверхности поддерживается температура $A \sin \varphi$ ($A = \text{const}$).

19.6. Найти функцию, гармоническую внутри сферы радиуса b с центром в начале координат и такую, что $u|_{r=b} = \cos \theta$.

19.7. Найти вынужденные колебания струны с закрепленными концами $x = 0$, $x = l$, находящейся под воздействием силы тяжести при отсутствии начальных возбуждений.

19.8. Методом разделения переменных решить задачу

$$u_{tt} = a^2 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{2u}{r^2} \right], \quad 0 \leq r \leq b, \quad t > 0,$$

$$u_r(b, t) = 0, \quad u(r, 0) = Ar, \quad u_t(r, 0) = 0, \quad A = \text{const}.$$

19.9. Решить смешанную задачу

$$u_t = 3u_{xx}; \quad u(x, 0) = 3 \sin(5\pi x);$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1/2, t) = 0.$$

19.10. Найти распределение температуры в бесконечном однородном круглом цилиндре радиуса c , если начальная температура

равна Ar^2 , а поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре u_0 .

19.11. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 37 \cos 6t \sin 5x;$$

$$u(x, 0) = 10 \sin 10x - 5\pi + 4x, \quad u(0, t) = -5\pi, \quad u(\pi, t) = -\pi.$$

19.12. Решить задачу Коши:

а) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0, \quad u|_{y=0} = -x^2/2, \quad u_y|_{y=0} = -\sin x;$

б) $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + (x^2 + y^2)e^t; \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0;$

в) $u_t = 8u_{xx}; \quad u|_{t=0} = \exp(-x^2 - 4x).$

19.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_y = u_{xx} + u + A; \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty, \\ u(0, y) = 0; \quad u_x(0, y) = 0.$$

19.14. Найти фундаментальное решение оператора

$$\hat{L} = \frac{d^3}{dx^3} - 3\frac{d^2}{dx^2} + 2.$$

19.15. С помощью функции Грина найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 2[x^2 + y^2 + (z + 1)^2]^{-1}; \quad u|_{z=0} = y(1 + x^2 + y^2)^{-1}, \quad z > 0.$$

19.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в шаре радиуса a , если $u_r|_{r=a} = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

19.17. Для оператора Лапласа вычислить объемный потенциал шара $|x| < b$ с плотностью $\rho = e^{-|x|}$.

19.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 2 \int_0^x \frac{2t + 1}{(2x + 1)^2} \varphi(t) dt + 1.$$

19.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x + t - 2xt) \varphi(t) dt + x + x^2.$$

19.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = e^{x-t}$ при $a = 0$, $b = 1$.

19.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (45x^2 \ln t - 9t^2 \ln x) \varphi(t) dt = 0.$$

19.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = J_0(x) + \int_0^x J_1(x-t) \varphi(t) dt.$$

Вариант № 20

20.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$yu_x + uu_y = \frac{y}{x}.$$

20.2. Найти решение задачи Коши

$$uu_x + (u^2 - x^2)u_y + x = 0, \quad u|_{y=x^2} = 2x.$$

20.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

- а) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 5u_x + 5u_y = 0$;
 б) $12u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} = 0$.

20.4. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах $x = 0$ и $x = l$ стержня начиная с момента $t = 0$ поддерживаются тепловые потоки $q(t)$ и $Q(t)$ соответственно.

20.5. Цилиндр, радиус основания которого b и высота h , имеет температуру нижнего основания, равную нулю. Температура верхнего основания задана функцией $r^2 - 2b - b^2$. Боковая поверхность охлаждается в воздухе нулевой температуры. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

20.6. Концентрация некоторого газа на границе сферического сосуда радиуса b с центром в начале координат равна $f(\theta)$. Определить стационарное распределение концентрации данного газа внутри этого сосуда.

20.7. Решить задачу $u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2 \sin 62x$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0.$$

20.8. Найти колебания закрепленной вдоль контура однородной круглой мембраны радиуса b с центром в начале координат, вызванные постоянной начальной скоростью v_0 точек мембраны.

20.9. Решить смешанную задачу

$$u_t = 7u_{xx}; \quad u(x, 0) = 12 \cos \pi x; \quad u(0, t) = u_x(7, t) = 0.$$

20.10. Найти распределение температуры в бесконечном однородном круглом цилиндре радиуса b , если начальная температура равна Ax^2 , $A = \text{const}$, а на поверхности цилиндра происходит теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру.

20.11. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 26 \cos 5t \sin 4x;$$

$$u(x, 0) = 24 \sin 16x - 4\pi + 5x, \quad u(0, t) = -4\pi, \quad u(\pi, t) = \pi.$$

20.12. Решить задачу Коши:

$$\text{а) } 4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1 + y^2}(2u_x - u_y) = 0,$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u_y|_{y=0} = \psi(x);$$

$$\text{б) } u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega t, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0;$$

$$\text{в) } 2u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad u|_{t=0} = \cos xy.$$

20.13. С помощью интегрального преобразования Лапласа решить задачу

$$u_t = u_{xx}; \quad 0 < x < \pi/2, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = \cos x + \frac{2x}{\pi}; \quad u|_{x=0} = e^{-t}, \quad u|_{x=\pi/2} = 1.$$

20.14. Найти фундаментальное решение оператора

$$\hat{L} = \frac{d^4}{dx^4} - a^4.$$

20.15. С помощью функции Грина найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0; \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{z=0} = e^{-4x} \sin 5y, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

20.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в параллелепипеде $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, если

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0.$$

Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

20.17. Для оператора $\Delta - k^2$ вычислить потенциал для шара $|x| < R$ с плотностью $\rho = \rho_0 = \text{const}$.

20.18. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = \exp(x^2 - t^2)$.

20.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} (\sin(x+t)\varphi(t))dt = 1.$$

20.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = 4xt - x^2$ при $a = 0$, $b = 1$.

20.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2xt - 4x^2)\varphi(t)dt = 0.$$

20.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \cos 5x - \frac{7}{4} \int_0^x \operatorname{sh}(4(x-t))\varphi(t)dt.$$

Вариант № 21

21.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$\sin^2 u u_x + \operatorname{tg} u u_y = \cos^2 u.$$

21.2. Найти решение задачи Коши

$$(y-u)u_x + (u-x)u_y = x-y, \quad u|_{y=-x} = -x.$$

21.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

а) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 6u_x - 6u_y = 0;$

б) $3u_{xx} + 32u_{xy} + 64u_{yy} = 0.$

21.4. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях прямого однородного упругого стержня в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, при наличии непрерывно распределенной вынуждающей поперечной силы. Концы стержня закреплены.

21.5. Найти стационарную температуру $u(r, z)$ внутренних точек цилиндра с радиусом основания b и высотой h , если температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность покрыта непроницаемым для тепла чехлом, а температура верхнего основания есть функция от r .

21.6. Найти закон стационарного распределения температуры внутри однородного шара радиуса b , если на поверхности шара поддерживается температура $u_0 \sin^2 \theta$. Найти решение в форме интеграла Пуассона.

21.7. Решить смешанную краевую задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$,

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = x; \quad u_t(x, 0) = 0.$$

21.8. Решить задачу: $u_{tt} = \Delta u$, $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, если

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, \quad u_{t=0} = 3 \sin x \sin 2y, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

21.9. Решить смешанную задачу

$$u_t = 4u_{xx}; \quad u(x, 0) = 18 \cos(3\pi x) + 18 \cos(4\pi x); \\ u_x(0, t) = u_x(6, t) = 0.$$

21.10. Найти закон остывания бесконечного цилиндра радиуса b , если температура в начальный момент равна $u_0 = J_0(\alpha_1^0 r/b)$, где α_1^0 – первый положительный корень бесселевой функции $J_0(\alpha)$. На поверхности цилиндра поддерживается все время температура, равная нулю.

21.11. Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} = \frac{1}{25} u_{xx} + 3 \cos 2t \sin 5x; \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

21.12. Решить задачу Коши:

- а) $u_{xx} - u_{xy} - 2u_x - 2u_y = -4$, $u|_{y=0} = -x$, $u_y|_{y=0} = x - 1$;
 б) $u_{tt} = 5\Delta u$; $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = (2x + y + z)^2$;
 в) $u_t = 15u_{xx}$; $u|_{t=0} = \exp(-3x^2 - 2x)$.

21.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_t = u_{xx}; \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \sin(\pi x/l).$$

21.14. Найти фундаментальное решение оператора

$$\widehat{L} = \frac{d^4}{dx^4} - 2 \frac{d^2}{dx^2} + 1.$$

21.15. С помощью функции Грина найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0 \quad y > 0, \quad z > 0; \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{z=0} = y(1 + x^2 + y^2)^{-3/2}.$$

21.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в параллелепипеде $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, если

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0.$$

Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

21.17. Для оператора Лапласа вычислить объемный потенциал шара $|x| < b$ с плотностью $\rho = \rho(|\vec{x}|)$.

21.18. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, t) = \frac{1 + x^2}{1 + t^2}.$$

21.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2x - t)\varphi(t)dt = x/6.$$

21.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = 1 + xt$ при $a = 0$, $b = 1$.

21.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2t)\varphi(t)dt = 0.$$

21.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = x^4 - a \int_0^x \text{sh}(a(x-t))\varphi(t)dt.$$

Вариант № 22

22.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(x + u)u_x + (y + u)u_y = x + y.$$

22.2. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$xu_x + (xu + y)u_y = u$$

и проходящую через заданную кривую $x + y = 2u$, $xy = 1$.

22.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

а) $u_{xx} + 14u_{xy} + 49u_{yy} + 2u_x + 14u_y = 0$;

б) $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$.

22.4. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях прямоугольного однородного упругого стержня, один конец

которого закреплен, а к другому приложена поперечная сила, меняющаяся со временем по заданному закону.

22.5. Найти гармоническую функцию внутри кольца $a < r < b$, удовлетворяющую условиям $u(a, \varphi) = 0$, $u(b, \varphi) = \cos \varphi$.

22.6. Найти функцию, удовлетворяющую внутри шара $0 \leq r < \pi/10$ уравнению Гельмгольца $\Delta u + 25u = 0$ и принимающую на границе заданное значение $u_r|_{r=\pi/10} = \cos \theta$.

22.7. Решить смешанную задачу для волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ в полуполосе $0 < x < 3/2$, $0 < t < \infty$, если

$$u(x, 0) = x(x - 3/2), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(3/2, t) = 0.$$

22.8. Решить первую смешанную задачу $u_{tt} = 4\Delta u$, если

$$u_{t=0} = xy(2-x)(4-y), \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=2} = u|_{y=4} = 0.$$

22.9. Решить смешанную задачу

$$u_t = 8u_{xx}; \quad u(x, 0) = 29 \sin(2\pi x); \\ u(0, t) = u(8, t) = 0.$$

22.10. Найти закон выравнивания заданного осесимметричного начального распределения температуры $u|_{t=0} = r^2$ в бесконечном цилиндре радиуса b , боковая поверхность которого теплоизолирована.

22.11. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 50e^{-7t} \sin 4x; \\ u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

22.12. Решить задачу Коши:

- а) $3u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$,
 $u|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=0} = y + \cos y$, $|x| < \infty$;
 б) $u_{tt} = 13\Delta u$; $u|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2$, $u_t|_{t=0} = 0$;
 в) $u_t = \Delta u + \cos(x - y + z)$; $u|_{t=0} = \exp[-(x + y - z)^2]$.

22.13. С помощью интегрального преобразования Лапласа решить задачу

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2}u_{tt} = 0; \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = A \sin x; \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

22.14. Доказать, что функция

$$\mathcal{E}_2(\vec{r}, t) = \frac{\theta(at - |\vec{r}|)}{2\pi\sqrt{a^2t - |\vec{r}|^2}}$$

– фундаментальное решение оператора Даламбера

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \vec{r} = (x, y).$$

22.15. С помощью функции Грина найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0; \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{z=0} = \theta(y - |x|).$$

22.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в параллелепипеде $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, если

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0.$$

Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

22.17. С помощью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне круга.

22.18. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = e^{x-t}$.

22.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (3xt + 5x^2 t^2) \varphi(t) dt + x^2 + x.$$

22.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = x+t+1$ при $a = -1$, $b = 1$.

22.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2 t + 3xt) \varphi(t) dt = 0.$$

22.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sin 2x - \frac{8}{3} \int_0^x \operatorname{sh} 3(x-t) \varphi(t) dt.$$

Вариант № 23

23.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(xu + y)u_x + (x + uy)u_y = 1 - u^2.$$

23.2. Найти решение задачи Коши

$$y^2 u_x + y u u_y + u^2 = 0, \quad u|_{x=y} = \frac{x-1}{x}.$$

23.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

- а) $u_{xx} + 12u_{xy} + 36u_{yy} + u_x + 6u_y = 0$;
 б) $3u_{xx} + 20u_{xy} + 25u_{yy} = 0$.

23.4. Показать, исходя из уравнений Максвелла, что потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению Пуассона с правой частью, пропорциональной объемной плотности заряда $\rho(x, y, z)$. Дать физическую интерпретацию граничных условий первого и второго рода.

23.5. Найти решение уравнения Лапласа в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \pi/2$, на границе которого $u(1, \varphi) = 8 \sin 7\varphi$, $u(r, 0) = u_\varphi(r, \pi/2) = 0$.

23.6. Найти функцию, удовлетворяющую внутри шара $0 \leq r < \pi$ уравнению Гельмгольца $\Delta u + 4u = 0$ и принимающую на границе заданное значение $u_r|_{r=\pi} = \cos \theta$.

23.7. Решить смешанную задачу для волнового уравнения $u_{tt} = 4u_{xx}$ на отрезке $0 < x < 1/2$, $0 < t < \infty$, если

$$u(x, 0) = x(x - 1/2), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(1/2, t) = 0.$$

23.8. Решить первую смешанную задачу $u_{tt} = 25\Delta u$, если

$$u_{t=0} = xy(5-x)(2-y), \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=5} = u|_{y=2} = 0.$$

23.9. Решить смешанную задачу

$$u_t = 4u_{xx}; \quad u(x, 0) = 12 \sin(3\pi x) + 5 \sin(4\pi x); \\ u(0, t) = u(6, t) = 0.$$

23.10. Определить температуру шара радиуса b с центром в начале координат, если на поверхности шара происходит теплообмен с внешней средой, а начальная температура зависит только от расстояния точки до центра шара.

23.11. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 24 \sin 5t \sin 2x; \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

23.12. Решить задачу Коши:

- а) $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0$, $y < 1$,
 $u|_{x=3y} = 0$, $u_x|_{x=3y} = \exp(-5y^2)$;
 б) $u_{tt} = 6\Delta u$, $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = (2x + y + 2z)^2$;
 в) $u_t = 9u_{xx}$, $u|_{t=0} = \exp(-3x^2 + x)$.

23.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}; \quad x > 0, \quad t > 0, \quad u(0, t) = u_0 = \text{const}; \quad u(x, 0) = 0.$$

23.14. Доказать, что фундаментальными решениями оператора Гельмгольца $\hat{L}_H = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + k^2$ являются функции

$$\mathcal{E}(x, y) = -\frac{1}{4}H_0^{(1)}(kr), \quad \bar{\mathcal{E}}(x, y) = \frac{1}{4}H_0^{(2)}(kr),$$

где $H_0^{(l)}(kr)$, $l = 1, 2$ — функции Ханкеля, а $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

23.15. С помощью функции Грина найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = -a; \quad u|_{r=b} = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r < b.$$

23.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в параллелепипеде $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, если

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u_y|_{y=0} = u|_{y=b} = u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0.$$

Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

23.17. Потенциал простого слоя масс, распределенных по окружности $x^2 + y^2 = 1$, вне замкнутого круга $x^2 + y^2 \leq 1$ дается формулой

$$u(x, y) = \frac{x}{r^2} \left(1 + \frac{2y}{r^2} \right).$$

Найти плотность масс.

23.18. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = (2 + \cos x)/(2 + \cos t)$.

23.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (4xt - x^2)\varphi(t)dt = x.$$

23.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = \sin x \cos t$ при $a = 0$, $b = 2\pi$.

23.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{ch} t - t \operatorname{sh} x)\varphi(t)dt = 0.$$

23.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$2\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)dt = \sin x.$$

Вариант № 24

24.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(y+z)u_x + (z+x)u_y + (x+y)u_z = u.$$

24.2. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$xu_x + yu_y = y$$

и проходящую через заданную кривую $y = 2u$, $x + 2y = u$.

24.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

а) $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_x - 2u_y = 0$;

б) $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$.

24.4. Показать, что потенциал стационарного магнитного поля при отсутствии электрического тока удовлетворяет уравнению Лапласа.

24.5. Решить задачу Дирихле $\Delta u = 0$ с граничными условиями $u(1, \varphi) = 11 \cos 3\varphi$, $u_\varphi(r, 0) = u(r, \pi) = 0$ в круговом секторе $0 \leq r < 1$, $0 < \varphi < \pi$.

24.6. Решить задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta u = xz, \quad u|_{r=2} = 0, \quad u|_{r=3} = 0$$

в шаровом слое $2 < r < 3$.

24.7. Решить смешанную задачу для волнового уравнения $u_{tt} = 9u_{xx}$ на отрезке, если

$$u(0, t) = -6, \quad u(3, t) = 6, \quad u(x, 0) = 3 \sin(3\pi x) - 6 + 4x, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

24.8. Решить первую смешанную задачу $u_{tt} = 6\Delta u$, $0 < r < 20$, $0 < t < \infty$, если

$$u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{20} \right)^2 \right], \quad u_t(r, 0) = 0, \quad u(20, t) = 0.$$

24.9. Решить смешанную задачу

$$u_t = 16u_{xx}; \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases} \quad u(0, t) = u(2, t) = 0.$$

24.10. Начальная температура в однородном цилиндре радиуса b и высоты h , $r \leq b$, ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq h$) равна $A(b^2 - r^2)z$. Определить распределение температуры в этом цилиндре в любой момент времени $t > 0$, если боковая поверхность и нижнее основание цилиндра поддерживаются при нулевой температуре, а верхнее основание теплоизолировано.

24.11. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = u_{xx} + 26e^{-5t} \sin x;$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

24.12. Решить задачу Коши:

- а) $u_{xy} + 2u_x + u_y + 2u = 1, \quad 0 < x, \quad y < 1,$
 $u|_{x+y=1} = x, \quad u_x|_{x+y=1} = x;$
 б) $u_{tt} = 14\Delta u, \quad u|_{t=0} = x^2 - 2y^2 + z^2, \quad u_t|_{t=0} = 0;$
 в) $u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad u|_{t=0} = \cos(x + y).$

24.13. Пользуясь интегральным преобразованием Лапласа, решить задачу

$$u_y = u_{xx} + 4u + e^x; \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

$$u(0, y) = 0; \quad u_x(0, y) = 0.$$

24.14. Доказать, что функция

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|) e^{b(|x|-at)/2a}$$

– фундаментальное решение оператора

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial x} - \frac{b}{a} \frac{\partial}{\partial t},$$

где $a, b > 0$. Указание: Воспользоваться формулой

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{p\tau}}{p} dp = \theta(\tau), \quad \alpha > 0.$$

24.15. С помощью функции Грина найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = -e^r; \quad u|_{r=b} = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r < b.$$

24.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в параллелепипеде $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$, если

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0.$$

Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

24.17. С помощью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле для уравнения Неймана внутри и вне круга.

24.18. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = \operatorname{ch} x / \operatorname{ch} t$.

24.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \int_0^1 e^{x-t} \varphi(t) dt = e^x.$$

24.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = \sin x - \sin t$ при $a = 0$, $b = 2\pi$.

24.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) = \int_{-1}^1 (3xt + 5x^2 t^2) \varphi(t) dt + x^2 + 2x.$$

24.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \varphi(t) \varphi(x-t) dt - \frac{1}{2} \operatorname{sh} x.$$

Вариант № 25

25.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xu_x + yu_y + (z + u)u_z = xy.$$

25.2. Найти решение задачи Коши

$$(y + 2u^2)u_x - 2x^2 u u_y = x^2, \quad u|_{y=x^2} = x.$$

25.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

- а) $16u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} - 8u_x - 2u_y = 0$;
 б) $3u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} = 0$.

25.4. Поставить краевую задачу о движении слоя вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями, если одна из них в момент $t = 0$ начинает двигаться параллельно другой с заданной скоростью, имеющей постоянное направление. Действием силы тяжести пренебречь.

25.5. Решить задачу Дирихле $\Delta u = 0$ с граничными условиями $u(1, \varphi) = 19 \cos 7\varphi$ в круге $0 \leq r < 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

25.6. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = xz, \quad u|_{r=1/2} = 1, \quad u|_{r=1} = 1$$

в шаровом слое $1/2 < r < 1$.

25.7. Решить смешанную задачу для волнового уравнения $u_{tt} = 16u_{xx}$ на отрезке, если

$$u(0, t) = 3, \quad u(2, t) = 7, \quad u(x, 0) = 3 + 2x, \quad u_t(x, 0) = 12\pi \sin(3\pi x).$$

25.8. Решить первую смешанную задачу $u_{tt} = 11\Delta u$, $0 < r < 15$, $0 < t < \infty$, если

$$u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{15} \right)^2 \right], \quad u_t(r, 0) = u(15, t) = 0.$$

25.9. Решить смешанную задачу

$$u_t = 9u_{xx}; \quad 0 < x < 4, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x, & 2 < x \leq 4; \end{cases} \quad u(0, t) = u(4, t) = 0.$$

25.10. Дан однородный шар радиуса b с центром в начале координат. Найти распределение температуры внутри шара, если внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура зависит только от расстояния от центра шара, т.е. $u|_{t=0} = f(r)$.

25.11. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = \frac{1}{49} u_{xx} + 37e^{-6t} \sin 7x;$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

25.12. Решить задачу Коши:

а) $xyu_{xy} + xu_x - yu_y - u = 2y, \quad 0 < x, \quad y < \infty,$
 $u|_{xy=1} = 1 - y, \quad u_y|_{xy=1} = x - 1;$

б) $u_{tt} = 4\Delta u, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = (x + y - 2z)^2;$

в) $u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = \cos xy \sin z.$

25.13. С помощью интегрального преобразования Лапласа решить задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}; \quad x > 0, \quad t > 0, \quad u(0, t) = \varphi(t); \quad u(x, 0) = 0.$$

25.14. Доказать, что функция $\mathcal{E}(x, t) = -\theta(t)\theta(-x)e^{\alpha t + \beta x}$ — фундаментальное решение оператора

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} - b \frac{\partial}{\partial t} + ab,$$

где $b > 0$. Указание: Воспользоваться формулой

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{e^{p\tau}}{p} dp = \theta(\tau), \quad \alpha > 0.$$

25.15. С помощью функции Грина найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0; \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = 1, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

25.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в параллелепипеде $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, если

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0.$$

Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

25.17. Найти потенциал в точке, лежащей на оси круглого диска радиуса R , если на нем распределен простой слой с плотностью $\rho = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

25.18. Найти резольвенту для интегрального уравнения Вольterra с ядром $K(x, t) = a^{x-t}$, ($a > 0$).

25.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t) dt = \cos 2x.$$

25.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = x^2 t - xt^2$ при $0 \leq x \leq 1$.

25.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin t + \cos x) \varphi(t) dt + 2x + 1.$$

25.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = x^5 - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) \varphi(t) dt.$$

Вариант № 26

26.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(u-x)u_x + (u-y)u_y - zu_z = x + y.$$

26.2. Найти решение задачи Коши

$$(x-u)u_x + (y-u)u_y = 2u, \quad u|_{y=x-2} = 1 - 2x.$$

26.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

- а) $u_{xy} + u_{yy} = 0$;
 б) $u_{xx} + 10u_{xy} + 25u_{yy} + 4u_x + 20u_y = 0$.

26.4. Поставить краевую задачу для определения силы и напряжения переменного тока вдоль тонкого провода с непрерывно распределенными по длине сопротивлением R , емкостью C , самоиндукцией L и утечкой G , если один конец провода заземлен, а к другому приложена ЭДС $E(t)$. Начальные ток и напряжение равны $i(x, 0) = f(x)$, $V(x, 0) = F(x)$.

26.5. Доказать, что функция $u(x, y, z)$, гармоническая в области V , ограниченной поверхностью S , удовлетворяет соотношению

$$\iiint_V |\nabla u|^2 d\vec{r} = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS.$$

26.6. Найти стационарное распределение температуры внутри бесконечного кругового цилиндра радиуса b , если на поверхности цилиндра поддерживается следующая постоянная температура: нулевая в тех точках, где $\varepsilon < \varphi < 2\pi$, и равная $2\pi u_0 / \varepsilon$ в тех точках, где $0 < \varphi < \varepsilon$. Здесь ε – весьма малое положительное число.

26.7. Провод длины l , по которому течет переменный ток, покрыт изоляцией, при которой утечка $G = 0$. Кроме того, сопротивление $R = 0$. Начальный ток в проводе $i(x, 0) = 0$, начальное напряжение $V(x, 0) = E \sin \frac{(2m+1)\pi x}{2l}$, где m – заданное натуральное число. Левый конец провода $x = 0$ изолирован, а правый $x = l$ заземлен. Найти силу тока в каждой точке провода в любой момент времени.

26.8. Найти поперечные колебания круглой мембраны с закрепленным краем, вызванные радиально симметричным начальным распределением отклонений и скоростей, считая, что среда оказывает сопротивление, пропорциональное скорости.

26.9. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x, \quad 0 < x < 1,$$

$$|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = J_0(\alpha_1^0 x),$$

где α_1^0 – первый положительный корень уравнения $J_0(\alpha) = 0$.

26.10. Найти температуру параллелепипеда $0 < x < q$, $0 < y < p$, $0 < z < l$, если его начальная температура является произвольной функцией x, y, z , а температура поверхности поддерживается равной нулю.

26.11. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = t, \quad u(1, t) = t, \quad u(x, 0) = e^x \sin \pi x.$$

26.12. Решить задачу Коши:

- а) $xu_{xx} + (x+y)u_{xy} + yu_{yy} = 0$,
 $u|_{y=1/x} = x^3$, $u_x|_{y=1/x} = 2x^3$;
- б) $4y^2u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0$,
 $u|_{y=0} = \varphi(x)$, $u_y|_{y=0} = \psi(x)$;
- в) $u_t = 3\Delta u + e^{2t}$, $u|_{t=0} = \sin(x - y - z)$.

26.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_y = u_{xx} + u + \cos x, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

$$u(0, y) = e^{-3y}, \quad u_x(0, y) = 0.$$

26.14. Доказать, что фундаментальным решением оператора Шрёдингера $\hat{L}_S = i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ является функция

$$\mathcal{E}(x, t) = -\frac{i\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(i\frac{x^2}{4t} - \frac{i\pi}{4}\right).$$

26.15. С помощью функции Грина решить краевую задачу

$$y'' + y = x, \quad y(0) = y(\pi/2) = 0.$$

26.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в параллелепипеде $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, если

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = u_z|_{z=0} = u|_{z=c} = 0.$$

Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

26.17. Найти $u(x, y, x)$ – плотность диффундирующего вещества в стационарном процессе при условии, что источник вещества отсутствует и коэффициент диффузии $D = \text{const}$, для $z > 0$, $u_x|_{z=0} = u_0 = \text{const}$.

26.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t\varphi(t)}{1+t^2} dt.$$

26.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \frac{x\varphi(t)}{1+t^2} dt = 1 - x^2.$$

26.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = \sin(x - 2t)$ при $a = 0$, $b = 2\pi$.

26.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} (\cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t) \varphi(t) dt.$$

26.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt.$$

Вариант № 27

27.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$yu_x - 4xu_y = 0.$$

27.2. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$xy^3 u_x + x^2 u^2 u_y = y^3 u$$

и проходящую через заданную кривую $x + u^3 = 0$, $y = u^2$.

27.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

- а) $6u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} = 0$;
 б) $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + 3u_x + 6u_y = 0$.

27.4. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях тяжелой струны длины l относительно вертикального положения равновесия, если ее верхний конец закреплен, а нижний свободен.

27.5. Показать, что если $u(x, y, z)$ – гармоническая в области V , ограниченной поверхностью S , то

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$$

27.6. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x, y)$ внутри прямоугольника $0 < x < p$, $0 < y < q$, если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника, лежащей на оси Ox , равен V_0 , а три другие заземлены. Предполагается, что внутри прямоугольника нет электрических зарядов.

27.7. Провод длины l , по которому течет переменный ток, покрыт изоляцией, при которой утечка $G = 0$. Кроме того, сопротивление $R = 0$. Начальный ток в проводе $i(x, 0) = 0$, а начальное напряжение $V(x, 0) = E \sin \frac{(2m+1)\pi x}{2l}$, где m – заданное натуральное число. Найти силу тока в каждой точке провода в любой момент времени, если оба конца провода изолированы.

27.8. Найти уравнение колебаний в области, представляющей собой клин, угол раствора которого равен $\pi/2$, если заданы однородные граничные условия первого рода, а также начальная скорость и отклонение.

27.9. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx}, & 0 < x < l, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= u(l, t) = u_0, & u(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

27.10. Решить задачу об остывании толстой сферической оболочки $r_1 \leq r \leq r_2$, на внешней и внутренней поверхностях которой поддерживается температура, равная нулю. Начальная температура оболочки равна $u|_{t=0} = f(r, \varphi, \theta)$.

27.11. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{u}{x^2} + J_1(\lambda_3^{(1)}x) \sin t, & 0 < x < 1, & \quad t > 0, \\ |u(0, t)| &< \infty, & u(1, t) &= 0, & u(x, 0) &= 2J_1(\alpha_1^1 x), \end{aligned}$$

где α_n^1 — n -й положительный корень уравнения $J_1(\alpha) = 0$.

27.12. Решить задачу Коши:

$$\begin{aligned} \text{а) } & yu_{xx} + x(2y-1)u_{xy} - 2x^2u_{yy} - \frac{y}{x}u_x = 0, \\ & u|_{y=0} = x^2, \quad u_y|_{y=0} = 1; \\ \text{б) } & u_t = 8\Delta u + t^2x^2, \quad u|_{t=0} = y^2, \quad u_t|_{t=0} = z^2; \\ \text{в) } & u_t = u_{xx} + u_{yy} + \sin t \sin x \sin y, \quad u|_{t=0} = 1. \end{aligned}$$

27.13. С помощью преобразования Лапласа решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{xx} - \frac{1}{a}u_{tt} &= 0, & 0 \leq x \leq l, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= A \sin \frac{\pi x}{l}, & u_t(x, 0) &= 0, & u(0, t) &= u(l, t) = 0. \end{aligned}$$

27.14. Доказать, что фундаментальным решением оператора Шрёдингера

$$\hat{L}_S = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta_n$$

является функция

$$\mathcal{E}_n(\vec{x}, t) = -\frac{i\theta(t)}{\hbar} \left(\frac{m_0}{2\pi\hbar t} \right)^{n/2} \exp \left(i \frac{m_0}{2\hbar t} |\vec{x}|^2 - \frac{i\pi n}{4} \right), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где n — любое целое число.

27.15. С помощью функции Грина решить краевую задачу

$$xy'' + y = x, \quad y(1) = y(l) = 0.$$

27.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в параллелепипеде $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, если

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0.$$

Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

27.17. Найти $u(x, y, x)$ – плотность диффундирующего вещества в стационарном процессе при условии, что источник вещества отсутствует и коэффициент диффузии постоянен, для $z > 0$, $u_x|_{z=0} = \text{sign } x$.

27.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-t^2} \varphi(t) dt.$$

27.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\cos(x+t) + \cos(x-t)] \varphi(t) dt = \cos x.$$

27.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = x \sin t + \sin 2x$ при $a = -\pi$, $b = \pi$.

27.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) = \lambda(3x - 2) \int_0^1 t \varphi(t) dt.$$

27.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t) dt.$$

Вариант № 28

28.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$yu_x + 4xu_y = 4x - 2y.$$

28.2. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - 2yu_y = x^2 + 4y^2, \quad u|_{y=2} = x^2.$$

28.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

- а) $3u_{xx} + 8u_{xy} + 5u_{yy} = 0$;
 б) $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} + 123u_x + 4u_y = 0$.

28.4. Поставить краевую задачу о нагревании полуограниченного стержня, если конец стержня горит, причем фронт горения распространяется с постоянной скоростью v_0 , а температура горения $\varphi(t)$ известна.

28.5. Установить, для каких функций $g(x, y)$:

- а) $g(x, y) = y - A$; б) $g(x, y) = x^2 + Ay + B$;
 в) $g(x, y) = 2xy$; г) $g(x, y) = x^2 - Ay^2 + B$

правильно поставлена вне круга радиуса b задача Неймана

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad b < r < \infty, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=b} = g(x, y)|_{r=b}, \quad |u(x, y)| < \infty.$$

28.6. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x, y)$ внутри коробки прямоугольного сечения $-a < x < a$, $-b < y < b$, две противоположные грани которой $x = a$ и $x = -a$ имеют потенциал V_0 , а две другие $y = -b$, $y = b$ заземлены.

28.7. В начальный момент времени напряжение во всех точках провода длины l одинаково и равно E_0 , а ток равен нулю. Сопротивление R , самоиндукция L , утечка за единицу времени G и емкость C связаны соотношением $R/L = G/C$ («линия без искажений»). Найти напряжение $V(x, t)$ в любой момент времени, если левый конец провода заземлен, а правый изолирован.

28.8. Найти функцию $u(\rho, \varphi, t)$, характеризующую колебания круглой мембраны под действием импульса, сосредоточенного в ее центре.

28.9. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + \frac{2}{x}u_x, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

$$|u(0, t)| < \infty, \quad u(3, t) = 0, \quad u(x, 0) = t.$$

28.10. Между двумя полыми цилиндрами бесконечной длины находится вязкая жидкость. В момент времени $t = 0$ внешний цилиндр начинает вращаться с угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Определить скорость движения жидкости.

28.11. Решить в полуполосе $0 < x < \pi/2$, $t > 0$ смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1 - 3t) + 2 \cos x \cos 2x - 6x,$$

$$u_x(0, t) = 1, \quad u(\pi/2, t) = t^2 + \pi/2, \quad u(x, 0) = x.$$

28.12. Решить задачу Коши:

- а) $yu_{xx} - (x+y)u_{xy} + xu_{yy} = 0$, $u|_{y=0} = x^3$, $u_y|_{y=0} = 0$;
 б) $u_{tt} = 3\Delta u + 6te^{x\sqrt{2}} \sin y \cos z$,
 $u|_{t=0} = e^{x+y} \cos z \sqrt{2}$, $u_t|_{t=0} = e^{3y+4z} \sin 5x$;
 в) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + \cos t$, $u|_{t=0} = xy e^{-x^2-y^2}$.

28.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу
 $u_y = u_{xx} + u + 3$, $x > 0$, $y > 0$, $u(0, y) = u_x(0, y) = 0$.

28.14. Доказать, что фундаментальным решением оператора

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - 2 \frac{\partial}{\partial x} - 2 \frac{\partial}{\partial t} + 4$$

является функция $\mathcal{E}(x, t) = -\theta(t)\theta(-x)e^{2(x+t)}$.

28.15. С помощью функции Грина решить краевую задачу

$$y'' + \pi^2 y = \cos \pi x, \quad y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1).$$

28.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в шаровом слое $a \leq r \leq b$, если $u|_{r=a} = 0$, $u|_{r=b} = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

28.17. Найти $u(x, y, z)$ – плотность диффундирующего вещества в стационарном процессе при условии, что источник вещества отсутствует и коэффициент диффузии постоянен, для $y > 0$, $z > 0$, $-\infty < x < \infty$, $u(x, 0, z) = u(x, y, 0) = u_0 = \text{const}$.

28.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = xe^x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt.$$

28.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \pi \int_0^1 (1-x) \sin 2\pi t \varphi(t) dt = \frac{1}{2}(1-x).$$

28.20. Найти резольвенту для ядра

$$K(x, t) = x \left(1 - \frac{3}{2}t\right)$$

при $a = 0$, $b = 1$.

28.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \varphi(t) dt.$$

28.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\frac{x^3}{6} = \int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)dt.$$

Вариант № 29

29.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$2xu_x + (y - 2x)u_y = 4x^2.$$

29.2. Найти решение задачи Коши

$$xu_x + yu_y = u - \frac{xy}{2}, \quad u|_{x=1} = y^2 + 1.$$

29.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

- а) $4u_{xx} + 15u_{xy} + 14u_{yy} = 0$;
 б) $16u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} + 12u_x + 3u_y = 0$.

29.4. Неограниченный стержень с постоянным поперечным сечением получен непосредственным соединением полуограниченных однородных стержней с различными коэффициентами теплопроводности и температуропроводности. Поставить задачу об определении температуры в этом стержне. Поверхность стержня считать теплоизолированной.

29.5. Показать, что ограниченная гармоническая вне круга $|r| = b$ функция $u(x, y)$ представляется формулой

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi}{r^k},$$

$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{arctg} z, \quad z = x + iy.$$

29.6. Найти стационарное распределение температуры $u(x, y)$ в бесконечно длинном брусе квадратного сечения, три грани которого поддерживаются при нулевой температуре, а на четвертой поддерживается постоянная температура $u(x, a) = u_0$.

29.7. Струна длиной l помещена в среду, которая оказывает сопротивление, пропорциональное скорости движения. Найти закон поперечных колебаний струны с граничными условиями первого рода и произвольными начальными условиями.

29.8. Найти функцию $u(x, y, t)$, характеризующую колебания прямоугольной мембраны под действием импульса, сосредоточенного в произвольной точке этой мембраны.

29.9. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + \frac{2}{x}u_x, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

$$|u(0, t)| < \infty, \quad u(2, t) = u_0, \quad u(x, 0) = 0.$$

29.10. Решить задачу об остывании бесконечной цилиндрической трубы, на внешней и внутренней поверхностях которой происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры. В начальный момент труба была равномерно нагретой.

29.11. Решить смешанную задачу

$$u_t - u_{xx} - u = xt(2-t) + 2 \cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = t^2, \quad u_x(\pi, t) = t^2, \quad u(x, 0) = \cos 2x.$$

29.12. Решить задачу Коши:

а) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0, \quad u|_{y=0} = -\frac{x^2}{2}, \quad u_y|_{y=0} = -\sin x;$

б) $u_{tt} = 9\Delta u, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)^2;$

в) $u_t = 2\Delta u + t \cos x, \quad u|_{t=0} = \cos y \cos z.$

29.13. Пользуясь интегральным преобразованием Лапласа, определить температуру $u(x, y)$ в стержне при $t > 0$, если стержень полубесконечный и $u(\infty, t) = 0$, $u(0, t) = \delta(t)$. Начальная температура стержня равна нулю.

29.14. Доказать, что фундаментальным решением оператора

$$\widehat{L}_{\text{KG}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2$$

является функция

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2a} J_0\left(\frac{m}{a} \sqrt{x^2 - a^2 t^2}\right).$$

29.15. С помощью функции Грина решить краевую задачу

$$y'' - y = 2 \operatorname{sh} 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

29.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в шаровом слое $a \leq r \leq b$, если $u_r|_{r=a} = 0$, $u|_{r=b} = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

29.17. Потенциал простого слоя масс, распределенных по окружности $x^2 + y^2 = 1$, вне замкнутого круга $x^2 + y^2 \leq 1$ дается формулой

$$u(x, y) = \frac{x}{r^2} \left(1 + \frac{2y}{r^2}\right).$$

Найти плотность масс.

29.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 2^{x^2+2x} + \int_0^x 2^{x^2-t^2+1} \varphi(t) dt.$$

29.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 2^{x+t} \varphi(t) dt = x.$$

29.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = x \sin(2\pi t)$ при $a = 0$, $b = 1$.

29.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int (x \operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} x) \varphi(t) dt.$$

29.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\int_0^x J_0(x-t) \varphi(t) dt = \sin x.$$

Вариант № 30

30.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xyu_x + (4x - 2u)u_y = yu.$$

30.2. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$xu_x - yu_y = u^2(2x - 3y)$$

и проходящую через заданную кривую $x = 1$, $yu + 1 = 0$.

30.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

а) $3u_{xx} + 14u_{xy} + 8u_{yy} = 0$;

б) $4u_{xx} + 20u_{xy} + 25u_{yy} + 4u_x + 10u_y = 0$.

30.4. Поставить задачу об обтекании неподвижного бесконечно-го цилиндра, если на бесконечности скорость жидкости равна v_0 .

30.5. Найти условие, при соблюдении которого в круге $x^2 + y^2 = r^2 < b^2$ правильно поставлена задача Неймана

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad 0 \leq r < b, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=b} = g(x, y) \Big|_{r=b};$$

а) $g(x, y) = A$; б) $g(x, y) = 2x^2 + A$;

в) $g(x, y) = 2xy$; г) $g(x, y) = Ay^2 - B$.

30.6. Определить собственные колебания мембраны, имеющей форму кругового сектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, если его граница закреплена.

30.7. Найти колебания струны с закрепленными краями, помещенной в среду с сопротивлением, пропорциональным скорости движения. Начальные скорости равны нулю, а первоначальное отклонение задается выражением

$$u(x, 0) = \begin{cases} Ax, & 0 < x < l/2; \\ A(l-x), & l/2 < x < l. \end{cases}$$

30.8. Решить уравнение колебаний в области, представляющей собой клин, радиуса b , угол раствора которого равен $\pi/3$, если заданы однородные граничные условия второго рода, а также начальные скорость и отклонение.

30.9. Решить смешанную задачу

$$u_t = 9\left(u_{xx} + \frac{1}{x}u_x\right), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ |u(0, t)| < \infty, \quad (u_x + u)|_{x=1} = 0, \quad u(x, 0) = x^2.$$

30.10. Между двумя полыми цилиндрами бесконечной длины находится вязкая жидкость. В момент времени $t = 0$ внутренний цилиндр начинает вращаться с угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Определить скорость движения жидкости.

30.11. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = t^2, \quad u(\pi, t) = t^2, \quad u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

30.12. Решить задачу Коши

$$\text{а) } u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0, \\ u|_{y=\sin x} = x + \cos x, \quad u_y|_{y=\sin x} = \sin x; \\ \text{б) } u_{tt} = 4\Delta u + xe^t \cos(3y + 4z), \\ u|_{t=0} = xy \cos z, \quad u_t|_{t=0} = yze^x; \\ \text{в) } 8u_t = u_{xx} + u_{yy} + 1, \quad u|_{t=0} = e^{-(x-y)^2}.$$

30.13. С помощью преобразования Лапласа решить задачу

$$u_y = u_{xx} + u + e^x, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad u(0, y) = u_x(0, y) = 0.$$

30.14. Найти фундаментальное решение оператора

$$\widehat{L} = \frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 1.$$

30.15. С помощью функции Грина решить краевую задачу

$$xy'' + y = x^2, \quad y(1) = y(\pi/2) = 0.$$

30.16. Решить задачу на собственные значения оператора Лапласа в шаровом слое $a \leq r \leq b$, если $u|_{r=a} = 0$, $u_r|_{r=b} = 0$. Написать условие ортогональности собственных функций задачи. Найти ортонормированную систему собственных функций.

30.17. Для оператора Лапласа вычислить объемный потенциал шара $x^2 + y^2 + z^2 < b^2$ с плотностью $\rho = \exp(-\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

30.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt + e^x + 1.$$

30.19. Показать, что для уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t) dt$$

все повторные ядра и резольвента также зависят от разности $(x-t)$.

30.20. Доказать, что если ядра $L(x, t)$ и $M(x, t)$ ортогональны, то резольвента ядра $K(x, t) = L(x, t) + M(x, t)$ равна сумме резольвент ядер $L(x, t)$ и $M(x, t)$.

30.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda(3x - 2) \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2 + 3xt)\varphi(t) dt = 0.$$

30.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\int_0^x e^{2(x-t)} \varphi(t) dt = x^2 e^x.$$

Список литературы

1. Анго А. *Математика для электро и радиоинженеров*. – М.: Наука, 1964. – 772 с.
2. Араманович И.Г., Левин В.И. *Уравнения математической физики*. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
3. Арсенин В.Н. *Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции*. – М.: Наука, 1984. – 431 с.
4. Бейтман Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*. – М.: Наука, 1965. – 300 с.
5. Бейтман Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены*. – М.: Наука, 1966. – 296 с.
6. Бейтман Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Маттье*. – М.: Наука, 1967. – 300 с.
7. Белов В.В., Воробьев Е.М. *Сборник задач по дополнительным главам математической физики*. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.
8. Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф. *Сборник задач по уравнениям математической физики*. – М.: Наука, 1981. – 312 с.
9. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. *Задачи по математической физике*. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 350 с.
10. Будаг Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. *Сборник задач по математической физики*. – М.: Наука, 1972. – 688 с.
11. Ватсон Г. *Теория бесселевых функций*. Т. 1. – М.: ИЛ, 1947. – 800 с.
12. Виленкин Н.Я. *Специальные функции и теория представлений групп*. – М.: Наука, 1991. – 570 с.
13. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
14. Владимиров В.С. *Сборник задач по уравнениям математической физики*. – М.: Наука, 1981. – 270 с.
15. Воробьев Е.М., Дубнов В.Л., Маслов В.П. *Уравнения математической физики*. – М.: Из-во МИЭМ, 1973. – 136 с.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений*. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
17. Гюнтер Н.М. *Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных*. – Л.: ОНТИ-ГТТИ, 1934. – 360 с.
18. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах*. Ч. 2. – М.: Высшая школа, 1980. – 366 с.
19. Ефимов А.В. *Математический анализ (специальные разделы): Ч. I*. – М.: Высшая школа, 1980. – 280 с.
20. Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. *Математический анализ (специальные разделы): Ч. II*. – М.: Высшая школа, 1980. – 296 с.

21. Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержев В.Ф. *Специальный курс высшей математики*. – М.: Высшая школа, 1976. – 400 с.
22. Комеч А.И. *Практическое решение уравнений математической физики*. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 156 с.
23. Корнев Б.Г. *Введение в теорию бесселевых функций*. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
24. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. *Дифференциальные уравнения математической физики*. – М.: Физматгиз, 1962. – 712 с.
25. Краснов М.Л. *Интегральные уравнения*. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
26. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. *Интегральные уравнения*. – М.: Наука, 1976. – 216 с.
27. Кузнецов Д.С. *Специальные функции*. – М.: Высшая школа, 1962. – 248 с.
28. Курант Р. *Уравнения с частными производными*. – М.: Мир, 1964. – 832 с.
29. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики*. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
30. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория упругости*. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
31. Лебедев Н.Н. *Специальные функции и их приложения*. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 380 с.
32. Лизоркин П.И. *Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа*. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
33. *Линейные уравнения математической физики*. 3-е изд. / Под ред. С.Г. Михлина. – М.: Наука, 1964. – 368 с.
34. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. *Дифференциальные уравнения математической физики*. – М.: Из-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. – 368 с.
35. Масленникова В.Н. *Дифференциальные уравнения в частных производных*. – М.: Изд-во РУДН, 1997. – 446 с.
36. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных*. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
37. Михлин С.Г. *Курс математической физики*. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
38. Михлин С.Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям*. – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.
39. Мышкис А.Д. *Математика для втузов. Специальный курс*. – М.: Наука, 1971. – 632 с.
40. Мэтьюз Дж., Уокер Р. *Математические методы физики*. – М.: Атомиздат, 1972. – 400 с.
41. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. *Специальные функции математической физики*. – М.: Наука, 1984. – 344 с.
42. Ольсон Г. *Динамические аналогии*. – М.: ИЛ, 1947. – 196 с.
43. Очан Ю.С. *Сборник задач по методам математической физики*. – М.: Наука, 1981. – 192 с.

44. Петровский И.Г. *Лекции об уравнениях в частных производных*. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
45. Петровский И.Г. *Лекции по теории интегральных уравнений*. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 136 с.
46. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции*. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
47. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. *Интегралы и ряды. Специальные функции*. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
48. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. *Интегралы и ряды. Дополнительные главы*. – М.: Наука, 1986. – 800 с.
49. Романовский П.И. *Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа*. – М.: Наука, 1964. – 304 с.
50. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи*. – М.: Высшая школа, 1989. – 383 с.
51. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. *Лекции по математической физике*. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 352 с.
52. Сёге Н.Я. *Ортогональные классические многочлены*. – М.: Изд-во физ-мат. лит-ры, 1962. – 502 с.
53. Смирнов В.М. *Курс высшей математики*. – Т. 4. – М.: Наука, 1953. – 812 с.
54. Смирнов М.М. *Задачи по уравнениям математической физики*. – М.: Наука, 1975. – 128 с.
55. Соболев С.Л. *Уравнения математической физики*. – М.: Наука, 1966. – 444 с.
56. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. – М.: Наука, 1988. – 333 с.
57. *Специальные функции* / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
58. Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены*. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
59. Терпугова Н.С. *Методы математической физики*. Ч. 1. – Томск: Изд-во ТГУ, 1984. – 144 с.; Ч. 2. – Томск: Изд-во ТГУ, 1985. – 172 с.
60. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. *Дифференциальные уравнения*. – М.: Наука, 1985. – 232 с.
61. Тихонов А.Н., Иванов М.М., Лаврентьев М.М. *Некорректно поставленные задачи // Дифференциальные уравнения с частными производными*. – М.: Наука, 1970. – С. 224-234.
62. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
63. Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
64. Чудесенко В.Ф. *Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты)*. – М.: Высшая школа, 1983. – 112 с.
65. Шелковников Ф.А., Тайкашвили К.Г. *Сборник упражнений по операционному исчислению*. – М.: Высшая школа, 1968. – 184 с.

66. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
67. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. *Специальные функции*. – М.: Наука, 1977. – 342 с.