ВАРИАЦИЯ И ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИОНАЛА

А. Н. Мягкий

Интегральные уравнения и вариационное исчисление

Лекция

Пусть задан функционал

$$V = V[y(x)], \quad y(x) \in M \subset E.$$

Зафиксируем функцию $y_0(x) \in M$. Тогда любую другую функцию $y(x) \in M$ можно представить в виде

$$y(x) = y_0(x) + \delta y(x), \quad y(x), y_0(x) \in M.$$

Определение

Приращением или вариацией $\delta y(x)$ *аргумента* $y_0(x)$ *функционала* $V[y(x)]$ *называется разность между двумя функциями:*

$$\delta y(x) = y(x) - y_0(x).$$

Для данного функционала $V[y]$ с областью определения M и данной функции $y(x) \in M$ будем называть вариацию $\delta y(x)$ этой функции *допустимой вариацией*, если $y(x) + \delta y(x) \in M$.

Для дифференцируемых функций следует различать производную вариации $\delta y' = (\delta y)'$ и вариацию производной $\delta(y')$. Первое понятие означает производную от допустимой вариации $\delta y(x)$, а второе понятие – любую допустимую вариацию функции $y'(x)$.

Замечание

При исследовании экстремума функционала используют так называемую «слабую» вариацию функции $y(x)$:

$$\begin{cases} y(x) \to & y(x) + \delta y(x), \\ y'(x) \to & y'(x) + (\delta y(x))', \end{cases}$$

где $\delta y(x)$ и $(\delta y)'$ зависят друг от друга. Очевидно, что такая вариация имеет место лишь в том случае, когда рассматрива- ется слабая окрестность функции $y(x)$. Помимо «слабой» определяют также «сильную» вариацию функции $y(x)$

$$\begin{cases} y(x) \to & y(x) + \delta y(x), \\ y'(x) \to & y'(x) + \delta(y'(x)). \end{cases}$$

Здесь приращения $\delta y(x)$ и $\delta(y'(x))$ независимы.

Определение

Приращением функционала $V[y(x)]$ *в точке* $y_0(x) \in M$*, отвечающим вариации аргумента* $\delta y(x)$*, называется величина*

$$\Delta V[y_0(x)] = V[y_0(x) + \delta y(x)] - V[y_0(x)].$$

Выражение ΔV при фиксированной функции $y_0(x)$ представляет собой функционал от δy (вообще, говоря, нелинейный).

Определение

Функционал $V[y]$ *называется дифференцируемым (по Фреше) в точке* $y_0 \in E$*, если его приращение* $\Delta V = V[y_0 + \delta y] - V[y]$ *представимо в виде*

$$\Delta V = L_1[y_0, \delta y] + \beta[y_0, \delta y], \qquad (1)$$

где $L_1[y_0, \delta y]$ *– линейный относительно* δy *непрерывный функционал, а* $\beta[y_0, \delta y]$ *– функционал, являющийся бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с* $||\delta y||$ *при* $||\delta y|| \to 0$*, т.е.*

$$|\beta[y_0, \delta y]| = o(||\delta y||), \quad ||\delta y|| \to 0. \qquad (2)$$

Замечание

1. *Соотношения (1) и (2) можно записать еще и так:*

$$\Delta V = L_1[y_0, \delta y] + \gamma[y_0, \delta y] \cdot ||\delta y||,$$

где $\gamma \to 0$ *при* $||\delta y|| \to 0$.

2. *На языке* $\varepsilon - \delta$ *определение дифференцируемости (по Фреше) функционала* $V[y]$ *в точке* y_0 *формулируется так: существует линейный непрерывный функционал* $L_1[y_0, \delta y]$*, что для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$*, при котором для любого* $||\delta y|| < \delta$ *выполняется неравенство*

$$|\Delta V[y_0, \delta y] - L_1[y_0, \delta y]| \leq \varepsilon ||\delta y||.$$

Упражнение

Показать, что дифференцируемый (по Фреше) в точке $y_0(x)$ *функционал непрерывен в этой точке.*

Определение

Дифференциалом или первой вариацией функционала $V[y]$ в точке y_0 называется главная часть приращения функционала, являющаяся линейным относительно приращения аргумента непрерывным функционалом.

Записывают

$$\delta V[y_0, \delta y] = L_1[y_0, \delta y].$$

Пример 1

Определим вариацию функционала

$$V[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx, \tag{3}$$

заданного на функциональном пространстве $C^1[a, b]$. Пусть функция $F(x, y, y')$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция трех переменных.

Решение. Запишем приращение функционала на некоторой функции $y(x) \in C^1[a,b]$, соответствующее приращению $\delta y(x)$:

$$\Delta V = V[y+\delta y] - V[y] = \int\limits_a^b F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx - \int\limits_a^b F(x,y,y')dx.$$

Применим к подынтегральной функции $F(x, y+\delta y, y'+\delta y')$ формулу Тейлора:

$$F(x, y+\delta y, y'+\delta y') = F(x,y,y') + [F_y(x,y,y')\delta y + F_{y'}(x,y,y')\delta y'] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[F_{yy}(x,\bar{y},\bar{y}')(\delta y)^2 + 2F_{yy'}(x,\bar{y},\bar{y}')\delta y\delta y' + F_{y'y'}(x,\bar{y},\bar{y}')(\delta y')^2\right],$$

где $\bar{y} = y + \theta_1 \delta y$, $\bar{y}' = y' + \theta_2 \delta y'$, $|\theta_1| < 1$, $|\theta_2| < 1$. Тогда

$$\Delta V = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right] dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left[\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial y^2}(\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial y'^2}(\delta y')^2\right] dx.$$

Здесь черта над вторыми производными означает, что они берутся для аргументов x, $\bar{y}$, $\bar{y}'$.

Первое слагаемое линейно относительно δy, $\delta y'$. Поскольку все вторые частные производные функции $F(x, y, y')$ по y и y' ограничены по абсолютной величине некоторым числом M (это следует из непрерывности функции F и ее производных), то для второго слагаемого справедлива оценка

$$\left| \int_a^b \Big[\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial y^2}(\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial y'^2}(\delta y')^2\Big] dx \right| \leq$$

$$\leq M\int_a^b (|\delta y|+2|\delta y||\delta y'|+|\delta y'|)^2 dx \leq 4M(b-a)||\delta y||^2_{C^1} = o(||\delta y||_{C^1}),$$

где $||\delta y||_{C^1} = \max\limits_{x\in[a,b]}\{|\delta y| + |\delta y'|\}$. Таким образом, второе слагаемое имеет второй порядок малости относительно $||\delta y||_{C^1}$. Порядок остальных слагаемых в этом разложении будет выше второго. Следовательно, приращение функционала можно представить в виде суммы функционала, линейного относительно δy (первое слагаемое в разложении), и бесконечно малой высшего порядка относительно δy при $||\delta y|| \to 0$ (второе и все последующие слагаемые в разложении).

Таким образом, функционал является дифференцируемым (по Фреше) в функциональном пространстве $C^1[a, b]$ и его вариация записывается в виде

$$\delta V[y, \delta y] = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx.$$

Можно дать и другое, *почти* эквивалентное, определение вариации функционала.
Зафиксируем аргумент $y_0(x) \in E$ функционала $V[y(x)]$ и некоторую вариацию $\delta y \in E$ аргумента $y(x)$. Рассмотрим семейство кривых

$$y(x, \alpha) = y_0(x) + \alpha \delta y(x),$$

где α – произвольный параметр. На кривых $y(x, \alpha)$ функционал $V[y]$ превращается в функцию параметра α, т.е.

$$\Phi(\alpha) = V[y_0 + \alpha \delta y].$$

Утверждение 1

Если функционал $V[y]$ дифференцируем (по Фреше) в точке y_0, то для любого фиксированного δy функция $\Phi(\alpha) = V[y_0 + \alpha\delta y]$ дифференцируема по параметру α и

$$\frac{d}{d\alpha}\Phi(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}V[y_0 + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0} = \delta V[y_0, \delta y]. \tag{4}$$

Доказательство. Так как по условию утверждения функционал $V[y]$ дифференцируем (по Фреше) в точке y_0, то

$$\frac{d}{d\alpha}V[y_0 + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{V[y_0 + \alpha\delta y] - V[y_0]}{\alpha} =$$
$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{L_1[y_0, \alpha\delta y] + \beta[y_0, \alpha\delta y]}{\alpha}. \tag{5}$$

Заметим, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y_0,\alpha\delta y]}{\alpha}=\mathrm{sgn}\alpha\cdot||\delta y||\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y_0,\alpha\delta y]}{||\alpha\delta y||}=0. \qquad (6)$$

Тогда из формулы (5) с учетом (6), а также линейности функционала L_1 относительно δy следует

$$\frac{d}{d\alpha}V[y_0+\alpha\delta y]\bigg|_{\alpha=0}=\lim_{\alpha\to 0}\left[L_1[y_0,\delta y]+\frac{\beta[y_0,\alpha\delta y]}{\alpha}\right]=$$
$$=L_1[y_0,\delta y]=\delta V[y_0,\delta y].$$

Пример 2

Пусть функционал $V[y]$ (3) *дифференцируем (по Фреше) в точке* $y(x) \in C^1[a,b]$. *Тогда, в соответствии с утверждением 1, вычисление первой вариации сводится к дифференцированию интеграла по параметру*

$$\delta V[y,\delta y] = \frac{d}{d\alpha}\int\limits_a^b F(x, y+\alpha\delta y, y'+\alpha\delta y')dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right] dx.$$

Заметим, что для законности такого дифференцирования достаточно непрерывности подынтегральной функции и ее производной по параметру, что является более слабым условием, чем требование дважды непрерывной дифференцируемости функции $F(x,y,y')$ *по всем аргументам (см. пример 1).*

Пример 3

Записать вариацию функционала

$$V[y(x)] = \int_0^{\pi} [(y')^2 + y + x]dx + 3y(1), \quad y(x) \in C^1[0,\pi].$$

Решение. *Первый способ*

Запишем приращение функционала на некоторой функции $y(x) \in C^1[0,\pi]$, соответствующее некоторому приращению $\delta y(x) \in C^1[0,\pi]$ аргумента:

$$\Delta V = V[y+\delta y] - V[y] =$$

$$= \int_0^{\pi} [(y'+\delta y')^2 + y + \delta y + x]dx - \int_0^{\pi} [(y')^2 + y + x]dx + 3[y(1) + \delta y(1)] - 3y(1) =$$

$$= \int_0^{\pi} [2y'\delta y' + \delta y]dx + 3\delta y(1) + \int_0^{\pi} (\delta y')^2 dx.$$

Заметим, что первые два слагаемых линейны по δy. Второе слагаемое

$$\int\limits_0^\pi (\delta y')^2 dx \le \int\limits_0^\pi (|\delta y| + |\delta y'|)^2 dx \le \pi ||\delta y||_{C^1}^2 = o(||\delta y||_{C^1}),$$

есть бесконечно малая высшего порядка относительно δy при $||\delta y||_{C^1} \to 0$. В итоге дифференцируемость (по Фреше) функционала доказана и его вариация записывается в виде

$$\delta V[y] = \int\limits_0^\pi [2y'\delta y' + \delta y] dx + 3\delta y(1).$$

Второй способ
В силу того, что функционал дифференцируем (по Фреше) его вариация может быть вычислена по формуле (4):

$$\delta V[y] = \frac{d}{d\alpha}\left[\int\limits_0^\pi [(y' + \alpha\delta y')^2 + y + \alpha\delta y + x]dx + 3(y(1) + \alpha\delta y(1))\right]_{\alpha=0} =$$

$$= \left[\int\limits_0^\pi [2(y' + \alpha\delta y')\delta y' + \delta y]dx + 3\delta y(1)\right]_{\alpha=0} = \int\limits_0^\pi [2y'\delta y' + \delta y]dx + 3\delta y(1).$$

Определение

Говорят, что функционал $V[y(x)]$ достигает на кривой (в точке) $y_0(x)$ локального минимума [максимума], если для всех $y(x)$ из некоторой ε-окрестности кривой $y_0(x)$ выполняется неравенство

$$V[y_0(x)] \leq V[y(x)] \quad [V[y_0(x)] \geq V[y(x)]], \quad \forall y(x) \in U(y_0, \varepsilon). \tag{7}$$

Локальные минимумы и максимумы функционала $V[y(x)]$ называются его локальными экстремумами.

Различают сильный и слабый локальный минимум (максимум).

Определение

Локальный экстремум функционала $V[y(x)]$ в пространстве $C[a, b]$ называется сильным, а в пространстве $C^1[a, b]$ – слабым локальным экстремумом.

Определение

Экстремум функционала $V[y]$ по всей совокупности функций, на которых он определен, называется абсолютным экстремумом.

Замечание

1. *Поскольку всякая функция, принадлежащая слабой ε-окрестности функции $y_0(x)$, заведомо входит в ее же сильную ε-окрестность, то всякий сильный экстремум одновременно является и слабым. Обратное, вообще говоря, неверно.*
2. *Всякий абсолютный экстремум функционала $V[y(x)]$ является в тоже время локальным, но не всякий локальный экстремум будет абсолютным.*

Пример 4

Рассмотрим функционал

$$V[y] = \int\limits_0^\pi y^2[1-(y')^2]dx, \quad y(0)=0, \quad y(\pi)=0. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что функционал достигает локального экстремума (минимума) на прямой $y=0$. Действительно, для $y=0$ функционал $V[0]=0$. Покажем, что функция $y=0$ доставляет слабый минимум функционалу (8). Для этого рассмотрим кривые из ε-окрестности первого порядка прямой $y=0$, $x \in [0,\pi]$, т.е. такие что

$$|y(x)| + |y'(x)| < \varepsilon.$$

Если $0<\varepsilon<1$, то $|y'|<1$. Подынтегральная функция при $y \neq 0$ положительна, и, следовательно, функционал обращается в нуль лишь при $y=0$. Отсюда можно заключить, что функционал достигает экстремума в пространстве функций $y(x) \in C^1[0,\pi]$, удовлетворяющих граничным условиям $y(0)=y(\pi)=0$.

Сильный минимум не достигается при $y = 0$. Для доказательства этого факта рассмотрим последовательность функций

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

сходящуюся при $n \to \infty$ к функции $y = 0$. Тогда

$$V[y_n(x)] = \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 nx(1 - n\cos^2 nx)dx = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8}$$

и при достаточно большом n на кривых $y_n(x)$ функционал $V[y] < 0$. С другой стороны, все эти кривые при больших n лежат в сколь угодно малой окрестности нулевого порядка кривой $y = 0$. Следовательно, сильный минимум не достигается при $y = 0$.

Теорема (необходимое условие экстремума)

Пусть $y_0 \in E$ *– точка локального экстремума функционала* $V[y]$ *и для всякого* $\delta y \in E$ *существует* $\delta V[y_0, \delta y]$. *Тогда*

$$\delta V[y_0, \delta y] = 0, \quad \forall \delta y \in E.$$

Доказательство.

Пусть y_0 – точка локального экстремума функционала $V[y]$. Возьмем произвольный, но фиксированный элемент $\delta y \in E$. Рассмотрим функцию $\Phi(\alpha) = V[y_0 + \alpha \delta y]$. Поскольку y_0 – локальный экстремум функционала, то $\alpha = 0$ – локальный экстремум функции $\Phi(\alpha)$. По теореме Ферма для функции одной переменной, $\Phi'(0) = 0$. По определению вариации функционала

$$\delta V[y_0, \delta y] = \frac{d}{d\alpha} \Phi(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = 0.$$

В силу произвольности δy имеем

$$\delta V[y_0, \delta y] = 0, \quad \forall \delta y \in E.$$

$\square$

Замечание

Необходимое условие экстремума справедливо как для слабого, так и для сильного экстремума.

Пример 5

Рассмотрим функционал

$$V[y] = \int\limits_0^1 y(x)dx \quad \textit{при} \quad y \geq 0.$$

Видно, что

$$V[y] \geq V[y_0], \quad y_0 = 0,$$

но локального минимума при $y_0 = 0$ *нет, т.к. в окрестности* $y_0 = 0$ *существуют не только положительные, но и отрицательные функции. Кроме того, на* $y_0 = 0$ *первая вариация имеет вид*

$$\delta V = \int\limits_0^1 \delta y(x)dx$$

и, как нетрудно видеть, не равна нулю при произвольных $\delta y(x)$.

Замечание

Если функционал имеет на кривой y_0 значение, например, меньшее, чем на некотором подмножестве кривых сравнения, то из этого не следует, что y_0 будет локальным минимумом и будет выполняться условие $\delta V = 0$.